

جلد اول: درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع

جامع ریاضیات تجربی

+ موج آزمون ویراست دوم

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی



انتشرالگو

پیشگفتار

به نام خدا

هدفمان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب ریاضی ۳ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ را مرور کنید. این کتاب پانزده فصل دارد. به جز فصل پانزدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل پانزدهم ویژه «آزمون‌های جامع» است.

مباحث کتاب ریاضی ۳ را در هفت فصل نخست گنجانده‌ایم. هر یک از این‌ها، در صورت لزوم، با درس‌هایی از کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ که پیش‌زمینه درس‌های متناظرشان از کتاب ریاضی ۳ هستند، شروع می‌شود. هفت فصل بعدی مربوط به کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «دست‌گرمی» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. هر آزمون ده پرسش دارد. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همه مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هر چه جلوتر بروید، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم، که شامل آزمون‌های تألیفی و برگزیدهٔ کنکورهای سراسری است. یک فایل PDF شامل آزمون‌های تألیفی دیگر را هم می‌توانید با اسکن QR Code انتهای پیشگفتار یا از سایت انتشارات الگو به آدرس www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

برای هر مطلب که در درس‌نامه آمده است یک شماره (گام) اختصاص داده‌ایم که بتوانیم خواننده را به آن ارجاع دهیم. کل مطالب این کتاب را در ۳۷۲ گام تنظیم کرده‌ایم. در کنار هر آزمون، یک جدول راهنمای ارجاع قرار داده‌ایم که در آن مشخص کرده‌ایم برای حل هر سؤال چه مطالبی مورد نیاز است. شمارهٔ این مطالب را در کنار شمارهٔ سؤال در ستون گام آورده‌ایم. توصیه می‌کنیم اگر نتوانستید سؤالی را حل کنید قبل از اینکه به پاسخ‌نامهٔ تشریحی مراجعه کنید، گام‌های اشاره شده در درس‌نامه را پیدا کنید و مطالعه نمایید. پاسخ پرسش‌های دست‌گرمی و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخهٔ چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را با اسکن QR Code پشت جلد کتاب یا از سایت انتشارات الگو دریافت کنید. یادآوری می‌کنیم که اگر این کتاب را دارید، لازم نیست که کتاب موج آزمون ریاضی رشتهٔ تجربی (از انتشارات الگو) را تهیه کنید، زیرا این کتاب شامل آزمون‌های کتاب موج آزمون نیز است.

وظیفهٔ خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها هاله ایمانی، فهیمه گودرزی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها فاطمه احدی و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان



می‌توانید فایل PDF آزمون‌های تألیفی جامع فصل‌ها را به صورت رایگان با اسکن QR Code مقابل دریافت کنید.

فصل اول: تابع

درس اول: مفاهیم اولیه (گام‌های ۱ تا ۶)	۱
آزمون‌های ۱ و ۲	۶
درس دوم: توابع معروف (گام‌های ۷ تا ۱۲)	۸
آزمون‌های ۳ و ۴	۱۳
درس سوم: سهمی و تابع درجه دوم (گام‌های ۱۳ تا ۲۰)	۱۵
آزمون‌های ۵ تا ۷	۲۳
درس چهارم: دامنه و برد تابع و تساوی توابع (گام‌های ۲۱ تا ۲۳)	۲۶
آزمون‌های ۸ تا ۱۰	۳۲
درس پنجم: مدل‌سازی با توابع (گام ۲۴)	۳۵
آزمون ۱۱	۳۷
درس ششم: جبر توابع (گام ۲۵)	۳۸
آزمون‌های ۱۲ تا ۱۴	۴۱
درس هفتم: ترکیب توابع (گام‌های ۲۶ تا ۲۸)	۴۴
آزمون‌های ۱۵ تا ۱۸	۴۹
درس هشتم: تبدیل نمودار توابع (گام‌های ۲۹ تا ۳۸)	۵۳
آزمون‌های ۱۹ تا ۲۲	۶۸
درس نهم: توابع یک‌به‌یک (گام‌های ۳۹ تا ۴۵)	۷۶
آزمون‌های ۲۳ و ۲۴	۸۰
درس دهم: توابع یکنوا (گام‌های ۴۶ تا ۵۸)	۸۲
آزمون‌های ۲۵ تا ۲۷	۹۰
درس یازدهم: تابع وارون (گام‌های ۵۹ تا ۶۸)	۹۳
آزمون‌های ۲۸ تا ۳۲	۱۰۰
آزمون‌های ۳۳ و ۳۴: آزمون‌های فصل اول	۱۰۵
آزمون‌های ۳۵ و ۳۶: آزمون‌های فصل اول (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ..	۱۰۷

فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (گام‌های ۶۹ تا ۷۱)	۱۰۹
آزمون‌های ۳۷ و ۳۸	۱۱۳
درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی (گام‌های ۷۲ تا ۸۰)	۱۱۵
آزمون‌های ۳۹ و ۴۰	۱۲۲
درس سوم: اتحادهای مثلثاتی (گام‌های ۸۱ تا ۸۳)	۱۲۴
آزمون‌های ۴۱ تا ۴۴	۱۲۹
درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (گام‌های ۸۴ تا ۸۹)	۱۳۳
آزمون‌های ۴۵ و ۴۶	۱۳۸
درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (گام‌های ۹۰ تا ۹۲)	۱۴۰
آزمون‌های ۴۷ تا ۴۹	۱۴۴
درس ششم: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (گام‌های ۹۳ تا ۹۹)	۱۴۷
آزمون‌های ۵۰ تا ۵۳	۱۵۲
درس هفتم: توابع مثلثاتی (گام‌های ۱۰۰ تا ۱۰۵)	۱۵۶
آزمون‌های ۵۴ تا ۵۶	۱۶۵
درس هشتم: معادلات مثلثاتی (گام‌های ۱۰۶ تا ۱۱۶)	۱۶۸
آزمون‌های ۵۷ تا ۶۱	۱۷۶
آزمون‌های ۶۲ و ۶۳: آزمون‌های فصل دوم	۱۸۱
آزمون‌های ۶۴ و ۶۵: آزمون‌های فصل دوم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ..	۱۸۳

فصل سوم: حد و پیوستگی

درس اول: مفهوم حد و قضایای حد (گام‌های ۱۱۷ تا ۱۲۵)	۱۸۵
آزمون‌های ۶۶ تا ۶۹	۱۹۳
درس دوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ (گام‌های ۱۲۶ تا ۱۲۹)	۱۹۷
آزمون‌های ۷۰ و ۷۱	۲۰۲

◆ فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (گام‌های ۱۸۴ و ۱۸۵).....	۲۸۴
آزمون‌های ۱۰۷ و ۱۰۸.....	۲۸۷
درس دوم: نقاط بحرانی (گام ۱۸۶).....	۲۸۹
آزمون‌های ۱۰۹ و ۱۱۰.....	۲۹۱
درس سوم: اکسترم‌های نسبی (گام‌های ۱۸۷ تا ۱۹۱).....	۲۹۳
آزمون‌های ۱۱۱ تا ۱۱۳.....	۲۹۸
درس چهارم: اکسترم‌های مطلق (گام‌های ۱۹۲ تا ۱۹۴).....	۳۰۱
آزمون‌های ۱۱۴ و ۱۱۵.....	۳۰۵
درس پنجم: بهینه‌سازی (گام ۱۹۵).....	۳۰۷
آزمون‌های ۱۱۶ تا ۱۱۸.....	۳۱۱
آزمون‌های ۱۱۹ و ۱۲۰: آزمون‌های فصل پنجم.....	۳۱۴
آزمون‌های ۱۲۱ و ۱۲۲: آزمون‌های فصل پنجم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۳۱۶

◆ فصل ششم: هندسهٔ تحلیلی

درس اول: خط راست (گام‌های ۱۹۶ تا ۲۰۳).....	۳۱۸
آزمون‌های ۱۲۳ تا ۱۲۵.....	۳۲۵
درس دوم: تفکر تجسمی (گام‌های ۲۰۴ و ۲۰۵).....	۳۲۸
آزمون ۱۲۶.....	۳۳۱
درس سوم: بیضی (گام‌های ۲۰۶ تا ۲۱۰).....	۳۳۲
آزمون‌های ۱۲۷ تا ۱۲۹.....	۳۳۶
درس چهارم: دایره (گام‌های ۲۱۱ تا ۲۱۸).....	۳۳۹
آزمون‌های ۱۳۰ تا ۱۳۴.....	۳۴۷
آزمون ۱۳۵: آزمون فصل ششم.....	۳۵۲
آزمون‌های ۱۳۶ و ۱۳۷: آزمون‌های فصل ششم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۳۵۳

درس سوم: پیوستگی (گام‌های ۱۳۰ تا ۱۳۷).....	۲۰۴
آزمون‌های ۷۲ و ۷۳.....	۲۰۹
درس چهارم: حد بی‌نهایت (گام‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰).....	۲۱۱
آزمون‌های ۷۴ تا ۷۶.....	۲۱۵
درس پنجم: حد در بی‌نهایت (گام‌های ۱۴۱ تا ۱۴۵).....	۲۱۸
آزمون‌های ۷۷ تا ۷۹.....	۲۲۴
آزمون‌های ۸۰ و ۸۱: آزمون‌های فصل سوم.....	۲۲۷
آزمون‌های ۸۲ و ۸۳: آزمون‌های فصل سوم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۲۲۹

◆ فصل چهارم: مشتق

درس اول: مفهوم مشتق (گام‌های ۱۴۶ تا ۱۶۰).....	۲۳۱
آزمون‌های ۸۴ تا ۸۶.....	۲۳۹
درس دوم: قواعد مشتق‌گیری (گام‌های ۱۶۱ تا ۱۶۵).....	۲۴۲
آزمون‌های ۸۷ تا ۹۰.....	۲۴۷
درس سوم: مشتق تابع مرکب (گام‌های ۱۶۶ تا ۱۶۸).....	۲۵۱
آزمون‌های ۹۱ تا ۹۳.....	۲۵۴
درس چهارم: مشتق‌پذیری (گام‌های ۱۶۹ تا ۱۷۵).....	۲۵۷
آزمون‌های ۹۴ و ۹۵.....	۲۶۲
درس پنجم: خط مماس بر نمودار تابع (گام‌های ۱۷۶ تا ۱۷۹).....	۲۶۴
آزمون‌های ۹۶ و ۹۷.....	۲۶۷
درس ششم: آهنگ تغییر (گام‌های ۱۸۰ و ۱۸۱).....	۲۶۹
آزمون ۹۸.....	۲۷۱
درس هفتم: مشتق دوم (گام ۱۸۲).....	۲۷۲
آزمون ۹۹.....	۲۷۴
درس هشتم: قاعدهٔ هوییتال (گام ۱۸۳).....	۲۷۵
آزمون ۱۰۰.....	۲۷۷
آزمون‌های ۱۰۱ و ۱۰۲: آزمون‌های فصل چهارم.....	۲۷۸
آزمون‌های ۱۰۳ تا ۱۰۶: آزمون‌های فصل چهارم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۲۸۰

◆ فصل هفتم: آمار و احتمال

درس اول: اصل جمع و اصل ضرب (گام‌های ۲۱۹ تا ۲۲۳).....	۳۵۵
آزمون‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰.....	۳۵۹
درس دوم: جایگشت (گام‌های ۲۲۴ تا ۲۲۶).....	۳۶۲
آزمون‌های ۱۴۱ و ۱۴۲.....	۳۶۵
درس سوم: ترکیب (گام‌های ۲۲۷ تا ۲۳۰).....	۳۶۷
آزمون‌های ۱۴۳ تا ۱۴۵.....	۳۷۲
درس چهارم: احتمال مقدماتی (گام‌های ۲۳۱ و ۲۳۲).....	۳۷۵
آزمون‌های ۱۴۶ تا ۱۵۰.....	۳۸۱
درس پنجم: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل (گام‌های ۲۳۳ تا ۲۳۶).....	۳۸۶
آزمون‌های ۱۵۱ تا ۱۵۳.....	۳۹۱
درس ششم: قانون احتمال کل (گام‌های ۲۳۷ و ۲۳۸).....	۳۹۴
آزمون‌های ۱۵۴ تا ۱۵۶.....	۳۹۸
درس هفتم: آمار (گام‌های ۲۳۹ تا ۲۴۳).....	۴۰۱
آزمون‌های ۱۵۷ و ۱۵۸.....	۴۰۴
آزمون‌های ۱۵۹ و ۱۶۰: آزمون‌های فصل هفتم.....	۴۰۶
آزمون‌های ۱۶۱ و ۱۶۲: آزمون‌های فصل هفتم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۴۰۸

◆ فصل هشتم: بازه و مجموعه

درس اول: مجموعه‌های اعداد (گام‌های ۲۴۴ و ۲۴۵).....	۴۱۰
آزمون‌های ۱۶۳ و ۱۶۴.....	۴۱۳
درس دوم: مجموعه‌ها (گام‌های ۲۴۶ تا ۲۵۴).....	۴۱۵
آزمون‌های ۱۶۵ و ۱۶۶.....	۴۱۹
آزمون ۱۶۸: آزمون فصل هشتم.....	۴۲۱

◆ فصل نهم: الگو و دنباله

درس اول: الگو و دنباله (گام‌های ۲۵۵ تا ۲۵۷).....	۴۲۲
آزمون‌های ۱۶۸ و ۱۶۹.....	۴۲۶
درس دوم: دنبالهٔ حسابی (گام‌های ۲۵۸ تا ۲۶۶).....	۴۲۸
آزمون‌های ۱۷۰ و ۱۷۱.....	۴۳۱
درس سوم: دنبالهٔ هندسی (گام‌های ۲۶۷ تا ۲۷۴).....	۴۳۳

آزمون‌های ۱۷۲ و ۱۷۳.....	۴۳۷
آزمون ۱۷۴: آزمون فصل نهم.....	۴۳۹
آزمون ۱۷۵: آزمون فصل نهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۴۴۰

◆ فصل دهم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

درس اول: توان و ریشه (گام‌های ۲۷۵ تا ۲۸۰).....	۴۴۱
آزمون‌های ۱۷۶ و ۱۷۷.....	۴۴۴
درس دوم: اتحاد (گام‌های ۲۸۱ تا ۲۸۸).....	۴۴۶
آزمون‌های ۱۷۸ تا ۱۸۱.....	۴۵۱
درس سوم: تجزیه (گام‌های ۲۸۹ و ۲۹۰).....	۴۵۵
آزمون‌های ۱۸۲ و ۱۸۳.....	۴۵۸
درس چهارم: گویا کردن مخرج‌های گنگ (گام ۲۹۱).....	۴۶۰
آزمون ۱۸۴.....	۴۶۲
درس پنجم: بخش‌پذیری و تقسیم (گام‌های ۲۹۲ تا ۲۹۴).....	۴۶۳
آزمون‌های ۱۸۵ و ۱۸۶.....	۴۶۵
آزمون‌های ۱۸۷ و ۱۸۸: آزمون فصل دهم.....	۴۶۷

◆ فصل یازدهم: معادله، تعیین علامت و نامعادله

درس اول: حل معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۲۹۵ تا ۳۰۱).....	۴۶۹
آزمون‌های ۱۸۹ و ۱۹۰.....	۴۷۳
درس دوم: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۳۰۲ تا ۳۰۵).....	۴۷۵
آزمون‌های ۱۹۱ و ۱۹۲.....	۴۷۹
درس سوم: رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۳۰۶ و ۳۰۷).....	۴۸۱
آزمون ۱۹۳.....	۴۸۳
درس چهارم: معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم خاص (گام‌های ۳۰۸ تا ۳۱۱).....	۴۸۴
آزمون ۱۹۴.....	۴۸۸
درس پنجم: معادله‌های گویا (گام‌های ۳۱۲ تا ۳۱۶).....	۴۸۹
آزمون‌های ۱۹۵ و ۱۹۶.....	۴۹۳
درس ششم: تعیین علامت و نامعادله (گام‌های ۳۱۷ تا ۳۲۴).....	۴۹۵
آزمون‌های ۱۹۷ و ۱۹۸.....	۵۰۲

◆ فصل چهاردهم: استدلال و هندسه

درس اول: استدلال، عمودمنصف و نیمساز (گام‌های ۳۵۶ تا ۳۵۹).....	۵۷۵
آزمون ۲۳۱.....	۵۷۸
درس دوم: نسبت و تناسب (گام ۳۶۰).....	۵۷۹
آزمون ۲۳۲.....	۵۸۰
درس سوم: قضیه تالس (گام‌های ۳۶۱ تا ۳۶۶).....	۵۸۱
آزمون‌های ۲۳۳ تا ۲۳۵.....	۵۸۷
درس چهارم: تشابه (گام‌های ۳۶۷ تا ۳۷۰).....	۵۹۱
آزمون‌های ۲۳۶ تا ۲۳۹.....	۵۹۶
درس پنجم: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه (گام‌های ۳۷۱ و ۳۷۲)...	۶۰۴
آزمون‌های ۲۴۰ و ۲۴۱.....	۶۰۷
آزمون ۲۴۲: آزمون فصل چهاردهم.....	۶۱۱
آزمون ۲۴۳: آزمون فصل چهاردهم (برگزیده کنکورهای سراسری).....	۶۱۲

◆ فصل پانزدهم: آزمون‌های جامع

آزمون‌های ۲۴۴ تا ۲۶۰: آزمون‌های جامع.....	۶۱۳
---	-----

◆ فصل شانزدهم: پاسخنامه کلیدی

دست‌گرمی.....	۶۶۳
آزمون‌ها.....	۶۶۴

◆ فصل هفدهم: کنکور سراسری ۱۴۰۱

آزمون‌های ۲۶۱ و ۲۶۲: کنکور رشته تجربی سال ۱۴۰۱.....	۶۷۳
---	-----

درس هفتم: معادله‌های گنگ (گام‌های ۳۲۵ تا ۳۲۸).....	۵۰۴
آزمون‌های ۱۹۹ و ۲۰۰.....	۵۰۷
آزمون ۲۰۱: آزمون فصل یازدهم.....	۵۰۹
آزمون‌های ۲۰۲ و ۲۰۳: آزمون‌های فصل یازدهم (برگزیده کنکورهای سراسری).....	۵۱۰

◆ فصل دوازدهم: قدرمطلق و جزء صحیح

درس اول: قدرمطلق و ویژگی‌های آن (گام ۳۲۹).....	۵۱۲
آزمون ۲۰۴.....	۵۱۴
درس دوم: معادلات و نامعادلات قدرمطلق (گام‌های ۳۳۰ تا ۳۳۳)...	۵۱۵
آزمون‌های ۲۰۵ تا ۲۰۷.....	۵۲۱
درس سوم: توابع شامل قدرمطلق (گام‌های ۳۳۴ تا ۳۳۶).....	۵۲۴
آزمون‌های ۲۰۸ و ۲۰۹.....	۵۲۷
درس چهارم: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (گام‌های ۳۳۷ و ۳۳۸).....	۵۲۹
آزمون‌های ۲۱۰ و ۲۱۱.....	۵۳۲
درس پنجم: تابع جزء صحیح (گام‌های ۳۳۹ تا ۳۴۱).....	۵۳۴
آزمون‌های ۲۱۲ و ۲۱۳.....	۵۳۷
آزمون ۲۱۴: آزمون فصل دوازدهم.....	۵۳۹
آزمون ۲۱۵: آزمون فصل دوازدهم (برگزیده کنکورهای سراسری).....	۵۴۰

◆ فصل سیزدهم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی (گام‌های ۳۴۲ تا ۳۴۴).....	۵۴۱
آزمون‌های ۲۱۶ و ۲۱۷.....	۵۴۵
درس دوم: معادلات و نامعادلات نمایی (گام‌های ۳۴۵ و ۳۴۶).....	۵۴۷
آزمون‌های ۲۱۸ و ۲۱۹.....	۵۵۰
درس سوم: لگاریتم (گام‌های ۳۴۷ تا ۳۴۹).....	۵۵۲
آزمون‌های ۲۲۰ تا ۲۲۲.....	۵۵۵
درس چهارم: توابع لگاریتمی (گام‌های ۳۵۰ تا ۳۵۳).....	۵۵۸
آزمون‌های ۲۲۳ و ۲۲۴.....	۵۶۳
درس پنجم: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (گام‌های ۳۵۴ و ۳۵۵).....	۵۶۵
آزمون‌های ۲۲۵ تا ۲۲۷.....	۵۶۹
آزمون ۲۲۸: آزمون فصل سیزدهم.....	۵۷۲
آزمون‌های ۲۲۹ و ۲۳۰: آزمون‌های فصل سیزدهم (برگزیده کنکورهای سراسری).....	۵۷۳

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول وتر مثلث را **سینوس** این زاویه می‌نامند:



$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

همچنین، نسبت طول ضلع مجاور به هر زاویه حاده (به‌جز وتر) به طول وتر مثلث را **کسینوس** این زاویه می‌نامند:

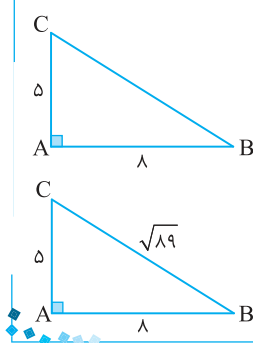
$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \quad \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

همین‌طور، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول ضلع مجاور به این زاویه (به‌جز وتر) را **تانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \quad \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB}$$

و عکس تانژانت یک زاویه را **کوتانژانت** این زاویه می‌نامند:



در شکل مقابل مقدار $\sin \hat{B} + \cos \hat{B}$ کدام است؟

$$\frac{40}{89} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{89}}{13} \quad (4)$$

$$\frac{89}{40} \quad (1)$$

$$\frac{13}{\sqrt{89}} \quad (3)$$

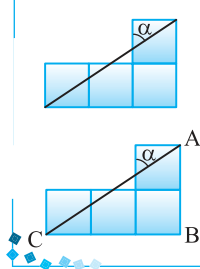
از قضیه فیثاغورس می‌توانیم طول وتر مثلث را به‌دست آوریم: $BC = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$. بنابراین

$$\sin \hat{B} + \cos \hat{B} = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{5}{\sqrt{89}} + \frac{8}{\sqrt{89}} = \frac{13}{\sqrt{89}}$$

تست

□□□□

را حل



در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

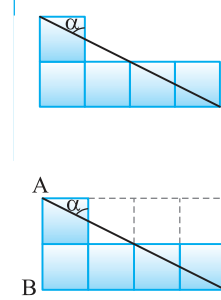
از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{CAB}$. بنابراین

$$\tan \alpha = \tan \hat{CAB} = \frac{CB}{AB} = \frac{3}{2}$$

تست

□□□□

را حل



در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{ACD}$. بنابراین

$$\sin \alpha = \sin \hat{ACD} = \frac{AD}{AC}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ACD، $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. پس

$$\sin \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{در نتیجه} \quad AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

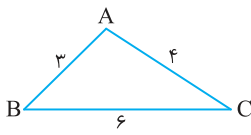
تست

□□□□

را حل

تست ۴

در شکل مقابل مقدار $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C}$ کدام است؟



۱ (۲)
۳ (۴)
۴

۲ (۱)
۴ (۳)
۳

راه حل

مطابق شکل، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه ABH، $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{3}$. در مثلث قائم‌الزاویه AHC، $\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{4}$. بنابراین $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C} = \frac{BH}{3} + \frac{4}{3} \left(\frac{HC}{4} \right) = \frac{BH+HC}{3} = \frac{BC}{3} = \frac{6}{3} = 2$

۷۰

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

مقدار زاویه A	مقدار نسبت مثلثاتی	$\sin \hat{A}$	$\cos \hat{A}$	$\tan \hat{A}$	$\cot \hat{A}$
30°		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
60°		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست ۵

مطابق شکل درختی به ارتفاع ۳ متر از نقطه A با زاویه 14° و از نقطه B با زاویه 50° دیده می‌شود. فاصله A از B تقریباً چقدر است؟ ($\tan 50^\circ \approx 1/19$, $\tan 14^\circ \approx 0/25$)



۱۲/۵۲ (۴)

۱۴/۵۲ (۳)

۱۳/۵۲ (۲)

۱۲ (۱)

راه حل

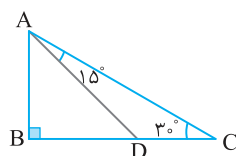
مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث قائم‌الزاویه CBH، $\tan 50^\circ = \frac{CH}{BH} = \frac{3}{BH}$. پس $\frac{3}{BH} = \frac{1}{19}$ ، یعنی $BH = \frac{3}{1/19} = 57$

در مثلث قائم‌الزاویه AHC، $\tan 14^\circ = \frac{CH}{HA} = \frac{3}{HA}$. پس $\frac{3}{HA} = \frac{0/25}{1}$ ، یعنی $HA = \frac{3}{0/25} = 12$

بنابراین فاصله دو نقطه A و B تقریباً برابر است با $BA = BH + HA \approx 57 + 12 = 69$

تست ۶

در شکل مقابل طول CD چقدر است؟ ($AD = 2\sqrt{2}$)



۲(√۳+۱) (۲)
۳√۳ (۴)

۲(√۳-۱) (۱)
۲√۳ (۳)

راه حل

ابتدا توجه کنید که $\hat{BAC} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. پس $\hat{BAD} = \hat{BAC} - \hat{DAC} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$

$$\cos \hat{BAD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{AB}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$$

در مثلث قائم‌الزاویه DBA،

$$\sin \hat{BAD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{BD}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BD}{2\sqrt{2}}$$

بنابراین $AB = 2$. همچنین، در همین مثلث،

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{BC} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

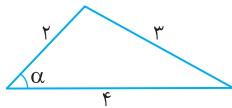
بنابراین $BD = 2$. از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC،

$$CD = BC - BD = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1)$$

به این ترتیب

تست
□□□□

در شکل مقابل مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟



(۲) $\frac{13}{16}$

(۱) $\frac{7}{8}$

(۴) $\frac{11}{16}$

(۳) $\frac{3}{4}$

راه حل

از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH با توجه به قضیه فیثاغورس،

$$x^2 + h^2 = 4, \quad h^2 + (4-x)^2 = 9 \Rightarrow h^2 + x^2 + 16 - 8x = 9$$

اگر به جای $x^2 + h^2$ در معادله دوم مقدار ۴ را قرار دهیم، می‌توان مقدار x را به دست آورد

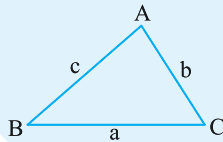
$$4 + 16 - 8x = 9 \Rightarrow 8x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{8}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه ABH مقدار $\cos \alpha$ را به دست می‌آوریم $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB}$ ، پس $\cos \alpha = \frac{x}{2} = \frac{11}{16}$.

