

جلد اول: درس‌نامه + آزمون‌های مبحثی و جامع

جامع ریاضی ۱ و حسابان

+ موج آزمون ویراست دوم

رشته ریاضی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی



انتشارات
آگاه

پیشگفتار

به نام خدا

هدفمان از نوشتن این کتاب، فراهم آوردن مسیری است که در آن هم بتوانید مطالب کتاب حسابان ۲ را یاد بگیرید و بر آن‌ها مسلط شوید، هم مطالب کتاب‌های ریاضی ۱ و حسابان ۱ را مرور کنید. این کتاب چهارده فصل دارد. در فصل‌های اول تا دوازدهم، هر فصل از چند درس تشکیل شده است. فصل سیزدهم «آزمون‌های جامع» و فصل چهاردهم «پاسخنامه کلیدی» است.

مباحث کتاب حسابان ۲ را در پنج فصل نخست گنجانده‌ایم. هر یک از این فصل‌ها، در صورت لزوم، با درس‌هایی از کتاب‌های ریاضی ۱ و حسابان ۱ که پیش‌زمینه درس‌های متناظرشان از کتاب حسابان ۲ هستند، شروع می‌شود. هفت فصل بعدی مربوط به مباحث کتاب‌های ریاضی ۱ و حسابان ۱ هستند. در درس‌نامه‌ها مطالب را با جزئیات کامل، همراه با مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. در انتهای هر درس چندین پرسش با عنوان «دست‌گرمی» آمده است. این پرسش‌ها معیاری است برای اینکه بفهمید تا چه حد درس را خوب یاد گرفته‌اید. پس از آن نوبت آزمون‌هاست. هر آزمون ده پرسش دارد. تلاش کرده‌ایم در هر آزمون همه مطالب مربوط به درس را بگنجانیم. البته، اگر درسی چند آزمون داشته باشد، معمولاً هرچه جلوتر بروید، آزمون‌ها دشوارتر می‌شوند. در انتهای هر فصل هم چند «آزمون فصل» آورده‌ایم، که شامل آزمون‌های تألیفی و برگزیده کنکورهای سراسری است. یک فایل PDF شامل آزمون‌های تألیفی دیگر را هم می‌توانید از سایت انتشارات الگو به نشانی www.olgoobooks.ir دریافت کنید.

برای هر مطلب که در درس‌نامه آمده است یک شماره (گام) اختصاص داده‌ایم که بتوانیم خواننده را به آن ارجاع دهیم. کل مطالب این کتاب را در ۳۵۹ گام تنظیم کرده‌ایم. در کنار هر آزمون، یک جدول راهنمای ارجاع قرار داده‌ایم که در آن مشخص کرده‌ایم برای حل هر سؤال چه مطالبی مورد نیاز است. شماره این مطالب را در کنار شماره سؤال در ستون گام آورده‌ایم. توصیه می‌کنیم اگر نتوانستید سؤالی را حل کنید قبل از اینکه به پاسخ‌نامه تشریحی مراجعه کنید، گام‌های اشاره شده در درس‌نامه را پیدا کنید و مطالعه نمایید. پاسخ پرسش‌های دست‌گرمی و آزمون‌های این کتاب در جلد دوم آورده شده است. می‌توانید نسخه چاپی جلد دوم را تهیه کنید، همین‌طور می‌توانید فایل PDF آن را از سایت انتشارات الگو دریافت کنید. یادآوری می‌کنیم که اگر این کتاب را دارید، لازم نیست که کتاب موج‌آزمون ریاضی رشته ریاضی (از انتشارات الگو) را تهیه کنید، زیرا این کتاب شامل آزمون‌های کتاب موج‌آزمون نیز است.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها فهیمه گودرزی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم‌ها لیلا پرهیزکاری و راضیه صالحی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فصل اول: تابع

درس اول: مفاهیم اولیه (گام‌های ۱ تا ۷)	۱
آزمون‌های ۱ و ۲	۷
درس دوم: توابع معروف (گام‌های ۸ تا ۱۳)	۹
آزمون‌های ۳ و ۴	۱۴
درس سوم: سهمی و تابع درجه دوم (گام‌های ۱۴ تا ۲۱)	۱۶
آزمون‌های ۵ تا ۷	۲۴
درس چهارم: دامنه و برد تابع و تساوی توابع (گام‌های ۲۲ تا ۲۴)	۲۷
آزمون‌های ۸ تا ۱۰	۳۳
درس پنجم: مدل‌سازی با توابع (گام ۲۵)	۳۶
آزمون ۱۱	۳۸
درس ششم: جبر توابع (گام ۲۶)	۳۹
آزمون‌های ۱۲ تا ۱۴	۴۲
درس هفتم: ترکیب توابع (گام‌های ۲۷ تا ۲۹)	۴۵
آزمون‌های ۱۵ تا ۱۸	۵۰
درس هشتم: تبدیل نمودار توابع (گام‌های ۳۰ تا ۳۹)	۵۴
آزمون‌های ۱۹ تا ۲۲	۶۹
درس نهم: توابع یک‌به‌یک (گام‌های ۴۰ تا ۴۶)	۷۷
آزمون‌های ۲۳ و ۲۴	۸۱
درس دهم: توابع یکنوا (گام‌های ۴۷ تا ۵۹)	۸۳
آزمون‌های ۲۵ تا ۲۷	۹۱
درس یازدهم: تابع وارون (گام‌های ۶۰ تا ۶۹)	۹۴
آزمون‌های ۲۸ تا ۳۲	۱۰۱
آزمون‌های ۳۳ تا ۳۵: آزمون‌های فصل اول	۱۰۶
آزمون‌های ۳۶ و ۳۷: آزمون‌های فصل اول (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)	۱۰۹

فصل دوم: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (گام‌های ۷۰ تا ۷۲)	۱۱۱
آزمون‌های ۳۸ و ۳۹	۱۱۵
درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی (گام‌های ۷۳ تا ۸۱)	۱۱۷
آزمون‌های ۴۰ و ۴۱	۱۲۴
درس سوم: اتحادهای مثلثاتی (گام‌های ۸۲ تا ۸۴)	۱۲۶
آزمون‌های ۴۲ تا ۴۵	۱۳۱
درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه (گام‌های ۸۵ تا ۹۱)	۱۳۵
آزمون‌های ۴۶ و ۴۷	۱۴۱
درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (گام‌های ۹۲ تا ۹۴)	۱۴۳
آزمون‌های ۴۸ تا ۵۰	۱۴۷
درس ششم: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (گام‌های ۹۵ و ۹۶)	۱۵۰
آزمون‌های ۵۱ تا ۵۴	۱۵۴
درس هفتم: سینوس و کسینوس زاویهٔ 2α (گام‌های ۹۷ تا ۱۰۳)	۱۵۸
آزمون‌های ۵۵ تا ۵۸	۱۶۳
درس هشتم: تانژانت مجموع دو زاویه (گام‌های ۱۰۴ و ۱۰۵)	۱۶۷
آزمون‌های ۵۹ تا ۶۲	۱۷۱
درس نهم: توابع مثلثاتی (گام‌های ۱۰۶ تا ۱۱۱)	۱۷۵
آزمون‌های ۶۳ تا ۶۵	۱۸۴
درس دهم: معادلات مثلثاتی (گام‌های ۱۱۲ تا ۱۲۲)	۱۸۷
آزمون‌های ۶۶ تا ۷۱	۱۹۹
آزمون‌های ۷۲ تا ۷۴: آزمون‌های فصل دوم	۲۰۵
آزمون‌های ۷۵ تا ۷۸: آزمون‌های فصل دوم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)	۲۰۸

◆ فصل سوم: حد و پیوستگی

درس اول: مفهوم حد و قضایای حد (گام‌های ۱۲۳ تا ۱۳۱).....	۲۱۲
آزمون‌های ۷۹ تا ۸۲.....	۲۲۰
درس دوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای تابع‌های گویا و گنگ (گام‌های ۱۳۲ تا ۱۳۵)	
.....	۲۲۴
آزمون‌های ۸۳ و ۸۴.....	۲۲۹
درس سوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برای حدهای مثلثاتی (گام‌های ۱۳۶ تا ۱۴۰) ..	۲۳۱
آزمون‌های ۸۵ تا ۸۷.....	۲۳۷
درس چهارم: پیوستگی (گام‌های ۱۴۱ تا ۱۴۸).....	۲۴۰
آزمون‌های ۸۸ تا ۹۰.....	۲۴۵
درس پنجم: حد بی‌نهایت (گام‌های ۱۴۹ تا ۱۵۲).....	۲۴۸
آزمون‌های ۹۱ تا ۹۴.....	۲۵۴
درس ششم: مجانب قائم (گام‌های ۱۵۳ تا ۱۵۸).....	۲۵۸
آزمون‌های ۹۵ تا ۹۷.....	۲۶۳
درس هفتم: حد در بی‌نهایت (گام‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳).....	۲۶۶
آزمون‌های ۹۸ تا ۱۰۰.....	۲۷۲
درس هشتم: مجانب افقی (گام‌های ۱۶۴ تا ۱۶۹).....	۲۷۵
آزمون‌های ۱۰۱ و ۱۰۲.....	۲۷۹
آزمون‌های ۱۰۳ تا ۱۰۵: آزمون‌های فصل سوم.....	۲۸۱
آزمون‌های ۱۰۶ تا ۱۰۸: آزمون‌های فصل سوم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۲۸۴

◆ فصل چهارم: مشتق

درس اول: مفهوم مشتق (گام‌های ۱۷۰ تا ۱۸۴).....	۲۸۷
آزمون‌های ۱۰۹ تا ۱۱۲.....	۲۹۶
درس دوم: قواعد مشتق‌گیری (گام‌های ۱۸۵ تا ۱۸۹).....	۳۰۰
آزمون‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷.....	۳۰۶
درس سوم: مشتق تابع مرکب (گام‌های ۱۹۰ تا ۱۹۲).....	۳۱۱
آزمون‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲.....	۳۱۵
درس چهارم: مشتق‌پذیری (گام‌های ۱۹۳ تا ۱۹۹).....	۳۲۰

آزمون‌های ۱۲۳ تا ۱۲۵.....	۳۲۶
درس پنجم: خط مماس بر نمودار تابع (گام‌های ۲۰۰ تا ۲۰۳).....	۳۲۹
آزمون‌های ۱۲۶ و ۱۲۷.....	۳۳۲
درس ششم: آهنگ تغییر (گام‌های ۲۰۴ و ۲۰۵).....	۳۳۴
آزمون ۱۲۸.....	۳۳۶
درس هفتم: مشتق دوم (گام ۲۰۶).....	۳۳۷
آزمون‌های ۱۲۹ و ۱۳۰.....	۳۳۹
درس هشتم: قاعدهٔ هوییتال (گام ۲۰۷).....	۳۴۱
آزمون‌های ۱۳۱ و ۱۳۲.....	۳۴۴
آزمون‌های ۱۳۳ تا ۱۳۴: آزمون‌های فصل چهارم.....	۳۴۶
آزمون‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹: آزمون‌های فصل چهارم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری).....	۳۴۸

◆ فصل پنجم: کاربردهای مشتق

درس اول: ارتباط مشتق و یکنوایی تابع (گام‌های ۲۰۸ و ۲۰۹).....	۳۵۳
آزمون‌های ۱۴۰ و ۱۴۱.....	۳۵۶
درس دوم: نقاط بحرانی (گام ۲۱۰).....	۳۵۸
آزمون‌های ۱۴۲ و ۱۴۳.....	۳۶۰
درس سوم: اکسترم‌های نسبی (گام‌های ۲۱۱ تا ۲۱۵).....	۳۶۲
آزمون‌های ۱۴۴ تا ۱۴۷.....	۳۶۹
درس چهارم: اکسترم‌های مطلق (گام‌های ۲۱۶ تا ۲۱۸).....	۳۷۳
آزمون‌های ۱۴۸ و ۱۴۹.....	۳۷۷
درس پنجم: بهینه‌سازی (گام ۲۱۹).....	۳۷۹
آزمون‌های ۱۵۰ تا ۱۵۲.....	۳۸۳
درس ششم: جهت تقعر (گام‌های ۲۲۰ تا ۲۲۳).....	۳۸۶
آزمون‌های ۱۵۳ تا ۱۵۵.....	۳۹۰
درس هفتم: نقطهٔ عطف (گام‌های ۲۲۴ و ۲۲۵).....	۳۹۳
آزمون‌های ۱۵۶ تا ۱۵۸.....	۳۹۷
درس هشتم: رسم نمودار (گام‌های ۲۲۶ تا ۲۳۲).....	۴۰۰
آزمون‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳.....	۴۱۲

آزمون‌های ۱۶۴ تا ۱۶۶: آزمون‌های فصل پنجم ۴۱۸
 آزمون‌های ۱۶۷ تا ۱۷۰: آزمون‌های فصل پنجم (برگزیدهٔ کنکورهای
 سراسری) ۴۲۱

◆ فصل ششم: بازه و مجموعه

درس اول: مجموعه‌های اعداد (گام‌های ۲۳۳ و ۲۳۴) ۴۲۵
 آزمون‌های ۱۷۱ و ۱۷۲ ۴۲۸
 درس دوم: مجموعه‌ها (گام‌های ۲۳۵ تا ۲۴۳) ۴۳۰
 آزمون‌های ۱۷۳ و ۱۷۴ ۴۳۴
 آزمون ۱۷۵: آزمون فصل ششم ۴۳۶

◆ فصل هفتم: الگو و دنباله

درس اول: الگو و دنباله (گام‌های ۲۴۴ تا ۲۴۶) ۴۳۷
 آزمون‌های ۱۷۶ و ۱۷۷ ۴۴۱
 درس دوم: دنبالهٔ حسابی (گام‌های ۲۴۷ تا ۲۵۵) ۴۴۳
 آزمون‌های ۱۷۸ و ۱۷۹ ۴۴۶
 درس سوم: دنبالهٔ هندسی (گام‌های ۲۵۶ تا ۲۶۳) ۴۴۸
 آزمون‌های ۱۸۰ و ۱۸۱ ۴۵۲
 درس چهارم: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی (گام‌های ۲۶۴ تا ۲۶۸) ۴۵۴
 آزمون‌های ۱۸۲ تا ۱۸۵ ۴۵۹
 آزمون ۱۸۶: آزمون فصل هفتم ۴۶۳
 آزمون‌های ۱۸۷ و ۱۸۸: آزمون‌های فصل هفتم (برگزیدهٔ کنکورهای
 سراسری) ۴۶۴

◆ فصل هشتم: توان، ریشه، اتحاد، تجزیه و تقسیم

درس اول: توان و ریشه (گام‌های ۲۶۹ تا ۲۷۴) ۴۶۶
 آزمون‌های ۱۸۹ و ۱۹۰ ۴۶۹
 درس دوم: اتحاد (گام‌های ۲۷۵ تا ۲۸۲) ۴۷۱
 آزمون‌های ۱۹۱ تا ۱۹۴ ۴۷۶
 درس سوم: تجزیه (گام‌های ۲۸۳ و ۲۸۴) ۴۸۰
 آزمون‌های ۱۹۵ و ۱۹۶ ۴۸۳

درس چهارم: گویا کردن مخرج‌های گنگ (گام ۲۸۵) ۴۸۵
 آزمون ۱۹۷ ۴۸۷
 درس پنجم: بخش پذیری و تقسیم (گام‌های ۲۸۶ تا ۲۸۸) ۴۸۸
 آزمون‌های ۱۹۸ و ۱۹۹ ۴۹۰
 آزمون‌های ۲۰۰ و ۲۰۱: آزمون‌های فصل هشتم ۴۹۲

◆ فصل نهم: معادله، تعیین علامت و نامعادله

درس اول: حل معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۲۸۹ تا ۲۹۵) ۴۹۴
 آزمون‌های ۲۰۲ و ۲۰۳ ۴۹۸
 درس دوم: روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۲۹۶ تا ۲۹۹) ۵۰۰
 آزمون‌های ۲۰۴ و ۲۰۵ ۵۰۴
 درس سوم: رابطهٔ بین ضرایب و علامت جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (گام‌های ۳۰۰ و ۳۰۱) ۵۰۶
 آزمون ۲۰۶ ۵۰۸
 درس چهارم: معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم خاص (گام‌های ۳۰۲ تا ۳۰۵) ۵۰۹
 آزمون ۲۰۷ ۵۱۳
 درس پنجم: معادله‌های گویا (گام‌های ۳۰۶ تا ۳۱۰) ۵۱۴
 آزمون‌های ۲۰۸ و ۲۰۹ ۵۱۸
 درس ششم: تعیین علامت و نامعادله (گام‌های ۳۱۱ تا ۳۱۸) ۵۲۰
 آزمون‌های ۲۱۰ و ۲۱۱ ۵۲۷
 درس هفتم: معادله‌های گنگ (گام‌های ۳۱۹ تا ۳۲۲) ۵۲۹
 آزمون‌های ۲۱۲ و ۲۱۳ ۵۳۲
 درس هشتم: حل هندسی معادلات (گام ۳۲۳) ۵۳۴
 آزمون‌های ۲۱۴ و ۲۱۵ ۵۳۷
 آزمون ۲۱۶: آزمون فصل نهم ۵۳۹
 آزمون‌های ۲۱۷ و ۲۱۸: آزمون‌های فصل نهم (برگزیدهٔ کنکورهای
 سراسری) ۵۴۰

◆ فصل دهم: قدرمطلق و جزء صحیح

درس اول: قدرمطلق و ویژگی‌های آن (گام‌های ۳۲۴ و ۳۲۵) ۵۴۲
 آزمون ۲۱۹ ۵۴۵

درس چهارم: توابع لگاریتمی (گام‌های ۳۴۶ تا ۳۴۹) ۵۹۰

آزمون‌های ۲۳۸ و ۲۳۹ ۵۹۵

درس پنجم: معادلات و نامعادلات لگاریتمی (گام‌های ۳۵۰ و ۳۵۱) .. ۵۹۷

آزمون‌های ۲۴۰ تا ۲۴۲ ۶۰۱

آزمون ۲۴۳: آزمون فصل یازدهم ۶۰۴

آزمون‌های ۲۴۴ و ۲۴۵: آزمون‌های فصل یازدهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۶۰۵

◆ فصل دوازدهم: هندسهٔ تحلیلی

درس اول: خط راست (گام‌های ۳۵۲ تا ۳۵۹) ۶۰۷

آزمون‌های ۲۴۶ تا ۲۴۸ ۶۱۴

◆ فصل سیزدهم: آزمون‌های جامع

آزمون‌های ۲۴۹ تا ۲۷۲ ۶۱۷

◆ فصل چهاردهم: پاسخنامهٔ کلیدی

دست‌گرمی ۶۶۶

آزمون‌ها ۶۶۸

درس دوم: معادلات و نامعادلات قدرمطلق (گام‌های ۳۲۶ تا ۳۲۹) .. ۵۴۶

آزمون‌های ۲۲۰ تا ۲۲۲ ۵۵۳

درس سوم: توابع شامل قدرمطلق (گام‌های ۳۳۰ تا ۳۳۲) ۵۵۶

آزمون‌های ۲۲۳ و ۲۲۴ ۵۵۹

درس چهارم: جزء صحیح و ویژگی‌های آن (گام‌های ۳۳۳ تا ۳۳۴) .. ۵۶۱

آزمون‌های ۲۲۵ و ۲۲۶ ۵۶۴

درس پنجم: تابع جزء صحیح (گام‌های ۳۳۵ تا ۳۳۷) ۵۶۶

آزمون‌های ۲۲۷ و ۲۲۸ ۵۶۹

آزمون ۲۲۹: آزمون فصل دهم ۵۷۱

آزمون ۲۳۰: آزمون فصل دهم (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری) ۵۷۲

◆ فصل یازدهم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی (گام‌های ۳۳۸ تا ۳۴۰) ۵۷۳

آزمون‌های ۲۳۱ و ۲۳۲ ۵۷۷

درس دوم: معادلات و نامعادلات نمایی (گام‌های ۳۴۱ و ۳۴۲) ۵۷۹

آزمون‌های ۲۳۳ و ۲۳۴ ۵۸۲

درس سوم: لگاریتم (گام‌های ۳۴۳ تا ۳۴۵) ۵۸۴

آزمون‌های ۲۳۵ تا ۲۳۷ ۵۸۷

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

تعریف نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول وتر مثلث را **سینوس** این زاویه می‌نامند:

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC}$$

همچنین، نسبت طول ضلع مجاور به هر زاویه حاده (به‌جز وتر) به طول وتر مثلث را **کسینوس** این زاویه می‌نامند:

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}, \quad \cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$$

همین‌طور، نسبت طول ضلع مقابل به هر زاویه حاده به طول ضلع مجاور به این زاویه (به‌جز وتر) را **تانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$$

و عکس تانژانت یک زاویه را **کوتانژانت** این زاویه می‌نامند:

$$\cot \hat{B} = \frac{AB}{AC}, \quad \cot \hat{C} = \frac{AC}{AB}$$

تست ۱

در شکل مقابل مقدار $\sin \hat{B} + \cos \hat{B}$ کدام است؟

(۱) $\frac{89}{40}$ (۲) $\frac{40}{89}$ (۳) $\frac{13}{\sqrt{89}}$ (۴) $\frac{\sqrt{89}}{13}$

از قضیه فیثاغورس می‌توانیم طول وتر مثلث را به‌دست آوریم: $BC = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$. بنابراین

$$\sin \hat{B} + \cos \hat{B} = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{5}{\sqrt{89}} + \frac{8}{\sqrt{89}} = \frac{13}{\sqrt{89}}$$

راه‌حل

تست ۲

در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{CAB}$. بنابراین

$$\tan \alpha = \tan \hat{CAB} = \frac{CB}{AB} = \frac{3}{2}$$

راه‌حل

تست ۳

در شکل مقابل طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \hat{ACD}$. بنابراین

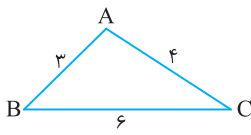
$$\sin \alpha = \sin \hat{ACD} = \frac{AD}{AC}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث ACD ، $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. پس $AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. در نتیجه

$$\sin \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

راه‌حل

تست ۴

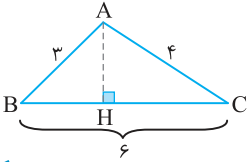
 در شکل مقابل مقدار $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C}$ کدام است؟


۱ (۲)

۲ (۱)

۳ (۴)

۴ (۳)

راه حل


مطابق شکل، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم الزاویه ABH، $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{3}$. در مثلث قائم الزاویه AHC، $\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{4}$. بنابراین $\cos \hat{B} + \frac{4}{3} \cos \hat{C} = \frac{BH}{3} + \frac{4}{3} \left(\frac{HC}{4} \right) = \frac{BH+HC}{3} = \frac{BC}{3} = \frac{6}{3} = 2$

۷۱

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

مقدار نسبت مثلثاتی مقدار زاویه A	$\sin \hat{A}$	$\cos \hat{A}$	$\tan \hat{A}$	$\cot \hat{A}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست ۵

مطابق شکل درختی به ارتفاع ۳ متر از نقطه A با زاویه 14° و از نقطه B با زاویه 50° دیده می‌شود. فاصله A از B تقریباً چقدر است؟ ($\tan 50^\circ \approx 1/19$, $\tan 14^\circ \approx 0/25$)



۱۲/۵۲ (۴)

۱۴/۵۲ (۳)

۱۳/۵۲ (۲)

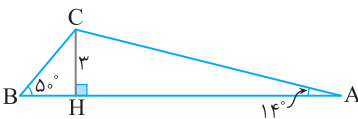
۱۲ (۱)

راه حل

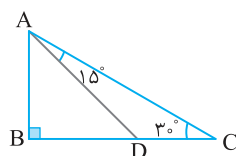
مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث قائم الزاویه CBH، $\tan 50^\circ = \frac{CH}{BH} = \frac{3}{BH}$. پس $\frac{3}{BH} = \frac{1}{19}$ ، یعنی $BH = \frac{3}{1/19} = 57$.

در مثلث قائم الزاویه AHC، $\tan 14^\circ = \frac{CH}{HA} = \frac{3}{HA}$. پس $\frac{3}{HA} = \frac{0/25}{1}$ ، یعنی $HA = \frac{3}{0/25} = 12$.

بنابراین فاصله دو نقطه A و B تقریباً برابر است با $BA = BH + HA \approx 57 + 12 = 69$.


تست ۶

در شکل مقابل طول CD چقدر است؟ ($AD = 2\sqrt{2}$)



۲(√۳+۱) (۲)

۲(√۳-۱) (۱)

۳√۳ (۴)

۲√۳ (۳)

راه حل

ابتدا توجه کنید که $\hat{BAC} = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. پس $\hat{BAD} = \hat{BAC} - \hat{DAC} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.

$$\cos \hat{BAD} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{AB}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{2\sqrt{2}}$$

در مثلث قائم الزاویه DBA،

$$\sin \hat{BAD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{BD}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BD}{2\sqrt{2}}$$

بنابراین $AB = 2$. همچنین، در همین مثلث،

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{BC} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

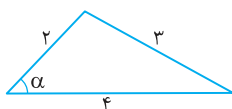
بنابراین $BD = 2$. از طرف دیگر، در مثلث قائم الزاویه ABC،

$$CD = BC - BD = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1)$$

به این ترتیب

تست
□□□□

در شکل مقابل مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟



(۲) $\frac{13}{16}$

(۱) $\frac{7}{8}$

(۴) $\frac{11}{16}$

(۳) $\frac{3}{4}$

راه حل

از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH با توجه به قضیه فیثاغورس،

$$x^2 + h^2 = 4, \quad h^2 + (4-x)^2 = 9 \Rightarrow h^2 + x^2 + 16 - 8x = 9$$

$$4 + 16 - 8x = 9 \Rightarrow 8x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{8}$$

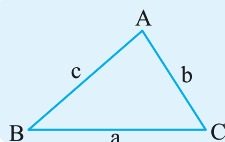
اگر به جای $x^2 + h^2$ در معادله دوم مقدار ۴ را قرار دهیم، می‌توان مقدار x را به دست آورد

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه ABH مقدار $\cos \alpha$ را به دست می‌آوریم $\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB}$ ، پس $\cos \alpha = \frac{x}{2} = \frac{11}{16}$.

۷۲

محاسبه مساحت مثلث

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول‌های دو ضلع آن در سینوس زاویه میان این دو ضلع.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$

تست
□□□□

در مثلث متساوی‌الساقین ABC می‌دانیم $AB=AC$ ، $\hat{B} = 67/5^\circ$ و مساحت مثلث $9\sqrt{2}$ است. طول ساق مثلث کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۴

(۲) ۳

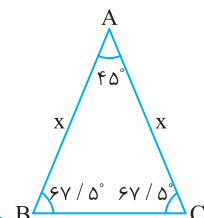
(۱) ۲

راه حل

مطابق شکل مقابل اندازه زاویه A برابر 45° است و اگر طول ساق مثلث را x فرض کنیم، مساحت مثلث برابر

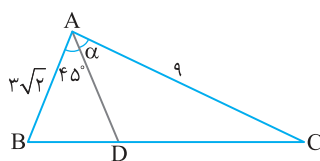
$$S = \frac{1}{2}x^2 \sin \hat{A} \text{ است. پس}$$

$$9\sqrt{2} = \frac{1}{2}x^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$



تست
□□□□

در شکل روبه‌رو $S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ADC}$. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{3}{4}$

راه حل

توجه کنید که

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}S_{ADC} \Rightarrow \frac{1}{2}AB \times AD \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}AD \times AC \times \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 9 \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

تست
□□□□

در یک متوازی‌الاضلاع که مساحت آن برابر $10\sqrt{3}$ است، اندازه یک ضلع برابر ۲ و اندازه یک زاویه 60° است. اندازه ضلع دیگر کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۸

(۲) ۱۰

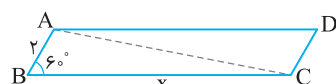
(۱) ۵

راه حل

مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD دو برابر مساحت مثلث ABC است. پس مساحت مثلث ABC

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin 60^\circ \Rightarrow 5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow x = 10$$

بنابراین برابر $5\sqrt{3}$ است.



تست

۱۱

در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث CDE

برابر $\frac{3}{4}$ است. مقدار x کدام است؟

۶ (۲)

۴ (۱)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

توجه کنید که $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ، پس $\sin \hat{C}_1 = \sin \hat{C}_2$ از طرف دیگر.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = \frac{\frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \hat{C}_1}{\frac{1}{2} CD \times CE \times \sin \hat{C}_2} = \frac{CA \times CB}{CD \times CE} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{2 \times x} \Rightarrow x = 10$$

راه حل
دست گرمی
۵۹- در مثلث قائم الزاویه ABC، اگر $b=5$ و $\cos \hat{B} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ ، مقدار a کدام است؟

۷ (۲)

۶ (۱)

۱۴ (۴)

 $\sqrt{7}$ (۳)۶۰- در شکل مقابل طول ضلع مربع های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۶۱- در شکل مقابل طول ضلع مربع های کوچک یک واحد است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟ $\frac{2}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۱) $\frac{2}{\sqrt{11}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ (۳)۶۲- مقدار عبارت $A = \frac{4 \sin^3 6^\circ - 3 \sin 6^\circ}{4 \cos^3 2^\circ - 3 \cos 2^\circ}$ کدام است؟

-۱ (۲)

۱ (۱)

صفر (۴)

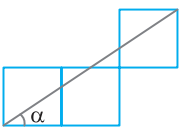
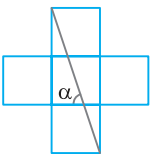
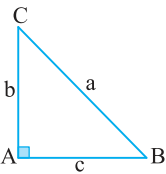
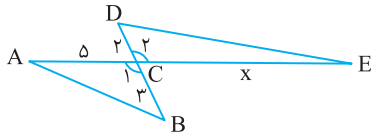
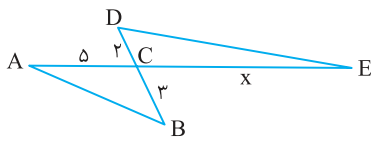
 $\frac{1}{2}$ (۳)

۶۳- در شکل مقابل مساحت متوازی الاضلاع ABCD چقدر است؟

 $10\sqrt{3}$ (۲) $5\sqrt{3}$ (۱)

۱۰ (۴)

۵ (۳)



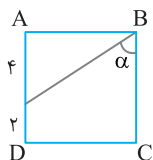
نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۱)

آزمون ۳۸

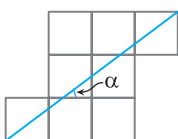
سؤال	گام
۳۷۱	۷۰
۳۷۲	۷۰
۳۷۳	۷۰
۳۷۴	۷۰ ۷۱
۳۷۵	۷۰
۳۷۶	۷۰
۳۷۷	۷۰
۳۷۸	۷۰
۳۷۹	۷۱ ۷۲
۳۸۰	۷۲