۷۱

محاسبه مساحت مثلث

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول‌های دو ضلع آن در سینوس زاویه میان این دو ضلع.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$

تست
□□□□

در مثلث متساوی‌الساقین ABC می‌دانیم $AB=AC$ ، $\hat{B} = 67/5^\circ$ و مساحت مثلث $9\sqrt{2}$ است. طول ساق مثلث کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۴

(۲) ۳

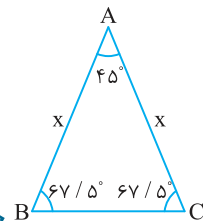
(۱) ۲

راه حل

مطابق شکل مقابل اندازه زاویه A برابر 45° است و اگر طول ساق مثلث را x فرض کنیم، مساحت مثلث برابر

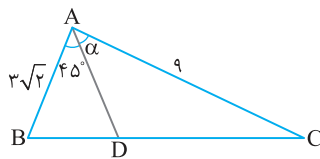
$$S = \frac{1}{2}x^2 \sin \hat{A} \text{ است. پس}$$

$$9\sqrt{2} = \frac{1}{2}x^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$



تست
□□□□

در شکل روبه‌رو $S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ADC}$ مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{3}{4}$

راه حل

توجه کنید که

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ADC} \Rightarrow \frac{1}{2}AB \times AD \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}AD \times AC \times \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 9 \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

تست
□□□□

در یک متوازی‌الاضلاع که مساحت آن برابر $10\sqrt{3}$ است، اندازه یک ضلع برابر ۲ و اندازه یک زاویه 60° است. اندازه ضلع دیگر کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۸

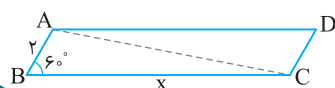
(۲) ۱۰

(۱) ۵

راه حل

مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD دو برابر مساحت مثلث ABC است. پس مساحت مثلث ABC برابر $5\sqrt{3}$ است. بنابراین

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin 60^\circ \Rightarrow 5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow x = 10$$



تست

۱۱

در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث CDE

برابر $\frac{3}{4}$ است. مقدار x کدام است؟

۶ (۲)

۴ (۱)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

توجه کنید که $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، پس $\sin \hat{C}_1 = \sin \hat{C}_2$ از طرف دیگر.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \hat{C}_1}{\frac{1}{2} CD \times CE \times \sin \hat{C}_2} = \frac{CA \times CB}{CD \times CE} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{2 \times x} \Rightarrow x = 10$$

راه حل
دست گرمی
۵۹- در مثلث قائم الزاویه ABC، اگر $b=5$ و $\cos \hat{B} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ، مقدار a کدام است؟

۷ (۲)

۶ (۱)

۱۴ (۴)

 $\sqrt{7}$ (۳)۶۰- در شکل مقابل طول ضلع مربع های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۶۱- در شکل مقابل طول ضلع مربع های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟ $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۱) $\frac{2}{\sqrt{11}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ (۳)۶۲- مقدار عبارت $A = \frac{4 \sin^3 60^\circ - 3 \sin 60^\circ}{4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ}$ کدام است؟

-۱ (۲)

۱ (۱)

صفر (۴)

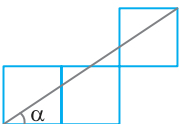
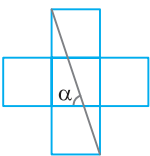
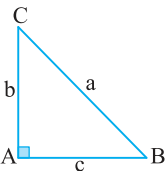
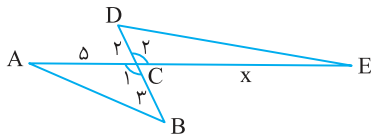
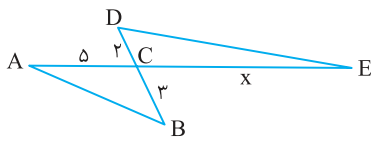
 $\frac{1}{2}$ (۳)

۶۳- در شکل مقابل مساحت متوازی الاضلاع ABCD چقدر است؟

 $10\sqrt{3}$ (۲) $5\sqrt{3}$ (۱)

۱۰ (۴)

۵ (۳)



نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۱)

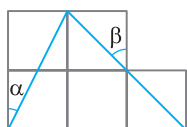
آزمون ۳۷

سؤال	گام
۳۶۱	۶۹
۳۶۲	۶۹
۳۶۳	۶۹
۳۶۴	۶۹ ۷۰
۳۶۵	۶۹
۳۶۶	۶۹
۳۶۷	۶۹
۳۶۸	۶۹
۳۶۹	۷۰ ۷۱
۳۷۰	۷۱

۳۶۱- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\hat{A}=9^\circ$ ، $\sin \hat{B}=\frac{1}{3}$ و $AC=2$. مقدار $\tan \hat{C}$ کدام است؟

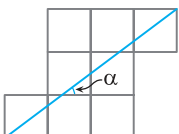
- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

۳۶۲- در شکل زیر طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha - \cos \beta$ کدام است؟



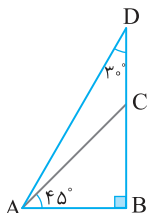
- (۱) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ (۲) $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ (۳) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$

۳۶۳- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟



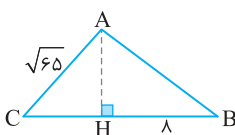
- (۱) $\frac{25}{6}$ (۲) $\frac{49}{16}$ (۳) $\frac{49}{15}$ (۴) $\frac{25}{12}$

۳۶۴- در شکل مقابل نسبت طول DC به طول AC کدام است؟



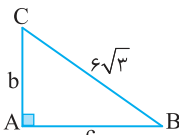
- (۱) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

۳۶۵- در شکل مقابل $HB=8$ و $\tan \hat{B}=\frac{3}{4}$. طول CH کدام است؟



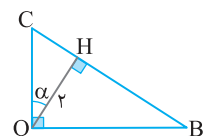
- (۱) $\sqrt{29}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{25}$ (۴) $\sqrt{24}$

۳۶۶- در شکل مقابل $\cot \hat{B}=\sqrt{2}$. مساحت مثلث چقدر است؟



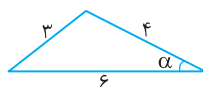
- (۱) ۱۸ (۲) ۳۶ (۳) $18\sqrt{2}$ (۴) $36\sqrt{2}$

۳۶۷- در شکل مقابل $OH=2$. مقدار $OB+OC$ کدام است؟



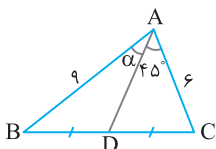
- (۱) $\tan \alpha + \cot \alpha$ (۲) $\frac{2}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha}$ (۳) $2 \tan \alpha$ (۴) $2 \cot \alpha$

۳۶۸- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



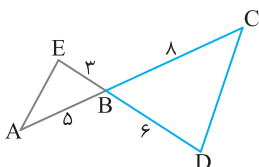
- (۱) $\frac{\sqrt{455}}{36}$ (۲) $\frac{\sqrt{455}}{48}$ (۳) $\frac{29}{36}$ (۴) $\frac{29}{48}$

۳۶۹- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳۷۰- در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABE به مساحت مثلث BCD چقدر است؟



- (۱) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{3}{5}$

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۲)

آزمون ۳۸

۳۷۱- در مثلث ABC ، اگر $\hat{C}=90^\circ$ ، $\sin \hat{B}=\frac{4}{5}$ و $b+c=7$ ، مقدار a کدام است؟

$$\frac{11}{3} \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$\frac{7}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۱)$$

۳۷۲- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

۳۷۳- در شکل مقابل نسبت طول ضلع HC به طول ضلع BH چقدر است؟

$$2 \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$\sqrt{5} \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

۳۷۴- مطابق شکل روبه‌رو از دو نقطه A و B روی زمین که ۲۴ متر از هم فاصله دارند،

بالاترین قسمت یک ساختمان به ترتیب با زاویه‌های 30° و 60° دیده می‌شود. ارتفاع

ساختمان کدام است؟

$$6\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۳)$$

۳۷۵- در مثلث متساوی‌الساقین مقابل $AB=BC$ و طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر

$$16 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۱)$$

$$16\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$8\sqrt{3} \quad (۳)$$

۳۷۶- در شکل روبه‌رو $CM=AB$ و $\tan \theta = 3 \tan \alpha$. حاصل عبارت $\cot \alpha + \cot \theta$ کدام

است؟

$$4 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۱)$$

$$7 \quad (۴)$$

$$5 \quad (۳)$$

۳۷۷- در شکل مقابل $BC=4$. مقدار $\frac{BH}{HC}$ کدام است؟

$$\tan^2 \beta \quad (۲)$$

$$\tan^2 \alpha \quad (۱)$$

$$\sin \beta + \cos \beta \quad (۴)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha \quad (۳)$$

۳۷۸- در نیم‌دایره شکل روبه‌رو، $BD=x$ و $DC=8x$. مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

۳۷۹- در شکل مقابل طول ضلع AB چقدر است؟

$$2\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$8\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{2} \quad (۳)$$

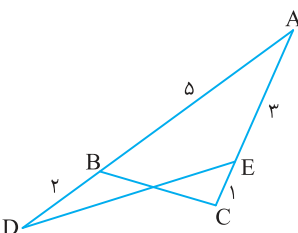
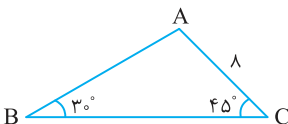
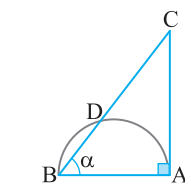
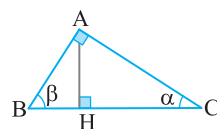
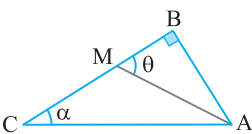
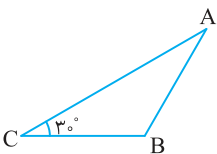
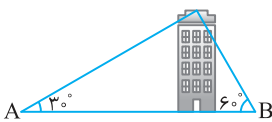
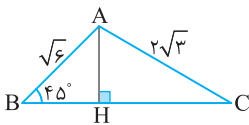
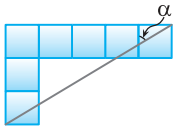
۳۸۰- در شکل روبه‌رو $S_{ADE} + S_{ABC} = \frac{41}{4}$. اندازه زاویه حاده A کدام است؟

$$45^\circ \quad (۲)$$

$$60^\circ \quad (۱)$$

$$15^\circ \quad (۴)$$

$$30^\circ \quad (۳)$$

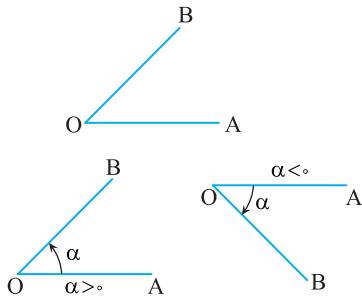


سؤال	گام
۳۷۱	۶۹
۳۷۲	۶۹
۳۷۳	۶۹
۳۷۴	۶۹
۳۷۵	۶۹
۳۷۶	۶۹
۳۷۷	۶۹
۳۷۸	۶۹
۳۷۹	۶۹
۳۸۰	۷۰

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

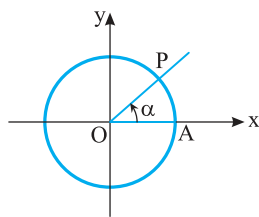
تعاریف اولیه

زاویه مثلثاتی

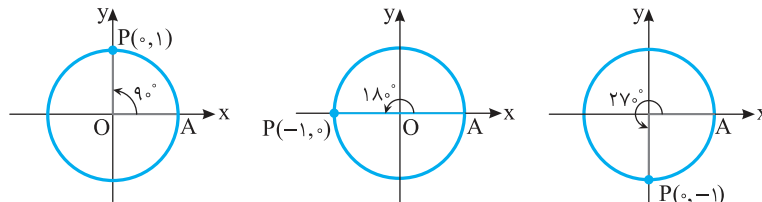


دو نیم خط OA و OB را در نظر بگیرید که در نقطه O مشترک‌اند. اگر نیم خط OA حول نقطه O دوران کند و بر نیم خط OB منطبق شود، زاویه‌ای مثلثاتی ایجاد می‌شود. اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را منفی در نظر می‌گیرند و اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را مثبت در نظر می‌گیرند. اگر رأس زاویه بر مبدأ مختصات واقع باشد و ضلع ابتدایی زاویه بر قسمت مثبت محور طول‌ها واقع باشد، می‌گوییم زاویه در **موقعیت استاندارد** است. از این پس تمام زاویه‌ها را در موقعیت استاندارد در نظر می‌گیریم.

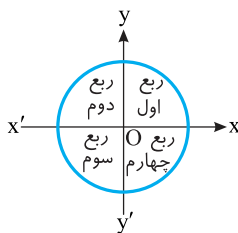
دایره مثلثاتی



دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد، **دایره مثلثاتی** می‌نامند. نقطه تقاطع دایره با محور طول‌ها $A(1, 0)$ و OA ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی است. اگر OA به اندازه α مطابق شکل روبه‌رو دوران کند، بر OP منطبق می‌شود. α را اندازه زاویه مثلثاتی ایجاد شده و کمان AP را کمان روبه‌رو به زاویه α می‌نامیم. چون ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی را OA فرض کرده‌ایم، پس با معلوم بودن نقطه P روی دایره و جهت دوران، زاویه α مشخص می‌شود. مثلاً وقتی P در نقطه‌های $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ و $(0, -1)$ قرار گیرد و جهت دوران پادساعتگرد باشد، زاویه‌های زیر مشخص می‌شوند:



ناحیه‌های مثلثاتی



محورهای $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه مختصات را به چهار ناحیه تقسیم کرده‌اند. ناحیه بین Ox و Oy را **ناحیه اول** یا **ربع اول** مثلثاتی می‌نامند. همچنین ناحیه بین Oy و Ox' را **ربع دوم** مثلثاتی، ناحیه بین Ox' و Oy' را **ربع سوم** مثلثاتی و ناحیه بین Ox و Oy' را **ربع چهارم** مثلثاتی می‌نامند.

تذکر

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در نقطه‌های $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, -1)$ یا $(1, 0)$ قرار داشته باشد، زاویه α در هیچ‌یک از چهار ناحیه مثلثاتی قرار ندارد.

نکته

ناحیه‌ای که نقطه P ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α ، در آن قرار می‌گیرد برای زاویه‌های مختلف از 0° تا 360° مطابق جدول زیر است:

حدود α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
ناحیه‌ای که P قرار دارد	اول	دوم	سوم	چهارم

تست ۱

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه -20° در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۱) اول

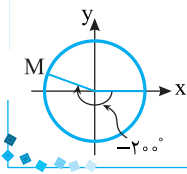
(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

مطابق شکل روبه‌رو انتهای کمان روبه‌رو به زاویه -20° در ناحیه دوم قرار دارد.

را حل



تست ۲

اگر α زاویه‌ای حاده باشد، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه $\alpha + 18^\circ$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

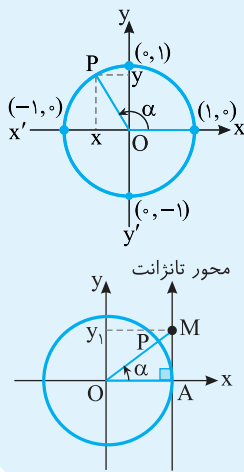
(۴) چهارم

چون α زاویه‌ای حاده است، پس $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، بنابراین $18^\circ < \alpha + 18^\circ < 27^\circ$ و در نتیجه انتهای کمان روبه‌رو به زاویه $\alpha + 18^\circ$ در ناحیه سوم قرار دارد.

را حل

۷۳

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی



در دایره مثلثاتی مقابل برای هر زاویه مانند α ، $\sin \alpha$ برابر عرض نقطه P یعنی y است. پس $\sin \alpha$ با عددی روی محور $y'Oy$ متناظر است. محور $y'Oy$ را **محور سینوس** می‌نامند و چون $-1 \leq y \leq 1$ ، پس $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$. همچنین $\cos \alpha$ برابر طول نقطه P یعنی x است. پس $\cos \alpha$ با عددی روی محور $x'Ox$ متناظر است. محور $x'Ox$ را **محور کسینوس** می‌نامند و چون $-1 \leq x \leq 1$ ، پس $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

در نقطه $A(1,0)$ محوری عمود بر محور x رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور y انتخاب می‌کنیم. این محور را **محور تانژانت** می‌نامیم. مقدار تانژانت هر زاویه دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است. در مثلث قائم‌الزاویه OAM در شکل مقابل می‌توان نوشت $\tan \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{1} = AM$. برای مشخص کردن تانژانت زاویه α ، کافی است شعاع OP ، ضلع انتهایی زاویه α ، را امتداد دهیم تا محور تانژانت را در نقطه $M(1, y_1)$ قطع کند. در این صورت $y_1 = \tan \alpha$.

نکته

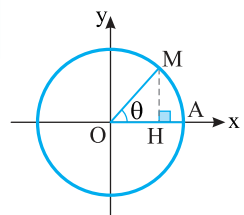
اگر ضلع انتهایی زاویه α روی محور y قرار داشته باشد، تانژانت زاویه α تعریف نمی‌شود.

تست ۳

در دایره مثلثاتی مقابل، $\cos \theta = \frac{2}{3}$ ، اندازه پاره خط AH چقدر است؟(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۴) $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

با توجه به شکل،

را حل

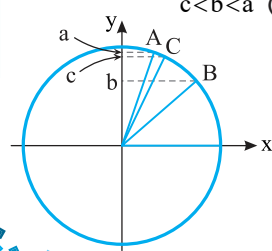


$$OH = \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = OA - OH = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

تست ۴

اگر $a = \sin 71^\circ$ ، $b = \sin 41^\circ$ و $c = \sin 67^\circ$ ، کدام درست است؟(۱) $a < b < c$ (۲) $b < c < a$ (۳) $a < c < b$ (۴) $c < b < a$ فرض کنید نقاط A ، B و C به ترتیب انتهای کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های 71° ، 41° و 67° روی دایره مثلثاتی باشند. از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b < c < a$.

را حل



تست ۵

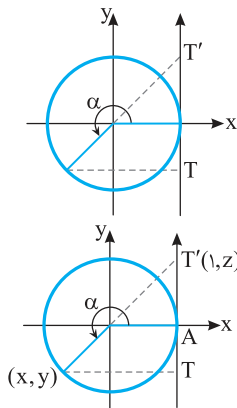
در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، طول پاره خط TT' برابر کدام عبارت است؟

- (۱) $\tan \alpha - \sin \alpha$
- (۲) $\tan \alpha + \sin \alpha$
- (۳) $\sin \alpha - \cos \alpha$
- (۴) $\sin \alpha + \cos \alpha$

راهنما

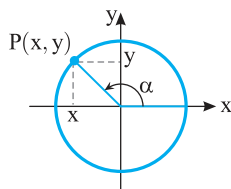
با توجه به شکل روبه‌رو واضح است که $\sin \alpha = y$ و $\tan \alpha = z$. بنابراین طول پاره خط TT' برابر است با

$$TT' = AT + AT' = |y| + |z| = -y + z = -\sin \alpha + \tan \alpha$$

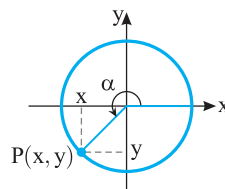


علامت نسبت‌های مثلثاتی

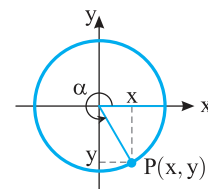
اگر نقطهٔ P انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α ، در ناحیهٔ اول مثلثاتی واقع باشد، طول و عرض آن مثبت است و تمام نسبت‌های مثلثاتی α مثبت‌اند. اگر نقطهٔ P در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم مثلثاتی قرار گیرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α می‌توانند مثبت یا منفی باشند، زیرا طول و عرض نقطهٔ P در این ناحیه‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. به شکل‌های زیر دقت کنید:



$$\begin{aligned} \sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x > 0 \\ \tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x < 0 \\ \tan \alpha = \frac{y}{x} < 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} < 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha = y < 0, \quad \cos \alpha = x < 0 \\ \tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0 \end{aligned}$$

نکته

علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α ، وقتی انتهای کمان روبه‌رو به آن در ناحیه‌های مختلف قرار می‌گیرد، مطابق جدول زیر است:

نسبت \ ناحیه	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

تست ۶

اگر $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ و $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟ ($\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

راهنما

با توجه به تساوی $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، معلوم است که $\cos \alpha \leq 0$. با توجه به تساوی $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ ، معلوم است که $\sin \alpha \geq 0$. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد.

تست ۷

اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

راهنما

با توجه به $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ مشخص است که مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ علامت‌های مخالف هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم یا چهارم قرار دارد. با توجه به $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ واضح است که $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ هم‌علامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ اول یا چهارم قرار دارد. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

تست



کدام یک عددی مثبت است؟

$\cos 300^\circ$ (۴)

$\sin 300^\circ$ (۳)

$\cos 200^\circ$ (۲)

$\sin 200^\circ$ (۱)

راه حل

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 200° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin 200^\circ$ و $\cos 200^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 300° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin 300^\circ$ عددی منفی و $\cos 300^\circ$ عددی مثبت است.

۷۵

نسبت‌های مثلثاتی چند زاویه معروف

زاویه نسبت	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 270^\circ$	$\alpha = 360^\circ$
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۷۶

نکته

برای هر زاویه دلخواه مانند α ، $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ ، $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ، $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ عددی در بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

تست

حداکثر مقدار عبارت $4 \cos \alpha - 1$ کدام است؟

5 (۴)

4 (۳)

3 (۲)

2 (۱)

راه حل

طرفین نابرابری $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ را در ۴ ضرب می‌کنیم $-4 \leq 4 \cos \alpha \leq 4$. یک واحد از طرفین نابرابری اخیر کم می‌کنیم $-5 \leq 4 \cos \alpha - 1 \leq 3$. بنابراین حداکثر مقدار عبارت ۳ است.

تست

مجموع حداکثر و حداقل مقدار عبارت $\frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha}$ کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

راه حل

ابتدا عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha - 2}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha}{2 + \sin \alpha} - \frac{2}{2 + \sin \alpha} = 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha}$$

اکنون با توجه به اینکه $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ می‌توانیم محدوده A را بیابیم:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin \alpha \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin \alpha} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \frac{-2}{2 + \sin \alpha} \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow -1 \leq 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha} \leq \frac{1}{3}$$

بنابراین حداقل مقدار A برابر -1 و حداکثر مقدار آن $\frac{1}{3}$ است. در نتیجه مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت، برابر $-\frac{2}{3}$ است.

۷۷

نکته حدود نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف

$0^\circ < \alpha < 9^\circ$	$9^\circ < \alpha < 18^\circ$	$18^\circ < \alpha < 27^\circ$	$27^\circ < \alpha < 36^\circ$
$0 < \sin \alpha < 1$	$0 < \sin \alpha < 1$	$-1 < \sin \alpha < 0$	$-1 < \sin \alpha < 0$
$0 < \cos \alpha < 1$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$0 < \cos \alpha < 1$
$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$	$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$
$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$	$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$

تست ۱۱

اگر $18^\circ \leq \alpha \leq 27^\circ$ ، اختلاف حداقل و حداکثر مقدار عبارت $A = 3 - 2 \sin \alpha$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

راه‌حل

با توجه به $18^\circ \leq \alpha \leq 27^\circ$ ، معلوم می‌شود α در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد و می‌توان نتیجه گرفت $-1 \leq \sin \alpha < 0$. بنابراین $-2 \sin \alpha \leq 2$ و در نتیجه $3 \leq 3 - 2 \sin \alpha \leq 5$. پس حداقل مقدار A برابر ۳ و حداکثر مقدار آن برابر ۵ است و اختلاف آن‌ها ۲ است.

۷۸

نکته

با افزایش مقادیر α از 0° به 36° ،

مقادیر $\sin \alpha$ در ناحیه‌های اول و چهارم در حال افزایش و در ناحیه‌های دوم و سوم در حال کاهش هستند.

مقادیر $\cos \alpha$ در ناحیه‌های اول و دوم در حال کاهش و در ناحیه‌های سوم و چهارم در حال افزایش هستند.

مقادیر $\tan \alpha$ در هر چهار ناحیه در حال افزایش هستند.

تست ۱۲

کدام مقدار بزرگ‌تر است؟

$\sin 24^\circ$ (۴)

$\sin 20^\circ$ (۳)

$\sin 14^\circ$ (۲)

$\sin 10^\circ$ (۱)

راه‌حل

توجه کنید که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 10° و 14° در ناحیه دوم قرار دارد و سینوس این اعداد مثبت هستند و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 20° و 24° در ناحیه سوم قرار دارند و سینوس این اعداد منفی هستند. از طرف دیگر در ناحیه دوم، زاویه بزرگ‌تر سینوس کوچک‌تری دارد. بنابراین $\sin 10^\circ$ در بین مقادیر داده شده از همه بزرگ‌تر است.

تست ۱۳

اگر $-6^\circ \leq \alpha \leq 6^\circ$ و $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{4}$ ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

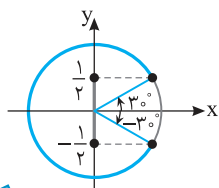
۲ (۲)

۱ (۱)

راه‌حل

از $-6^\circ \leq \alpha \leq 6^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-3^\circ \leq \frac{\alpha}{2} \leq 3^\circ$. با توجه به شکل روبه‌رو $-\frac{1}{2} \leq \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2}$ و در نتیجه

$-\frac{1}{2} \leq \frac{m}{4} \leq \frac{1}{2}$ ، یعنی $-2 \leq m \leq 2$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ± 1 ، ± 2 و صفر باشد.