۳۷۱- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $\hat{A}=90^\circ$ ، $\sin \hat{B}=\frac{1}{3}$ و $AC=2$. مقدار $\tan \hat{C}$ کدام است؟

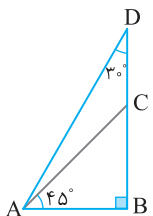
- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{3}$


۳۷۲- در شکل مقابل ABCD مربع است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

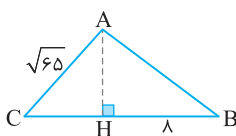

۳۷۳- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{25}{6}$ (۲) $\frac{49}{16}$ (۳) $\frac{49}{15}$ (۴) $\frac{25}{12}$

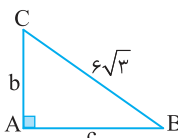


۳۷۴- در شکل مقابل نسبت طول DC به طول AC کدام است؟

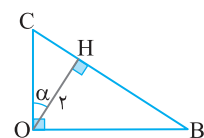
- (۱) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$


۳۷۵- در شکل مقابل $\tan \hat{B}=\frac{3}{4}$ و $HB=8$. طول CH کدام است؟

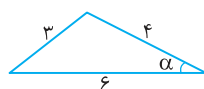
- (۱) $\sqrt{29}$ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{25}$ (۴) $\sqrt{24}$


۳۷۶- در شکل مقابل $\cot \hat{B}=\sqrt{2}$. مساحت مثلث چقدر است؟

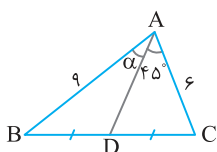
- (۱) ۱۸ (۲) ۳۶ (۳) $18\sqrt{2}$ (۴) $36\sqrt{2}$


۳۷۷- در شکل مقابل $OH=2$. مقدار $OB+OC$ کدام است؟

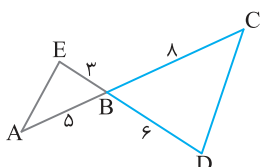
- (۱) $\tan \alpha + \cot \alpha$ (۲) $\frac{2}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha}$ (۳) $2 \tan \alpha$ (۴) $2 \cot \alpha$


۳۷۸- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{455}}{36}$ (۲) $\frac{\sqrt{455}}{48}$ (۳) $\frac{29}{36}$ (۴) $\frac{29}{48}$


۳۷۹- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



۳۸۰- در شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ABE به مساحت مثلث BCD چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{3}{5}$

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه (۲)

آزمون ۳۹

۳۸۱- در مثلث ABC ، اگر $\hat{C}=90^\circ$ ، $\sin \hat{B}=\frac{4}{5}$ و $b+c=7$ ، مقدار a کدام است؟

$$\frac{11}{3} \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$\frac{7}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۱)$$

۳۸۲- در شکل روبه‌رو طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

۳۸۳- در شکل مقابل نسبت طول ضلع HC به طول ضلع BH چقدر است؟

$$2 \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$\sqrt{5} \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

۳۸۴- مطابق شکل روبه‌رو از دو نقطه A و B روی زمین که ۲۴ متر از هم فاصله دارند،

بالاترین قسمت یک ساختمان به ترتیب با زاویه‌های 3° و 6° دیده می‌شود. ارتفاع

ساختمان کدام است؟

$$6\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$3\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{3} \quad (۳)$$

۳۸۵- در مثلث متساوی‌الساقین مقابل $AB=BC$ و طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر

$$16 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۱)$$

$$16\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$8\sqrt{3} \quad (۳)$$

۳۸۶- در شکل روبه‌رو $CM=AB$ و $\tan \theta = 3 \tan \alpha$. حاصل عبارت $\cot \alpha + \cot \theta$ کدام است؟

$$4 \quad (۲)$$

$$2 \quad (۱)$$

$$7 \quad (۴)$$

$$5 \quad (۳)$$

۳۸۷- در شکل مقابل $BC=4$. مقدار $\frac{BH}{HC}$ کدام است؟

$$\tan^2 \beta \quad (۲)$$

$$\tan^2 \alpha \quad (۱)$$

$$\sin \beta + \cos \beta \quad (۴)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha \quad (۳)$$

۳۸۸- در نیم‌دایره شکل روبه‌رو، $BD=x$ و $DC=8x$. مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

۳۸۹- در شکل مقابل طول ضلع AB چقدر است؟

$$2\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$8\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$4\sqrt{2} \quad (۳)$$

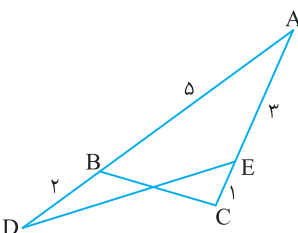
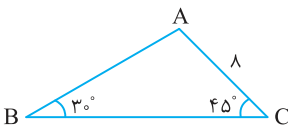
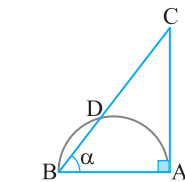
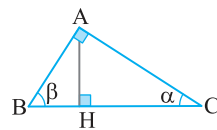
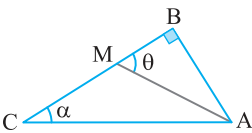
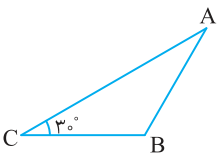
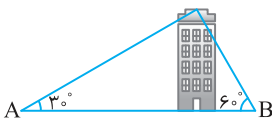
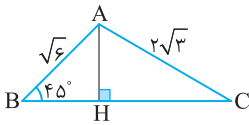
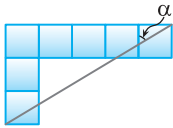
۳۹۰- در شکل روبه‌رو $S_{ADE} + S_{ABC} = \frac{41}{4}$. اندازه زاویه حاده A کدام است؟

$$45^\circ \quad (۲)$$

$$60^\circ \quad (۱)$$

$$15^\circ \quad (۴)$$

$$30^\circ \quad (۳)$$



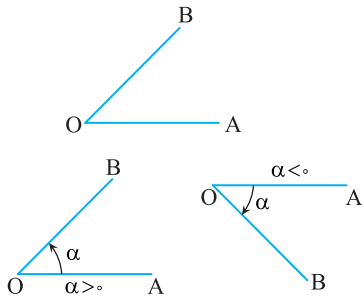
سؤال	گام
۳۸۱	۷۰
۳۸۲	۷۰
۳۸۳	۷۰ ۷۱
۳۸۴	۷۰ ۷۱
۳۸۵	۷۰ ۷۱
۳۸۶	۷۰
۳۸۷	۷۰
۳۸۸	۷۰
۳۸۹	۷۰ ۷۱ ۷۲
۳۹۰	۷۱ ۷۲

درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

۷۳

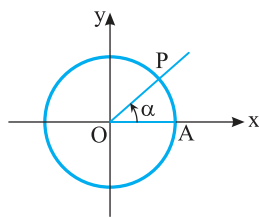
تعاریف اولیه

زاویه مثلثاتی

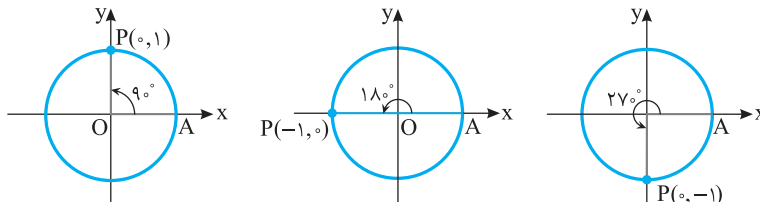


دو نیم خط OA و OB را در نظر بگیرید که در نقطه O مشترک‌اند. اگر نیم خط OA حول نقطه O دوران کند و بر نیم خط OB منطبق شود، زاویه‌ای مثلثاتی ایجاد می‌شود. OA را ضلع ابتدایی، OB را ضلع انتهایی و مقدار دوران را مقدار زاویه مثلثاتی می‌نامند. اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را منفی در نظر می‌گیرند و اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) باشد، اندازه زاویه را مثبت در نظر می‌گیرند. اگر رأس زاویه بر مبدأ مختصات واقع باشد و ضلع ابتدایی زاویه بر قسمت مثبت محور طول‌ها واقع باشد، می‌گوییم زاویه در موقعیت استاندارد است. از این پس تمام زاویه‌ها را در موقعیت استاندارد در نظر می‌گیریم.

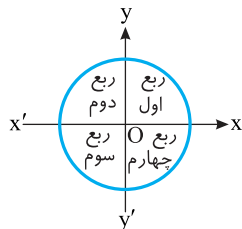
دایره مثلثاتی



دایره‌ای به شعاع ۱ واحد را که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق باشد، دایره مثلثاتی می‌نامند. نقطه تقاطع دایره با محور طول‌ها $A(1, 0)$ و OA ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی است. اگر OA به اندازه α مطابق شکل روبه‌رو دوران کند، بر OP منطبق می‌شود. α را اندازه زاویه مثلثاتی ایجاد شده و کمان AP را کمان روبه‌رو به زاویه α می‌نامیم. چون ضلع ابتدایی تمام زاویه‌های مثلثاتی را OA فرض کرده‌ایم، پس با معلوم بودن نقطه P روی دایره و جهت دوران، زاویه α مشخص می‌شود. مثلاً وقتی P در نقطه‌های $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ و $(0, -1)$ قرار گیرد و جهت دوران پادساعتگرد باشد، زاویه‌های زیر مشخص می‌شوند:



ناحیه‌های مثلثاتی



محورهای $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه مختصات را به چهار ناحیه تقسیم کرده‌اند. ناحیه بین Ox و Oy را ناحیه اول یا ربع اول مثلثاتی می‌نامند. همچنین ناحیه بین Oy و Ox' را ربع دوم مثلثاتی، ناحیه بین Ox' و Oy' را ربع سوم مثلثاتی و ناحیه بین Oy' و Ox را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامند.

تذکر اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در نقطه‌های $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, -1)$ یا $(1, 0)$ قرار داشته باشد، زاویه α در هیچ‌یک از چهار ناحیه مثلثاتی قرار ندارد.

نکته

ناحیه‌ای که نقطه P ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α ، در آن قرار می‌گیرد برای زاویه‌های مختلف از 0° تا 360° مطابق جدول زیر است:

حدود α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
ناحیه‌ای که P قرار دارد	اول	دوم	سوم	چهارم

تست

☐ ☐ ☐ ☐

۱. انتهای کمان روبه‌رو به زاویه -20° در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

(۴) چهارم

مطابق شکل روبه‌رو انتهای کمان روبه‌رو به زاویه -20° در ناحیه دوم قرار دارد.

را حل

تست

☐ ☐ ☐ ☐

۲. اگر α زاویه‌ای حاده باشد، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه $\alpha + 18^\circ$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۱) اول

(۲) دوم

(۳) سوم

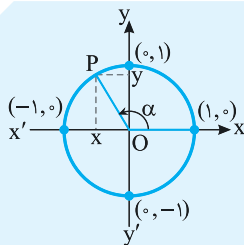
(۴) چهارم

چون α زاویه‌ای حاده است، پس $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، بنابراین $18^\circ < \alpha + 18^\circ < 27^\circ$ و در نتیجه انتهای کمان روبه‌رو به زاویه $\alpha + 18^\circ$ در ناحیه سوم قرار دارد.

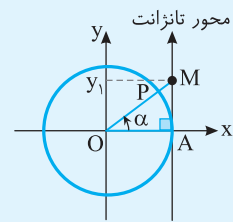
را حل

۷۴

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی



در دایره مثلثاتی مقابل برای هر زاویه مانند α ، $\sin \alpha$ برابر عرض نقطه P یعنی y است. پس $\sin \alpha$ با عددی روی محور $y'Oy$ متناظر است. محور $y'Oy$ را **محور سینوس** می‌نامند و چون $-1 \leq y \leq 1$ ، پس $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$. همچنین $\cos \alpha$ برابر طول نقطه P یعنی x است. پس $\cos \alpha$ با عددی روی محور $x'Ox$ متناظر است. محور $x'Ox$ را **محور کسینوس** می‌نامند و چون $-1 \leq x \leq 1$ ، پس $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.



در نقطه $A(1, 0)$ محوری عمود بر محور x رسم می‌کنیم و جهت مثبت آن را مانند محور y انتخاب می‌کنیم. این محور را **محور تانژانت** می‌نامیم. مقدار تانژانت هر زاویه دلخواه، اگر تعریف شده باشد، روی این محور قابل نمایش است. در مثلث قائم‌الزاویه OAM در شکل مقابل می‌توان نوشت $\tan \alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{1} = AM$. برای مشخص کردن تانژانت زاویه α ، کافی است شعاع OP ، ضلع انتهایی زاویه α ، را امتداد دهیم تا محور تانژانت را در نقطه $M(1, y_1)$ قطع کند. در این صورت $y_1 = \tan \alpha$.

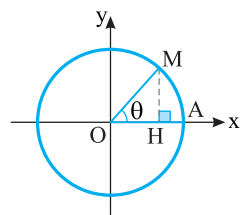
نکته

اگر ضلع انتهایی زاویه α روی محور y قرار داشته باشد، تانژانت زاویه α تعریف نمی‌شود.

تست

☐ ☐ ☐ ☐

۳. در دایره مثلثاتی مقابل، $\cos \theta = \frac{2}{3}$. اندازه پاره خط AH چقدر است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۴) $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 

$$OH = \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = OA - OH = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

با توجه به شکل،

را حل

تست

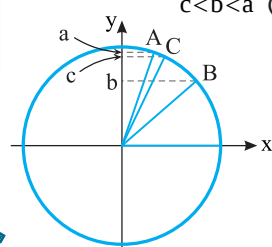
☐ ☐ ☐ ☐

۴. اگر $a = \sin 71^\circ$ ، $b = \sin 41^\circ$ و $c = \sin 67^\circ$ ، کدام درست است؟

(۱) $a < b < c$ (۲) $b < c < a$ (۳) $a < c < b$ (۴) $c < b < a$

فرض کنید نقاط A ، B و C به ترتیب انتهای کمان‌های روبه‌رو به زاویه‌های 71° ، 41° و 67° روی دایره مثلثاتی باشند. از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b < c < a$.

را حل



تست ۵

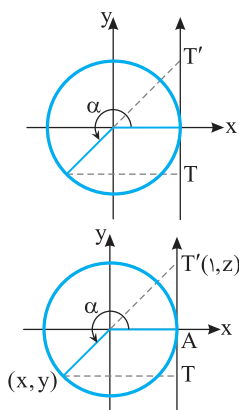
در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، طول پاره خط TT' برابر کدام عبارت است؟

- (۱) $\tan \alpha - \sin \alpha$
- (۲) $\tan \alpha + \sin \alpha$
- (۳) $\sin \alpha - \cos \alpha$
- (۴) $\sin \alpha + \cos \alpha$

راهنما

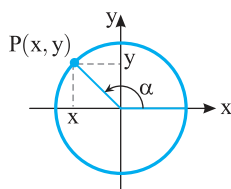
با توجه به شکل روبه‌رو واضح است که $\sin \alpha = y$ و $\tan \alpha = z$. بنابراین طول پاره خط TT' برابر است با

$$TT' = AT + AT' = |y| + |z| = -y + z = -\sin \alpha + \tan \alpha$$



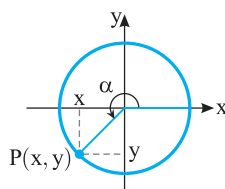
علامت نسبت‌های مثلثاتی

اگر نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α ، در ناحیهٔ اول مثلثاتی واقع باشد، طول و عرض آن مثبت است و تمام نسبت‌های مثلثاتی α مثبت‌اند. اگر نقطه P در ناحیه‌های دوم، سوم و چهارم مثلثاتی قرار گیرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α می‌توانند مثبت یا منفی باشند، زیرا طول و عرض نقطهٔ P در این ناحیه‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. به شکل‌های زیر دقت کنید:



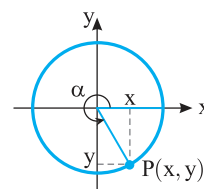
$$\sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x > 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0$$



$$\sin \alpha = y > 0, \quad \cos \alpha = x < 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} < 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} < 0$$



$$\sin \alpha = y < 0, \quad \cos \alpha = x < 0$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} > 0, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} > 0$$

نکته

علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α ، وقتی انتهای کمان روبه‌رو به آن در ناحیه‌های مختلف قرار می‌گیرد، مطابق جدول زیر است:

نسبت \ ناحیه	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

تست ۶

اگر $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ و $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟ ($\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

راهنما

با توجه به تساوی $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ ، معلوم است که $\cos \alpha \leq 0$. با توجه به تساوی $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ ، معلوم است که $\sin \alpha \geq 0$. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع دوم مثلثاتی قرار دارد.