تست ۱۴

اگر $-6^\circ < \alpha < 6^\circ$ و $\cos \alpha = 3m + 1$ ، حدود m کدام است؟

$-\frac{1}{6} < m \leq 0$ (۴)

$-\frac{1}{6} < m < \frac{1}{6}$ (۳)

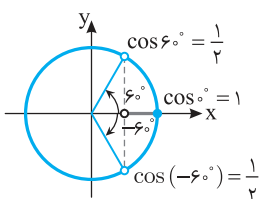
$0 \leq m < \frac{1}{6}$ (۲)

$-\frac{1}{6} < m < 0$ (۱)

راه‌حل

وقتی α از -6° تا 6° تغییر می‌کند، مقدار $\cos \alpha$ از -6° تا 6° افزایش می‌یابد و سپس از 6° کاهش می‌یابد. بنابراین $\cos \alpha$ در $\alpha = 0^\circ$ به بیشترین مقدار خود، یعنی ۱ می‌رسد. پس

$$\frac{1}{2} < \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 3m + 1 \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < 3m \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} < m \leq 0$$



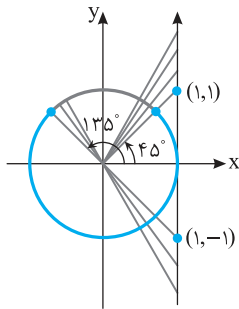
تست ۱۵

راه حل

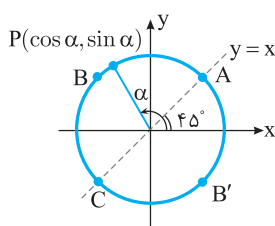
اگر $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ ، مقادیر $\tan \alpha$ در کدام محدوده قرار دارند؟

(۳) $(-\infty, 1]$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۱) $[-1, 1]$ (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

با توجه به شکل روبه‌رو، وقتی $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ ، یعنی مقادیر $\tan \alpha$ در $\mathbb{R} - (-1, 1)$ قرار دارند.



از روی شکل مقابل معلوم است که اگر نقطه (x, y) روی کمان ABC از دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه $y > x$. بنابراین اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی کمان ABC باشد، آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$. همین‌طور، اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی کمان $AB'C$ باشد، آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$. به همین ترتیب نتایج زیر به دست می‌آید.



نکته

۷۹

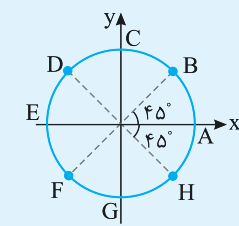
شکل مقابل را در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی دایره مثلثاتی باشد. در این صورت

• اگر نقطه P روی کمان BDF باشد، آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$ و اگر نقطه P روی کمان BHF باشد، آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$.

• اگر نقطه P روی کمان DBH باشد، آن‌گاه $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ و اگر نقطه P روی کمان DFH باشد، آن‌گاه $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$.

• اگر نقطه P روی کمان‌های AB ، CD ، EF یا GH باشد (به شرطی که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan \alpha < \cot \alpha$ و اگر نقطه P روی کمان‌های BC ، DE ، FG یا HA باشد، آن‌گاه $\tan \alpha > \cot \alpha$.

• اگر نقطه P روی کمان‌های ABC یا EFG باشد (به شرطی که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$ و اگر نقطه P روی کمان‌های CDE یا GHA باشد، آن‌گاه $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$.



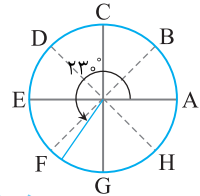
کدام گزینه درست است؟

تست ۱۶

راه حل

(۴) $\tan 23^\circ > \cot 23^\circ$ (۳) $\sin 23^\circ > \cos 23^\circ$ (۲) $\tan 25^\circ > \cot 25^\circ$ (۱) $\sin 25^\circ > \cos 25^\circ$

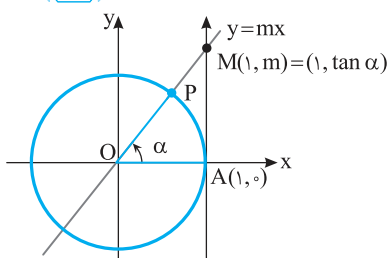
با توجه به شکل مقابل، چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 23° روی کمان FG است، پس $\tan 23^\circ > \cot 23^\circ$. خودتان بررسی کنید که گزینه‌های دیگر درست نیستند.



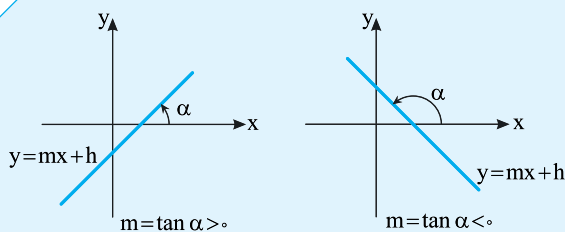
رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

۸۰

می‌دانیم مقدار $\tan \alpha$ برابر عرض نقطه M محل برخورد امتداد شعاع OP با محور تانژانت است (شکل روبه‌رو را ببینید). از طرف دیگر، طول نقطه M برابر ۱ است و این نقطه روی خط $y = mx$ قرار دارد، پس عرض آن برابر m است. بنابراین $m = \tan \alpha$. اکنون توجه کنید که همه خط‌های موازی با خط $y = mx$ شیب یکسان با این خط دارند و آن‌ها نیز محور طول‌ها را با زاویه α قطع می‌کنند. بنابراین شیب تمام این خط‌ها همان $\tan \alpha$ است.



نکته



اگر محور طولها و خط $y=mx+h$ یک زاویه مثلثاتی مثبت و کمتر از 180° به اندازه α تشکیل دهند، آنگاه $m = \tan \alpha$.

تست ۱۷

معادله خطی که از نقطه $(\sqrt{12}, -2)$ می‌گذرد و با محور طولها زاویه مثلثاتی 60° می‌سازد، کدام است؟

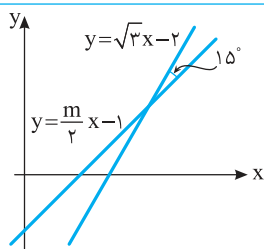
(۱) $y = \sqrt{3}x + 8$ (۲) $y = \sqrt{3}x - 8$ (۳) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$ (۴) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$

با توجه به زاویه خط با محور طولها که برابر زاویه مثلثاتی 60° است، شیب خط برابر $\tan 60^\circ$ یا همان $\sqrt{3}$ است. پس معادله خط به صورت $y = \sqrt{3}x + b$ است و چون خط از نقطه $(\sqrt{12}, -2)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کند، $-2 = \sqrt{3}\sqrt{12} + b$. بنابراین $b = -8$. پس معادله خط $y = \sqrt{3}x - 8$ است.

راهنما

تست ۱۸

با توجه به شکل مقابل مقدار m کدام است؟



(۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{2}$

چون شیب خط $y = \sqrt{3}x - 2$ برابر $\sqrt{3}$ است، زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طولها و این خط 60° است. پس زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طولها و خط $y = \frac{m}{2}x - 1$ برابر $45^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$ است و در نتیجه $\frac{m}{2} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow m = 2$.

راهنما

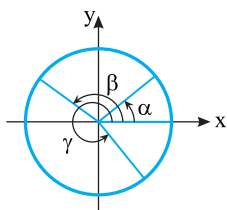
دست‌گرمی

۶۴- انتهای کمان روبه‌رو به کدام یک از زاویه‌های زیر در ناحیه سوم قرار دارد؟

(۱) 170° (۲) 260° (۳) 280° (۴) 330°

۶۵- زاویه‌های α ، β و γ مانند شکل روبه‌رو در دایره مثلثاتی مشخص شده‌اند. اگر $a = \cos \alpha$ ، $b = \cos \beta$ و $c = \cos \gamma$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) $a > b > c$
(۲) $b > c > a$
(۳) $a > c > b$
(۴) $c > a > b$



۶۶- اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟
(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۶۷- اگر $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{m}{2}$ ، حدود m کدام است؟

(۱) $2 \leq m \leq 4$ (۲) $-2 \leq m \leq 0$ (۳) $-2 \leq m \leq 2$ (۴) $1 \leq m \leq 3$

۶۸- حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت $A = 2 + 3 \sin^2 x$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۶۹- معادله خطی که از نقطه $(6, \sqrt{3})$ می‌گذرد و با محور طولها زاویه مثلثاتی 30° می‌سازد، کدام است؟

(۱) $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ (۲) $x + \sqrt{3}y - 9 = 0$ (۳) $2x - \sqrt{3}y - 9 = 0$ (۴) $x - 2\sqrt{3}y = 0$

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۱)

آزمون ۳۹

۳۸۱- کدام یک عددی مثبت است؟

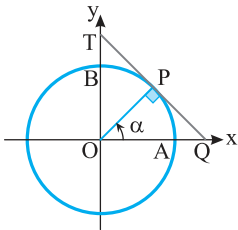
- (۱) $\sin 23^\circ$ (۲) $\cos 23^\circ$ (۳) $\sin 31^\circ$ (۴) $\cos 31^\circ$

۳۸۲- اگر $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ و $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ربع مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۳۸۳- در دایره مثلثاتی مقابل α زاویه‌ای حاده است. طول پاره خط BT کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\frac{1}{\cos \alpha} - 1$ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha} - 1$

۳۸۴- اگر $-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ و $\sin 2\alpha = \frac{m}{4}$ ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۸۵- اگر $7 = 2 \sin \alpha + 5 \cos \beta$ ، مقدار $3 \sin \alpha - 4 \cos \beta$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۷

۳۸۶- اگر $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ، حداکثر مقدار عبارت $\frac{3}{2 \sin \alpha + 1}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۸۷- اگر طول دو ضلع مثلثی $\sqrt{2}$ و $\sqrt{6}$ باشد، بیشترین مقدار ممکن مساحت این مثلث کدام است؟

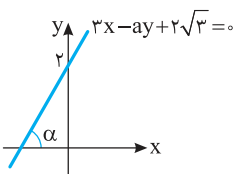
- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۳۸۸- اگر $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ و $\tan \alpha = 2m + 1$ ، حدود m کدام است؟

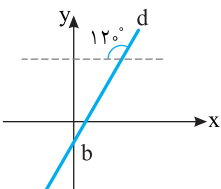
- (۱) $m \leq -\frac{1}{2}$ (۲) $m < -\frac{1}{2}$ (۳) $m > -\frac{1}{2}$ (۴) $m \geq -\frac{1}{2}$

۳۸۹- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۳۹۰- معادله خط d در شکل مقابل به صورت $y = a(x-2) + \sqrt{3}$ است. مقدار b کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $-2\sqrt{3}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$



سؤال	گام
۳۸۱	۷۲ ۷۴
۳۸۲	۷۴
۳۸۳	۶۹ ۷۳
۳۸۴	۷۸
۳۸۵	۷۶
۳۸۶	۷۷
۳۸۷	۷۱ ۷۷
۳۸۸	۷۷
۳۸۹	۷۵ ۸۰
۳۹۰	۷۵ ۸۰

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۲)

آزمون ۴۰

سؤال	گام
۳۹۱	۷۲ ۷۴
۳۹۲	۶۹ ۷۳
۳۹۳	۷۳
۳۹۴	۷۸
۳۹۵	۱۳ ۲۲ ۷۶ ۸۱
۳۹۶	۲۲ ۷۶
۳۹۷	۷۹ ۹۲
۳۹۸	۷۷
۳۹۹	۷۵ ۸۰
۴۰۰	۷۵ ۸۰

۳۹۱- کدام یک عددی منفی است؟

$\cot 26^\circ$ (۴)

$\cot 7^\circ$ (۳)

$\tan 19^\circ$ (۲)

$\tan 17^\circ$ (۱)

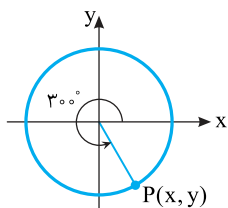
۳۹۲- در دایره مثلثاتی مقابل، مقدار $\frac{y}{x-1}$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۱)

$-\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴)



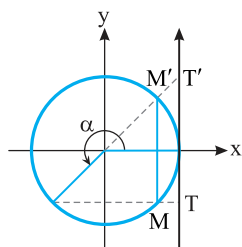
۳۹۳- در دایره مثلثاتی مقابل طول پاره خط TT' چقدر از طول پاره خط MM' بیشتر است؟

$\tan \alpha - \sin \alpha$ (۱)

$\tan \alpha + \sin \alpha$ (۲)

$\cot \alpha - \cos \alpha$ (۳)

$\sin \alpha + \cos \alpha$ (۴)



۳۹۴- اگر $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{4}$ ، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m کدام است؟

۱۰ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۳۹۵- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A = 4 \cos^2 x - 2 \sin x$ کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{25}{4}$ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

۳ (۱)

۳۹۶- مقدار عبارت $A = \frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3}$ با کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند برابر باشد؟

۱ (۴)

$\frac{6}{7}$ (۳)

$-\frac{7}{8}$ (۲)

$\frac{9}{8}$ (۱)

۳۹۷- حاصل عبارت $|\sin 2^\circ - \cos 2^\circ| - |\sin 7^\circ - \cos 7^\circ|$ کدام است؟

صفر (۴)

$2 \sin 2^\circ$ (۳)

$2 \cos 2^\circ$ (۲)

$-2 \sin 2^\circ$ (۱)

۳۹۸- اگر $18^\circ \leq \alpha < 27^\circ$ و $\tan \alpha = m^3 + m^2$ ، حدود m کدام است؟

$m \leq -1$ (۴)

$m \geq -1$ (۳)

$m \leq 0$ (۲)

$m \geq 0$ (۱)

۳۹۹- در شکل مقابل خط‌های d و d' روی محور x متقاطع‌اند. معادله خط d کدام است؟

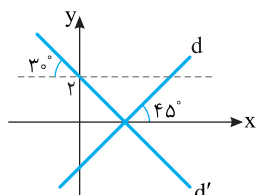
$(\tan 15^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}})$

$y = 2x - \sqrt{3}$ (۲)

$y = x - \sqrt{3}$ (۴)

$y = x - 2\sqrt{3}$ (۱)

$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ (۳)



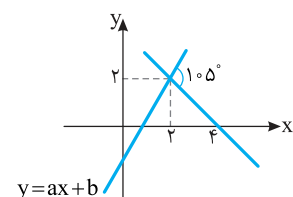
۴۰۰- دو خط شکل مقابل از نقطه (۲, ۲) عبور می‌کنند. مقدار a+b کدام است؟

$2 - 2\sqrt{3}$ (۱)

$2 - \sqrt{3}$ (۲)

$1 - \sqrt{3}$ (۳)

$2 - 3\sqrt{3}$ (۴)



فصل دوم: مثلثات

درس سوم: اتحادهای مثلثاتی

نکته زیر از تعریف روابط مثلثاتی نتیجه می‌شود.

۸۱

رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی

اگر α زاویه‌ای باشد که مخرج‌ها در عبارت‌های زیر صفر نباشند، آن‌گاه رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی درست‌اند:

$$۱) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$۲) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$۳) \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$۴) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$۵) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$۶) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

تساوی (۳) را می‌توان به شکل $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ نیز نوشت. همین‌طور، از تساوی (۴) نتیجه می‌شود $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

تست
□□□□

مقدار عبارت $\frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{1}{1+\cot^2 \alpha}$ کدام است؟

$$\frac{1}{\sin \alpha} \quad (۴)$$

$$\cos \alpha \quad (۳)$$

$$\sin \alpha \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

راه‌حل

$$\frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{1}{1+\cot^2 \alpha} = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} = 1$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \text{ بنابراین}$$

$$\text{راه‌حل دوم می‌دانیم } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ و } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \text{ بنابراین}$$

$$\frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{1}{1+\cot^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

تست
□□□□

ساده شده عبارت $\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$ کدام است؟

$$\cot \alpha + \cot \beta \quad (۴)$$

$$\cot \alpha \cot \beta \quad (۳)$$

$$\tan \alpha \tan \beta \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

راه‌حل

$$\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \beta}} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{\cot \beta + \cot \alpha}{\cot \alpha \cot \beta}} = \cot \alpha \cot \beta$$

$$\text{می‌دانیم } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \text{ و } \tan \beta = \frac{1}{\cot \beta} \text{ بنابراین}$$

تست
□□□□

اگر $\frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ مقدار $\tan x$ کدام است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$\frac{1}{۴} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{۳} \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

راه‌حل

$$\text{از تساوی } \frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \text{ نتیجه می‌شود } 6 \sin x = 2 \sin x + \cos x \text{ بنابراین } 4 \sin x = \cos x \text{ و در نتیجه } \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{4} \text{ پس } \tan x = \frac{1}{۴}$$

تست
□□□□

حاصل عبارت $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

$$\cot \alpha \quad (۴)$$

$$\sin \alpha \quad (۳)$$

$$2 \tan \alpha \quad (۲)$$

$$2 \cot \alpha \quad (۱)$$

راه‌حل

$$\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2 \cot \alpha \text{ پس می‌نویسیم } (1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \text{ ابتدا مخرج کسر را به صورت}$$

تست
□□□□

اگر $\sin \alpha = \sqrt{m}$ و $\cos \alpha = \sqrt{2m-1}$ ، مقدار $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

را حل

با توجه به رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$(\sqrt{m})^2 + (\sqrt{2m-1})^2 = 1 \Rightarrow m + 2m - 1 = 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2m-1}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan^2 \alpha = 2$$

برای به دست آوردن $\tan^2 \alpha$ ، از رابطه $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

تست
□□□□

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم باشد و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{7}{5}$ ۲ (۲) $-\frac{2}{5}$ ۳ (۳) $-\frac{1}{5}$ ۴ (۴) $\frac{1}{5}$

را حل

توجه کنید که

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

تست
□□□□

اگر $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ و $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ، مقدار $15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha$ کدام است؟

- ۱ (۱) -27 ۲ (۲) -29 ۳ (۳) -31 ۴ (۴) -33

را حل

را حل اول ابتدا توجه کنید که اگر $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ، آن‌گاه $\cot \alpha$ مقداری منفی است. پس

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{169}{144} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{25}{144} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{5}{12}, \tan \alpha = -\frac{12}{5}$$

$$15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = -36 + 5 = -31$$

را حل دوم از رابطه $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ، آن‌گاه $\cos \alpha > 0$ ، پس

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = 15 \left(-\frac{12}{5}\right) - 12 \left(\frac{5}{12}\right) = -31$$

تست
□□□□

اگر $\tan \alpha = 3$ ، مقدار $A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}$ کدام است؟

- ۱ (۱) -7 ۲ (۲) 7 ۳ (۳) -1 ۴ (۴) 1

را حل

را حل اول از تساوی $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$ به دست می‌آید $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$. با جای‌گذاری مقدار $3 \cos \alpha$ به جای $\sin \alpha$ در عبارت A ،

$$A = \frac{2(3 \cos \alpha) + \cos \alpha}{3 \cos \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{7 \cos \alpha}{-\cos \alpha} = -7$$

را حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan \alpha$ در عبارت ظاهر شود:

$$A = \frac{\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{4 \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 4} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 - 4} = -7$$

تست
 ۹

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ربع اول باشد و $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{5}{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{3} \quad (۱)$$

راه‌حل

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - 2 \sin x \cos x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = 2$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ربع اول قرار دارد، پس $\sin x + \cos x > 0$. در نتیجه $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{17}}{3}$.

تست
 ۱۰

عبارت $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta$ با کدام یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (۴)$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (۳)$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta \quad (۲)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \quad (۱)$$

راه‌حل

در عبارت داده شده به جای $\cos^2 \beta$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 \beta$ و به جای $\cos^2 \alpha$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 \alpha$. عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

تست
 ۱۱

ساده شده عبارت $\frac{\cos 1^\circ}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{\cos 1^\circ}{1 - \sin 1^\circ}$ کدام است؟

$$-\frac{2}{\cos 1^\circ} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{\cos^2 1^\circ} \quad (۳)$$

$$2 \tan 1^\circ \quad (۲)$$

$$-2 \tan 1^\circ \quad (۱)$$

راه‌حل

به کمک مخراج مشترک‌گیری، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cos 1^\circ \left(\frac{1}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{1}{1 - \sin 1^\circ} \right) &= \frac{(1 - \sin 1^\circ) - (1 + \sin 1^\circ)}{(1 + \sin 1^\circ)(1 - \sin 1^\circ)} \cos 1^\circ = \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{1 - \sin^2 1^\circ} \\ &= \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} = \frac{-2 \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} = -2 \tan 1^\circ \end{aligned}$$

تست
 ۱۲

هرگاه $\tan^2 \theta + \tan \theta - 1 = 0$ ، حاصل $\tan^4 \theta + \cot^4 \theta$ کدام است؟

$$۱۱ \quad (۴)$$

$$۹ \quad (۳)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$۵ \quad (۱)$$

راه‌حل

چون $\tan \theta \neq 0$ ، بنابراین تساوی داده شده را می‌توان به صورت $\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} = -1$ نوشت. پس

$$\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \left(\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)^2 + 2 = 3$$

$$\tan^4 \theta + \cot^4 \theta = \tan^4 \theta + \frac{1}{\tan^4 \theta} = \left(\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

در نتیجه

تست
 ۱۳

اگر $9^\circ < \alpha < 18^\circ$ ، حاصل عبارت $A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$ کدام است؟

$$\sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha} \quad (۴)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha \quad (۳)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha \quad (۲)$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha \quad (۱)$$

راه‌حل

توجه کنید که

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} = \sqrt{1 + 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه دوم است، پس $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha < 0$. در نتیجه

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

از طرف دیگر

$$A = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|$$

بنابراین

چون $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، پس $\sin \alpha > \cos \alpha$ ، بنابراین علامت $\sin \alpha - \cos \alpha$ مثبت است و در نتیجه $A = \sin \alpha - \cos \alpha$.

هر تساوی بین دو عبارت مثلثاتی که به ازای تمام مقادیری از متغیرها (که هر دو عبارت به ازای آن‌ها با معنی‌اند) برقرار باشد، یک **اتحاد مثلثاتی** است. تمام تساوی‌هایی که در نکته ابتدای درس برای نسبت‌های مثلثاتی آورده‌ایم، اتحاد هستند.

برای اثبات درستی یک اتحاد مثلثاتی می‌توان یک طرف تساوی را با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و به کارگیری دیگر اتحادها، به طرف دیگر تبدیل کرد. برای اثبات نادرستی یک رابطه کافی است زاویه‌ای مثال بزنیم که به ازای آن، دو طرف تساوی مقادیر مختلفی داشته باشند.

تذکر

تست ۱۴

ساده شده عبارت $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$ کدام است؟

- (۱) $\cos x$ (۲) $\sin x$ (۳) $\frac{1}{\cos x}$ (۴) $\frac{1}{\sin x}$

راه حل اول از اتحاد $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

راه حل دوم اگر $x = 30^\circ$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ و گزینه‌ها به ترتیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $\sqrt{3}$ می‌شوند. پس گزینه (۳) درست است.

تست ۱۵

اگر تساوی $\frac{a}{\sin^2 x} + \frac{b}{\sin^4 x} + 1 = \cot^2 x$ یک اتحاد باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

راه حل اول تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} = \cot^2 x - 1 \Rightarrow \frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x}$$

$$a \sin^2 x + b = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$a \sin^2 x + b = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow a \sin^2 x + b = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$

بنابراین باید تساوی $b + a \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ یک اتحاد باشد که کافی است $a = -2$ و $b = 1$ ، یعنی $ab = -2$.

راه حل دوم چون تساوی یک اتحاد است، پس به ازای هر x دلخواه که $\sin x \neq 0$ ، برقرار است. قرار می‌دهیم $x = 30^\circ$ ، در نتیجه

$$\frac{a}{\frac{1}{4}} + \frac{b}{\frac{1}{16}} + 1 = 9 \Rightarrow a + 4b = 2$$

قرار می‌دهیم $x = 45^\circ$ و در نتیجه $\frac{a}{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\frac{1}{4}} + 1 = 1$ ، پس $a + 2b = 0$. از حل دستگاه $\begin{cases} a + 4b = 2 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ به دست می‌آید $a = -2$ و $b = 1$ و در نتیجه $ab = -2$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

تست ۱۶

اگر $2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0$ ، مقدار $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

$$-\frac{13}{27} \quad (۴)$$

$$-\frac{9}{26} \quad (۳)$$

$$-\frac{4}{13} \quad (۲)$$

$$-\frac{6}{13} \quad (۱)$$

ابتدا توجه کنید که

راه حل

$$2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha = -3 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\text{بنابراین } \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{6}{13} \text{ و در نتیجه } \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{3}{2} + \frac{-2}{3} = -\frac{13}{6}$$

دست گرمی

۷۰- اگر $\frac{1 - \tan x}{\tan x} = 2$ ، مقدار $\frac{\cot x}{\cot x - 1}$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۱)$$

۷۱- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m-1}$ و $\cot \alpha = m+2$ ، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

$$\frac{16}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{26}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{626}{25} \quad (۲)$$

$$\frac{65}{16} \quad (۱)$$

۷۲- اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\tan \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{20} \quad (۴)$$

$$-\frac{31}{20} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{20} \quad (۲)$$

$$\frac{31}{20} \quad (۱)$$

۷۳- ساده شده عبارت $A = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$ کدام است؟

$$2 \quad (۴)$$

$$\cos^2 x \quad (۳)$$

$$\sin^2 x \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۷۴- ساده شده عبارت $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^2 \theta$ کدام است؟

$$\cot^2 \theta \quad (۴)$$

$$\tan^2 \theta \quad (۳)$$

$$\cos^2 \theta \quad (۲)$$

$$\sin^2 \theta \quad (۱)$$

۷۵- اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ ، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

$$13 \quad (۴)$$

$$7 \quad (۳)$$

$$11 \quad (۲)$$

$$9 \quad (۱)$$

۷۶- اگر $\cos x \neq 0$ و $3 \sin x + 2 \cos x = 3$ ، مقدار $\cot x$ کدام است؟

$$-\frac{5}{12} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{12} \quad (۳)$$

$$-\frac{12}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{12}{5} \quad (۱)$$

اتحادهای مثلثاتی (۱)

آزمون ۴۱

سؤال	گام
۴۰۱	۷۴ ۸۱
۴۰۲	۸۱
۴۰۳	۸۱
۴۰۴	۸۱
۴۰۵	۸۱
۴۰۶	۷۴ ۸۱
۴۰۷	۸۱ ۸۲
۴۰۸	۷۴ ۸۱ ۸۲
۴۰۹	۸۱ ۸۳
۴۱۰	۷۴ ۸۳

۴۰۱ - اگر $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه α در ناحیه چهارم باشد، مقدار $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۰۲ - اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m}$ و $\cot \alpha = m+3$ ، مقدار $\sin^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{35}$ (۲) $\frac{16}{37}$ (۳) $\frac{1}{37}$ (۴) $\frac{2}{35}$

۴۰۳ - ساده شده عبارت $\frac{1}{1+\sin 10^\circ} + \frac{1}{1-\sin 10^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{\sin^2 10^\circ}$ (۴) $\frac{2}{\cos^2 10^\circ}$

۴۰۴ - حاصل $A = \frac{\sin 15^\circ - \sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ - \cos^3 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 15^\circ$ (۲) $\tan 15^\circ$ (۳) $\cot 15^\circ$ (۴) $\cot^2 15^\circ$

۴۰۵ - اگر $3 \sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$ ، مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۴۰۶ - انتهای کمان متناظر با زاویه α در کدام ناحیه قرار گیرد تا نابرابری $\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} \geq 0$ برقرار باشد؟

- (۱) فقط اول یا دوم (۲) فقط اول یا سوم
(۳) فقط دوم یا چهارم (۴) هر چهار ناحیه

۴۰۷ - ساده شده عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha$

۴۰۸ - اگر انتهای کمان متناظر با زاویه x در ناحیه دوم باشد و $A = \cot^2 x (1 + \tan^2 x) + \tan^2 x (1 + \cot^2 x)$ ، حاصل $\sqrt{A}$ کدام است؟

- (۱) $\tan x - \cot x$ (۲) $-\tan x - \cot x$
(۳) $\tan x + \cot x$ (۴) $\cot x - \tan x$

۴۰۹ - اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{27}{64}$ (۲) $\frac{16}{81}$ (۳) $\frac{23}{32}$ (۴) $\frac{16}{27}$

۴۱۰ - اگر $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه α در ناحیه دوم باشد، مقدار $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{\sqrt{6}}{8}$

اتحادهای مثلثاتی (۲)

آزمون ۴۲

۴۱۱- اگر $\cot x = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه x در ناحیه سوم باشد، مقدار $2 \cos x - \sin x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۳) $-\frac{7}{\sqrt{13}}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{13}}$

۴۱۲- اگر $\sin \alpha = \sqrt{k-1}$ و $\cos \alpha = \sqrt{2k-3}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۴۱۳- مقدار $\frac{(1+\tan 2^\circ)(1-\cot 2^\circ)}{(1+\cot 2^\circ)(1-\tan 2^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۱۴- ساده شده عبارت $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \times \frac{1+\cot^2 x}{\cot x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\tan x$ (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$

۴۱۵- اگر $\cot \alpha = \sin \alpha$ ، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}+2}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-2}{4}$

۴۱۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۴۱۷- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\sin x - \cos x = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{23}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{14}}{4}$ (۳) $\frac{-\sqrt{23}}{4}$ (۴) $\frac{-\sqrt{14}}{4}$

۴۱۸- اگر $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$ ، مقدار $\tan^4 x + \cot^4 x$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۱۱

۴۱۹- اگر $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، عبارت $\cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ با کدام یک برابر است؟

- (۱) $\cot \alpha$ (۲) $\tan \alpha$ (۳) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha}$

۴۲۰- اگر $36^\circ < \alpha < 15^\circ$ ، حاصل عبارت $\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}}$ کدام است؟

- (۱) $\sin \alpha + \cos \alpha$ (۲) $\sin \alpha - \cos \alpha$ (۳) $-\sin \alpha + \cos \alpha$ (۴) $-\sin \alpha - \cos \alpha$

سؤال	گام
۴۱۱	۷۴ ۸۱
۴۱۲	۸۱
۴۱۳	۸۱ ۸۲
۴۱۴	۸۱ ۸۲
۴۱۵	۸۱
۴۱۶	۸۱ ۸۳
۴۱۷	۷۴ ۸۱
۴۱۸	۸۱
۴۱۹	۷۴ ۸۱ ۸۲
۴۲۰	۷۴ ۸۱ ۸۲

اتحادهای مثلثاتی (۳)

آزمون ۴۳

سؤال	گام
۴۲۱	۸۱
۴۲۲	۸۱
۴۲۳	۸۱ ۸۲
۴۲۴	۸۱ ۸۲
۴۲۵	۸۱
۴۲۶	۸۱ ۲۸۵ ۲۸۷
۴۲۷	۸۱ ۲۸۵
۴۲۸	۷۴ ۸۱
۴۲۹	۸۱ ۸۲
۴۳۰	۲۲ ۷۶ ۸۱

۴۲۱- اگر $\frac{5 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) ۸ (۴) $\frac{1}{16}$

۴۲۲- اگر $\tan x = \sqrt{\frac{m+2}{3m+5}}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{m+2}{3m+5}}$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۲۳- ساده شده عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha$

۴۲۴- مقدار $\frac{\sin^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{\cos^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\cos 15^\circ$ (۲) $-\sin 15^\circ$ (۳) $\cos 15^\circ$ (۴) $\sin 15^\circ$

۴۲۵- اگر $\tan x = 3$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\sin^3 x - 2 \cos x}{4 \sin x - \cos^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{47}{119}$ (۲) $\frac{1}{17}$ (۳) $\frac{7}{29}$ (۴) $\frac{17}{29}$

۴۲۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{2}{3}$ ، حاصل $\sin^3 x - \cos^3 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{22}{27}$ (۲) $\frac{23}{27}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{25}{27}$

۴۲۷- اگر $\tan x - \cot x = 3$ ، مقدار $\tan^3 x - \cot^3 x$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴) ۳۶

۴۲۸- اگر $\tan \alpha - 2 \cot \alpha = \sqrt{2}$ و انتهای کمان نظیر زاویه α در ربع اول باشد، مقدار $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $3 - \sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $3 + \sqrt{5}$ (۴) $3 - \sqrt{5}$

۴۲۹- حاصل عبارت $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2 \cot x}{1 - \cot x}$ (۲) $\frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x}$ (۳) $\frac{2 \tan x}{\tan x - 1}$ (۴) $\frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x}$

۴۳۰- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A = \cos^2 x - 2 \sin x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

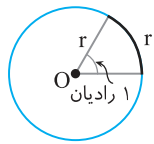
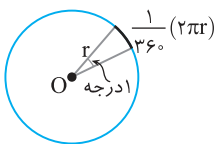
اتحادهای مثلثاتی (۴)

آزمون ۴۴

- ۴۳۱- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲
- ۴۳۲- مقدار عبارت $A = \frac{\cot^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\tan^6 15^\circ$ (۲) $\cot^6 15^\circ$ (۳) $1 + \tan^6 15^\circ$ (۴) $1 + \cot^6 15^\circ$
- ۴۳۳- مقدار $(\frac{1}{\cos 2^\circ} + \tan 2^\circ)(1 - \sin 2^\circ)$ کدام است؟
 (۱) $\sin 2^\circ$ (۲) $\cos 2^\circ$ (۳) $\tan 2^\circ$ (۴) $\cot 2^\circ$
- ۴۳۴- حاصل $\frac{\sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}}{\sqrt{1 + \sin 36^\circ}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۱
- ۴۳۵- اگر $\cos \alpha - 5 = 3 \sin^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 5 = 0$ ، مقدار $\cos^6 \alpha$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر
- ۴۳۶- اگر $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$ ، مقدار $\tan^6 x + \cot^6 x$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۲۷
- ۴۳۷- اگر $\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 2$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟
 (۱) $1 \pm \sqrt{2}$ (۲) $-1 \pm \sqrt{2}$ (۳) $2 \pm \sqrt{3}$ (۴) $-2 \pm \sqrt{3}$
- ۴۳۸- حاصل عبارت $\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$ به ازای $\alpha = 200^\circ$ کدام است؟
 (۱) $-\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ (۲) $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$
 (۳) $-\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$ (۴) $\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$
- ۴۳۹- حاصل $1 + \frac{\sin^3 4^\circ - \cos^3 4^\circ}{\cos 4^\circ + \cos^2 4^\circ \sin 4^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\sin 4^\circ$ (۲) $\cos 4^\circ$ (۳) $\tan 4^\circ$ (۴) ۱
- ۴۴۰- اگر $\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} = 7$ ، حاصل $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

سؤال	گام
۴۳۱	۸۱
۴۳۲	۸۱ ۸۲
۴۳۳	۸۱ ۸۲
۴۳۴	۸۱ ۸۲ ۹۵
۴۳۵	۸۱
۴۳۶	۸۱ ۲۸۱ ۲۸۵
۴۳۷	۸۱
۴۳۸	۷۹ ۸۱ ۸۲
۴۳۹	۸۱ ۸۲
۴۴۰	۸۱ ۸۲ ۲۸۷

درس چهارم: واحدهای اندازه گیری زاویه



اگر دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت برابر تقسیم کنیم، کمان‌هایی برابر به دست می‌آیند که هر یک از آن‌ها روبه‌رو به یک زاویه مرکزی هستند. این زاویه‌ها با یکدیگر برابرند و اندازه هر یک از آن‌ها برابر ۱ درجه است. به همین ترتیب، اگر روی دایره کمانی با طول برابر با شعاع دایره انتخاب کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به این کمان برابر ۱ رادیان است.

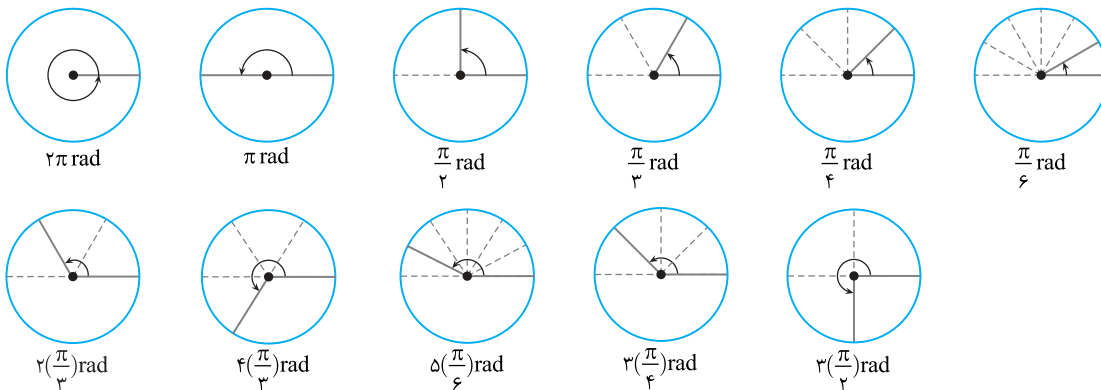
تعریف

- ۱ درجه برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن $\frac{1}{360}$ محیط دایره است. k درجه را می‌نویسیم k° .
- ۱ رادیان برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن برابر شعاع دایره است. k رادیان را می‌نویسیم $k \text{ rad}$.

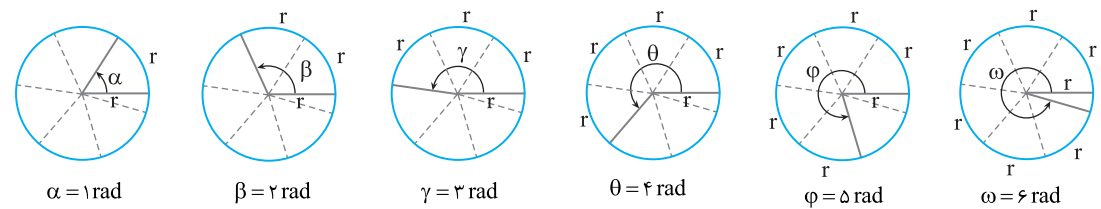
اگر واحد اندازه زاویه‌ای را مشخص نکردیم، منظورمان واحد رادیان است.

تذکر

مثال: در شکل‌های زیر زاویه‌های معروف با اندازه آن‌ها برحسب رادیان نشان داده شده‌اند.



مثال: چون $2\pi \approx 6.28$ ، روی یک دایره کامل می‌توان پشت سر هم شش کمان به طول شعاع جدا کرد (شکل‌های زیر را ببینید).



انتهای کمان روبه‌رو به زاویه ۶- رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

۴) چهارم

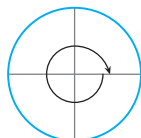
۳) سوم

۲) دوم

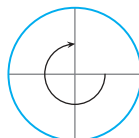
۱) اول

با توجه به شکل‌های زیر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه ۶- رادیان در ناحیه اول قرار دارد.

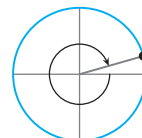
راهنما



$(-2\pi) \approx (-6.28)$ رادیان



$(-\frac{3\pi}{2}) \approx (-4.71)$ رادیان



(-6) رادیان

تست ۲

راه‌حل

کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند).

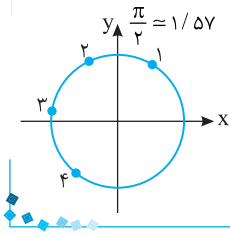
$$\sin 4 \quad (4)$$

$$\sin 3 \quad (3)$$

$$\sin 2 \quad (2)$$

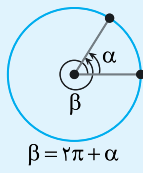
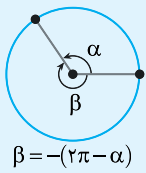
$$\sin 1 \quad (1)$$

با توجه به شکل روبه‌رو، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان زاویه ۲ رادیان است، بزرگ‌تر از عرض سایر نقاط است، پس $\sin 2$ از بقیه بزرگ‌تر است.



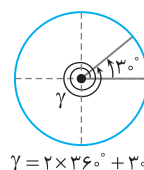
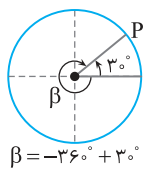
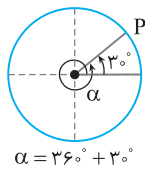
۸۵

زاویه‌های هم‌انتهای



می‌دانیم یک زاویه مثلثاتی در موقعیت استاندارد، زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره مثلثاتی، ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور x و ضلع دیگر آن از دوران ضلع ابتدایی حول رأس آن به اندازه دلخواه به دست آمده باشد. به این ترتیب، دو زاویه با اندازه‌های مختلف ممکن است ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی مشترک داشته باشند. معلوم است که در این صورت نقطه انتهایی کمان متناظر با این زاویه‌ها بر هم منطبق است. این زاویه‌ها را **هم‌انتهای** می‌نامیم.

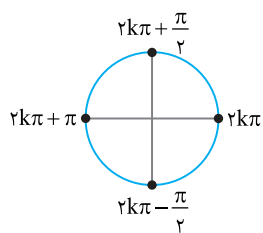
مثال: زاویه‌های 3° ، $3^\circ + 36^\circ$ ، $3^\circ - 36^\circ$ و $2 \times 36^\circ + 3^\circ$ هم‌انتهای هستند.



نکته

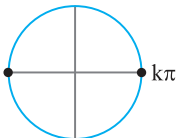
اگر k عدد صحیح دلخواهی باشد،

- زاویه‌های α° و $k \times 36^\circ + \alpha^\circ$ هم‌انتهای هستند.
- زاویه‌های α رادیان و $2k\pi + \alpha$ رادیان هم‌انتهای هستند.



مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان، $\frac{\pi}{2}$ رادیان، π رادیان و $-\frac{\pi}{2}$ رادیان

هم‌انتهای هستند، به ترتیب برابر $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $2k\pi + \pi$ ، $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ و $2k\pi$ است (k عددی صحیح است).

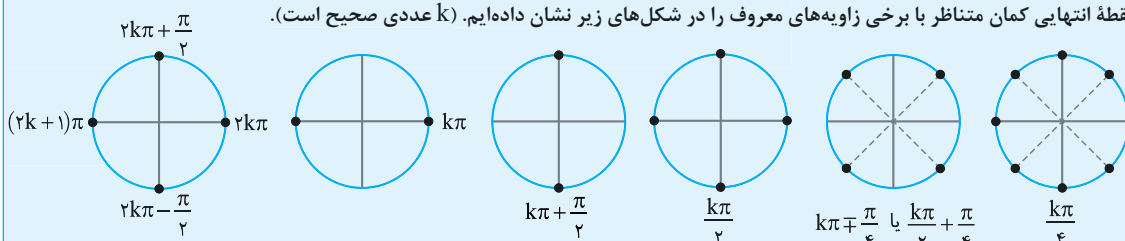


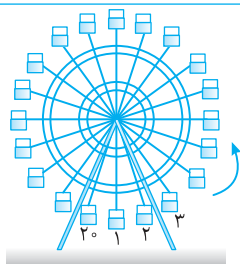
مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان یا π رادیان هم‌انتهای هستند، به ترتیب $2k\pi$ یا $2k\pi + \pi$ است که می‌توان آن‌ها را به صورت $k\pi$ نشان داد (k عددی صحیح است).

۸۶

نکته

نقطه انتهایی کمان متناظر با برخی زاویه‌های معروف را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم. (k عددی صحیح است).





یک چرخ و فلک مطابق شکل مقابل ۲۰ کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ و فلک، کابین شماره یک در پایین ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازه $\frac{47\pi}{5}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی

دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می گیرد؟

- (۱) ششم (۲) هفتم (۳) چهاردهم (۴) پانزدهم

تست

راه حل

زاویه بین هر دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ رادیان است. از طرف دیگر $\frac{47\pi}{5} = 8\pi + \frac{7\pi}{5} = 8\pi + 14 \times \frac{\pi}{10}$. وقتی چرخ و فلک ۴ دور کامل می زند، یعنی

8π رادیان می چرخد، هر کابین در جای اولیه خود قرار می گیرد. سپس چرخ و فلک به اندازه $14 \times \frac{\pi}{10}$ دیگر دوران می کند که کابین شماره یک به مکان فعلی ۱۴ کابین جلوتر، یعنی کابین پانزدهم منتقل می شود.

۸۷

رابطه بین واحد درجه و واحد رادیان

با توجه به تعریف واحدهای درجه و رادیان اندازه زاویه های معروف را برحسب درجه و رادیان در جدول زیر نوشته ایم.

درجه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

نکته

اگر اندازه زاویه ای برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن گاه $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

$$\frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

مثال: اگر اندازه زاویه 120° برحسب رادیان برابر R باشد، آن گاه

$$\frac{D}{180} = \frac{\pi}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{12} = 15^\circ$$

همین طور اگر اندازه زاویه $\frac{\pi}{12}$ رادیان برحسب درجه برابر D باشد، آن گاه

$$\frac{1}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

مثال: اگر R اندازه زاویه 1° برحسب رادیان باشد، آن گاه

$$\frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{\pi}$$

بنابراین $1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$. همین طور، اگر D اندازه زاویه ۱ رادیان برحسب درجه باشد، آن گاه

بنابراین $1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$.

تست

اندازه زاویه 55° برحسب رادیان کدام است؟

$$\frac{7\pi}{18} \quad (۴)$$

$$\frac{13\pi}{36} \quad (۳)$$

$$\frac{11\pi}{36} \quad (۲)$$

$$\frac{5\pi}{18} \quad (۱)$$

$$\frac{55}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{11\pi}{36} \text{ رادیان}$$

در تساوی $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ قرار می دهیم $D = 55^\circ$:

راه حل

تست

مجموع و تفاضل دو زاویه به ترتیب برابر 110° و $\frac{7\pi}{9}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر چند رادیان است؟

$$\frac{\pi}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{5\pi}{12} \quad (۳)$$

$$\frac{7\pi}{12} \quad (۲)$$

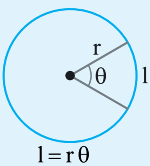
$$\frac{\pi}{8} \quad (۱)$$

راه حل

ابتدا توجه کنید که 110° برابر $\frac{11\pi}{18}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر را a و اندازه زاویه کوچکتر را b در نظر می گیریم:

$$a+b=\frac{11\pi}{18}, \quad a-b=\frac{7\pi}{9}$$

از حل این دستگاه به دست می آید $a=\frac{5\pi}{12}$.

طول کمان


به کمک اندازه گیری برحسب رادیان می توانیم رابطه ای بین طول کمان، شعاع دایره و اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان پیدا کنیم. فرض کنید شعاع دایره r باشد. اگر طول کمان برابر r باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان 1 رادیان است. اگر طول کمان برابر l باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر کمان برابر $\frac{l}{r}$ رادیان است. بنابراین $\theta = \frac{l}{r}$.

نکته

اگر در دایره ای به شعاع r اندازه زاویه ای مرکزی θ رادیان و طول کمان روبه رو به این زاویه l باشد، آن گاه $l=r\theta$.

توجه کنید که واحد l و r یکسان در نظر گرفته می شود.

تست

طول کمان نظیر زاویه مرکزی به اندازه 15° در دایره ای به شعاع 18 سانتی متر، چند سانتی متر است؟

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (۱)$$

راه حل

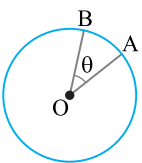
اگر اندازه زاویه 15° برحسب رادیان برابر R باشد، آن گاه

$$\frac{15^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{12}$$

بنابراین طول کمان مورد نظر برابر است با $18 \times \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$ سانتی متر.

تست

در شکل مقابل، دایره ای در نقطه A روی مسیری دایره ای به مرکز نقطه O و به شعاع 150° متر ایستاده است. این دایره با سرعت 5 متر بر ثانیه می دود. اگر پس از 10 ثانیه در نقطه B باشد، اندازه θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=3$)



$$4^\circ \quad (۴)$$

$$3^\circ \quad (۳)$$

$$2^\circ \quad (۲)$$

$$1^\circ \quad (۱)$$

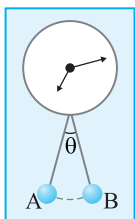
راه حل

مسافتی که این دایره در 10 ثانیه طی می کند برابر است با $10 \times 5 = 50^\circ$ متر. بنابراین طول کمان AB برابر 50° متر است. در نتیجه

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{50^\circ}{150^\circ} = \frac{1}{3} \text{ rad} = 180^\circ \left(\frac{1}{3} \right) = 180^\circ \left(\frac{1}{3} \right) = 60^\circ$$

تست

در شکل مقابل، طول پاندول ساعت 3° سانتی متر است و این پاندول در هر ثانیه از A به B یا برعکس جابه جا می شود. اگر طول مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می کند برابر با 8 سانتی متر باشد، اندازه θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=3$)

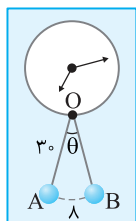


$$14^\circ \quad (۲)$$

$$12^\circ \quad (۱)$$

$$18^\circ \quad (۴)$$

$$16^\circ \quad (۳)$$



توجه کنید مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می کند، کمانی از دایره ای به مرکز نقطه O و شعاع ۳۰ سانتی متر است

(شکل مقابل را ببینید). بنابراین $\theta = \frac{l}{r} = \frac{\lambda}{30} = \frac{4}{15} \text{ rad}$ ، در نتیجه

$$\theta = 18^\circ \left(\frac{15}{\pi} \right) = 18^\circ \left(\frac{15}{3} \right) = 16^\circ$$

راه حل

در مدت زمان یک ساعت عقربه دقیقه شمار یک دور کامل می چرخد، پس اندازه زاویه ای که طی می کند، 360° یا 2π رادیان است. در همین مدت، عقربه ساعت شمار، یک دوازدهم یک دایره را می چرخد. بنابراین اندازه زاویه ای که طی می کند برابر 30° یا $\frac{\pi}{6}$ رادیان است.

نکته

در یک دقیقه عقربه دقیقه شمار 6° یا $\frac{\pi}{30}$ رادیان را طی می کند. در همین مدت عقربه ساعت شمار $(\frac{1}{5})^\circ$ یا $\frac{\pi}{360}$ رادیان را طی می کند.

تست ۹

وقتی عقربه ساعت شمار به اندازه $\frac{3\pi}{8}$ رادیان دوران می کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

۱۴۰ (۴)

۱۳۵ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۰۵ (۱)

$$\frac{6^\circ}{x} = \frac{\frac{\pi}{360}}{\frac{3\pi}{8}} \Rightarrow x = 135 \text{ دقیقه}$$

راه حل اول در هر ساعت عقربه ساعت شمار $\frac{1}{12}$ دور می چرخد که معادل $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان است. بنابراین

$$\frac{1}{x} = \frac{360^\circ}{\frac{3\pi}{8}} \Rightarrow x = 135 \text{ دقیقه}$$

راه حل دوم با استفاده از نکته بالا نتیجه می گیریم:

راه حل

دست گرمی

۷۷- اندازه زاویه 75° برحسب رادیان کدام است؟

$\frac{5\pi}{12}$ (۴)

$\frac{7\pi}{12}$ (۳)

$\frac{13\pi}{12}$ (۲)

$\frac{11\pi}{12}$ (۱)

۷۸- در دایره مثلثاتی انتهای کمان روبه رو به زاویه 50° در کدام ناحیه قرار دارد؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

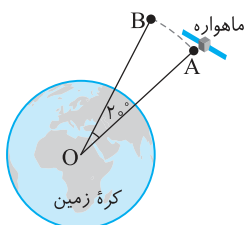
۷۹- مطابق شکل ماهواره ای در شعاع ۳۶۰۰۰ کیلومتری از مرکز زمین در حال گردش روی یک مسیر دایره ای است. این ماهواره چند کیلومتر باید طی کند تا از نقطه A به نقطه B برسد؟

2000π (۱)

2400π (۲)

4000π (۳)

4800π (۴)



واحدهای اندازه گیری زاویه (۱)

آزمون ۴۵

۴۴۱- اندازه دو زاویه از مثلثی 36° و $\frac{3\pi}{10}$ رادیان است. اندازه بزرگترین زاویه این مثلث برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{10}$ (۴) $\frac{2\pi}{5}$

۴۴۲- حاصل ضرب اندازه‌های یک زاویه برحسب درجه و برحسب رادیان برابر $\frac{5\pi}{4}$ است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) 100° (۲) 60° (۳) 30° (۴) 15°

۴۴۳- انتهای کمان متناظر با زاویه‌های $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را روی دایره مثلثاتی به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) لوزی (۴) دوزنقه

۴۴۴- زاویه 56° روی دایره مثلثاتی با کدام یک از زاویه‌های زیر هم‌انتهاست؟

- (۱) 160° (۲) -160° (۳) 140° (۴) -140°

۴۴۵- یک چرخ‌وفلک 20° کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ‌وفلک، کابین شماره یک در پایین‌ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ‌وفلک به اندازه

$\frac{48\pi}{5}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می‌گیرد؟

- (۱) چهاردهم (۲) پانزدهم (۳) شانزدهم (۴) هفدهم

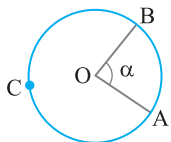
۴۴۶- کدام یک از اعداد زیر کوچک‌تر است؟ (زاویا برحسب رادیان هستند.)