تست ۷

اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول
- (۲) دوم
- (۳) سوم
- (۴) چهارم

راهنما

با توجه به $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ مشخص است که مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ علامت‌های مخالف دارند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ دوم یا چهارم قرار دارد. با توجه به $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ واضح است که $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ هم‌علامت هستند. پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ اول یا چهارم قرار دارد. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

تست



کدام یک عددی مثبت است؟

(۴) $\cos 300^\circ$

(۳) $\sin 300^\circ$

(۲) $\cos 200^\circ$

(۱) $\sin 200^\circ$

راه حل

انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 200° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin 200^\circ$ و $\cos 200^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 300° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin 300^\circ$ عددی منفی و $\cos 300^\circ$ عددی مثبت است.

۷۶

نسبت‌های مثلثاتی چند زاویه معروف

زاویه نسبت	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 270^\circ$	$\alpha = 360^\circ$
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۷۷

نکته

برای هر زاویه دلخواه مانند α ، $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ و $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ، همچنین اگر $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ تعریف شوند، مقادیر آنها اعدادی در بازه $(-\infty, +\infty)$ هستند.

تست

حداکثر مقدار عبارت $4 \cos \alpha - 1$ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

راه حل

طرفین نابرابری $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ را در ۴ ضرب می‌کنیم $-4 \leq 4 \cos \alpha \leq 4$. یک واحد از طرفین نابرابری اخیر کم می‌کنیم $-5 \leq 4 \cos \alpha - 1 \leq 3$. بنابراین حداکثر مقدار عبارت ۳ است.

تست

مجموع حداکثر و حداقل مقدار عبارت $\frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{2}{3}$

(۳) $-\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{1}{3}$

راه حل

ابتدا عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{\sin \alpha}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha - 2}{2 + \sin \alpha} = \frac{2 + \sin \alpha}{2 + \sin \alpha} - \frac{2}{2 + \sin \alpha} = 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha}$$

اکنون با توجه به اینکه $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ می‌توانیم محدوده A را بیابیم:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin \alpha \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin \alpha} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \frac{-2}{2 + \sin \alpha} \leq -\frac{2}{3} \Rightarrow -1 \leq 1 - \frac{2}{2 + \sin \alpha} \leq \frac{1}{3}$$

بنابراین حداقل مقدار A برابر -1 و حداکثر مقدار آن $\frac{1}{3}$ است. در نتیجه مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت، برابر $-\frac{2}{3}$ است.

۷۸

حدود نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف

نکته

$0^\circ < \alpha < 9^\circ$	$9^\circ < \alpha < 18^\circ$	$18^\circ < \alpha < 27^\circ$	$27^\circ < \alpha < 36^\circ$
$0 < \sin \alpha < 1$	$0 < \sin \alpha < 1$	$-1 < \sin \alpha < 0$	$-1 < \sin \alpha < 0$
$0 < \cos \alpha < 1$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$-1 < \cos \alpha < 0$	$0 < \cos \alpha < 1$
$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$	$\tan \alpha > 0$	$\tan \alpha < 0$
$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$	$\cot \alpha > 0$	$\cot \alpha < 0$

تست ۱۱

اگر $18^\circ \leq \alpha \leq 27^\circ$ ، اختلاف حداقل و حداکثر مقدار عبارت $A = 3 - 2 \sin \alpha$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

راه‌حل

با توجه به $18^\circ \leq \alpha \leq 27^\circ$ ، معلوم می‌شود α در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد و می‌توان نتیجه گرفت $-1 \leq \sin \alpha \leq 0$. بنابراین $-2 \leq \sin \alpha \leq 0$ و در نتیجه $3 \leq 3 - 2 \sin \alpha \leq 5$. پس حداقل مقدار A برابر ۳ و حداکثر مقدار آن برابر ۵ است و اختلاف آن‌ها ۲ است.

۷۹

نکته

با افزایش مقادیر α از 0° به 36° ،

مقادیر $\sin \alpha$ در ناحیه‌های اول و چهارم در حال افزایش و در ناحیه‌های دوم و سوم در حال کاهش هستند.

مقادیر $\cos \alpha$ در ناحیه‌های اول و دوم در حال کاهش و در ناحیه‌های سوم و چهارم در حال افزایش هستند.

مقادیر $\tan \alpha$ در هر چهار ناحیه در حال افزایش هستند.

تست ۱۲

کدام مقدار بزرگ‌تر است؟

$\sin 24^\circ$ (۴)

$\sin 20^\circ$ (۳)

$\sin 14^\circ$ (۲)

$\sin 10^\circ$ (۱)

راه‌حل

توجه کنید که انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 10° و 14° در ناحیه دوم قرار دارد و سینوس این اعداد مثبت هستند و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های 20° و 24° در ناحیه سوم قرار دارند و سینوس این اعداد منفی هستند. از طرف دیگر در ناحیه دوم، زاویه بزرگ‌تر سینوس کوچک‌تری دارد. بنابراین $\sin 10^\circ$ در بین مقادیر داده شده از همه بزرگ‌تر است.

تست ۱۳

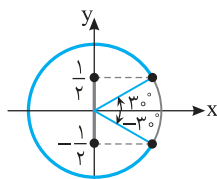
اگر $-6^\circ \leq \alpha \leq 6^\circ$ و $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{4}$ ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



راه‌حل

از $-6^\circ \leq \alpha \leq 6^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-3^\circ \leq \frac{\alpha}{2} \leq 3^\circ$. با توجه به شکل روبه‌رو $-\frac{1}{2} \leq \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2}$ و در نتیجه $-\frac{1}{2} \leq \frac{m}{4} \leq \frac{1}{2}$ ، یعنی $-2 \leq m \leq 2$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ± 1 ، ± 2 و صفر باشد.

تست ۱۴

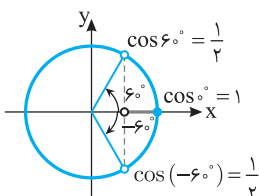
اگر $-6^\circ < \alpha < 6^\circ$ و $\cos \alpha = 3m + 1$ ، حدود m کدام است؟

$-\frac{1}{6} < m \leq 0$ (۴)

$-\frac{1}{6} < m < \frac{1}{6}$ (۳)

$0 < m < \frac{1}{6}$ (۲)

$-\frac{1}{6} < m < 0$ (۱)



راه‌حل

وقتی α از -6° تا 6° تغییر می‌کند، مقدار $\cos \alpha$ از -6° تا 6° افزایش می‌یابد و سپس از 6° کاهش می‌یابد. بنابراین $\cos \alpha$ در $\alpha = 0^\circ$ به بیشترین مقدار خود، یعنی ۱ می‌رسد. پس

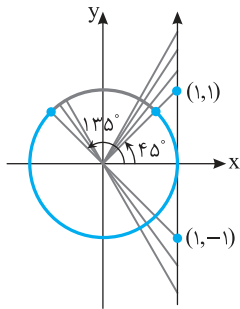
$$\frac{1}{2} < \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 3m + 1 \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < 3m \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} < m \leq 0$$

تست ۱۵

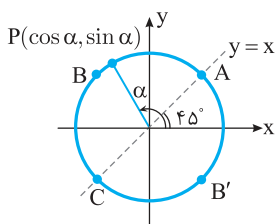
اگر $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ ، مقادیر $\tan \alpha$ در کدام محدوده قرار دارند؟(۱) $[-1, 1]$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1]$ (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

راه حل

با توجه به شکل روبه‌رو، وقتی $45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$ ، $\tan \alpha \geq 1$ یا $\tan \alpha \leq -1$ ، یعنی مقادیر $\tan \alpha$ در $\mathbb{R} - (-1, 1)$ قرار دارند.



از روی شکل مقابل معلوم است که اگر نقطه (x, y) روی کمان ABC از دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه $y > x$. بنابراین اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی کمان ABC باشد، آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$. همین‌طور، اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی کمان $AB'C$ باشد، آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$. به همین ترتیب نتایج زیر به‌دست می‌آید.



نکته

شکل مقابل را در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α روی دایره مثلثاتی باشد. در این صورت

• اگر نقطه P روی کمان BDF باشد، آن‌گاه $\sin \alpha > \cos \alpha$ و اگر نقطه P روی کمان BHF باشد، آن‌گاه $\sin \alpha < \cos \alpha$.

• اگر نقطه P روی کمان DBH باشد، آن‌گاه $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ و اگر نقطه P روی کمان DFH باشد، آن‌گاه $\sin \alpha + \cos \alpha < 0$.

• اگر نقطه P روی کمان‌های AB ، CD ، EF یا GH باشد (به شرطی که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan \alpha < \cot \alpha$ و اگر نقطه P روی کمان‌های BC ، DE ، FG یا HA باشد، آن‌گاه $\tan \alpha > \cot \alpha$.

• اگر نقطه P روی کمان‌های ABC یا EFG باشد (به شرطی که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ تعریف شوند)، آن‌گاه $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$ و اگر نقطه P روی کمان‌های CDE یا GHA باشد، آن‌گاه $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$.

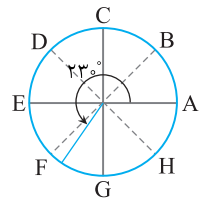
(۴) $\tan 23^\circ > \cot 23^\circ$ (۳) $\sin 23^\circ > \cos 23^\circ$ (۲) $\tan 25^\circ > \cot 25^\circ$ (۱) $\sin 25^\circ > \cos 25^\circ$

کدام گزینه درست است؟

تست ۱۶

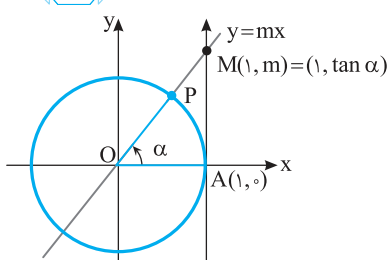
راه حل

با توجه به شکل مقابل، چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 23° روی کمان FG است، پس $\tan 23^\circ > \cot 23^\circ$. خودتان بررسی کنید که گزینه‌های دیگر درست نیستند.

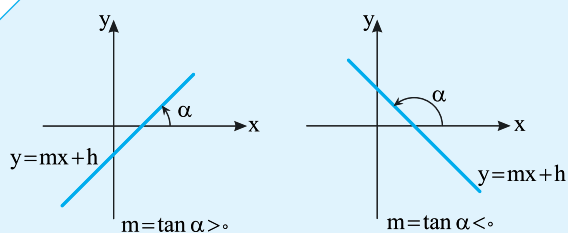


رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

می‌دانیم مقدار $\tan \alpha$ برابر عرض نقطه M محل برخورد امتداد شعاع OP با محور تانژانت است (شکل روبه‌رو را ببینید). از طرف دیگر، طول نقطه M برابر ۱ است و این نقطه روی خط $y = mx$ قرار دارد، پس عرض آن برابر m است. بنابراین $m = \tan \alpha$. اکنون توجه کنید که همه خط‌های موازی با خط $y = mx$ شیب یکسان با این خط دارند و آن‌ها نیز محور طول‌ها را با زاویه α قطع می‌کنند. بنابراین شیب تمام این خط‌ها همان $\tan \alpha$ است.



نکته



اگر محور طول‌ها و خط $y=mx+h$ یک زاویه مثلثاتی مثبت و کمتر از 180° به اندازه α تشکیل دهند، آنگاه $m=\tan \alpha$.

تست ۱۷

معادله خطی که از نقطه $(\sqrt{12}, -2)$ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه مثلثاتی 60° می‌سازد، کدام است؟

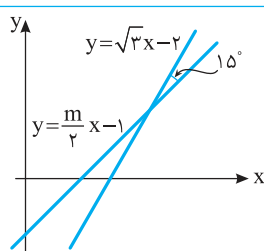
(۱) $y=\sqrt{3}x+8$ (۲) $y=\sqrt{3}x-8$ (۳) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-4$ (۴) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

با توجه به زاویه خط با محور طول‌ها که برابر زاویه مثلثاتی 60° است، شیب خط برابر $\tan 60^\circ$ یا همان $\sqrt{3}$ است. پس معادله خط به صورت $y=\sqrt{3}x+b$ است و چون خط از نقطه $(\sqrt{12}, -2)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کند، $-2=\sqrt{3}\sqrt{12}+b$. بنابراین $b=-8$. پس معادله خط $y=\sqrt{3}x-8$ است.

راه‌حل

تست ۱۸

با توجه به شکل مقابل مقدار m کدام است؟



(۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{1}{2}$

چون شیب خط $y=\sqrt{3}x-2$ برابر $\sqrt{3}$ است، زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طول‌ها و این خط 60° است. پس زاویه مثلثاتی تشکیل شده بین محور طول‌ها و خط $y=\frac{m}{2}x-1$ برابر $45^\circ-12^\circ-15^\circ=18^\circ$ است و در نتیجه $\frac{m}{2}=\tan 18^\circ \Rightarrow m=2$.