- (۱) $\sin 1$ (۲) $\sin 2$ (۳) $\sin 4$ (۴) $\sin 6$

۴۴۷- وقتی عقربه ساعت شمار به اندازه $\frac{5\pi}{8}$ رادیان دوران می‌کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

- (۱) ۱۲۵ (۲) ۱۷۵ (۳) ۲۲۵ (۴) ۲۷۵

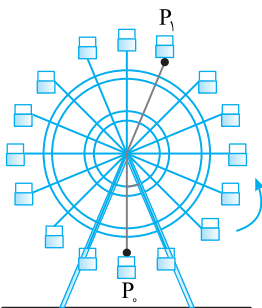
۴۴۸- در شکل مقابل O مرکز دایره و اندازه شعاع دایره 4π واحد است. اگر طول کمان ACB، π واحد بیشتر از طول کمان AB باشد، اندازه زاویه α چند رادیان است؟



- (۱) $\pi - \frac{1}{4}$ (۲) $\pi - \frac{1}{8}$ (۳) $\pi - \frac{1}{2}$ (۴) $\pi - \frac{3}{2}$

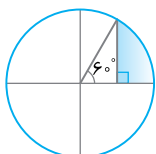
۴۴۹- شعاع چرخ‌وفلک شکل مقابل 40 متر است و در جهت مثلثاتی می‌چرخد. مسافران از

نقطه P_0 تا نقطه P_1 چند متر روی چرخ‌وفلک طی می‌کنند؟



- (۱) 35π (۲) 25π (۳) 36π (۴) 32π

۴۵۰- در شکل مقابل اندازه شعاع دایره $6\sqrt{3}$ است. اندازه محیط قسمت رنگی کدام است؟



- (۱) $3(1+\sqrt{3}+\pi)$ (۲) $2(1+\sqrt{3}+\pi)$ (۳) $3(1+\sqrt{3})+2\pi$ (۴) $3(1+\sqrt{3})+2\pi$

سؤال	گام
۴۴۱	۸۷
۴۴۲	۸۷
۴۴۳	۸۴
۴۴۴	۸۵
۴۴۵	۸۶
۴۴۶	۸۴
۴۴۷	۸۹
۴۴۸	۸۸
۴۴۹	۸۶ ۸۸
۴۵۰	۶۹ ۸۸

واحدهای اندازه گیری زاویه (۲)

سؤال	گام
۴۵۱	۸۷
۴۵۲	۸۷
۴۵۳	۸۴
۴۵۴	۸۵
۴۵۵	۸۶
۴۵۶	۸۴
۴۵۷	۸۹
۴۵۸	۸۸
۴۵۹	۷۳ ۸۸
۴۶۰	۸۷ ۸۸

۴۵۱- مجموع اندازه های دو زاویه 40° و تفاضل اندازه های آنها $\frac{4\pi}{9}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $\frac{4\pi}{9}$ (۳) $\frac{8\pi}{9}$ (۴) $\frac{11\pi}{9}$

۴۵۲- اندازه یک زاویه برحسب رادیان از $\frac{\pi}{8}$ برابر اندازه آن برحسب درجه $\frac{5\pi}{36}$ کمتر است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) 15° (۲) 20° (۳) 40° (۴) 50°

۴۵۳- انتهای کمان های متناظر با زاویه های $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را روی دایره مثلثاتی به طور متوالی به هم وصل می کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) متوازی الاضلاع (۴) دوزنقه

۴۵۴- زاویه ای با اندازه $\frac{28\pi}{3}$ رادیان روی دایره مثلثاتی با زاویه α هم انتهاست. اندازه α برحسب رادیان کدام می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{31\pi}{6}$ (۳) $-\frac{2\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{3}$

۴۵۵- انتهای کمان نظیر زاویه هایی به صورت $\alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ را به ازای مقادیر مختلف و صحیح k روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم.

اگر این نقاط را متوالیاً به هم وصل کنیم، چه شکلی درست می شود؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) پنج ضلعی منتظم (۴) شش ضلعی منتظم

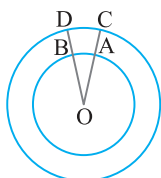
۴۵۶- کدام یک از اعداد زیر بزرگتر است؟ (زاویه ها برحسب رادیان هستند.)

- (۱) $\tan 2$ (۲) $\tan 3$ (۳) $\tan 5$ (۴) $\tan 6$

۴۵۷- اندازه زاویه ای که عقربه ساعت شمار بین ساعت ۹ و $10:20'$ طی می کند، چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{9}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{9}$ (۴) $\frac{5\pi}{9}$

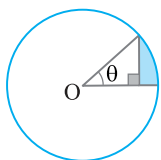
۴۵۸- در شکل مقابل دو دایره هم مرکز به شعاع ۶ و ۹ واحد رسم شده است و $\widehat{DOC} = 25^\circ$. طول کمان CD چقدر از طول کمان AB بیشتر است؟



- (۱) $\frac{5\pi}{36}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$

- (۳) $\frac{5\pi}{12}$ (۴) $\frac{5\pi}{9}$

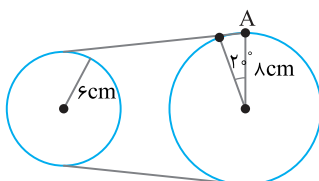
۴۵۹- شعاع دایره شکل مقابل به مرکز O یک واحد است. مقدار محیط قسمت رنگی برحسب θ کدام است؟



- (۱) $1 + \sin \theta + \cos \theta$ (۲) $1 + \sin \theta - \cos \theta$

- (۳) $1 - \theta + \sin \theta + \cos \theta$ (۴) $1 + \theta + \sin \theta - \cos \theta$

۴۶۰- در شکل مقابل اگر نقطه A، 20° روی چرخ بزرگتر جابه جا شود، چرخ کوچکتر چند درجه جابه جا می شود؟



- (۱) $\frac{4\pi}{27}$ (۲) $\frac{9\pi}{27}$

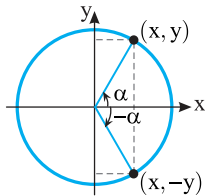
- (۳) $\frac{40}{3}$ (۴) $\frac{80}{3}$

درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها

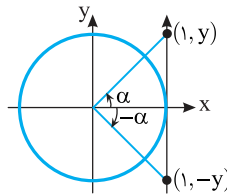
توجه کنید که نسبت‌های مثلثاتی زاویه $2k\pi + \alpha$ با نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه α برابرند، زیرا این دو زاویه هم انتها هستند (k عددی صحیح است). بنابراین،

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

همین‌طور، نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\alpha$ را می‌توان از روی نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه α به کمک شکل‌های زیر به‌دست آورد.



$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= \frac{1}{\tan(-\alpha)} = \frac{1}{-\tan \alpha} = -\cot \alpha\end{aligned}$$

نکته

به روش زیر می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای دیگر حساب کنیم.

(۱) زاویه مورد نظر را به صورت $k\pi \pm \alpha$ (k عددی صحیح است) یا $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ (k عددی صحیح و فرد است) می‌نویسیم.

(۲) با فرض اینکه α زاویه‌ای حاده است، ناحیه‌ای را که انتهای کمان نظیر زاویه مورد نظر در آن قرار دارد مشخص می‌کنیم.

(۳) علامت نسبت مثلثاتی مورد نظر در ناحیه به‌دست آمده را یادداشت می‌کنیم.

(۴) عبارت $k\pi \pm \alpha$ یا $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ را حذف می‌کنیم.

(۵) اگر در مرحله قبلی $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ را حذف کردیم، نسبت مثلثاتی را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

- سینوس به کسینوس
- کسینوس به سینوس
- تانژانت به کتانژانت
- کتانژانت به تانژانت

مثال:

$$۱) \sin ۳۹۰^\circ = \sin(۲ \times ۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{1}{2} \quad ۲) \cos ۱۱۰^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) = -\sin ۲۰^\circ$$

$$۳) \tan \frac{11\pi}{6} = \tan(۲\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ۴) \cot \frac{13\pi}{10} = \cot(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{5}) = \tan \frac{\pi}{5}$$

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد و $k \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه با استفاده از روش گفته شده نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آیند.

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan \alpha$
$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan \alpha$
$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin \alpha$	$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan \alpha$	$\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot \alpha$
$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin \alpha$	$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan \alpha$	$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot \alpha$

تست
 □□□□

حاصل عبارت $A = \frac{1+\cos(13\pi-\alpha)}{\sin^2(\delta\pi-\alpha)} \times \frac{1+\cos(12\pi+\alpha)}{\sin(7\pi+\alpha)}$ به ازای $\alpha = \frac{\delta\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

راهنما

ابتدا توجه کنید که

$$\cos(13\pi-\alpha)=-\cos \alpha, \quad \cos(12\pi+\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\delta\pi-\alpha)=\sin \alpha, \quad \sin(7\pi+\alpha)=-\sin \alpha$$

$$A = \frac{1-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \times \frac{1+\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{-\sin^3 \alpha} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha}$$

بنابراین

$$\text{بنابراین مقدار } A \text{ به ازای } \alpha = \frac{\delta\pi}{6} \text{ برابر است با } -\frac{1}{\sin \frac{\delta\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

تست
 □□□□

حاصل عبارت $A = 2\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) + 3\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) + 4\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha) + 5\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ به ازای $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۲

راهنما

ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos \alpha$$

$$\text{بنابراین } A = 2\cos \alpha + 3\cos \alpha - 4\cos \alpha - 5\cos \alpha = -4\cos \alpha. \quad \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ به ازای } A \text{ برابر است با } -4\cos \frac{2\pi}{3} = -4(-\frac{1}{2}) = 2$$

تست
 □□□□

مقدار $\sin 42^\circ \cos 39^\circ + \cos(-66^\circ) \sin(-33^\circ)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

راهنما

توجه کنید که

$$\sin 42^\circ = \sin(36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 39^\circ = \cos(36^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-66^\circ) = \cos 66^\circ = \cos(72^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin(-33^\circ) = -\sin 33^\circ = -\sin(36^\circ - 3^\circ) = -(-\sin 3^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با } \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

تست
 □□□□

حاصل $A = 3\sin \frac{3\pi}{4} + 5\sin \frac{\delta\pi}{4} + 7\sin \frac{7\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$

راهنما

ابتدا توجه کنید که

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\delta\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{7\pi}{4} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{بنابراین } A = 3(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 5(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 7(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

تست

اگر $\tan 2^\circ = a$ ، مقدار $\frac{\tan 200^\circ + \cot 16^\circ}{\tan 76^\circ + \cot 34^\circ}$ برحسب a کدام است؟

- (۱) $a+1$ (۲) $a-1$ (۳) $\frac{a}{a+1}$ (۴) $\frac{a}{a-1}$

می‌توان نوشت

$$\tan 200^\circ = \tan(180^\circ + 20^\circ) = \tan 20^\circ = a$$

$$\cot 16^\circ = \cot(180^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\tan 76^\circ = \tan(4 \times 18^\circ + 4^\circ) = \tan 4^\circ = 1$$

$$\cot 34^\circ = \cot(36^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{a - \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a^2 - 1}{a - 1} = a + 1 \text{ با } a+1 \text{ نظر برابر است}$$

نکته

اگر زاویه‌های α و β مکمل یکدیگر باشند، سینوس آن‌ها با هم برابر است و کسینوس آن‌ها قرینه یکدیگر، تانژانت آن‌ها قرینه یکدیگر و کتانژانت آن‌ها هم قرینه یکدیگر است.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta = \pi &\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta, & \cos \alpha = -\cos \beta \\ \tan \alpha = -\tan \beta, & \cot \alpha = -\cot \beta \end{aligned}$$

تست

مقدار عبارت $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، آن‌گاه $\sin \alpha = \sin \beta$. بنابراین

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}$$

در نتیجه

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}} = 1$$

تست

مقدار عبارت $A = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸۰

ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = 180^\circ$ ، آن‌گاه $\cos \beta = -\cos \alpha$ و در نتیجه $\cos \alpha + \cos \beta = 0$. بنابراین

$$\cos 1^\circ + \cos 179^\circ = 0, \quad \cos 2^\circ + \cos 178^\circ = 0, \quad \dots, \quad \cos 89^\circ + \cos 91^\circ = 0$$

از طرف دیگر $\cos 90^\circ = 0$ و $\cos 180^\circ = -1$. بنابراین $A = -1$.

تست

حاصل $A = \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \dots + \cos^3 \frac{10\pi}{11}$ کدام است؟

- (۱) $5 \cos^2 \frac{\pi}{11}$ (۲) $10 \cos^3 \frac{\pi}{11}$ (۳) ۱ (۴) صفر

را حل

ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ آن گاه $\cos \beta = -\cos \alpha$. پس $\cos^3 \beta = -\cos^3 \alpha$ و در نتیجه $\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta = 0$. بنابراین

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{11} + \frac{10\pi}{11} &= \pi \Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{10\pi}{11} = 0 \\ \frac{2\pi}{11} + \frac{9\pi}{11} &= \pi \Rightarrow \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \cos^3 \frac{9\pi}{11} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{5\pi}{11} + \frac{6\pi}{11} &= \pi \Rightarrow \cos^3 \frac{5\pi}{11} + \cos^3 \frac{6\pi}{11} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0$$

۹۲

نکته

اگر زاویه های α و β متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است و تانژانت یکی برابر کتانژانت دیگری است.

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta$$

تست

مقدار $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{7\pi}{5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱

را حل

توجه کنید که $\frac{7\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \pi$. پس $\sin \frac{7\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{10}$. در نتیجه $\sin^2 \frac{7\pi}{5} = \cos^2 \frac{\pi}{10}$. بنابراین $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{7\pi}{5} = \sin^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{\pi}{10} = 1$

دست گرمی

۸۰- حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin(\pi + \alpha) - 4 \sin(\pi - \alpha)}{3 \cos(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)}$ کدام است؟

- (۱) $3 \tan \alpha$ (۲) $\frac{3}{2} \tan \alpha$ (۳) $-\tan \alpha$ (۴) $-3 \tan \alpha$

۸۱- اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، مقدار $\frac{\cos(\pi - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(-\alpha) - \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\cot \alpha$ (۲) $-\cot \alpha$ (۳) $\cos \alpha$ (۴) $-\cos \alpha$

۸۲- حاصل عبارت $\frac{\sin 135^\circ - \cos 12^\circ}{\sin 135^\circ + \cos 12^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $1 + 2\sqrt{2}$ (۲) $2 - 3\sqrt{2}$ (۳) $3 + 2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

۸۳- حاصل عبارت $A = \sin \frac{7\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} + \cot \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۸۴- مقدار $\cos^3 \frac{\pi}{8} + \cos^3 \frac{3\pi}{8} + \cos^3 \frac{5\pi}{8} + \cos^3 \frac{7\pi}{8}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۱)

آزمون ۴۷

- ۴۶۱- حاصل عبارت $A = \tan \alpha \cot(-\alpha) + \sin^2(-\alpha) + \cos^2 \alpha$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $-2 \sin^2 \alpha$
- ۴۶۲- حاصل $\cos(x-90^\circ) \cot(-x-180^\circ)$ کدام است؟
 (۱) $-\sin x$ (۲) $-\cos x$ (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$
- ۴۶۳- اگر $\tan \theta = 0/4$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) + \sin(3\pi - \theta)}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$
- ۴۶۴- اگر $x + 3y = \frac{\pi}{2}$ ، حاصل $\tan(2x + 3y)$ کدام است؟
 (۱) $-\tan x$ (۲) $-\cot x$ (۳) $\tan x$ (۴) $\cot x$
- ۴۶۵- اگر $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = 2 \sin(\frac{5\pi}{2} + x)$ ، حاصل $\tan x$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{2}$
- ۴۶۶- حاصل $\cos 51^\circ$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۴۶۷- حاصل $\cos \frac{43\pi}{6}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۴۶۸- حاصل $\sin \frac{23\pi}{6} \cos \frac{16\pi}{3} \tan \frac{35\pi}{4} \cot(-\frac{43\pi}{4})$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- ۴۶۹- مقدار عبارت $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5}}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$
- ۴۷۰- مقدار عبارت $A = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر

سؤال	گام
۴۶۱	۸۱ ۹۰
۴۶۲	۸۱ ۹۰
۴۶۳	۸۱ ۹۰
۴۶۴	۹۲
۴۶۵	۹۰
۴۶۶	۹۰
۴۶۷	۹۰
۴۶۸	۹۰
۴۶۹	۹۱
۴۷۰	۹۱

نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۲)

آزمون ۴۸

سؤال	گام
۴۷۱	۹۰
۴۷۲	۸۱ ۹۰
۴۷۳	۸۱ ۹۰
۴۷۴	۸۱ ۹۰
۴۷۵	۷۴ ۸۱ ۹۰
۴۷۶	۹۰
۴۷۷	۹۰ ۲۹۰
۴۷۸	۹۰
۴۷۹	۹۱ ۹۲
۴۸۰	۹۲

۴۷۱- حاصل عبارت $A = 3 \sin(3\pi - \alpha) + 4 \sin(4\pi + \alpha) + 5 \sin(5\pi + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $4 \sin \alpha$ (۲) $8 \sin \alpha$ (۳) $2 \sin \alpha$ (۴) $12 \sin \alpha$

۴۷۲- حاصل عبارت $A = \frac{3 \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{2 \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

- (۱) $2 \cot^2 \alpha$ (۲) $\frac{4}{3} \cot^2 \alpha$ (۳) $2 \tan^2 \alpha$ (۴) $\frac{4}{3} \tan^2 \alpha$

۴۷۳- اگر $3 = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi + \alpha)}$ ، مقدار $\tan(\alpha - \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۴۷۴- اگر $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2}$ ، حاصل $\frac{1}{1 - \cot \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \beta}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan \beta$ (۴) $\cot \alpha$

۴۷۵- اگر $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ و $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{5}{12}$

۴۷۶- حاصل کسر $\frac{\cos(-60^\circ) + \cot 675^\circ}{\tan 945^\circ - \sin(-33^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

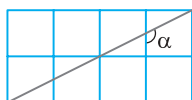
۴۷۷- اگر $\tan 15^\circ = a$ ، حاصل عبارت $A = \frac{2 \tan 75^\circ + \tan 15^\circ}{3 \tan 165^\circ - \tan 255^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{3a^2 + 1}$ (۲) $\frac{3}{3a^2 - 1}$ (۳) $\frac{1}{3a^2 - 1}$ (۴) $\frac{-1}{3a^2 + 1}$

۴۷۸- مقدار عبارت $A = 4 \sin^2 \frac{101\pi}{3} - 2 \cos \frac{98\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $1 + \sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷۹- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۸۰- حاصل عبارت $A = \tan \frac{\pi}{14} \tan \frac{2\pi}{14} \dots \tan \frac{6\pi}{14}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (۳)

آزمون ۴۹

- ۴۸۱- حاصل عبارت $A = \frac{\tan(\pi - \alpha) + 3 \tan(\pi + \alpha)}{\tan(2\pi - \alpha) - \tan(2\pi + \alpha)}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۴۸۲- مقدار عبارت $A = \frac{4 \sin(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) + 2 \cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{3 \tan(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) - 6 \cot(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6})}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ۴۸۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC حاصل عبارت $\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$
- ۴۸۴- اگر $a + b = \frac{5\pi}{2}$ ، حاصل $\frac{\sin a + \tan a \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1}$ کدام است؟
 (۱) $\tan b$ (۲) $\cot b$ (۳) $-\cot b$ (۴) $-\tan b$
- ۴۸۵- اگر $3a + 2b = \pi$ و $\cos(a + b) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin \frac{a}{2}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$
- ۴۸۶- حاصل عبارت $\frac{\sin^2 41^\circ + \sin^2 49^\circ}{\tan 73^\circ \times \cot 11^\circ}$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲
- ۴۸۷- اگر $a = \cot 25^\circ$ ، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 115^\circ - 3 \cos 155^\circ}{3 \cos 295^\circ + \cos 235^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3a+1}{3-a}$ (۲) $\frac{3a-1}{a-3}$ (۳) $\frac{3a-1}{a+3}$ (۴) $\frac{a+1}{3a-1}$
- ۴۸۸- حاصل عبارت $A = \sin \frac{11\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} - \cot \frac{9\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲
- ۴۸۹- حاصل عبارت $A = \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{5\pi}{16} + \cos^2 \frac{7\pi}{16}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$
- ۴۹۰- مقدار عبارت $A = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ}{\cos 91^\circ + \cos 92^\circ + \dots + \cos 179^\circ}$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

سؤال	گام
۴۸۱	۹۰
۴۸۲	۹۰
۴۸۳	۹۲
۴۸۴	۸۱ ۹۰
۴۸۵	۹۲
۴۸۶	۹۰
۴۸۷	۸۱ ۹۰
۴۸۸	۹۰
۴۸۹	۸۱ ۹۲
۴۹۰	۹۱

فصل دوم: مثلثات

درس ششم: سینوس و کسینوس زاویه 2α

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، سینوس و کسینوس زاویه 2α را می‌توانیم از تساوی‌های زیر به دست آوریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

اگر در تساوی $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ به جای $\cos^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \sin^2 \alpha$ ، به دست می‌آید

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

همین‌طور، اگر به جای $\sin^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \cos^2 \alpha$ ، به دست می‌آید

۹۳

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

مثال: اگر $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ، آن‌گاه $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$

تست

□□□□

اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

۴) $-\frac{12}{25}$

۳) $\frac{12}{25}$

۲) $\frac{24}{25}$

۱) $-\frac{24}{25}$

راه‌حل

پس $\cos \alpha$ عددی منفی است.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$\text{بنابراین } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

پس $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$

$$\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \frac{576}{625} \Rightarrow |\sin 2\alpha| = \frac{24}{25}$$

اکنون از اتحاد $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 2\alpha = -\frac{24}{25} \text{ در نتیجه } 18^\circ < 2\alpha < 36^\circ \text{ پس } 9^\circ < \alpha < 18^\circ$$

تست

□□□□

حاصل عبارت $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \tan \alpha$ کدام است؟

۴) $\cos \alpha$

۳) $\sin \alpha$

۲) ۱

۱) -۱

راه‌حل

از روابط $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \tan \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1$$

تست

□□□□

حاصل عبارت $\frac{2 \cos^2 x - \cos 2x}{2 \sin^2 x + \cos 2x}$ کدام است؟

۴) $\cot x$

۳) $\tan x$

۲) -۱

۱) ۱

راه‌حل

$$\text{توجه کنید که } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \text{ بنابراین } \frac{2 \cos^2 x - \cos 2x}{2 \sin^2 x + \cos 2x} = \frac{2 \cos^2 x - (2 \cos^2 x - 1)}{2 \sin^2 x + (1 - 2 \sin^2 x)} = \frac{1}{1} = 1$$

تست
 □□□□

 حاصل عبارت $A = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x$ کدام است؟

- ۱) -1 ۲) 1 ۳) $2\sqrt{2} \sin x$ ۴) $2\sqrt{2} \cos x$

راه حل

 از اتحاد $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x)}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x \\ &= -1 - \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = -1 \end{aligned}$$

تست
 □□□□

 حاصل $\frac{2\sin^2 40^\circ - 1}{\sin 2^\circ}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2 \cos 1^\circ}$ ۲) $-\frac{1}{2 \cos 1^\circ}$ ۳) $2 \cos 1^\circ$ ۴) $-\frac{1}{\cos 1^\circ}$

راه حل

 توجه کنید که $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ و $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، بنابراین

$$\frac{2\sin^2 40^\circ - 1}{\sin 2^\circ} = \frac{-\cos 8^\circ}{2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ} = -\frac{\cos(9^\circ - 1^\circ)}{2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ} = -\frac{\sin 1^\circ}{2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ} = -\frac{1}{2 \cos 1^\circ}$$

تست
 □□□□

 مقدار $\sin 10^\circ \cos 10^\circ$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

راه حل

ابتدا توجه کنید که

$$\sin 10^\circ = \sin(9^\circ + 1^\circ) = \cos 1^\circ, \quad \cos 10^\circ = \cos(9^\circ + 1^\circ) = -\sin 1^\circ$$

$$\sin 10^\circ \cos 10^\circ = -\sin 1^\circ \cos 1^\circ = -\frac{1}{2}(2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ) = -\frac{1}{2} \sin(2 \times 1^\circ) = -\frac{1}{2} \sin 2^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

تست
 □□□□

 مقدار عبارت $A = \left(\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ}\right) \left(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ}\right)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{11}{4}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) 2

راه حل

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A &= \left(\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ}\right) \left(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ}\right) = \left(\frac{\cos 75^\circ \sin 75^\circ - 1}{\sin 75^\circ}\right) \left(\frac{\sin 75^\circ \cos 75^\circ - 1}{\cos 75^\circ}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} \sin 15^\circ - 1\right) \left(\frac{1}{2} \sin 15^\circ - 1\right)}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1\right)}{\frac{1}{2} \sin 15^\circ} = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

تست
 □□□□

 مقدار عبارت $A = \sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

راه حل

 ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم: $A = \sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$

$$\text{بنابراین به ازای } x = \frac{\pi}{24} \text{ به دست می‌آید } A = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{24} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

تست ۹

مقدار عبارت $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

راه حل

فرض کنید $A = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$. دوطرف این تساوی را در $\sin 20^\circ$ ضرب می‌کنیم و از دستور $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم:
 $\sin 20^\circ A = \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 80^\circ \right) \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 160^\circ \right) = \frac{1}{8} \sin 160^\circ$
 اکنون توجه کنید که $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$. بنابراین $\sin 20^\circ A = \frac{1}{8} \sin 20^\circ$. پس $A = \frac{1}{8}$.

نکته

چون نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 45° را می‌دانیم، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 15° و 22.5° را حساب کنیم.

مثال: مقدار $\cos 15^\circ$ را حساب می‌کنیم. اگر در تساوی $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ قرار دهیم $\alpha = 15^\circ$ ، به دست می‌آید:
 $\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$

تست ۱۰

اگر $\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a}}{2}$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

راه حل

در اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ قرار می‌دهیم $\alpha = 22.5^\circ$. در این صورت:
 $\cos 45^\circ = 1 - 2 \sin^2 22.5^\circ \Rightarrow \sin^2 22.5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow a = 2$

نکته

اتحادهای $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ و $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ را می‌توانیم به صورت‌های زیر نیز بنویسیم:
 $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ ، $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$

تست ۱۱

مقدار $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

راه حل

توجه کنید که $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1 - \cos(2 \times \frac{5\pi}{16}) = 1 - \cos \frac{5\pi}{8}$. بنابراین $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1$.