راه‌حل

دست‌گرمی

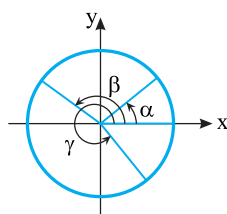
۶۴- انتهای کمان روبه‌رو به کدام یک از زاویه‌های زیر در ناحیه سوم قرار دارد؟

(۱) 170° (۲) 260° (۳) 280° (۴) 330°

۶۵- زاویه‌های α ، β و γ مانند شکل روبه‌رو در دایره مثلثاتی مشخص شده‌اند. اگر $a=\cos \alpha$ ،

$b=\cos \beta$ و $c=\cos \gamma$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) $a>b>c$
(۲) $b>c>a$
(۳) $a>c>b$
(۴) $c>a>b$



۶۶- اگر $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cot \alpha < 0$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۶۷- اگر $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{m}{2}$ ، حدود m کدام است؟

(۱) $2 \leq m \leq 4$ (۲) $-2 \leq m \leq 0$ (۳) $-2 \leq m \leq 2$ (۴) $1 \leq m \leq 3$

۶۸- حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت $A=2+3\sin^2 x$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۶۹- معادله خطی که از نقطه $(6, \sqrt{3})$ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویه مثلثاتی 30° می‌سازد، کدام است؟

(۱) $x-\sqrt{3}y-3=0$ (۲) $x+\sqrt{3}y-9=0$ (۳) $2x-\sqrt{3}y-9=0$ (۴) $x-2\sqrt{3}y=0$

آزمون ۴۰

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۱)

۳۹۱- کدام یک عددی مثبت است؟

$\cos 310^\circ$ (۴)

$\sin 310^\circ$ (۳)

$\cos 230^\circ$ (۲)

$\sin 230^\circ$ (۱)

۳۹۲- اگر $\cos x \sqrt{1+\tan^2 x} = 1$ و $\tan x = -\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$ ، انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

۳۹۳- در دایره مثلثاتی مقابل α زاویه‌ای حاده است. طول پاره‌خط BT کدام است؟

$\frac{1}{\sin \alpha}$ (۲)

$\frac{1}{\cos \alpha}$ (۱)

$\frac{1}{\sin \alpha} - 1$ (۴)

$\frac{1}{\cos \alpha} - 1$ (۳)

۳۹۴- اگر $-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ و $\sin 2\alpha = \frac{m}{4}$ ، چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

5 (۴)

4 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

۳۹۵- اگر $7 = 5 \cos \beta + 2 \sin \alpha$ ، مقدار $3 \sin \alpha - 4 \cos \beta$ کدام است؟

-7 (۴)

-3 (۳)

-2 (۲)

-1 (۱)

۳۹۶- اگر $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ، حداکثر مقدار عبارت $\frac{3}{2 \sin \alpha + 1}$ کدام است؟

4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

۳۹۷- اگر طول دو ضلع مثلثی $\sqrt{2}$ و $\sqrt{6}$ باشد، بیشترین مقدار ممکن مساحت این مثلث کدام است؟

$4\sqrt{3}$ (۴)

$3\sqrt{3}$ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۳۹۸- اگر $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ و $\tan \alpha = 2m + 1$ ، حدود m کدام است؟

$m \geq -\frac{1}{2}$ (۴)

$m > -\frac{1}{2}$ (۳)

$m < -\frac{1}{2}$ (۲)

$m \leq -\frac{1}{2}$ (۱)

۳۹۹- در شکل مقابل مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

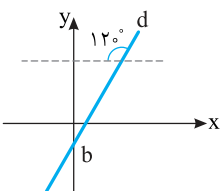
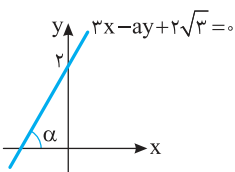
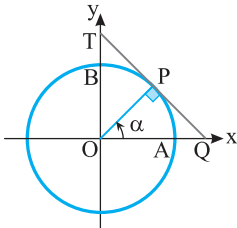
۴۰۰- معادله خط d در شکل مقابل به صورت $y = a(x-2) + \sqrt{3}$ است. مقدار b کدام است؟

$-2\sqrt{3}$ (۲)

$-\sqrt{3}$ (۱)

$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)



سؤال	گام
۳۹۱	۷۳ ۷۵
۳۹۲	۷۵
۳۹۳	۷۰ ۷۴
۳۹۴	۷۹
۳۹۵	۷۷
۳۹۶	۷۸
۳۹۷	۷۲ ۷۸
۳۹۸	۷۸
۳۹۹	۷۶ ۸۱
۴۰۰	۷۶ ۸۱

نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی (۲)

سؤال	گام
۴۰۱	۷۳ ۷۵
۴۰۲	۷۰ ۷۴
۴۰۳	۷۴
۴۰۴	۷۹
۴۰۵	۱۴ ۲۳ ۷۷ ۸۲
۴۰۶	۲۳ ۷۷
۴۰۷	۸۰ ۹۳
۴۰۸	۷۸
۴۰۹	۷۶ ۸۱
۴۱۰	۷۶ ۸۱

۴۰۱- کدام یک عددی منفی است؟

$\cot 260^\circ$ (۴)

$\cot 70^\circ$ (۳)

$\tan 19^\circ$ (۲)

$\tan 17^\circ$ (۱)

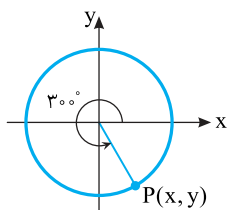
۴۰۲- در دایره مثلثاتی مقابل، مقدار $\frac{y}{x-1}$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۱)

$-\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴)



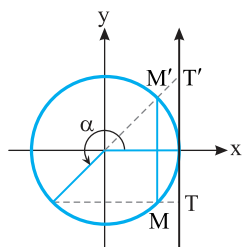
۴۰۳- در دایره مثلثاتی مقابل طول پاره خط TT' چقدر از طول پاره خط MM' بیشتر است؟

$\tan \alpha - \sin \alpha$ (۱)

$\tan \alpha + \sin \alpha$ (۲)

$\cot \alpha - \cos \alpha$ (۳)

$\sin \alpha + \cos \alpha$ (۴)



۴۰۴- اگر $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{4}$ ، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m کدام است؟

۱۰ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۴۰۵- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A = 4 \cos^2 x - 2 \sin x$ کدام است؟

۴ (۴)

$\frac{25}{4}$ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

۳ (۱)

۴۰۶- مقدار عبارت $A = \frac{3 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 3}$ با کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند برابر باشد؟

۱ (۴)

$\frac{6}{7}$ (۳)

$-\frac{7}{8}$ (۲)

$\frac{9}{8}$ (۱)

۴۰۷- حاصل عبارت $|\sin 20^\circ - \cos 20^\circ| - |\sin 70^\circ - \cos 70^\circ|$ کدام است؟

صفر (۴)

$2 \sin 20^\circ$ (۳)

$2 \cos 20^\circ$ (۲)

$-2 \sin 20^\circ$ (۱)

۴۰۸- اگر $180^\circ \leq \alpha < 270^\circ$ و $\tan \alpha = m^2 + m$ ، حدود m کدام است؟

$m \leq -1$ (۴)

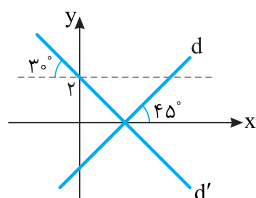
$m \geq -1$ (۳)

$m \leq 0$ (۲)

$m \geq 0$ (۱)

۴۰۹- در شکل مقابل خط‌های d و d' روی محور x متقاطع‌اند. معادله خط d کدام است؟

$(\tan 15^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}})$



$y = 2x - \sqrt{3}$ (۲)

$y = x - 2\sqrt{3}$ (۱)

$y = x - \sqrt{3}$ (۴)

$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ (۳)

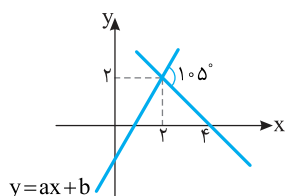
۴۱۰- دو خط شکل مقابل از نقطه $(2, 2)$ عبور می‌کنند. مقدار $a+b$ کدام است؟

$2 - 2\sqrt{3}$ (۱)

$2 - \sqrt{3}$ (۲)

$1 - \sqrt{3}$ (۳)

$2 - 3\sqrt{3}$ (۴)



نکته زیر از تعریف روابط مثلثاتی نتیجه می‌شود.

۸۲

رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی

اگر α زاویه‌ای باشد که مخرج‌ها در عبارت‌های زیر صفر نباشند، آن‌گاه رابطه‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی درست‌اند:

$$۱) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$۲) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$۳) \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$۴) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$۵) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$۶) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

تساوی (۳) را می‌توان به شکل $\tan \alpha \cot \alpha = 1$ نیز نوشت. همین‌طور، از تساوی (۴) نتیجه می‌شود $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ و $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

تست
□□□□

مقدار عبارت $\frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{1}{1+\cot^2 \alpha}$ کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

راه‌حل

راه‌حل اول می‌دانیم $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ ، بنابراین

$$\frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{1}{1+\cot^2 \alpha} = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} = 1$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ و $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ، بنابراین

$$\frac{1}{1+\tan^2 \alpha} + \frac{1}{1+\cot^2 \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

تست
□□□□

ساده شده عبارت $\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$ کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

راه‌حل

می‌دانیم $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ و $\tan \beta = \frac{1}{\cot \beta}$ ، بنابراین

$$\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \beta}} = \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\frac{\cot \beta + \cot \alpha}{\cot \alpha \cot \beta}} = \cot \alpha \cot \beta$$

تست
□□□□

اگر $\frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

راه‌حل

از تساوی $\frac{3 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود $6 \sin x = 2 \sin x + \cos x$ ، بنابراین $4 \sin x = \cos x$ و در نتیجه $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{4}$ ، پس $\tan x = \frac{1}{4}$.

تست
□□□□

حاصل عبارت $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

راه‌حل

ابتدا مخرج کسر را به صورت $2 \sin^2 \alpha$ می‌نویسیم. پس $\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cot \alpha$

تست

□□□□

اگر $\sin \alpha = \sqrt{m}$ و $\cos \alpha = \sqrt{2m-1}$ ، مقدار $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

را حل

با توجه به رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$(\sqrt{m})^2 + (\sqrt{2m-1})^2 = 1 \Rightarrow m + 2m - 1 = 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2m-1}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan^2 \alpha = 2$$

برای به دست آوردن $\tan^2 \alpha$ ، از رابطه $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

تست

□□□□

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ربع سوم باشد و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$-\frac{1}{5}$ (۳)

$-\frac{2}{5}$ (۲)

$-\frac{7}{5}$ (۱)

را حل

توجه کنید که

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

تست

□□□□

اگر $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ و $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ، مقدار $15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha$ کدام است؟

-۳۳ (۴)

-۳۱ (۳)

-۲۹ (۲)

-۲۷ (۱)

را حل

پس **را حل اول** ابتدا توجه کنید که اگر $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ، آن‌گاه $\cot \alpha$ مقداری منفی است.

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{169}{144} \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{25}{144} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{5}{12}, \tan \alpha = -\frac{12}{5}$$

$$15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = -36 + 5 = -31$$

را حل دوم از رابطه $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ، آن‌گاه $\cos \alpha > 0$ ، پس

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$15 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = 15\left(-\frac{12}{5}\right) - 12\left(-\frac{5}{12}\right) = -31 \text{ بنابراین } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{5}{12} \text{ و } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{12}{5}$$

تست

□□□□

اگر $\tan \alpha = 3$ ، مقدار $A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - 4 \cos \alpha}$ کدام است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

۷ (۲)

-۷ (۱)

را حل

را حل اول از تساوی $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$ به دست می‌آید $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$. با جای‌گذاری مقدار $3 \cos \alpha$ به جای $\sin \alpha$ در عبارت A ،

$$A = \frac{2(3 \cos \alpha) + \cos \alpha}{3 \cos \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{7 \cos \alpha}{-\cos \alpha} = -7$$

را حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan \alpha$ در عبارت ظاهر شود:

$$A = \frac{\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{4 \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 4} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 - 4} = -7$$

تست
 ۹

اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ربع اول باشد و $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{5}{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{17}}{3} \quad (۱)$$

راه‌حل

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - 2 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos x = 2$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه x در ربع اول قرار دارد، پس $\sin x + \cos x > 0$. در نتیجه $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{17}}{3}$.

تست
 ۱۰

عبارت $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta$ با کدام یک از عبارت‌های زیر برابر است؟

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (۴)$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (۳)$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta \quad (۲)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \quad (۱)$$

راه‌حل

در عبارت داده شده به جای $\cos^2 \beta$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 \beta$ و به جای $\cos^2 \alpha$ قرار می‌دهیم $1 - \sin^2 \alpha$. عبارت به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta &= \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

تست
 ۱۱

ساده شده عبارت $\frac{\cos 1^\circ}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{\cos 1^\circ}{1 - \sin 1^\circ}$ کدام است؟

$$-\frac{2}{\cos 1^\circ} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{\cos^2 1^\circ} \quad (۳)$$

$$2 \tan 1^\circ \quad (۲)$$

$$-2 \tan 1^\circ \quad (۱)$$

راه‌حل

به کمک مخرج مشترک‌گیری، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cos 1^\circ \left(\frac{1}{1 + \sin 1^\circ} - \frac{1}{1 - \sin 1^\circ} \right) &= \frac{(1 - \sin 1^\circ) - (1 + \sin 1^\circ)}{(1 + \sin 1^\circ)(1 - \sin 1^\circ)} \cos 1^\circ = \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{1 - \sin^2 1^\circ} \\ &= \frac{-2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{\cos^2 1^\circ} = \frac{-2 \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} = -2 \tan 1^\circ \end{aligned}$$

تست
 ۱۲

هرگاه $\tan^2 \theta + \tan \theta - 1 = 0$ ، حاصل $\tan^4 \theta + \cot^4 \theta$ کدام است؟

$$۱۱ \quad (۴)$$

$$۹ \quad (۳)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$۵ \quad (۱)$$

راه‌حل

چون $\tan \theta \neq 0$ ، بنابراین تساوی داده شده را می‌توان به صورت $\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} = -1$ نوشت. پس

$$\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \left(\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)^2 + 2 = 3$$

$$\tan^4 \theta + \cot^4 \theta = \tan^4 \theta + \frac{1}{\tan^4 \theta} = \left(\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

در نتیجه

تست
 ۱۳

اگر $9^\circ < \alpha < 18^\circ$ ، حاصل عبارت $A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$ کدام است؟

$$\sqrt{\sin \alpha - \cos \alpha} \quad (۴)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha \quad (۳)$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha \quad (۲)$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha \quad (۱)$$

راه‌حل

توجه کنید که

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}} = \sqrt{1 + 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه دوم است، پس $\sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha < 0$. در نتیجه

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

از طرف دیگر

$$A = \sqrt{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha|$$

بنابراین

چون $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ، پس $\sin \alpha > \cos \alpha$ ، بنابراین علامت $\sin \alpha - \cos \alpha$ مثبت است و در نتیجه $A = \sin \alpha - \cos \alpha$.

هر تساوی بین دو عبارت مثلثاتی که به ازای تمام مقادیری از متغیرها (که هر دو عبارت به ازای آن‌ها با معنی‌اند) برقرار باشد، یک **اتحاد مثلثاتی** است. تمام تساوی‌هایی که در نکته ابتدای درس برای نسبت‌های مثلثاتی آورده‌ایم، اتحاد هستند.

برای اثبات درستی یک اتحاد مثلثاتی می‌توان یک طرف تساوی را با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و به کارگیری دیگر اتحادها، به طرف دیگر تبدیل کرد. برای اثبات نادرستی یک رابطه کافی است زاویه‌ای مثال بزنیم که به ازای آن، دو طرف تساوی مقادیر مختلفی داشته باشند.

تذکر

ساده شده عبارت $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$ کدام است؟

تست ۱۴

(۴) $\frac{1}{\sin x}$

(۳) $\frac{1}{\cos x}$

(۲) $\sin x$

(۱) $\cos x$

راه حل اول از اتحاد $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

راه حل دوم اگر $x = 30^\circ$ ، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ و گزینه‌ها به ترتیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $\sqrt{3}$ می‌شوند. پس گزینه (۳) درست است.

اگر تساوی $\frac{a}{\sin^2 x} + \frac{b}{\sin^4 x} + 1 = \cot^2 x$ یک اتحاد باشد، مقدار ab کدام است؟

تست ۱۵

(۴) -۱

(۳) -۲

(۲) ۲

(۱) ۱

راه حل اول تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} &= \cot^2 x - 1 \Rightarrow \frac{a \sin^2 x + b}{\sin^4 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x} \\ a \sin^2 x + b &= \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ a \sin^2 x + b &= \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow a \sin^2 x + b = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

بنابراین باید تساوی $b + a \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ یک اتحاد باشد که کافی است $a = -2$ و $b = 1$ ، یعنی $ab = -2$.