عبارت‌های $1 + \sin 2\alpha$ و $1 - \sin 2\alpha$ را می‌توانیم به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$1 \pm \sin 2\alpha = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2$$

نکته

$$1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2, \quad 1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$$

تست ۱۲

ساده شده عبارت $A = \sqrt{1 - \sin 10^\circ} + \sqrt{1 + \sin 10^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $2 \sin 5^\circ$ (۲) $2 \cos 5^\circ$ (۳) $\sin 10^\circ$ (۴) $\cos 10^\circ$

راه حل

ابتدا توجه کنید که $1 - \sin 10^\circ = \sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ - 2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ = (\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2$. به همین ترتیب $1 + \sin 10^\circ = (\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2$.
 $A = \sqrt{(\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2} + \sqrt{(\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2} = |\sin 5^\circ - \cos 5^\circ| + |\sin 5^\circ + \cos 5^\circ|$
 بنابراین
 با توجه به اینکه $\cos 5^\circ > \sin 5^\circ > 0$ نتیجه می‌شود $A = -\sin 5^\circ + \cos 5^\circ + \sin 5^\circ + \cos 5^\circ = 2 \cos 5^\circ$.

تست
 □□□□

 اگر $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} = 7-4\sqrt{3}$ ، مقدار $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\pm(\frac{2-\sqrt{3}}{2})$ (۲) $\pm(\frac{3-\sqrt{2}}{2})$ (۳) $\pm(3-\sqrt{2})$ (۴) $\pm(2-\sqrt{3})$

راه حل

توجه کنید که

$$\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} = \frac{1-2\sin x \cos x}{1+2\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = 7-4\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \pm(2-\sqrt{3})$$

از طرف دیگر $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$ ، در نتیجهمجموع و تفاضل تانژانت و کتانژانت زاویه α را می‌توانیم برحسب نسبت‌های مثلثاتی 2α بنویسیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha$$

۹۷

نکته

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

تست
 □□□□
مقدار $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

راه حل

$$\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = \frac{2}{\sin 15^\circ} = \frac{2}{\sin(18^\circ - 3^\circ)} = \frac{2}{\sin 3^\circ} = 4$$

می‌توان نوشت

توجه کنید که

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \\ \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

بنابراین مقدار $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را می‌توانیم برحسب $\tan \alpha$ بنویسیم:

۹۸

نکته

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

تست
 □□□□
اگر $\cot x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\frac{1+2\cos 2x}{\sin 2x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

راه حل

$$\frac{1+2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}$$

توجه کنید که $\tan x = 2$ پس $\cot x = \frac{1}{2}$ ، $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = -\frac{3}{5}$ و $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{4}{5}$ در نتیجه

توجه کنید که

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= 1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 3 \left(\frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \right) = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

۹۹

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha, \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

نکته

اگر $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{9}{16}$ مقدار $\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha}$ کدام است؟

تست ۱۶

(۴) $-\frac{7}{8}$

(۳) $-\frac{11}{24}$

(۲) $-\frac{5}{8}$

(۱) $-\frac{3}{8}$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos 4\alpha = -\frac{3}{4}$$

توجه کنید که

راه حل

$$\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \left(-\frac{3}{4} \right)}{-\frac{3}{4}} = -\frac{11}{24}$$

بنابراین

دست گرمی

۸۵- اگر $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

(۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

(۲) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

(۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

۸۶- حاصل $\frac{1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos x}$ کدام است؟

(۴) $2 \cos x$

(۳) $\cos x$

(۲) $2 \sin x$

(۱) $\sin x$

۸۷- مقدار $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ}$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۱۶

(۲) ۹

(۱) ۱

۸۸- مقدار $\cos \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

۸۹- مقدار $3 \cos^2 105^\circ + \sin^2 105^\circ$ کدام است؟

(۴) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\sqrt{3}-1$

(۲) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

(۱) $1+\sqrt{3}$

۹۰- مقدار $\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ$ کدام است؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) ۱

۹۱- ساده شده عبارت $\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{8}$

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۱)

آزمون ۵۰

- ۴۹۱- حاصل $\frac{\cos 2x}{1-\tan^2 x}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\cos^2 x$ (۲) $\sin^2 x$ (۳) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (۴) $\frac{1}{\sin^2 x}$
- ۴۹۲- مقدار $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- ۴۹۳- مقدار $\cos 15^\circ \sin 75^\circ$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
- ۴۹۴- اگر $\theta < \pi < \frac{\pi}{2}$ و $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{24}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$ (۳) $\frac{12}{25}$ (۴) $-\frac{12}{25}$
- ۴۹۵- اگر $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶
- ۴۹۶- اگر $\cot x = 3$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ کدام است؟
 (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۹ (۴) $\frac{1}{9}$
- ۴۹۷- حاصل $\frac{1-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\sin 20^\circ$ (۲) $\cos 20^\circ$ (۳) $\tan 20^\circ$ (۴) $\cot 20^\circ$
- ۴۹۸- مقدار $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ} - \sin 40^\circ$ برابر کدام است؟
 (۱) $\sin 40^\circ$ (۲) $\cos 40^\circ$ (۳) $-\cos 40^\circ$ (۴) $-\sin 40^\circ$
- ۴۹۹- اگر $\sin 2x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $A = \sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟
 (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{17}{18}$
- ۵۰۰- اگر $\frac{\sin^3 x}{2 \sin x - \sin 2x} = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $-\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{7}{9}$

سؤال	گام
۴۹۱	۹۳
۴۹۲	۹۳ ۲۸۲
۴۹۳	۹۲ ۹۳
۴۹۴	۷۴ ۸۱ ۹۳
۴۹۵	۸۱ ۹۳ ۹۷
۴۹۶	۹۳ ۹۵
۴۹۷	۹۳
۴۹۸	۹۳ ۲۸۲
۴۹۹	۹۹
۵۰۰	۸۱ ۹۳ ۲۸۲

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۲)

سؤال	گام
۵۰۱	۸۱ ۹۳ ۹۷
۵۰۲	۹۳
۵۰۳	۹۲ ۹۳
۵۰۴	۹۸
۵۰۵	۹۳
۵۰۶	۹۲ ۹۳
۵۰۷	۷۴ ۹۹
۵۰۸	۹۲ ۹۳
۵۰۹	۹۲ ۹۳
۵۱۰	۹۲ ۹۳ ۹۷

۵۰۱- ساده شده عبارت $\sin 2\alpha(\tan \alpha + \cot \alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sin^2 \alpha$ (۴) $\cos^2 \alpha$

۵۰۲- مقدار $\sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۵۰۳- مقدار $\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}+2}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-2}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$

۵۰۴- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin 2x + \cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{5}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۵۰۵- اگر $\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} = 10$ ، مقدار $\cos 2\theta$ کدام است؟ ($\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $-\frac{71}{81}$ (۲) $-\frac{79}{81}$ (۳) $-\frac{7}{9}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۵۰۶- اگر $\cos 3^\circ = a$ ، مقدار $\sin 84^\circ$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{1-a^2}{2}$ (۲) $\frac{a^2-1}{2}$ (۳) $2a^2-1$ (۴) $1-2a^2$

۵۰۷- اگر $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۵۰۸- مقدار $\frac{\sin 5^\circ \sin 4^\circ}{\cos 1^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۵۰۹- اگر $x = \frac{\pi}{24}$ ، مقدار $\cos 1^\circ \times \cos 2^\circ$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۵۱۰- مقدار $\frac{\tan 5^\circ - \tan 4^\circ}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\tan 1^\circ$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\cot 1^\circ$

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۳)

آزمون ۵۲

- ۵۱۱- ساده شده عبارت $A = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{4} \sin 4x$ (۲) $\frac{1}{2} \sin 2x$ (۳) $\frac{1}{4} \cos 4x$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 2x$
- ۵۱۲- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$
- ۵۱۳- اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟ $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$
- (۱) $\frac{29}{7}$ (۲) $\frac{24}{7}$ (۳) $\frac{23}{7}$ (۴) $\frac{18}{7}$
- ۵۱۴- اگر $2 \sin x = 5 \cos x$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) $\frac{10}{29}$ (۳) $\frac{20}{29}$ (۴) $\frac{1}{29}$
- ۵۱۵- اگر $\sin x = 4 \sin y$ و $\cos y = 3 \cos x$ ، مقدار $\frac{\sin 2x}{\sin 2y}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$
- ۵۱۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{4}{3}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos 2x}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{25}{24}$ (۲) $-\frac{25}{24}$ (۳) 1 (۴) $\frac{1}{2}$
- ۵۱۷- مقدار $\frac{\sin^2 11^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ}$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) 1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{2}$
- ۵۱۸- حاصل $\frac{1 + \cos 4^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ}$ کدام است؟
- (۱) $\cos 2^\circ$ (۲) $2 \cos 2^\circ$ (۳) $4 \cos 2^\circ$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 2^\circ$
- ۵۱۹- اگر $\cos a \cos 2a = \frac{1}{16 \sin a}$ ، مقدار $\cos 8a$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$
- ۵۲۰- اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\cos^2 2x$ کدام است؟
- (۱) $\frac{1}{60}$ (۲) $\frac{59}{60}$ (۳) $\frac{13}{15}$ (۴) $\frac{11}{15}$

سؤال	گام
۵۱۱	۹۳
۵۱۲	۹۳
۵۱۳	۷۴ ۸۱ ۹۳
۵۱۴	۸۱ ۹۳ ۹۷
۵۱۵	۹۳
۵۱۶	۹۳ ۲۸۱ ۲۸۲ ۲۸۷
۵۱۷	۹۲ ۹۳
۵۱۸	۹۲ ۹۳ ۹۵
۵۱۹	۹۳
۵۲۰	۸۱ ۹۹

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۴)

آزمون ۵۳

سؤال	گام
۵۲۱	۹۳ ۲۸۲
۵۲۲	۷۴ ۹۵
۵۲۳	۷۴ ۹۵
۵۲۴	۹۹
۵۲۵	۹۳ ۹۷ ۲۸۱
۵۲۶	۷۴ ۹۷ ۲۸۲
۵۲۷	۹۲ ۹۳ ۲۸۲
۵۲۸	۸۱ ۹۳ ۹۷ ۳۰۲
۵۲۹	۹۳ ۹۷ ۲۸۱
۵۳۰	۸۱ ۹۳

۵۲۱- ساده شده عبارت $A = \frac{\cos 2x - \sqrt{2} \cos x + 1}{\sqrt{2} \cos x - 1}$ کدام است؟

$$\sqrt{2} \sin x \quad (۱) \quad \sqrt{2} \cos x \quad (۲) \quad \sqrt{2} \tan x \quad (۳) \quad \sqrt{2} \cot x \quad (۴)$$

۵۲۲- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ ، مقدار $\tan x + 2 \cot x$ کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (۱) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲) \quad -3\sqrt{2} \quad (۳) \quad -2\sqrt{2} \quad (۴)$$

۵۲۳- مقدار $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}}}$ کدام است؟

$$2 \sin \frac{\pi}{32} \quad (۱) \quad 2 \cos \frac{\pi}{32} \quad (۲) \quad \sin \frac{\pi}{32} \quad (۳) \quad \cos \frac{\pi}{32} \quad (۴)$$

۵۲۴- مقدار $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$$\frac{1}{8} \quad (۱) \quad \frac{3}{8} \quad (۲) \quad \frac{5}{8} \quad (۳) \quad \frac{7}{8} \quad (۴)$$

۵۲۵- مقدار $\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

$$2 \quad (۱) \quad 4 \quad (۲) \quad 6 \quad (۳) \quad 8 \quad (۴)$$

۵۲۶- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2}$ کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (۱) \quad -\frac{15}{4} \quad (۲) \quad -\frac{7}{4} \quad (۳) \quad -\frac{11}{4} \quad (۴)$$

۵۲۷- حاصل $\frac{\cos 2^\circ}{\sqrt{2} \cos 1^\circ} + 1$ چند برابر $\sin 8^\circ$ است؟

$$2 \quad (۱) \quad -2 \quad (۲) \quad \sqrt{2} \quad (۳) \quad -\sqrt{2} \quad (۴)$$

۵۲۸- اگر $\cot \alpha$ و $\tan \alpha$ جواب‌های معادله $x^2 - (m+3)x + 2m - 1 = 0$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (۱) \quad \frac{1}{3} \quad (۲) \quad \frac{1}{4} \quad (۳) \quad \frac{1}{8} \quad (۴)$$

۵۲۹- اگر $\tan^2 x + \cot^2 x = 5$ ، مقدار $\sin^2 2x$ کدام است؟

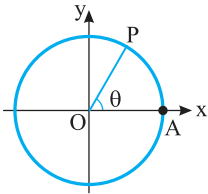
$$\frac{1}{3} \quad (۱) \quad \frac{4}{9} \quad (۲) \quad \frac{3}{7} \quad (۳) \quad \frac{8}{9} \quad (۴)$$

۵۳۰- ساده شده عبارت $\frac{1 + \sin 4^\circ - \cos 4^\circ}{1 + \sin 4^\circ + \cos 4^\circ}$ کدام است؟

$$\tan 2^\circ \quad (۱) \quad \cot 2^\circ \quad (۲) \quad \tan 4^\circ \quad (۳) \quad \cot 4^\circ \quad (۴)$$

فصل دوم: مثلثات

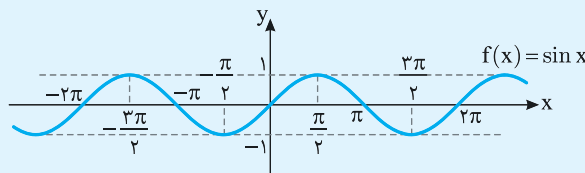
درس هفتم: توابع مثلثاتی



فرض کنید در دایره مثلثاتی شعاع OA را به اندازه θ رادیان دوران دهیم. در این صورت، مسافتی را که نقطه A روی دایره طی کرده است (طول AP) یا در نظر گرفتن علامت θ با x نشان می‌دهیم، یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد، x را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد، x را منفی می‌گیریم. در این صورت $x = \theta$ ، که در اینجا x عددی حقیقی است (معلوم است که اگر $\theta = 0$ ، آن‌گاه $x = 0$). به این ترتیب می‌توانیم سینوس عدد حقیقی x را برابر با $\sin \theta$ تعریف کنیم. به همین ترتیب می‌توانیم کسینوس عدد حقیقی x را برابر با $\cos \theta$ تعریف کنیم. به تابعی که به عدد حقیقی x سینوس آن را نسبت می‌دهد **تابع سینوس** و به تابعی که به عدد حقیقی x کسینوس آن را نسبت می‌دهد **تابع کسینوس** می‌گویند. این توابع را به ترتیب با $\sin$ و $\cos$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که دامنه این توابعها مجموعه اعداد حقیقی است.

ویژگی‌های تابع سینوس

نمودار تابع سینوس در شکل زیر رسم شده است.



(۱) از روی نمودار معلوم است که $R_f = [-1, 1]$.

(۲) صفرهای تابع f نقطه‌های با طول $x = k\pi$ هستند، که در اینجا k هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

(۳) کمترین مقدار تابع f برابر با -۱ است که در نقطه‌های با طول $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۴) بیشترین مقدار تابع f برابر با ۱ است که در نقطه‌های با طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۵) از روی نمودار معلوم است که تابع f غیریکنواست، ولی روی هر بازه به صورت $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و روی هر بازه به صورت $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است ($k \in \mathbb{Z}$).

اگر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2a - b \sin x$ محور عرض‌ها را در نقطه به عرض ۴ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{6}$ قطع

تست

کند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

نمودار تابع از نقاط $(0, 4)$ و $(\frac{\pi}{6}, 0)$ عبور می‌کند. پس

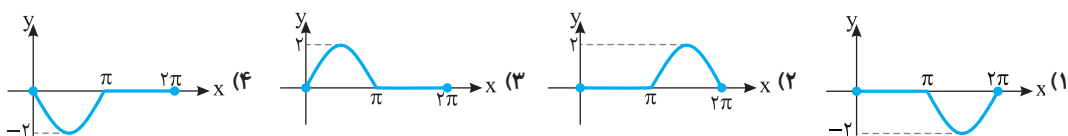
راه‌حل

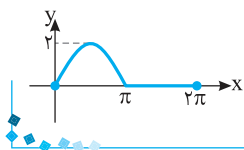
$$f(0) = 4 \Rightarrow 2a - b \sin 0 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 2a - b \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow 2a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 4a = 8$$

بنابراین $a+b=10$.

نمودار تابع $f(x) = \sin x + |\sin x|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

تست



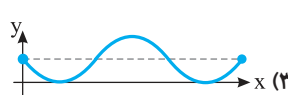
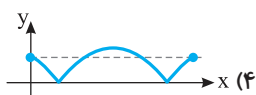
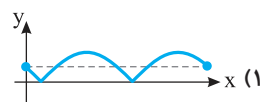
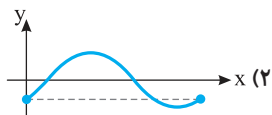


توجه کنید که اگر $0 \leq x \leq \pi$ ، آن گاه $\sin x \geq 0$ ، پس $f(x) = \sin x + \sin x = 2 \sin x$ از طرف دیگر، اگر $\pi < x \leq 2\pi$ ، آن گاه $\sin x \leq 0$ ، در نتیجه $f(x) = \sin x - \sin x = 0$ بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است.

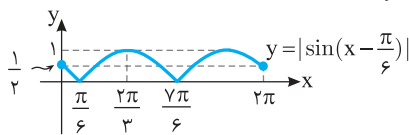
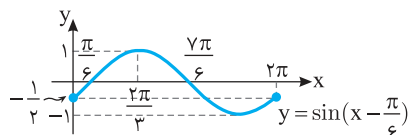
راه‌حل

تست

نمودار تابع $y = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ به دست آید. سپس قرینه قسمت‌هایی را که پایین محور x هاست، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که پایین محور x است، حذف می‌کنیم، تا نمودار تابع $y = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$ به دست آید.



راه‌حل

تست

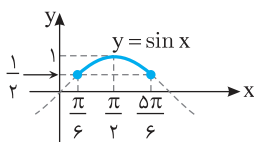
برد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$ و دامنه $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ کدام است؟

(۴) $[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}]$

(۳) $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

(۲) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$

(۱) $[\frac{1}{3}, 1]$



ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع $y = \sin x$ معلوم می‌شود که

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq \sin x + 2 \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin x + 2} \leq \frac{2}{5} \Rightarrow R_f = [\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$$

راه‌حل

تست

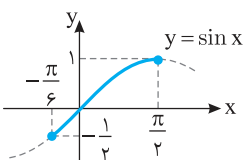
برد تابع f با ضابطه $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ و دامنه $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

(۴) $[-\frac{1}{4}, 1]$

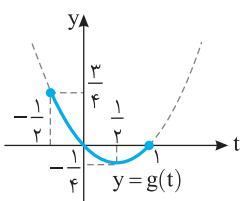
(۳) $[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

(۲) $[-\frac{1}{4}, 0]$

(۱) $[0, 2]$



ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع $y = \sin x$ معلوم می‌شود که $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ در نتیجه $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$.

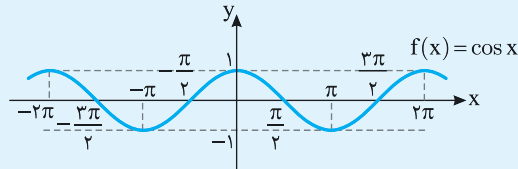


بنابراین اگر فرض کنیم $\sin x = t$ ، باید برد تابع $g(t) = t^2 - t$ را با دامنه $[-\frac{1}{4}, 1]$ پیدا کنیم. از روی نمودار

این تابع معلوم می‌شود که $R_g = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

راه‌حل

نمودار تابع کسینوس در شکل زیر رسم شده است:



(۱) از روی نمودار معلوم است که $R_f = [-1, 1]$.

(۲) صفرهای تابع f نقطه‌های با طول $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ هستند، که در این جا k هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

(۳) کمترین مقدار تابع f برابر با -1 است که در نقطه‌های با طول $x = (2k+1)\pi$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۴) بیشترین مقدار تابع f برابر با 1 است که در نقطه‌های با طول $x = 2k\pi$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۵) از روی نمودار معلوم است که تابع f غیریکنواست، ولی روی هر بازه به صورت $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ اکیداً صعودی و روی هر بازه به صورت $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ اکیداً نزولی است ($k \in \mathbb{Z}$).

تست ۶

اگر A و B به ترتیب نقطه‌های ماکزیم و مینیم تابع $f(x) = 2 \cos \pi x$ روی بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

(۴) $\sqrt{17}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

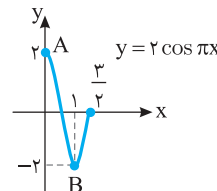
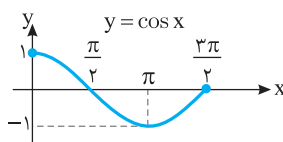
(۱) $\sqrt{5}$

راه حل

اگر در نمودار تابع $y = \cos x$ روی بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ طول نقطه‌ها را بر π تقسیم کنیم و عرض نقطه‌ها را در 2 ضرب کنیم، نمودار تابع f مانند شکل

زیر به دست می‌آید. بنابراین A نقطه $(0, 2)$ و B نقطه $(1, -2)$ است، پس

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{17}$$



تست ۷

اگر $\cos x = \frac{2m+1}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ ، مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۴) $[-\frac{5}{4}, \frac{2\sqrt{2}-1}{4}]$

(۳) $[-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}]$

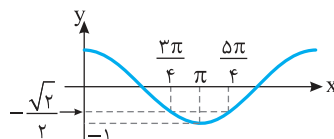
(۲) $[-\frac{5}{4}, -\frac{2\sqrt{2}+1}{4}]$

(۱) $[\frac{-2\sqrt{2}-1}{4}, \frac{2\sqrt{2}-1}{4}]$

از روی نمودار تابع $y = \cos x$ در شکل زیر معلوم است که اگر $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ ، آن گاه $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < -1$. بنابراین

$$-1 \leq \frac{2m+1}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -4 \leq 2m+1 < -2\sqrt{2}$$

$$-5 \leq 2m < -2\sqrt{2}-1 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq m < -\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$$



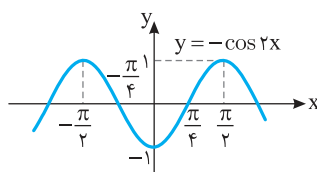
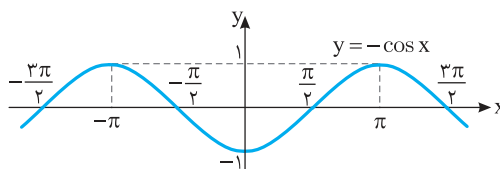
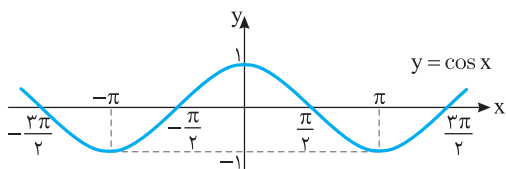
راه حل

تابع $f(x) = -\cos 2x$ روی بازه $[a, 0]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{4}$ (۲) $-\frac{\pi}{3}$ (۳) $-\frac{\pi}{2}$ (۴) $-\pi$

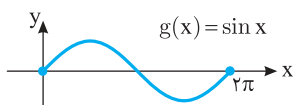
را حل

اگر نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -\cos x$ به دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y = -\cos 2x$ به دست می‌آید (شکل‌ها را ببینید). تابع f روی بازه $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ اکیداً نزولی است. پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{2}$ است.

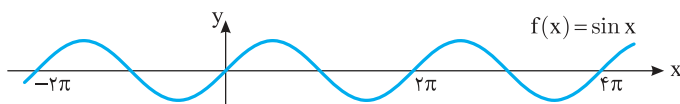


تابع متناوب

نمودار تابع $g(x) = \sin x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ به شکل مقابل است.



نمودار تابع $f(x) = \sin x$ با دامنه $\mathbb{R}$ به شکل زیر است:



از روی این نمودار معلوم است که نمودار تابع f روی بازه‌های $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ ، مانند هم است. در حقیقت، نمودار تابع f از تکرار نمودار تابع g به دست آمده است. اگر نمودار تابعی از تکرار قسمتی از آن به دست بیاید، می‌گوییم این تابع متناوب است. نمودار تابع f از تکرار نمودار تابع g به دست آمده و چون نمودار تابع g روی بازه‌ای به طول 2π رسم شده است، پس می‌گوییم دوره تناوب تابع f برابر 2π است.

۱۰۲

تعریف

فرض کنید عددی حقیقی و غیر صفر مانند T وجود دارد که به ازای هر $x \in D_f$ ، $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$ (۲) در این صورت می‌گوییم f تابعی متناوب است. کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که در شرایط فوق صدق می‌کند، دوره تناوب تابع f می‌نامیم.

تابع‌های $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ متناوب‌اند و دوره تناوب آن‌ها برابر 2π است، زیرا دامنه آن‌ها $\mathbb{R}$ است و

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع $y = a \sin(x+b) + c$ از روی نمودار تابع $y = \sin x$ به صورت زیر به دست می‌آید:

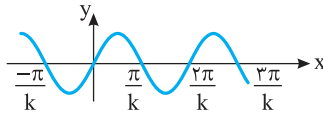
(۱) عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ را a برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = a \sin x$ به دست بیاید.

(۲) نمودار تابع $y = a \sin x$ را b واحد در راستای محور انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = a \sin(x+b)$ به دست بیاید.

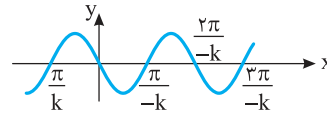
(۳) نمودار تابع $y = a \sin(x+b)$ را c واحد در راستای محور y انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = a \sin(x+b) + c$ به دست بیاید.

معلوم است که در هیچ یک از این مراحل دوره تناوب تابع عوض نمی‌شود، بنابراین دوره تناوب تابع $y = a \sin(x+b) + c$ هم برابر 2π است.

از طرف دیگر، برای رسم تابع $y = \sin kx$ ، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم، پس نمودار تابع $y = \sin x$ در راستای محور x منقبض یا منبسط می‌شود، پس دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ نیز از ضرب کردن $\frac{1}{|k|}$ در دوره تناوب تابع $y = \sin x$ به دست می‌آید (توجه کنید که چون دوره تناوب تابع عددی مثبت است و k می‌تواند منفی باشد، برای k قدر مطلق گذاشته‌ایم).



$$y = \sin kx, \quad k > 0$$



$$y = \sin kx, \quad k < 0$$

به این ترتیب، در مورد توابع $y = a \sin(bx+c)+d$ و $y = a \cos(bx+c)+d$ دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

۱۰۳

نکته

اگر a, b, c, d عددهایی حقیقی باشند که $a, b \neq 0$ ، آنگاه تابع‌های $y = a \sin(bx+c)+d$ و $y = a \cos(bx+c)+d$ متناوب‌اند و دوره تناوب آن‌ها برابر با $\frac{2\pi}{|b|}$ است. ماکزیمم مقدار این توابع برابر $|a|+d$ و مینیمم مقدار آن‌ها برابر $-|a|+d$ است.

تست

دوره تناوب تابع $f(x) = 2 \cos(1-2x) + 5$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{4}$

دوره تناوب تابع $y = a \cos(bx+c)+d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است. بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|-2|} = \pi$.

را حل

تست

دوره تناوب تابع $f(x) = -3 \sin \frac{\pi x}{4}$ دو برابر دوره تناوب تابع $g(x) = 2 \cos(\frac{\pi}{4} - ax)$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) فقط $\frac{\pi}{2}$ (۲) فقط -2π (۳) $\pm \frac{\pi}{2}$ (۴) $\pm 2\pi$

می‌دانیم دوره تناوب توابع $y = a \sin(bx+c)$ و $y = a \cos(bx+c)$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. پس $T_f = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8$ ، $T_g = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|a|}$

$$T_f = 2T_g \Rightarrow 8 = \frac{4\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\pi}{2}$$

بنابراین

را حل

تست

اگر دوره تناوب تابع $f(x) = 2 - a^2 \sin ax$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، بیشترین مقدار تابع f کدام است؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۶۶ (۴) ۶۸

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{4}$ در نتیجه $|a| = 8$. اگر $\sin ax = -1$ ، آنگاه بیشترین مقدار تابع f اتفاق می‌افتد که برابر

$$2 + a^2 = 66 \text{ است.}$$

را حل

تست

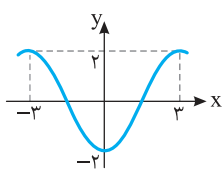
دوره تناوب تابع $f(x) = \sin^2 2x - \cos^2 2x$ کدام است؟

- (۱) 4π (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{2}$

توجه کنید که $f(x) = -\cos 4x$ ، بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

را حل

تست ۱۳



بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \cos bx$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $-\frac{\pi}{3}$ (۳) $-\frac{2\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{6}$

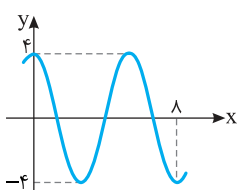
را حل

با توجه به شکل $f(0) = -2$ پس $-2 = a \cos 0$ در نتیجه $a = -2$. از طرف دیگر، دوره تناوب تابع برابر ۶ است. پس

$$\frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین مقدار ab می‌تواند $\frac{2\pi}{3}$ یا $-\frac{2\pi}{3}$ باشد.

تست ۱۴



قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin((\frac{\delta}{2} + bx)\pi)$ به صورت مقابل است. مقدار ab کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

را حل

توجه کنید که

$$f(x) = a \sin(\pi bx + \frac{\delta\pi}{2}) = a \cos \pi bx$$

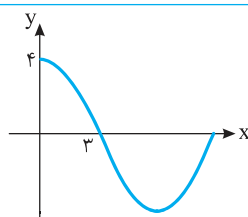
از طرف دیگر، $f(0) = 4$ پس $a \times 1 = 4$ ، در نتیجه $a = 4$. همچنین، دوره تناوب تابع $f(x) = 4 \cos \pi bx$ برابر است با $\frac{2\pi}{|\pi b|} = \frac{2}{|b|}$. از روی نمودار معلوم

می‌شود که $1/5$ برابر دوره تناوب تابع f برابر ۸ است. بنابراین

$$1/5 T = 8 \Rightarrow T = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{16}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{8} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{8}$$

b باید مثبت باشد، در نتیجه مقدار ab برابر است با $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}$.

تست ۱۵



قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 4 \cos \frac{\pi x}{a} + b$ به شکل مقابل است.

دوره تناوب تابع f کدام است؟ ($a > 0$)

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

را حل

با توجه به نمودار،

$$f(0) = 4 \Rightarrow 4 + b = 4 \Rightarrow b = 0, \quad f(3) = 0 \Rightarrow 4 \cos \frac{3\pi}{a} + 0 = 0 \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{a} = 0$$

کوچک‌ترین زاویه مثبتی که کسینوس آن صفر می‌شود، زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان است. پس $\frac{3\pi}{a} = \frac{\pi}{2}$ در نتیجه $a = 6$. بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$$

نکته

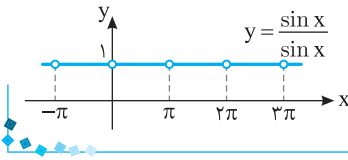
دوره تناوب برخی تابع‌ها را می‌توان از روی نمودار آن‌ها پیدا کرد.

تست ۱۶

دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟ 4π (۴) 2π (۳) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۱)

را حل

تابع f به ازای هر x که مضرب صحیح π باشد، تعریف نشده و به ازای بقیه x های حقیقی برابر تابع $y=1$ است. بنابراین نمودار آن به شکل روبه‌رو است. واضح است که دوره تناوب تابع f برابر π است.

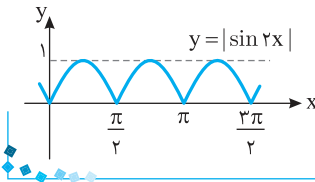


تست ۱۷

دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin 2x|$ کدام است؟ $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۲) 2π (۱)

را حل

با توجه به نمودار تابع f ، دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.



نکته

دوره تناوب توابع $f(x) = |a \sin(bx+c)|$ و $g(x) = |a \cos(bx+c)|$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۸

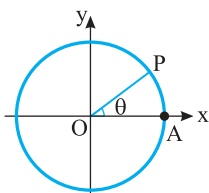
اگر دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin 3x|$ با دوره تناوب تابع $g(x) = |\cos \frac{ax}{2}|$ برابر باشد، مقدار $|a|$ کدام است؟ 6 (۴) 4 (۳) 3 (۲) 2 (۱)

را حل

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{\pi}{3}$ و دوره تناوب تابع g برابر $\frac{\pi}{|a|/2}$ است. بنابراین

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{\frac{|a|}{2}} \Rightarrow \frac{|a|}{2} = 3 \Rightarrow |a| = 6$$

تابع تانژانت

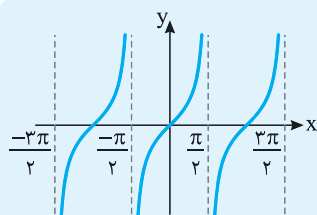


فرض کنید در دایره مثلثاتی شعاع OA را به اندازه θ رادیان دوران دهیم. در این صورت مسافتی را که نقطه A روی دایره طی کرده است (طول AP) با در نظر گرفتن علامت θ با x نمایش می‌دهیم، یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد، x را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد، x را منفی می‌گیریم. در این صورت $x = \theta$ ، که در اینجا x عددی حقیقی است (معلوم است که اگر $\theta = 0$ ، آن‌گاه $x = 0$). به این ترتیب می‌توانیم تانژانت عدد حقیقی x را که $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)، برابر تانژانت θ تعریف کنیم. اگر $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)، تانژانت x تعریف نمی‌شود.

اگر x عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)، تابعی که به عدد x تانژانت آن را نسبت می‌دهد تابع تانژانت نامیده می‌شود. اگر $f(x) = \tan x$ ،

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}, \quad R_f = \mathbb{R}$$

آن‌گاه



نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع تناوبی متناوب با دوره تناوب π است و روی هر بازه به صورت $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ که $k \in \mathbb{Z}$ ، اکیداً صعودی است. این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست.

نکته

اگر a, b, c, d عددهایی حقیقی باشند و $a, b \neq 0$ ، آن‌گاه دوره تناوب تابع $f(x) = a \tan(bx+c)+d$ برابر با $\frac{\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۹

دامنه تابع $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$ کدام است؟

- (۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$
(۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$

- (۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$
(۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k+1, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{\pi x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 4k+2, k \in \mathbb{Z}$$

هر x که در تساوی $\frac{\pi x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ صدق نکند، در دامنه این تابع قرار دارد:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k+2, k \in \mathbb{Z}\} \text{ بنابراین}$$

را حل

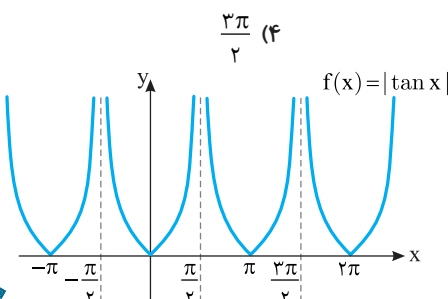
تست ۲۰

دوره تناوب تابع $f(x) = |\tan x|$ کدام است؟

(۳) 2π

(۲) π

(۱) $\frac{\pi}{2}$



برای اینکه نمودار تابع $f(x) = |\tan x|$ را رسم کنیم، قرینه قسمتهایی از نمودار تابع $y = \tan x$ را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتهایی را که زیر محور x است، حذف می‌کنیم. از روی این نمودار معلوم است که دوره تناوب تابع $f(x) = |\tan x|$ برابر π است.

را حل

تست ۲۱

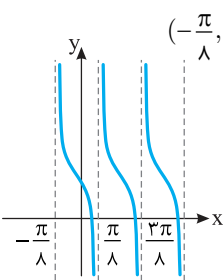
تابع $f(x) = 1 - \tan 4x$ روی کدام یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

(۳) $(-\frac{\pi}{4}, 0)$

(۲) $(0, \frac{\pi}{4})$

(۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

(۴) $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$



تابع $f(x) = 1 - \tan 4x$ روی بازه‌های به صورت $(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{4}, \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$ که $k \in \mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین

تابع f روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.

را حل

تست ۲۲

اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan 2x = \frac{2m+3}{4}$ ، حدود m کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{3}{2} < m < \frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$

(۱) $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}$

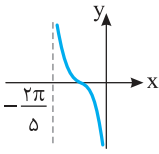
توجه کنید که $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4}$ و تابع تناوبی روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است، پس

را حل

$$-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{4}) < \tan 2x < \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \tan 2x < 1 \Rightarrow -1 < \frac{2m+3}{4} < 1 \Rightarrow -\frac{7}{4} < m < \frac{1}{4}$$

تست ۲۳

قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \tan(ax+b)$ به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۴) $-\frac{5}{2}$

۳) $\frac{5}{2}$

۲) $\frac{2}{5}$

۱) $-\frac{2}{5}$

راه حل

توجه کنید که دوره تناوب تابع f برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است. از روی نمودار مشخص است که دوره تناوب تابع $\frac{2\pi}{5}$ است، پس

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow |a| = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{5}{2}$$

چون تابع f روی بازه $(-\frac{2\pi}{5}, 0)$ نزولی است، پس a منفی است و جواب $a = -\frac{5}{2}$ غیر قابل قبول است.

تست ۲۴

برد تابع $f(x) = 1 - \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ با دامنه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ کدام است؟

۴) $(-1, +\infty)$

۳) $(-1, 1)$

۲) $(-\infty, 1)$

۱) $(1, +\infty)$

راه حل

ابتدا توجه کنید که

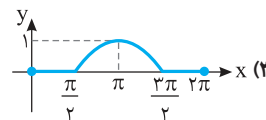
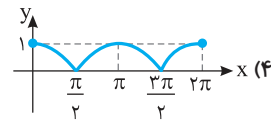
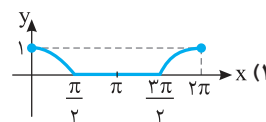
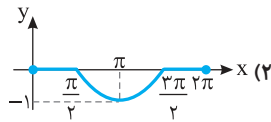
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$$

اکنون از روی نمودار تابع تانژانت و اکیداً صعودی بودن آن روی بازه $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ نتیجه می شود

$$\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow -\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0 \Rightarrow 1 - \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 1 \Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow R_f = (1, +\infty)$$

دست گرمی

۹۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{\cos x - |\cos x|}{2}$ روی بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۹۳- اگر $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ و $\sin x = \frac{m-1}{4}$ ، چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

۴) ۴

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

۹۴- دوره تناوب تابع $f(x) = -2 \sin \frac{\pi x}{2}$ دو برابر دوره تناوب تابع $g(x) = 3 \cos(\frac{\pi}{2} - ax)$ است. مقدار a کدام است؟

۴) $\pm 2\pi$

۳) $\pm \pi$

۲) -2π

۱) π

۹۵- دوره تناوب تابع $f(x) = \sin^2 x + 12$ چقدر است؟

۴) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$

۲) 2π

۱) π

۹۶- تابع $f(x) = -\tan 2x$ روی کدام یک از بازه های زیر اکیداً نزولی است؟

۴) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

۳) $(-\frac{\pi}{2}, 0)$

۲) $(0, \frac{\pi}{2})$

۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

۹۷- اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{2m-3}{5}$ ، حدود m کدام است؟

۴) $-1 < m < 1$

۳) $-1 < m < 2$

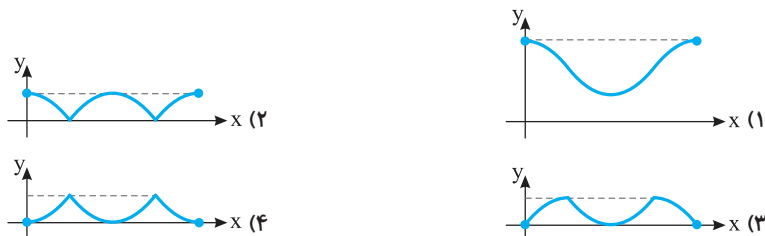
۲) $-1 < m < 4$

۱) $-4 < m < 1$

توابع مثلثاتی (۱)

آزمون ۵۴

۵۳۱- نمودار تابع $y = 1 - |\cos x|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۵۳۲- نمودار تابع $f(x) = a \cos x - b$ از نقطه $(\frac{\pi}{6}, \sqrt{2}-1)$ عبور می‌کند و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{3}$ قطع می‌کند.

حاصل ab کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $-2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) 2

۵۳۳- اگر $\cos x = \sqrt{3}m$ و $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $0 < m < 1$ (۲) $0 < m < \frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

۵۳۴- حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x) = 5 \sin^2 x - 3$ کدام است؟

- (۱) -4 (۲) -6 (۳) -8 (۴) -10

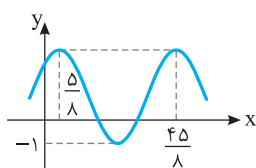
۵۳۵- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = -3 \cos kx$ برابر $\frac{\pi}{2k+1}$ باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۵۳۶- دوره تناوب تابع $f(x) = |\cos 4x|$ چقدر است؟

- (۱) 2π (۲) π (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۵۳۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + 2 \sin(\frac{2\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. مقدار $b-a$



کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) -4 (۴) -6

۵۳۸- دامنه تابع $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq k, k \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\mathbb{Z}$

۵۳۹- اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ و $\tan x = \frac{2-m}{\sqrt{3}}$ ، حداکثر مقدار m کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 3 (۳) -1 (۴) صفر

۵۴۰- تابع $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ روی بازه $(a, \frac{11\pi}{6})$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{6}$

سؤال

گام

۳۰

۳۲

۳۷

۱۰۱

۵۳۱

۱۰۱

۵۳۲

۱۰۱

۵۳۳

۱۰۰

۵۳۴

۱۰۳

۵۳۵

۱۰۴

۵۳۶

۱۰۰

۱۰۳

۵۳۷

۱۰۵

۵۳۸

۱۰۵

۵۳۹

۳۱

۴۶

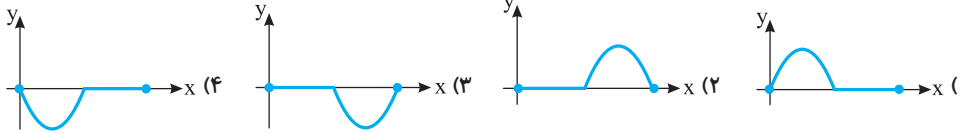
۱۰۵

۵۴۰

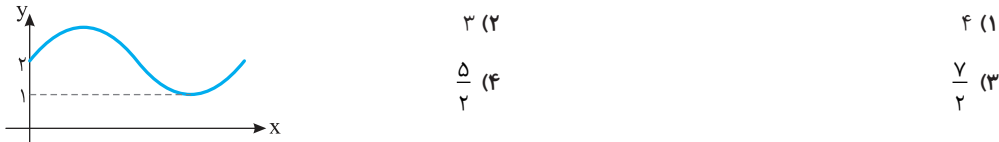
توابع مثلثاتی (۲)

آزمون ۵۵

۵۴۱- نمودار تابع $f(x) = \sin x - |\sin x|$ روی بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۵۴۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = (a+b) \sin x + 2a - b$ به شکل مقابل است. بیشترین مقدار تابع کدام است؟



۵۴۳- اگر $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ و $\sin x = \frac{m+1}{2m}$ ، حدود m کدام است؟

(۱) $m > \frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}$ (۳) $m > -\frac{1}{2}$ (۴) $m < -\frac{1}{2}$

۵۴۴- برد تابع $f(x) = \sin^2 x + 3 \cos^2 x$ کدام است؟

(۱) $[0, 3]$ (۲) $[0, 4]$ (۳) $[1, 3]$ (۴) $[1, 4]$

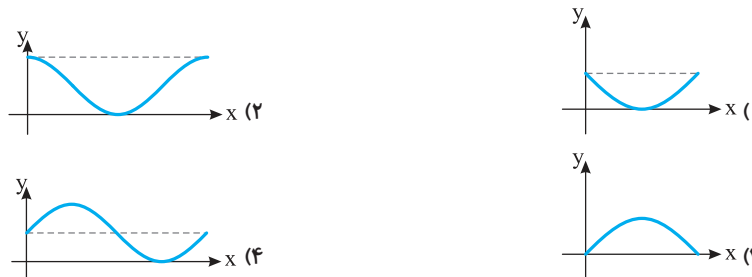
۵۴۵- اگر کمترین مقدار تابع $f(x) = 3a + a^2 \cos ax$ برابر ۲ باشد، دوره تناوب آن کدام است؟

(۱) 2π یا π (۲) π یا $\frac{\pi}{2}$ (۳) 4π یا 2π (۴) $\frac{3\pi}{2}$ یا $\frac{\pi}{2}$

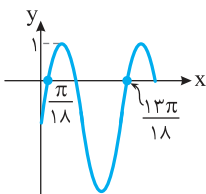
۵۴۶- دوره تناوب تابع $f(x) = \cos 4x + \cos^2 2x$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{4}$

۵۴۷- نمودار تابع $f(x) = 2 \sin^2(\frac{\pi+x}{2})$ در یک دوره تناوب خود کدام است؟



۵۴۸- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + 2 \cos(\frac{\pi}{2} - bx)$ است. مقدار $b - a$ کدام است؟



(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۴۹- برد تابع f با دامنه $[0, \frac{\pi}{4}]$ و ضابطه $f(x) = \frac{3 - \tan x}{2}$ کدام است؟

(۱) $[\frac{3}{2}, 2]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[1, \frac{3}{2}]$ (۴) $[1, 2]$

۵۵۰- اگر $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{2}\}$ و $\tan x = \frac{m-1}{2}$ ، کدام یک درست است؟

(۱) $m > 3$ (۲) $m > 3$ یا $m < -1$ (۳) $m > 1$ یا $m < -3$ (۴) $-1 < m < 3$

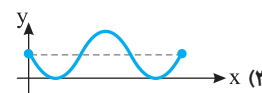
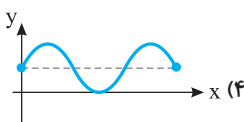
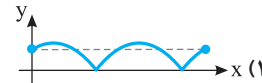
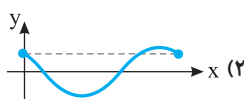
سؤال	گام
۵۴۱	۳۳ ۱۰۰ ۳۳۵
۵۴۲	۱۰۰
۵۴۳	۱۰۰ ۳۲۶
۵۴۴	۸۱ ۱۰۰
۵۴۵	۱۰۳
۵۴۶	۹۵ ۱۰۳
۵۴۷	۹۵ ۱۰۱ ۱۰۳
۵۴۸	۹۲ ۱۰۰ ۱۰۳
۵۴۹	۲۲ ۱۰۵
۵۵۰	۱۰۵

توابع مثلثاتی (۳)

آزمون ۵۶

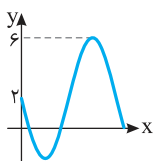
سؤال	گام
۵۵۱	۳۱ ۳۵ ۳۷ ۱۰۱
۵۵۲	۱۰۰ ۱۰۳
۵۵۳	۱۰۱
۵۵۴	۲۲ ۱۰۰ ۲۸۱
۵۵۵	۱۰۳
۵۵۶	۸۱ ۹۳ ۱۰۳
۵۵۷	۹۳ ۱۰۰ ۱۰۴
۵۵۸	۱۰۰ ۱۰۳
۵۵۹	۲۲ ۱۰۵
۵۶۰	۳۵ ۴۶ ۱۰۵

۵۵۱- نمودار تابع $f(x) = |\cos(2x - \frac{\pi}{4})|$ روی بازه $[0, \pi]$ کدام است؟



۵۵۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 2b \sin x$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲



۵۵۳- اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ و $\cos x = \frac{m+1}{4}$ ، کدام یک درست است؟

- (۱) $\frac{3}{2} < |m| \leq \sqrt{3}$ (۲) $1 < |m| \leq \sqrt{3}$ (۳) $1 < |m| \leq \frac{3}{2}$ (۴) $0 < |m| \leq \sqrt{3}$

۵۵۴- برد تابع $f(x) = \sin^4 x + 2 \sin^2 x$ کدام است؟

- (۱) $[0, 3]$ (۲) $[0, 2]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[0, \frac{3}{2}]$

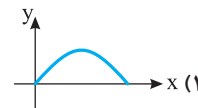
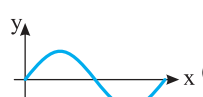
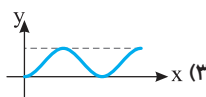
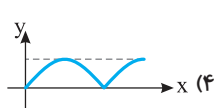
۵۵۵- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = |a| + b \cos a\pi x$ برابر ۴ و کمترین مقدار آن برابر ۳- باشد، بیشترین مقدار آن کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) ۴

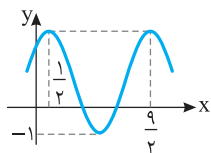
۵۵۶- دوره تناوب تابع $f(x) = \cos^2 ax - \cos^4 ax$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) ± 3 (۴) ± 4

۵۵۷- نمودار تابع $f(x) = 4|\sin x \cos x|$ در یک دوره تناوب کدام است؟



۵۵۸- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + a \sin(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟



- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ± 4 (۴) صفر

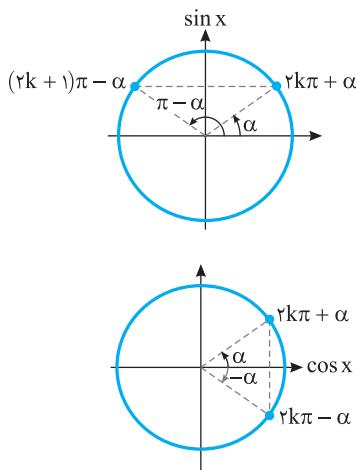
۵۵۹- برد تابع f با ضابطه $f(x) = -\tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3})$ و دامنه $[0, 2]$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$ (۲) $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$ (۳) $[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ (۴) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

۵۶۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$ و دامنه $(2, a)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

معادلات مثلثاتی ساده



فرض کنید α زاویه‌ای حاده باشد. معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = \pi - \alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[0, 2\pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k ، $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ پس $x = 2k\pi + \alpha$ نیز جواب است. همین طور $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ یعنی $x = (2k+1)\pi - \alpha$ نیز برای هر عدد صحیح k جواب این معادله است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

اکنون معادله مثلثاتی $\cos x = \cos \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = -\alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[-\pi, \pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k ، $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$ پس $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi - \alpha$ نیز جواب معادله مورد نظر هستند. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

نکته

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت مقابل هستند:

$$x = 2k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

● جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت مقابل هستند:

مثال:

$$1) \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

تست

1) جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin 5x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) \quad k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{3}, \frac{(2k+1)\pi}{6} \quad (3) \quad \frac{2k\pi}{5}, \frac{(2k+1)\pi}{5} \quad (4) \quad -\frac{k\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

راه حل توجه کنید که

$$\sin x = \sin 5x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + 5x \\ x = (2k+1)\pi - 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست

2) جواب‌های کلی معادله $\cos 4x = \cos x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) \quad 2k\pi \quad (2) \quad 2k\pi + \frac{2\pi}{5}, 2k\pi - \frac{2\pi}{5} \quad (3) \quad \frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{5} \quad (4) \quad 2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

راه حل معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 4x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تذکر

برای پیدا کردن جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی در یک بازه می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:
 (۱) به ازای $k=0$ جواب را به دست می‌آوریم و اگر در بازهٔ مورد نظر بود، آن را قبول می‌کنیم.
 (۲) به ازای $k=1, k=2, \dots$ جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازهٔ مورد نظر قرار داشته باشند.
 (۳) به ازای $k=-1, k=-2, \dots$ جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازهٔ مورد نظر قرار داشته باشند.

تست ۳

معادلهٔ $\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sin x = 0$ چند جواب در بازهٔ $(0, 2\pi)$ دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

راه‌حل

معادله را به صورت $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x \Rightarrow \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (غ.ق.ق.)}, \quad x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$
	۳	۳	۳

(غ.ق.ق.)

پس معادله دو جواب در این بازه دارد.

نکته

گاهی ممکن است چند مجموعهٔ جواب کلی برای معادلهٔ مثلثاتی به دست بیاید که یکی از آن‌ها زیر مجموعهٔ دیگری باشد.

تست ۴

معادلهٔ $\cos 3x = \cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۸ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴)

راه‌حل

معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب $\frac{k\pi}{2}$ شامل مجموعهٔ جواب $k\pi$ نیز هست. پس جواب‌های معادله به صورت $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ هستند که در بازهٔ $[0, 2\pi]$

$$\text{عبارت‌اند از } x=0, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi, x=\frac{3\pi}{2}, x=2\pi \text{ و } x=\frac{\pi}{2}.$$

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توان با استفاده از روابط میان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم یا مکمل به معادله‌های سادهٔ مثلثاتی تبدیل کرد.

تست ۵

معادلهٔ $\cos 4x + \cos x = 0$ چند جواب در بازهٔ $[0, \pi]$ دارد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

راه‌حل

$$\cos 4x = -\cos x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازهٔ $[0, \pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف k جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱	۲	k	۱	۲
$\frac{(2k+1)\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	π	$\frac{(2k-1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π

با توجه به مشترک بودن $x=\pi$ در این جواب‌ها، معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ چهار جواب دارد: $x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{\pi}{3}$.