راه حل دوم چون تساوی یک اتحاد است، پس به ازای هر x دلخواه که $\sin x \neq 0$ ، برقرار است. قرار می‌دهیم $x = 30^\circ$ ، در نتیجه

$$\frac{a}{\frac{1}{4}} + \frac{b}{\frac{1}{16}} + 1 = 9 \Rightarrow a + 4b = 2$$

قرار می‌دهیم $x = 45^\circ$ و در نتیجه $\frac{a}{\frac{1}{2}} + \frac{b}{\frac{1}{4}} + 1 = 1$ ، پس $a + 2b = 0$. از حل دستگاه $\begin{cases} a + 4b = 2 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ به دست می‌آید $a = -2$ و $b = 1$ و در نتیجه $ab = -2$.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

تست ۱۶

اگر $2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0$ ، مقدار $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

$$-\frac{13}{27} \quad (4)$$

$$-\frac{9}{26} \quad (3)$$

$$-\frac{4}{13} \quad (2)$$

$$-\frac{6}{13} \quad (1)$$

ابتدا توجه کنید که

راه حل

$$2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0 \Rightarrow 2 \sin \alpha = -3 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\text{بنابراین } \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{6}{13} \text{ و در نتیجه } \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha + \cot \alpha = -\frac{3}{2} + \frac{-2}{3} = -\frac{13}{6}$$

دست گرمی

۷۰- اگر $\frac{1 - \tan x}{\tan x} = 2$ ، مقدار $\frac{\cot x}{\cot x - 1}$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

۷۱- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m-1}$ و $\cot \alpha = m+2$ ، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

$$\frac{16}{5} \quad (4)$$

$$\frac{26}{9} \quad (3)$$

$$\frac{626}{25} \quad (2)$$

$$\frac{65}{16} \quad (1)$$

۷۲- اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\tan \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{20} \quad (4)$$

$$-\frac{31}{20} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{20} \quad (2)$$

$$\frac{31}{20} \quad (1)$$

۷۳- ساده شده عبارت $A = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\cos^2 x \quad (3)$$

$$\sin^2 x \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۷۴- ساده شده عبارت $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^2 \theta$ کدام است؟

$$\cot^2 \theta \quad (4)$$

$$\tan^2 \theta \quad (3)$$

$$\cos^2 \theta \quad (2)$$

$$\sin^2 \theta \quad (1)$$

۷۵- اگر $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$ ، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

$$13 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

$$11 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

۷۶- اگر $\cos x \neq 0$ و $3 \sin x + 2 \cos x = 3$ ، مقدار $\cot x$ کدام است؟

$$-\frac{5}{12} \quad (4)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$

$$-\frac{12}{5} \quad (2)$$

$$\frac{12}{5} \quad (1)$$

اتحادهای مثلثاتی (۱)

آزمون ۴۲

۴۱۱- اگر $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه α در ناحیه چهارم باشد، مقدار $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۱۲- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2m}$ و $\cot \alpha = m+3$ ، مقدار $\sin^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{35}$ (۲) $\frac{16}{37}$ (۳) $\frac{1}{37}$ (۴) $\frac{2}{35}$

۴۱۳- ساده شده عبارت $\frac{1}{1+\sin 10^\circ} + \frac{1}{1-\sin 10^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{\sin^2 10^\circ}$ (۴) $\frac{2}{\cos^2 10^\circ}$

۴۱۴- حاصل $A = \frac{\sin 15^\circ - \sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ - \cos^3 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 15^\circ$ (۲) $\tan 15^\circ$ (۳) $\cot 15^\circ$ (۴) $\cot^2 15^\circ$

۴۱۵- اگر $\sin^2 x = 1 + 4 \cos^2 x$ ، مقدار $\tan^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{2}{5}$

۴۱۶- انتهای کمان متناظر با زاویه α در کدام ناحیه قرار گیرد تا نابرابری $\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} \geq 0$ برقرار باشد؟

- (۱) فقط اول یا دوم (۲) فقط اول یا سوم
(۳) فقط دوم یا چهارم (۴) هریک از چهار ناحیه

۴۱۷- ساده شده عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha$

۴۱۸- اگر انتهای کمان متناظر با زاویه x در ناحیه دوم باشد و $A = \cot^2 x (1 + \tan^2 x) + \tan^2 x (1 + \cot^2 x)$ ، حاصل $\sqrt{A}$ کدام است؟

- (۱) $\tan x - \cot x$ (۲) $-\tan x - \cot x$
(۳) $\tan x + \cot x$ (۴) $\cot x - \tan x$

۴۱۹- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{27}{64}$ (۲) $\frac{16}{81}$ (۳) $\frac{23}{32}$ (۴) $\frac{16}{27}$

۴۲۰- اگر $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه α در ناحیه دوم باشد، مقدار $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $-\frac{\sqrt{6}}{8}$

سوال	گام
۴۱۱	۷۵ ۸۲
۴۱۲	۸۲
۴۱۳	۸۲
۴۱۴	۸۲
۴۱۵	۸۲
۴۱۶	۷۵ ۸۲
۴۱۷	۸۲ ۸۳
۴۱۸	۷۵ ۸۲ ۸۳
۴۱۹	۸۲ ۸۴
۴۲۰	۷۵ ۸۴

اتحادهای مثلثاتی (۲)

آزمون ۴۳

۴۲۱- اگر $\cot x = \frac{2}{3}$ و انتهای کمان متناظر با زاویه x در ناحیه سوم باشد، مقدار $2 \cos x - \sin x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۳) $-\frac{7}{\sqrt{13}}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{13}}$

۴۲۲- اگر $\sin \alpha = \sqrt{k-1}$ و $\cos \alpha = \sqrt{2k-3}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۴۲۳- مقدار $\frac{(1+\tan 2^\circ)(1-\cot 2^\circ)}{(1+\cot 2^\circ)(1-\tan 2^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۲۴- ساده شده عبارت $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} \times \frac{1+\cot^2 x}{\cot x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\tan x$ (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$

۴۲۵- اگر $\cot \alpha = \sin \alpha$ ، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}+2}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-2}{4}$

۴۲۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۴۲۷- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\sin x - \cos x = \frac{3}{4}$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{23}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{14}}{4}$ (۳) $\frac{-\sqrt{23}}{4}$ (۴) $\frac{-\sqrt{14}}{4}$

۴۲۸- اگر $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$ ، مقدار $\tan^4 x + \cot^4 x$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۱۱

۴۲۹- اگر $18^\circ < \alpha < 27^\circ$ ، عبارت $\cos \alpha - \sqrt{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ با کدام یک برابر است؟

- (۱) $\cot \alpha$ (۲) $\tan \alpha$ (۳) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha}$

۴۳۰- اگر $36^\circ < \alpha < 15^\circ$ ، حاصل عبارت $\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}}$ کدام است؟

- (۱) $\sin \alpha + \cos \alpha$ (۲) $\sin \alpha - \cos \alpha$ (۳) $-\sin \alpha + \cos \alpha$ (۴) $-\sin \alpha - \cos \alpha$

سؤال	گام
۴۲۱	۷۵ ۸۲
۴۲۲	۸۲
۴۲۳	۸۲ ۸۳
۴۲۴	۸۲ ۸۳
۴۲۵	۸۲
۴۲۶	۸۲ ۸۴
۴۲۷	۷۵ ۸۲
۴۲۸	۸۲
۴۲۹	۷۵ ۸۲ ۸۳
۴۳۰	۷۵ ۸۲ ۸۳

اتحادهای مثلثاتی (۳)

آزمون ۴۴

سؤال	گام
۴۳۱	۸۲
۴۳۲	۸۲
۴۳۳	۸۲ ۸۳
۴۳۴	۸۲ ۸۳
۴۳۵	۸۲
۴۳۶	۸۲ ۲۷۹ ۲۸۱
۴۳۷	۸۲ ۲۷۹
۴۳۸	۷۵ ۸۲
۴۳۹	۸۲ ۸۳
۴۴۰	۲۳ ۷۷ ۸۲

۴۳۱- اگر $\frac{5 \sin x}{2 \sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) ۸ (۴) $\frac{1}{16}$

۴۳۲- اگر $\tan x = \sqrt{\frac{m+2}{2m+5}}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{m+2}{3m+7}}$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۳۳- ساده شده عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \cot \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\cos \alpha}$ (۲) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (۳) $\sin \alpha$ (۴) $\cos \alpha$

۴۳۴- مقدار $\frac{\sin^2 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ} - \frac{\cos^2 15^\circ}{1 + \sin 15^\circ} + \cos 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\cos 15^\circ$ (۲) $-\sin 15^\circ$ (۳) $\cos 15^\circ$ (۴) $\sin 15^\circ$

۴۳۵- اگر $\tan x = 3$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\sin^3 x - 2 \cos x}{4 \sin x - \cos^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{47}{119}$ (۲) $\frac{1}{17}$ (۳) $\frac{7}{29}$ (۴) $\frac{17}{29}$

۴۳۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{2}{3}$ ، حاصل $\sin^3 x - \cos^3 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{22}{27}$ (۲) $\frac{23}{27}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{25}{27}$

۴۳۷- اگر $\tan x - \cot x = 3$ ، مقدار $\tan^3 x - \cot^3 x$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴) ۳۶

۴۳۸- اگر $\tan \alpha - 2 \cot \alpha = \sqrt{2}$ و انتهای کمان نظیر زاویه α در ربع اول باشد، مقدار $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $3 - \sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $3 + \sqrt{5}$ (۴) $3 - \sqrt{5}$

۴۳۹- حاصل عبارت $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{1 - 2 \sin^2 x}{\cos^2 x (1 - \tan^2 x)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2 \cot x}{1 - \cot x}$ (۲) $\frac{2 \cos x}{\sin x + \cos x}$ (۳) $\frac{2 \tan x}{\tan x - 1}$ (۴) $\frac{2 \sin x}{\sin x + \cos x}$

۴۴۰- اختلاف حداکثر مقدار و حداقل مقدار عبارت $A = \cos^2 x - 2 \sin x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

اتحادهای مثلثاتی (۴)

آزمون ۴۵

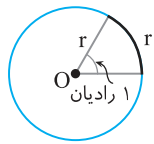
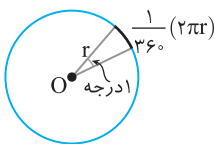
- ۴۴۱- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲
- ۴۴۲- مقدار عبارت $A = \frac{\cot^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\tan^6 15^\circ$ (۲) $\cot^6 15^\circ$ (۳) $1 + \tan^6 15^\circ$ (۴) $1 + \cot^6 15^\circ$
- ۴۴۳- مقدار $(\frac{1}{\cos 2^\circ} + \tan 2^\circ)(1 - \sin 2^\circ)$ کدام است؟
 (۱) $\sin 2^\circ$ (۲) $\cos 2^\circ$ (۳) $\tan 2^\circ$ (۴) $\cot 2^\circ$
- ۴۴۴- حاصل $\frac{\sqrt{1 + \cos 36^\circ} + \sqrt{1 - \cos 36^\circ}}{\sqrt{1 + \sin 36^\circ}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۱
- ۴۴۵- اگر $3 \sin^2 \alpha - 5 \cos \alpha + 5 = 0$ ، مقدار $\cos^6 \alpha$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر
- ۴۴۶- اگر $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$ ، مقدار $\tan^6 x + \cot^6 x$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۲۷
- ۴۴۷- اگر $2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = \tan x$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟
 (۱) $1 \pm \sqrt{2}$ (۲) $-1 \pm \sqrt{2}$ (۳) $2 \pm \sqrt{3}$ (۴) $-2 \pm \sqrt{3}$
- ۴۴۸- حاصل عبارت $\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$ به ازای $\alpha = 200^\circ$ کدام است؟
 (۱) $-\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ (۲) $\sin 200^\circ - \cos 200^\circ$ (۳) $-\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$ (۴) $\sin 200^\circ + \cos 200^\circ$
- ۴۴۹- حاصل $1 + \frac{\sin^3 40^\circ - \cos^3 40^\circ}{\cos 40^\circ + \cos^2 40^\circ \sin 40^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\sin 40^\circ$ (۲) $\cos 40^\circ$ (۳) $\tan 40^\circ$ (۴) ۱
- ۴۵۰- اگر $\frac{\tan^3 x - \cot^3 x}{\tan x - \cot x} = 7$ ، حاصل $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

سؤال	گام
۴۴۱	۸۲
۴۴۲	۸۲ ۸۳
۴۴۳	۸۲ ۸۳
۴۴۴	۸۲ ۸۳ ۹۹
۴۴۵	۸۲
۴۴۶	۸۲ ۲۷۵ ۲۷۹
۴۴۷	۸۲
۴۴۸	۸۰ ۸۲ ۸۳
۴۴۹	۸۲ ۸۳
۴۵۰	۸۲ ۸۳ ۲۸۱

درس چهارم: واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۸۵

درجه و رادیان



اگر دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت برابر تقسیم کنیم، کمان‌هایی برابر به دست می‌آیند که هر یک از آن‌ها روبه‌رو به یک زاویه مرکزی هستند. این زاویه‌ها با یکدیگر برابرند و اندازه هر یک از آن‌ها برابر ۱ درجه است. به همین ترتیب، اگر روی دایره کمانی با طول برابر با شعاع دایره انتخاب کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به این کمان برابر ۱ رادیان است.

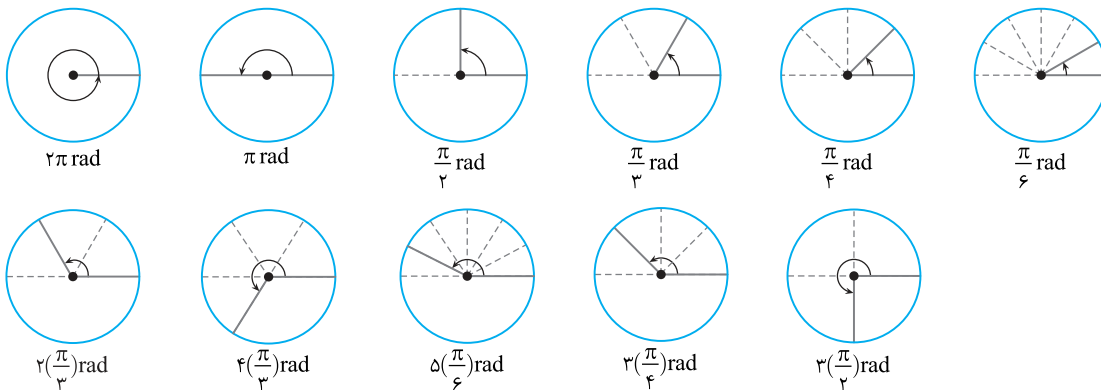
تعریف

- ۱ درجه برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن $\frac{1}{360}$ محیط دایره است. k درجه را می‌نویسیم k° .
- ۱ رادیان برابر با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن برابر شعاع دایره است. k رادیان را می‌نویسیم $k \text{ rad}$.

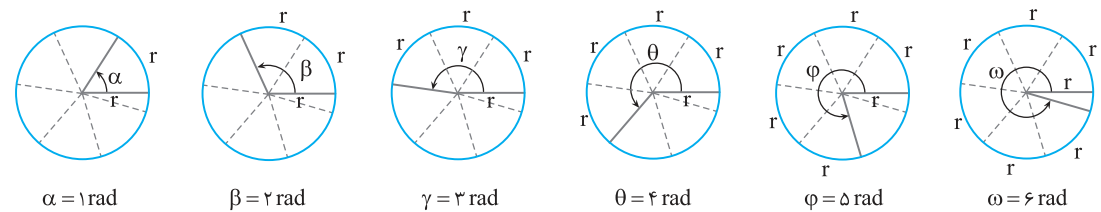
اگر واحد اندازه زاویه‌ای را مشخص نکریم، منظورمان واحد رادیان است.

تذکر

مثال: در شکل‌های زیر زاویه‌های معروف با اندازه آن‌ها برحسب رادیان نشان داده شده‌اند.