تست

۶

معادله $\cos 4x + \sin x = 0$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\cos 4x = -\sin x \Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = (4k+1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow x = (4k-1)\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف k جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱	k	۱	۲
$(4k+1)\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$(4k-1)\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد.

را حل

نکته

(۱) برای حل معادله $\sin x = m$ که $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه α را طوری پیدا کنیم که $\sin \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ را پیدا کنیم.

(۲) برای حل معادله $\cos x = m$ که $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه α را طوری پیدا کنیم که $\cos \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله $\cos x = \cos \alpha$ را پیدا کنیم.

تست

۷

جواب‌های کلی معادله $\sqrt{2} \sin 2x - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$) $k\pi + \frac{3\pi}{4}, k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{5\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۱)

$$\sqrt{2} \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت مقابل هستند: $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$ ، $2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$

را حل

نکته

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در بازه $[a, b]$ می‌توانیم پس از پیدا کردن جواب‌های کلی x ، نامعادله $a \leq x \leq b$ را حل کنیم و مقادیر k را پیدا کنیم. در مورد بازه‌های دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

تست

۸

معادله $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ چند جواب در بازه $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

ابتدا جواب‌های کلی معادله مورد نظر را به دست می‌آوریم. توجه کنید که $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$ ، بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌ها عبارت‌اند از $x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ اکنون از این جواب‌ها، آن‌هایی را پیدا می‌کنیم که در بازه $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ هستند. توجه کنید که

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -2\pi \leq 2k\pi \leq 2\pi \Rightarrow -1 \leq k \leq 1, k \in \mathbb{Z}$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $-\frac{\pi}{2}$ و $2\pi - \frac{\pi}{2}$. همچنین،

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{11\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow -\frac{11}{6} \leq k \leq \frac{1}{6}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow k = -1, 0$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $-\frac{5\pi}{6}$ و $2\pi + \frac{5\pi}{6}$. بنابراین معادله مورد نظر در بازه $\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ پنج جواب دارد.

را حل

واضح است که معادله‌های $\sin x = m$ و $\cos x = m$ به ازای m هایی که در بازه $[-1, 1]$ نیستند، جواب ندارند.

تست ۹

به ازای چه مقادیری از k معادله $2 \cos x + 3k = 1$ جواب دارد؟

(۱) $0 \leq k \leq \frac{4}{3}$ (۲) $-1 \leq k \leq 1$ (۳) $-1 \leq k \leq \frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3} \leq k \leq 1$

راهنما

توجه کنید که $2 \cos x + 3k = 1$ در نتیجه $\cos x = \frac{1-3k}{2}$ و چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$-1 \leq \frac{1-3k}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 1-3k \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -3k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 1$$

معادلات خاص مثلثاتی

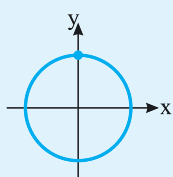
در برخی معادلات مثلثاتی، جواب‌های کلی را می‌توان به صورت یک دسته جواب نوشت. مثلاً، معادله مثلثاتی $\sin x = 1$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که

$$\sin x = 1 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = \sin x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

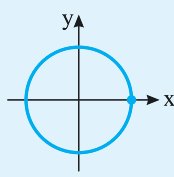
بنابراین جواب‌های کلی این معادله به صورت $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ هستند. جواب‌های کلی معادلات خاص را در نکته زیر آورده‌ایم.

معادلات خاص مثلثاتی

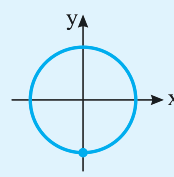
نکته



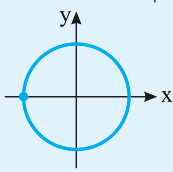
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



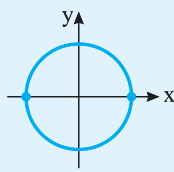
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



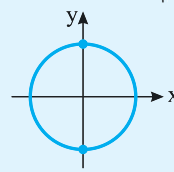
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

تست ۱۰

جواب‌های کلی معادله $\sin x \cos 2x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $k\pi, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2k\pi$ (۴) $k\pi, k\pi - \frac{\pi}{4}$

راهنما

توجه کنید که $\sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

تست ۱۱

نمودار تابع $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

راهنما

جایی که نمودار محور x را قطع می‌کند، $y = 0$. پس

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ عبارت‌اند از

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{5\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$

گاهی می‌توان چند مجموعه جواب کلی معادله مثلثاتی را به صورت یک مجموعه جواب کلی نوشت.

مثال: مجموعه جواب‌های معادله $\sin \frac{x}{2} (\cos x + 1) = 0$ به صورت زیر است:

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

چون مضارب زوج π و مضارب فرد π جواب‌های این معادله هستند، مجموعه جواب‌های این معادله را می‌توان به صورت مضارب صحیح π نوشت، که می‌شود $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

تست

جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۲) $(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

را حل

را حل اول توجه کنید که

$$2 \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۱), \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۲)$$

بنابراین

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۳), \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۴)$$

همین‌طور،

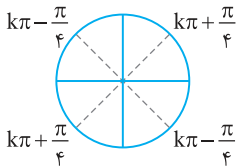
اکنون توجه کنید که اجتماع جواب‌های (۱) و (۴) را می‌توان به صورت $k\pi + \frac{\pi}{4}$ نوشت. همین‌طور، اجتماع جواب‌های

(۲) و (۳) به صورت $k\pi - \frac{\pi}{4}$ است. بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر به صورت $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ است که می‌توان با

توجه به شکل روبه‌رو آن‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ نوشت ($k \in \mathbb{Z}$).

را حل دوم چون $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$ ، معادله مورد نظر را می‌توان به صورت $-\cos 2x = 0$ نوشت. که مجموعه جواب‌های آن به صورت زیر است:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$



تست

جواب‌های کلی معادله $\cos^3 x - \cos x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۳) $\frac{k\pi}{2}$

(۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۱) $k\pi$

را حل

را حل اول توجه کنید که

$$\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین

توجه کنید که اجتماع دو جواب آخر را می‌توان به صورت $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) نوشت.

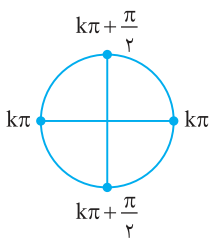
بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر عبارت‌اند از

که با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان آن‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{2}$ نوشت.

را حل دوم معادله مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\cos x \sin^2 x = 0$$

بنابراین



که مشابه راه حل اول می‌توان مجموعه جواب‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{2}$ نوشت.

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توانیم با استفاده از اتحادها به معادله‌های ساده‌ی مثلثاتی تبدیل و حل کنیم.

تست ۱۴

معادله $2 \cos^2 x = \cos x + 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴)

را حل توجیه کنید که

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله مورد نظر چهار جواب در بازه } [0, 2\pi] \text{ دارد.}$$

تست ۱۵

جواب‌های کلی معادله $\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi - \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۱)

ابتدا توجه کنید که $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ، در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - \sin^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

$$(\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \sin x = \frac{3}{2} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

از طرف دیگر، $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ ، $x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

تست ۱۶

جواب‌های کلی معادله $\sin 6x = 2 \sin 3x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۱)

ابتدا توجه کنید که $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$2 \sin 3x \cos 3x = 2 \sin 3x \Rightarrow 2 \sin 3x (\cos 3x - 1) = 0$$

بنابراین $\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ، $\cos 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

توجه کنید که $\frac{2k\pi}{3}$ مضارب زوج $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{k\pi}{3}$ همه مضارب صحیح $\frac{\pi}{3}$ هستند. بنابراین مجموعه جواب‌های کلی معادله مورد نظر $\frac{k\pi}{3}$ است ($k \in \mathbb{Z}$).

تست ۱۷

جواب‌های کلی معادله $\cos 2x = 1 + \sin x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳)

ابتدا توجه کنید که $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ ، بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - 2 \sin^2 x = 1 + \sin x \Rightarrow \sin x (1 + 2 \sin x) = 0$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست
□□□□معادله $\sin^4 x - \sin x = \cos^4 x$ در بازه $[-\pi, 0]$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

راه حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin x \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \Rightarrow -\cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin(-x)$$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, 0]$ عبارت‌اند از $x = -\frac{\pi}{6}$ و $x = -\frac{5\pi}{6}$. بنابراین معادله در بازه $[-\pi, 0]$ دو جواب دارد.

تست
□□□□جواب‌های کلی معادله $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۱)

راه حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow -2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \cos 4x = -1$$

$$4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت مقابل هستند:

تست
□□□□مجموع جواب‌های معادله $\sin x + \cos x = 1$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟ 5π (۴) 4π (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 2π (۱)

راه حل

راه حل اول طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت مقابل می‌نویسیم: $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2\sin x \cos x = 0$. بنابراین جواب‌هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، به صورت زیر هستند:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

توجه کنید که جواب‌های π و $\frac{3\pi}{2}$ قابل قبول نیستند، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کنند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده‌اند. بنابراین مجموع جواب‌هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

راه حل دوم با استفاده از اتحادها $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ و $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x = 1 - \cos x \Rightarrow 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، به صورت مقابل هستند:

$$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0, 2\pi \\ \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

تعداد جواب‌های معادله $(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

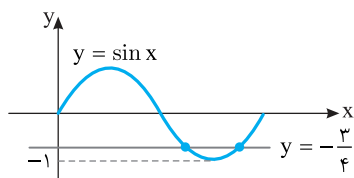
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

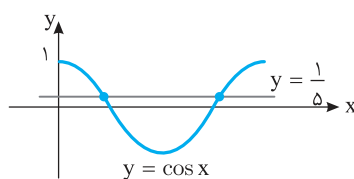
۲ (۱)

$$(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{4} \\ \cos x = \frac{1}{5} \end{cases}$$



از طرف دیگر، جواب‌های معادله $\sin x = -\frac{3}{4}$ طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع $y = \sin x$

و خط $y = -\frac{3}{4}$ هستند. بنابراین از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که معادله $\sin x = -\frac{3}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.



به همین ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که معادله $\cos x = \frac{1}{5}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد. بنابراین معادله مورد نظر در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.

دست‌گرمی

۹۸- معادله $\cos(x - \frac{\pi}{4}) - \cos x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۹- جواب‌های کلی معادله $\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۲) $-\frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ و $-k\pi + \frac{\pi}{12}$

(۱) $-\frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ و $-k\pi - \frac{\pi}{12}$

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{12}$

(۳) $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{12}$ و $-k\pi - \frac{\pi}{4}$

۱۰۰- نمودار تابع $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) - 1$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه خط $y = -1$ را قطع می‌کند؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۱۰۱- جواب‌های کلی معادله $\sin^3 x - \sin x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۳) $x = \frac{k\pi}{4}$

(۲) $x = \frac{k\pi}{2}$

(۱) $x = k\pi$

۱۰۲- مجموع جواب‌های معادله $2\sin^2 x + 5\cos x = 4$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

(۴) $\frac{5\pi}{2}$

(۳) $\frac{3\pi}{2}$

(۲) 2π

(۱) π

۱۰۳- معادله $\sin 2x = \tan x$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

معادلات مثلثاتی (۱)

آزمون ۵۷

- ۵۶۱- جواب‌های کلی معادله $\cos 3x = \cos 2x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $\frac{2k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi \pm \pi}{5}$ (۳) $\frac{k\pi}{5}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{5}$
- ۵۶۲- جواب‌های کلی معادله $\sqrt{2} \sin \frac{x}{4} - 1 = 0$ کدام‌اند؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $8k\pi - \pi$ یا $8k\pi + \pi$ (۲) $8k\pi + 2\pi$ یا $8k\pi - \pi$
 (۳) $8k\pi + 3\pi$ یا $8k\pi - \pi$ (۴) $8k\pi + 3\pi$ یا $8k\pi + \pi$
- ۵۶۳- نمودار تابع $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۵۶۴- جواب‌های کلی معادله $\sin x + \cos(x + \frac{\pi}{5}) = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi + \frac{7\pi}{20}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{20}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{20}$ (۴) $k\pi - \frac{7\pi}{20}$
- ۵۶۵- جواب‌های کلی معادله $\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $\frac{k\pi + \pi}{2 \cdot 4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{4}$
- ۵۶۶- جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 2x - 7 \sin 2x + 5 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$
- ۵۶۷- معادله $\sin 4x = \sqrt{2} \sin 2x$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۵۶۸- معادله $\cos 2x = \cos x - 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۵۶۹- جواب‌های کلی معادله $\cos 2x - \sin 2x + 2 \sin^2 x = 0$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi + \pi}{2 \cdot 4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2}$
- ۵۷۰- مجموع جواب‌های معادله $\sin x - \sin^3 x = \cos x - \cos^3 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟
- (۱) $\frac{9\pi}{2}$ (۲) 5π (۳) $\frac{11\pi}{2}$ (۴) $\frac{13\pi}{2}$

سؤال	گام
۵۶۱	۱۰۶ ۱۰۸
۵۶۲	۱۰۶ ۱۱۰
۵۶۳	۱۱۱ ۱۱۳
۵۶۴	۱۰۶ ۱۰۹
۵۶۵	۱۰۶ ۱۰۸ ۱۱۵
۵۶۶	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۶۷	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۶۸	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۶۹	۱۱۳ ۱۱۵
۵۷۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵

معادلات مثلثاتی (۲)

آزمون ۵۸

سؤال	گام
۵۷۱	۱۰۶ ۱۰۸
۵۷۲	۱۰۶ ۱۱۰
۵۷۳	۱۰۷ ۱۱۳
۵۷۴	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹
۵۷۵	۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳
۵۷۶	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۷۷	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۷۸	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۷۹	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۵
۵۸۰	۱۰۶ ۱۰۹ ۱۱۳

۵۷۱- جواب‌های کلی معادله $\cos 5x = \cos 4x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{2k\pi}{9}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{9}$ (۳) $\frac{k\pi}{9}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{9}$

۵۷۲- جواب‌های کلی معادله $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{4\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

۵۷۳- تابع $f(x) = 2\sin 3x + 1$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ چند بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۷۴- معادله $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{2x}{3} = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۷۵- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{2} \sin^2 x = \sin x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

۵۷۶- معادله $2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0$ در بازه $(-\pi, 0)$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۷۷- مجموع جواب‌های معادله $\frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\sin 4x} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

۵۷۸- مجموع جواب‌های معادله $\tan 2x = 3 \tan x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) 4π (۲) 5π (۳) 6π (۴) 7π

۵۷۹- مجموع جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{16}{3}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۵۸۰- جواب‌های کلی معادله $\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2\sin^2(x - \frac{7\pi}{18}) = 2$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{9}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{9}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

معادلات مثلثاتی (۳)

آزمون ۵۹

۵۸۱- جواب‌های کلی معادله $\sin 5x = \sin 3x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $2k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}$
 (۳) $k\pi$ یا $\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi$ یا $\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$

۵۸۲- معادله $2\cos \frac{x}{2} + 1 = 0$ در بازه $(-\pi, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۸۳- تابع $f(x) = -2\cos 4x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۸۴- جواب‌های کلی معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = -\sin 2x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{36}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{36}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{72}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{72}$

۵۸۵- معادله $2\cos^3 x - \cos x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۵۸۶- جواب‌های کلی معادله $\sin^2(\pi + x) - \sin x - 2 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۵۸۷- معادله $1 - \cos 2x = \sin^2 x$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۸۸- مجموع جواب‌های معادله $1 + \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \cos(3\pi - x)$ که در بازه $(0, 2\pi)$ قرار دارند، کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) π (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{7\pi}{3}$

۵۸۹- چند جواب معادله $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۵۹۰- معادله $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

سؤال	گام
۵۸۱	۱۰۶
۵۸۲	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰
۵۸۳	۱۰۷ ۱۱۳
۵۸۴	۱۰۶ ۱۰۹
۵۸۵	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۳
۵۸۶	۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۸۷	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۴ ۱۱۵
۵۸۸	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۸۹	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵
۵۹۰	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵ ۲۸۲ ۲۸۵

معادلات مثلثاتی (۴)

آزمون ۶۰

سؤال	گام
۵۹۱	۱۰۶ ۱۱۱
۵۹۲	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰
۵۹۳	۱۱۳ ۱۱۵
۵۹۴	۱۰۶ ۱۰۹ ۱۱۱
۵۹۵	۱۱۶
۵۹۶	۱۱۳ ۱۱۵
۵۹۷	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹ ۱۱۵
۵۹۸	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۵
۵۹۹	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۵ ۲۹۱
۶۰۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۵

۵۹۱- معادله $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x - \frac{\pi}{9})$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۵۹۲- مجموع جواب‌های معادله $2 \cos^3 x - 1 = 0$ که در بازه $(0, \pi)$ قرار دارند، چقدر است؟

(۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $\frac{12\pi}{9}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{8\pi}{9}$

۵۹۳- جواب‌های کلی معادله $2 \cos^2(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) - 1 = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

(۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۵۹۴- معادله $\frac{\sin 3x}{\cos(x - \frac{\pi}{6})} = -1$ در بازه $(0, \pi)$ چند جواب دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹۵- معادله $(4 \cos x + 1)(5 \cos x - 3) = 0$ چند جواب در بازه $[0, \frac{3\pi}{2}]$ دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹۶- جواب‌های کلی معادله $\tan x + \cot x = 2$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

(۱) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{4}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۵۹۷- معادله $\sin^2 x + \sin^2 4x = 1$ چند جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹۸- مجموع جواب‌های معادله $\cos^4 x - 1 = \sin^4 x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

(۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 4π

۵۹۹- تعداد جواب‌های معادله $(2 - \sqrt{2}) \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۰۰- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \sqrt{3}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

(۱) 2π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 3π (۴) $\frac{7\pi}{2}$

معادلات مثلثاتی (۵)

آزمون ۶۱

۶۰۱- معادله $\sin(x - \frac{\pi}{3}) - \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶۰۲- جواب‌های کلی معادله $2 \sin(x + \frac{5\pi}{36}) = \sqrt{2}$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{18}$ است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

($k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}, i < 18$)

- (۱) $\{1, 4\}$ (۲) $\{3, 8\}$ (۳) $\{2, 11\}$ (۴) $\{3, 10\}$

۶۰۳- جواب‌های کلی معادله $1 - 4 \sin^2(\Delta x - \frac{\pi}{3}) = 0$ به صورت $x = \frac{k\pi}{5} + \frac{i\pi}{30}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای i کدام است؟

($0 < i < 5, i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۳

۶۰۴- معادله $\frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos 2x} = 1$ در بازه $(0, \pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۰۵- معادله $(4 \sin x - \sqrt{3})(4 \cos x - \sqrt{13}) = 0$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۶۰۶- جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۶۰۷- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

۶۰۸- معادله $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۶۰۹- جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x + \tan^2 x = 2$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۶۱۰- مجموع جواب‌های معادله $\cos(2\pi \sin x) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) 3π (۲) 4π (۳) 5π (۴) 6π

سؤال	گام
۶۰۱	۱۰۶ ۱۰۷
۶۰۲	۱۰۶ ۱۱۰
۶۰۳	۱۰۶ ۱۱۰
۶۰۴	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹
۶۰۵	۱۱۶
۶۰۶	۱۰۶ ۱۰۸ ۱۱۵
۶۰۷	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵
۶۰۸	۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵ ۲۸۵
۶۰۹	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۵
۶۱۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۳

آزمون فصل دوم (۱)

آزمون ۶۲

سؤال	گام
۶۱۱	۸۱
۶۱۲	۷۴ ۸۱ ۲۸۱
۶۱۳	۸۷
۶۱۴	۱۰۰ ۱۰۳
۶۱۵	۸۱ ۹۰
۶۱۶	۹۰
۶۱۷	۹۳ ۲۸۱
۶۱۸	۹۹
۶۱۹	۱۰۶ ۱۰۷
۶۲۰	۹۶ ۱۰۷ ۱۱۳ ۱۱۵

۶۱۱- حاصل عبارت $A = \frac{\sin 25^\circ - \sin^3 25^\circ}{\cos 25^\circ - \cos^3 25^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 25^\circ$ (۲) $\tan 25^\circ$ (۳) $\cot 25^\circ$ (۴) $\cot^2 25^\circ$

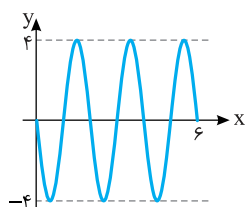
۶۱۲- اگر انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه چهارم باشد و $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{17}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $-\frac{1}{9}$

۶۱۳- اندازه یک زاویه برحسب درجه از $\frac{200}{\pi}$ برابر اندازه آن برحسب رادیان ۵ واحد کمتر است. اندازه این زاویه برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{8}$

۶۱۴- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) ۴
(۳) -۴
(۴) ۶

۶۱۵- حاصل $\frac{1}{1 - \cot 38^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 11^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan 2^\circ$ (۴) $\cot 1^\circ$

۶۱۶- اگر $a = \frac{\pi}{32}$ ، مقدار $\frac{\sin \sqrt{a} \cos \sqrt{a}}{\sin 2 \sqrt{a} \cos 2 \sqrt{a}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۶۱۷- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

۶۱۸- اگر $\cos 4x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{17}{18}$

۶۱۹- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۶۲۰- معادله $1 + \sin 2x = \cos x + \sin x$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

آزمون فصل دوم (۲)

آزمون ۶۳

۶۲۱- مقدار عبارت $A = \frac{(1+\cot \frac{\pi}{5})(1-\tan \frac{\pi}{5})}{(1-\cot \frac{\pi}{5})(1+\tan \frac{\pi}{5})}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۶۲۲- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{7}{25}$ ، مقدار $\cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۶۲۳- اگر $\sin x \cos x = \sin x + \cos x$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (۳) $1-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

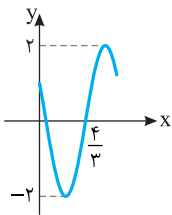
۶۲۴- حاصل عبارت $A = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۵/۵ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۶۲۵- اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ و $\tan x = m + 2\sqrt{3}$ ، حداقل مقدار m کدام است؟

- (۱) $-3\sqrt{3}$ (۲) $-4\sqrt{3}$ (۳) $-2\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۶۲۶- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(\pi(b-x))$ به شکل مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟ ($2 < b < 3$)



- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$

- (۳) $-\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{13}{3}$

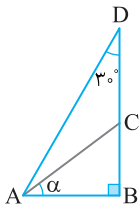
۶۲۷- مقدار عبارت $A = \left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)^2$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (۴) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

۶۲۸- در شکل روبه‌رو $BC=3$ و $AD=8$. مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$

- (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{14}{15}$



۶۲۹- نمودار تابع $f(x) = 1 - \sin(2x)$ در بازه $(0, 4\pi)$ چندبار بر محور طول‌ها مماس می‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۳۰- مجموع جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{11\pi}{4}$ (۲) $\frac{21\pi}{8}$ (۳) $\frac{23\pi}{16}$ (۴) $\frac{21\pi}{16}$

سؤال	گام
۶۲۱	۸۱
۶۲۲	۷۴ ۸۱
۶۲۳	۷۶ ۸۱ ۲۸۱
۶۲۴	۸۱ ۹۱
۶۲۵	۱۰۵
۶۲۶	۱۰۰ ۱۰۳
۶۲۷	۸۱ ۹۳ ۹۵
۶۲۸	۶۹ ۹۳
۶۲۹	۱۰۰ ۱۱۱ ۱۱۳
۶۳۰	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹

آزمون فصل دوم (۳) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

آزمون ۶۴

سؤال	گام
۶۳۱	۸۱ ۹۰
۶۳۲	۸۱ ۹۰ ۹۳
۶۳۳	۱۰۰ ۱۰۳
۶۳۴	۹۷
۶۳۵	۹۰ ۱۰۶
۶۳۶	۱۰۶ ۱۰۹
۶۳۷	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹ ۱۱۰
۶۳۸	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹
۶۳۹	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۵
۶۴۰	۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۵

ریاضی - ۹۱

۶۳۱- اگر $\tan \theta = 0/2$ ، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

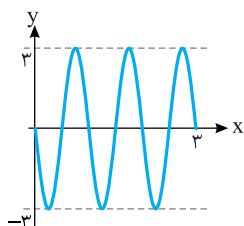
- (۱) -۲ (۲) $1/2$ (۳) ۲ (۴) ۳

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۶۳۲- ساده شدهٔ کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$ کدام است؟

- (۱) $8 \cos^{-2} \theta$ (۲) $8 \sin^{-2} \theta$ (۳) $16 \cos^{-2} \theta$ (۴) $16 \sin^{-2} \theta$

۶۳۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟



خارج از کشور ریاضی - ۹۲

- (۱) -۶

- (۲) -۳

- (۳) $4/5$

- (۴) ۶

تجربی - ۹۶

۶۳۴- اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۶۳۵- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۳۶- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۶۳۷- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۶۳۸- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

تجربی - ۹۵

۶۳۹- جواب‌های کلی معادلهٔ $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

تجربی - ۹۶

۶۴۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

آزمون فصل دوم (۴) (برگزیده کنکورهای سراسری)

آزمون ۶۵

سؤال	گام
۶۴۱	۹۰ ۹۳ ۲۸۱
۶۴۲	۸۱ ۹۰
۶۴۳	۹۰ ۱۰۰ ۱۰۳
۶۴۴	۹۳ ۱۰۶ ۱۱۵ ۲۸۲
۶۴۵	۹۳ ۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۲ ۱۱۵
۶۴۶	۹۳ ۱۰۶ ۱۰۸ ۱۱۵
۶۴۷	۹۳ ۱۰۶ ۱۰۹ ۱۱۵
۶۴۸	۱۰۶ ۱۱۳ ۱۱۵
۶۴۹	۱۰۶ ۱۰۷
۶۵۰	۹۳ ۱۰۶ ۱۱۰ ۱۱۳ ۱۱۵ ۲۸۲

تجربی - ۹۵

۶۴۱- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

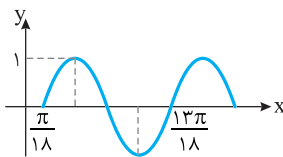
- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۶۴۲- حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = \frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{8}$

ریاضی - ۹۵

۶۴۳- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{2})$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

تجربی - ۹۲

۶۴۴- جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۶۴۵- جواب‌های کلی معادله $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ کدام است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

تجربی - ۹۱

۶۴۶- جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

تجربی - ۹۴

۶۴۷- جواب‌های کلی معادله $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi - \pi}{2}$ (۲) $\frac{k\pi + \pi}{2}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۶۴۸- نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی هستند؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۶۴۹- جواب‌های کلی معادله $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

ریاضی - ۹۵

۶۵۰- مجموع جواب‌های معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x$ در بازه $[0, \pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{4}$ (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$