مثال: چون $2\pi \approx 6.28$ ، روی یک دایره کامل می‌توان پشت سر هم شش کمان به طول شعاع جدا کرد (شکل‌های زیر را ببینید).



انتهای کمان روبه‌رو به زاویه ۶- رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

چهارم (۴)

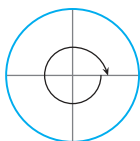
سوم (۳)

دوم (۲)

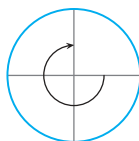
اول (۱)

با توجه به شکل‌های زیر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه ۶- رادیان در ناحیه اول قرار دارد.

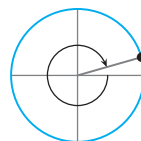
راه‌حل



$(-6/28) \approx$ رادیان (-2π) رادیان



$(-4/71) \approx$ رادیان $(-3\pi/4)$ رادیان



(-6) رادیان

تست ۲

راه‌حل

کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند).

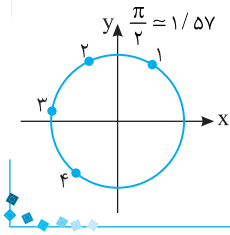
$$\sin 4 \quad (4)$$

$$\sin 3 \quad (3)$$

$$\sin 2 \quad (2)$$

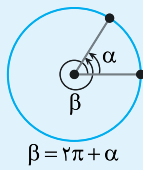
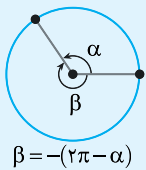
$$\sin 1 \quad (1)$$

با توجه به شکل روبه‌رو، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان زاویه ۲ رادیان است، بزرگ‌تر از عرض سایر نقاط است، پس $\sin 2$ از بقیه بزرگ‌تر است.



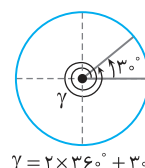
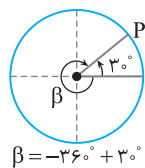
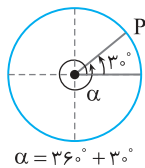
۸۶

زاویه‌های هم‌انته‌ها



می‌دانیم یک زاویه مثلثاتی در موقعیت استاندارد، زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره مثلثاتی، ضلع ابتدایی آن روی قسمت مثبت محور X و ضلع دیگر آن از دوران ضلع ابتدایی حول رأس آن به اندازه دلخواه به دست آمده باشد. به این ترتیب، دو زاویه با اندازه‌های مختلف ممکن است ضلع ابتدایی و ضلع انتهایی مشترک داشته باشند. معلوم است که در این صورت نقطه انتهایی کمان متناظر با این زاویه‌ها بر هم منطبق است. این زاویه‌ها را **هم‌انته‌ها** می‌نامیم.

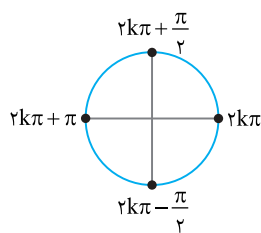
مثال: زاویه‌های 3° ، $3^\circ + 36^\circ$ ، $3^\circ - 36^\circ$ و $2 \times 36^\circ + 3^\circ$ هم‌انته‌ها هستند.



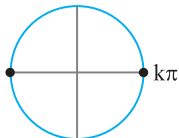
نکته

اگر k عدد صحیح دلخواهی باشد،

- زاویه‌های α° و $k \times 36^\circ + \alpha^\circ$ هم‌انته‌ها هستند.
- زاویه‌های α رادیان و $2k\pi + \alpha$ رادیان هم‌انته‌ها هستند.



مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان، $\frac{\pi}{2}$ رادیان، π رادیان و $\frac{3\pi}{2}$ رادیان هم‌انته‌ها هستند، به ترتیب برابر $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $2k\pi + \pi$ ، $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ و $2k\pi + 2\pi$ است (k عددی صحیح است).

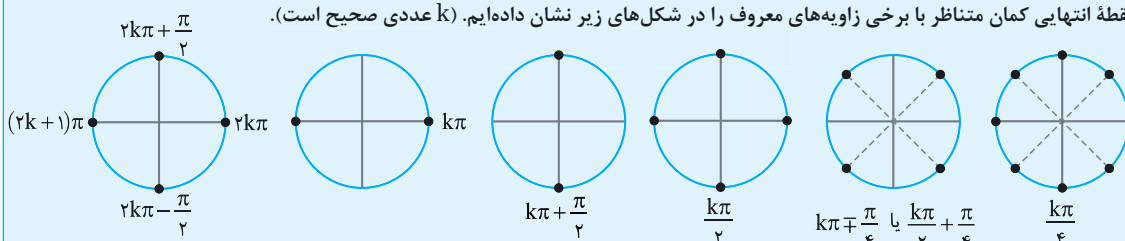


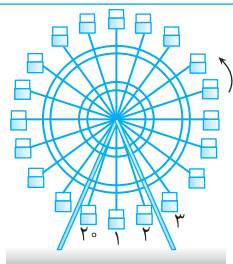
مثال: اندازه زاویه‌هایی که با زاویه‌های صفر رادیان یا π رادیان هم‌انته‌ها هستند، به ترتیب $2k\pi$ یا $2k\pi + \pi$ است که می‌توان آن‌ها را به صورت $k\pi$ نشان داد (k عددی صحیح است).

۸۷

نکته

نقطه انتهایی کمان متناظر با برخی زاویه‌های معروف را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم. (k عددی صحیح است).





یک چرخ و فلک مطابق شکل مقابل ۲۰ کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ و فلک، کابین شماره یک در پایین ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازه $\frac{47\pi}{5}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی

دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می گیرد؟

- (۱) ششم (۲) هفتم (۳) چهاردهم (۴) پانزدهم

تست ۳

را حل

زاویه بین هر دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ رادیان است. از طرف دیگر $\frac{47\pi}{5} = 8\pi + \frac{7\pi}{5} = 8\pi + 14 \times \frac{\pi}{10}$. وقتی چرخ و فلک ۴ دور کامل می زند، یعنی

8π رادیان می چرخد، هر کابین در جای اولیه خود قرار می گیرد. سپس چرخ و فلک به اندازه $14 \times \frac{\pi}{10}$ دیگر دوران می کند که کابین شماره یک به مکان فعلی ۱۴ کابین جلوتر، یعنی کابین پانزدهم منتقل می شود.

رابطه بین واحد درجه و واحد رادیان

با توجه به تعریف واحدهای درجه و رادیان اندازه زاویه های معروف را برحسب درجه و رادیان در جدول زیر نوشته ایم.

درجه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

نکته

اگر اندازه زاویه ای برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن گاه $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

$$\frac{12}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

مثال: اگر اندازه زاویه ۱۲° برحسب رادیان برابر با R باشد، آن گاه

$$\frac{D}{180} = \frac{12}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{12} = 15^\circ$$

همین طور اگر اندازه زاویه $\frac{\pi}{12}$ رادیان برحسب درجه برابر با D باشد، آن گاه

$$\frac{1}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

مثال: اگر R اندازه زاویه ۱° برحسب رادیان باشد، آن گاه

$$\frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{\pi}$$

بنابراین $1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$ ، همین طور، اگر D اندازه زاویه ۱ رادیان برحسب درجه باشد، آن گاه

بنابراین $1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$.

تست ۴

اندازه زاویه ۵۵° برحسب رادیان کدام است؟

(۴) $\frac{7\pi}{18}$

(۳) $\frac{13\pi}{36}$

(۲) $\frac{11\pi}{36}$

(۱) $\frac{5\pi}{18}$

را حل

در تساوی $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ قرار می دهیم $D = 55^\circ$:

$$\frac{55}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{11\pi}{36} \text{ رادیان}$$

تست
 □□□□

مجموع و تفاضل دو زاویه به ترتیب برابر 110° و $\frac{2\pi}{9}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{7\pi}{12}$ (۳) $\frac{5\pi}{12}$ (۴) $\frac{\pi}{7}$

راه حل

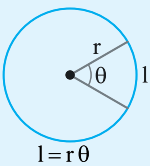
ابتدا توجه کنید که 110° برابر $\frac{11\pi}{18}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر را a و اندازه زاویه کوچکتر را b در نظر می گیریم:

$$a+b=\frac{11\pi}{18}, \quad a-b=\frac{2\pi}{9}$$

از حل این دستگاه به دست می آید $a=\frac{5\pi}{12}$.

طول کمان

۸۹



به کمک اندازه گیری برحسب رادیان می توانیم رابطه ای بین طول کمان، شعاع دایره و اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان پیدا کنیم. فرض کنید شعاع دایره r باشد. اگر طول کمان برابر l باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر این کمان l رادیان است. اگر طول کمان برابر l باشد، اندازه زاویه مرکزی نظیر کمان برابر $\frac{l}{r}$ رادیان است. بنابراین $\theta = \frac{l}{r}$.

نکته

اگر در دایره ای به شعاع r اندازه زاویه ای مرکزی θ رادیان و طول کمان روبه رو به این زاویه l باشد، آن گاه $l=r\theta$.

توجه کنید که واحد l و r یکسان در نظر گرفته می شود.

تست
 □□□□

طول کمان نظیر زاویه مرکزی به اندازه 15° در دایره ای به شعاع 18 سانتی متر، چند سانتی متر است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{2}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

راه حل

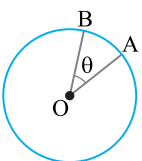
اگر اندازه زاویه 15° برحسب رادیان برابر R باشد، آن گاه

$$\frac{15^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{12}$$

بنابراین طول کمان مورد نظر برابر است با $18 \times \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$ سانتی متر.

تست
 □□□□

در شکل مقابل، دایره ای در نقطه A روی مسیری دایره ای به مرکز نقطه O و به شعاع 1500 متر ایستاده است. این دایره با سرعت 5 متر بر ثانیه می دود. اگر پس از 10 ثانیه در نقطه B باشد، اندازه θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=3$)



- (۱) 1° (۲) 2° (۳) 3° (۴) 4°

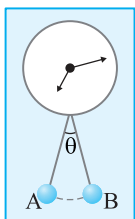
راه حل

مسافتی که این دایره در 10 ثانیه طی می کند برابر است با $10 \times 5 = 50$ متر. بنابراین طول کمان AB برابر 50 متر است. در نتیجه

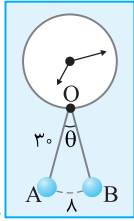
$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{50}{1500} = \frac{1}{30} \text{ rad} = 180^\circ \left(\frac{1}{30} \right) = 180^\circ \left(\frac{3^\circ}{3} \right) = 2^\circ$$

تست
 □□□□

در شکل مقابل، طول پاندول ساعت 30 سانتی متر است و این پاندول در هر ثانیه از A به B و یا برعکس جابه جا می شود. اگر طول مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می کند برابر با 8 سانتی متر باشد، اندازه θ چند درجه است؟ (فرض کنید $\pi=3$)



- (۱) 12° (۲) 14° (۳) 16° (۴) 18°



توجه کنید مسیری که نوک پاندول در یک ثانیه طی می کند، کمانی از دایره ای به مرکز نقطه O و شعاع ۳۰ سانتی متر است

(شکل مقابل را ببینید). بنابراین $\theta = \frac{l}{r} = \frac{\lambda}{30} = \frac{4}{15} \text{ rad}$ ، در نتیجه

$$\theta = 180^\circ \left(\frac{4}{15} \right) = 180^\circ \left(\frac{15}{3} \right) = 16^\circ$$

راه حل

در مدت زمان یک ساعت عقربه دقیقه شمار یک دور کامل می چرخد، پس اندازه زاویه ای که طی می کند، 360° یا 2π رادیان است. در همین مدت،

عقربه ساعت شمار، یک دوازدهم یک دایره را می چرخد. بنابراین اندازه زاویه ای که طی می کند برابر 30° یا $\frac{\pi}{6}$ رادیان است.

نکته

در یک دقیقه عقربه دقیقه شمار 6° یا $\frac{\pi}{30}$ رادیان را طی می کند. در همین مدت عقربه ساعت شمار 0.5° یا $\frac{\pi}{360}$ رادیان را طی می کند.

تست ۹

وقتی عقربه ساعت شمار به اندازه $\frac{3\pi}{8}$ رادیان دوران می کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟

۱۴۰ (۴)

۱۳۵ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۰۵ (۱)

$$\frac{\pi}{6} = \frac{x}{360} \Rightarrow x = 135 \text{ دقیقه}$$

راه حل اول در هر ساعت عقربه ساعت شمار $\frac{1}{12}$ دور می چرخد که معادل $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ رادیان است. بنابراین

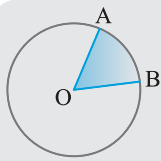
$$\frac{1}{x} = \frac{360}{2\pi} \Rightarrow x = 135 \text{ دقیقه}$$

راه حل دوم با استفاده از نکته بالا نتیجه می گیریم:

راه حل

مساحت قطاع دایره

تعریف



قسمتی از سطح دایره را که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع می نامند. زاویه مرکزی نظیر کمان مربوط به قطاع را زاویه قطاع می نامند (زاویه AOB در شکل روبه رو).

نکته

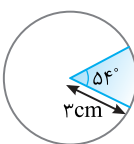
اگر در دایره ای به شعاع r اندازه زاویه قطاعی برابر با θ باشد، مساحت این قطاع برابر است با $\frac{1}{2} r^2 \theta$.

تذکر

توجه کنید که اگر $\theta = 2\pi \text{ rad}$ ، مساحت قطاع مورد نظر همان مساحت دایره است که برابر است با $\frac{1}{2} r^2 (2\pi) = \pi r^2$.

تست ۱۰

در شکل روبه رو مساحت قطاع رنگی، کدام است؟



$\frac{9\pi}{20}$ (۴)

$\frac{9\pi}{10}$ (۳)

$\frac{27\pi}{20}$ (۲)

$\frac{27\pi}{10}$ (۱)

$$\frac{54^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{54^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{3\pi}{10}$$

ابتدا اندازه 54° را برحسب رادیان پیدا می کنیم:

راه حل

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (r)^2 \times \left(\frac{3\pi}{10} \right) = \frac{27\pi}{20} \text{ cm}^2$$

در نتیجه مساحت بخش رنگی، برابر است با

تست ۱۱

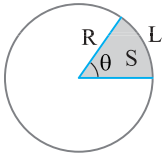
در دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی θ رادیان برابر $\frac{2\pi}{3}$ است. مساحت قطاع نظیر این زاویه کدام است؟

(۴) 2π

(۳) $\frac{4\pi}{3}$

(۲) $\frac{3\pi}{2}$

(۱) π



$$L = R\theta \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = 4\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

با توجه به شکل مقابل،

را حل

بنابراین

تست ۱۲

در شکل مقابل O مرکز دایره و MH بر دایره مماس است. $OM=6$ و $MH=3$. مساحت قسمت

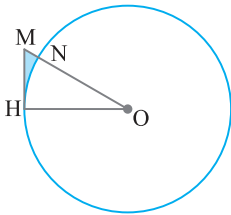
رنگی کدام است؟

(۲) $\frac{9}{2}(2\sqrt{3}-\pi)$

(۱) $\frac{9}{4}(2\sqrt{3}-\pi)$

(۴) $\frac{9}{2}(2\sqrt{3}-\pi)$

(۳) $\frac{9}{4}(2\sqrt{3}-\pi)$



چون MH در نقطه H بر دایره مماس است، پس $\angle OHM = 90^\circ$. اکنون، از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه MHO نتیجه می‌شود

$$OM^2 = MH^2 + HO^2 \Rightarrow 6^2 = 3^2 + HO^2 \Rightarrow HO = 3\sqrt{3}$$

مساحت قسمت رنگی برابر است با تفاضل مساحت مثلث MHO و مساحت قطاع HON. مساحت مثلث MHO برابر است با $\frac{1}{2} MH \times HO = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

فرض کنید زاویه قطاع برحسب رادیان برابر α باشد. در مثلث قائم‌الزاویه MHO، $\sin \alpha = \frac{MH}{MO} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. بنابراین $\alpha = \frac{\pi}{6}$. در نتیجه، مساحت قطاع

HON برابر است با $\frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (3\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{4}$. در نتیجه، مساحت قسمت رنگی برابر است با $\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{9\pi}{4} = \frac{9}{4}(2\sqrt{3}-\pi)$.

دست‌گرمی

۷۷- اندازه زاویه 75° برحسب رادیان کدام است؟

(۴) $\frac{5\pi}{12}$

(۳) $\frac{7\pi}{12}$

(۲) $\frac{13\pi}{12}$

(۱) $\frac{11\pi}{12}$

۷۸- در دایره مثلثاتی انتهای کمان روبه‌رو به زاویه 50° در کدام ناحیه قرار دارد؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

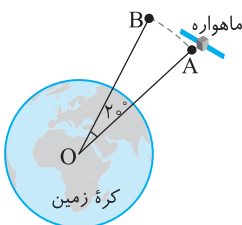
۷۹- مطابق شکل ماهواره‌ای در شعاع 36000 کیلومتری از مرکز زمین در حال گردش روی یک مسیر دایره‌ای است. این ماهواره چند کیلومتر باید طی کند تا از نقطه A به نقطه B برسد؟

(۱) 2000π

(۲) 2400π

(۳) 4000π

(۴) 4800π



۸۰- آب‌پاش زمین چمنی آب را تا فاصله ۶ متر پرتاب می‌کند و به اندازه 120° دوران می‌کند. مساحت ناحیه‌ای از زمین که این آب‌پاش

خیس می‌کند چقدر است؟

(۴) 2π

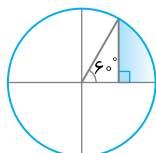
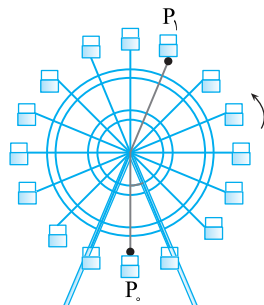
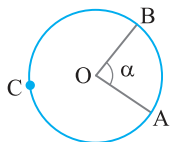
(۳) 6π

(۲) 24π

(۱) 12π

واحدهای اندازه گیری زاویه (۱)

- ۴۵۱- اندازه دو زاویه از مثلثی 36° و $\frac{3\pi}{10}$ رادیان است. اندازه بزرگترین زاویه این مثلث برحسب رادیان کدام است؟
- (۱) $\frac{\pi}{5}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{10}$ (۴) $\frac{2\pi}{5}$
- ۴۵۲- حاصل ضرب اندازه های یک زاویه برحسب درجه و برحسب رادیان برابر $\frac{5\pi}{4}$ است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟
- (۱) 100° (۲) 60° (۳) 30° (۴) 15°
- ۴۵۳- انتهای کمان متناظر با زاویه های $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را روی دایره مثلثاتی به طور متوالی به هم وصل می کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟
- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) لوزی (۴) دوزنقه
- ۴۵۴- زاویه 56° روی دایره مثلثاتی با کدام یک از زاویه های زیر هم انتها است؟
- (۱) 160° (۲) 16° (۳) 140° (۴) 14°
- ۴۵۵- یک چرخ و فلک 20 کابین دارد. در لحظه حرکت چرخ و فلک، کابین شماره یک در پایین ترین نقطه قرار دارد. اگر چرخ و فلک به اندازه $\frac{48\pi}{5}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، کابین شماره یک در محل فعلی کدام کابین قرار می گیرد؟
- (۱) چهاردهم (۲) پانزدهم (۳) شانزدهم (۴) هفدهم
- ۴۵۶- کدام یک از اعداد زیر کوچک تر است؟ (زوایا برحسب رادیان هستند.)
- (۱) $\sin 1$ (۲) $\sin 2$ (۳) $\sin 4$ (۴) $\sin 6$
- ۴۵۷- وقتی عقربه ساعت شمار به اندازه $\frac{5\pi}{8}$ رادیان دوران می کند، چند دقیقه زمان سپری شده است؟
- (۱) ۱۲۵ (۲) ۱۷۵ (۳) ۲۲۵ (۴) ۲۷۵
- ۴۵۸- در شکل مقابل O مرکز دایره و اندازه شعاع دایره 4π واحد است. اگر طول کمان ACB، π واحد بیشتر از طول کمان AB باشد، اندازه زاویه α چند رادیان است؟
- (۱) $\pi - \frac{1}{4}$ (۲) $\pi - \frac{1}{8}$ (۳) $\pi - \frac{1}{2}$ (۴) $\pi - \frac{3}{2}$
- ۴۵۹- شعاع چرخ و فلک شکل مقابل 40 متر است و در جهت مثبت مثلثاتی می چرخد. مسافران از نقطه P_0 تا نقطه P_1 چند متر روی چرخ و فلک طی می کنند؟
- (۱) 35π (۲) 25π (۳) 36π (۴) 32π
- ۴۶۰- در شکل مقابل اندازه شعاع دایره $6\sqrt{3}$ است. اندازه محیط قسمت رنگی کدام است؟
- (۱) $3(1+\sqrt{3}+\pi)$ (۲) $2(1+\sqrt{3}+\pi)$ (۳) $9+\sqrt{3}(2\pi+3)$ (۴) $3(1+\sqrt{3})+2\pi$



سؤال	گام
۴۵۱	۸۸
۴۵۲	۸۸
۴۵۳	۸۵
۴۵۴	۸۶
۴۵۵	۸۷
۴۵۶	۸۵
۴۵۷	۹۰
۴۵۸	۸۹
۴۵۹	۸۷ ۸۹
۴۶۰	۷۰ ۸۹

واحدهای اندازه گیری زاویه (۲)

آزمون ۴۷

سؤال	گام
۴۶۱	۸۸
۴۶۲	۸۸
۴۶۳	۸۵
۴۶۴	۸۶
۴۶۵	۸۷
۴۶۶	۸۵
۴۶۷	۹۰
۴۶۸	۸۹
۴۶۹	۸۹ ۹۱
۴۷۰	۸۸ ۸۹

۴۶۱- مجموع اندازه های دو زاویه 40° و تفاضل اندازه های آنها $\frac{4\pi}{9}$ رادیان است. اندازه زاویه بزرگتر برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $\frac{4\pi}{9}$ (۳) $\frac{8\pi}{9}$ (۴) $\frac{11\pi}{9}$

۴۶۲- اندازه یک زاویه برحسب رادیان از $\frac{\pi}{80}$ برابر اندازه آن برحسب درجه $\frac{5\pi}{36}$ کمتر است. اندازه این زاویه برحسب درجه کدام است؟

- (۱) 15° (۲) 20° (۳) 40° (۴) 50°

۴۶۳- انتهای کمان های متناظر با زاویه های $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را روی دایره مثلثاتی به طور متوالی به هم وصل می کنیم. چهارضلعی حاصل کدام است؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) متوازی الاضلاع (۴) دوزنقه

۴۶۴- زاویه ای با اندازه $\frac{28\pi}{3}$ رادیان روی دایره مثلثاتی با زاویه α هم انتهاست. اندازه α برحسب رادیان کدام می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{31\pi}{6}$ (۳) $-\frac{2\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{3}$

۴۶۵- انتهای کمان نظیر زاویه هایی به صورت $\alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ را به ازای مقادیر مختلف و صحیح k روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم. اگر این نقاط را متوالیاً به هم وصل کنیم، چه شکلی درست می شود؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) پنج ضلعی منتظم (۴) شش ضلعی منتظم

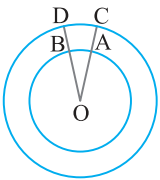
۴۶۶- کدام یک از اعداد زیر بزرگتر است؟ (زاویه ها برحسب رادیان هستند.)

- (۱) $\tan 2$ (۲) $\tan 3$ (۳) $\tan 5$ (۴) $\tan 6$

۴۶۷- اندازه زاویه ای که عقربه ساعت شمار بین ساعت ۹ و $10:20$ طی می کند، چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{9}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{9}$ (۴) $\frac{5\pi}{9}$

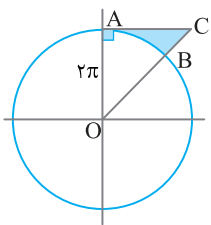
۴۶۸- در شکل مقابل دو دایره هم مرکز به شعاع ۶ و ۹ واحد رسم شده است و $\widehat{DOC} = 25^\circ$. طول کمان CD چقدر از طول کمان AB بیشتر است؟



- (۱) $\frac{5\pi}{36}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$

- (۳) $\frac{5\pi}{12}$ (۴) $\frac{5\pi}{9}$

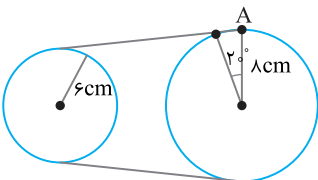
۴۶۹- در شکل روبه رو O مرکز دایره است و مساحت قسمت رنگی $(1 - \frac{\pi}{4})2\pi^2$ است. طول کمان AB چقدر است؟



- (۱) $\frac{\pi^2}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$

- (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi^2}{2}$

۴۷۰- در شکل مقابل اگر نقطه A، 20° روی چرخ بزرگتر جابه جا شود، چرخ کوچکتر چند درجه جابه جا می شود؟



- (۱) $\frac{4\pi}{27}$ (۲) $\frac{9\pi}{27}$

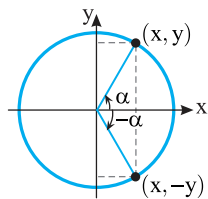
- (۳) $\frac{40}{3}$ (۴) $\frac{80}{3}$

درس پنجم: نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها

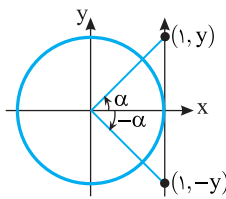
توجه کنید که نسبت‌های مثلثاتی زاویه $2k\pi + \alpha$ با نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه α برابرند، زیرا این دو زاویه هم انتها هستند (k عددی صحیح است). بنابراین،

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

همین‌طور، نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\alpha$ را می‌توان از روی نسبت‌های مثلثاتی نظیرشان از زاویه α به کمک شکل‌های زیر به‌دست آورد.



$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= \frac{1}{\tan(-\alpha)} = \frac{1}{-\tan \alpha} = -\cot \alpha\end{aligned}$$

۹۲

نکته

به روش زیر می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی برخی زاویه‌ها را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای دیگر حساب کنیم.

(۱) زاویه مورد نظر را به صورت $k\pi \pm \alpha$ (k عددی صحیح است) یا $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ (k عددی صحیح و فرد است) می‌نویسیم.

(۲) با فرض اینکه α زاویه‌ای حاده است، ناحیه‌ای را که انتهای کمان نظیر زاویه مورد نظر در آن قرار دارد مشخص می‌کنیم.

(۳) علامت نسبت مثلثاتی مورد نظر در ناحیه به‌دست آمده را یادداشت می‌کنیم.

(۴) عبارت $k\pi \pm \alpha$ یا $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ را حذف می‌کنیم.

(۵) اگر در مرحله قبلی $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ را حذف کردیم، نسبت مثلثاتی را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

- سینوس به کسینوس
- کسینوس به سینوس
- تانژانت به کتانژانت
- کتانژانت به تانژانت

مثال:

$$۱) \sin 39^\circ = \sin(2 \times 18^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$۲) \cos 11^\circ = \cos(9^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

$$۳) \tan \frac{11\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$۴) \cot \frac{13\pi}{10} = \cot(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = \tan \frac{\pi}{10}$$

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد و $k \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه با استفاده از روش گفته شده نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan \alpha$
$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot \alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan \alpha$
$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin \alpha$	$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan \alpha$	$\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot \alpha$
$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin \alpha$	$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos \alpha$	$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan \alpha$	$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot \alpha$

تست
 □□□□

 حاصل عبارت $A = \frac{1+\cos(13\pi-\alpha)}{\sin^2(\delta\pi-\alpha)} \times \frac{1+\cos(12\pi+\alpha)}{\sin(7\pi+\alpha)}$ به ازای $\alpha = \frac{\delta\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

راهنما

ابتدا توجه کنید که

$$\cos(13\pi-\alpha)=-\cos \alpha, \quad \cos(12\pi+\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\delta\pi-\alpha)=\sin \alpha, \quad \sin(7\pi+\alpha)=-\sin \alpha$$

$$A = \frac{1-\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \times \frac{1+\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{-\sin^3 \alpha} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha}$$

بنابراین

$$\text{بنابراین مقدار } A \text{ به ازای } \alpha = \frac{\delta\pi}{6} \text{ برابر است با } -\frac{1}{\sin \frac{\delta\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

تست
 □□□□

 حاصل عبارت $A = 2\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) + 3\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) + 4\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha) + 5\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ به ازای $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۲

راهنما

ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos \alpha$$

$$\text{بنابراین } A = 2\cos \alpha + 3\cos \alpha - 4\cos \alpha - 5\cos \alpha = -4\cos \alpha. \quad \text{پس مقدار } A \text{ به ازای } \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ برابر است با } -4\cos \frac{2\pi}{3} = -4(-\frac{1}{2}) = 2$$

تست
 □□□□

 مقدار $\sin 42^\circ \cos 39^\circ + \cos(-66^\circ) \sin(-33^\circ)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

راهنما

توجه کنید که

$$\sin 42^\circ = \sin(36^\circ + 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 39^\circ = \cos(36^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-66^\circ) = \cos 66^\circ = \cos(72^\circ - 6^\circ) = \cos 6^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin(-33^\circ) = -\sin 33^\circ = -\sin(36^\circ - 3^\circ) = -(-\sin 3^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با } \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

تست
 □□□□

 حاصل $A = 3\sin \frac{3\pi}{4} + 5\sin \frac{\delta\pi}{4} + 7\sin \frac{7\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$

راهنما

ابتدا توجه کنید که

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\delta\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{7\pi}{4} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{بنابراین } A = 3(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 5(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 7(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

تست

اگر $\tan 2^\circ = a$ ، مقدار $\frac{\tan 2^\circ + \cot 16^\circ}{\tan 76^\circ + \cot 34^\circ}$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) $a+1$ (۲) $a-1$ (۳) $\frac{a}{a+1}$ (۴) $\frac{a}{a-1}$

می‌توان نوشت

راه‌حل

$$\tan 2^\circ = \tan(18^\circ - 16^\circ) = \tan 2^\circ = a$$

$$\cot 16^\circ = \cot(18^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\tan 76^\circ = \tan(4 \times 18^\circ + 4^\circ) = \tan 4^\circ = 1$$

$$\cot 34^\circ = \cot(36^\circ - 2^\circ) = -\cot 2^\circ = -\frac{1}{a}$$

$$\frac{a - \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a^2 - 1}{a - 1} = a + 1$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $a+1$

۹۳

نکته

اگر زاویه‌های α و β مکمل یکدیگر باشند، سینوس آن‌ها با هم برابر است و کسینوس آن‌ها قرینه یکدیگر، تانژانت آن‌ها قرینه یکدیگر و کتانژانت آن‌ها هم قرینه یکدیگر است.

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta, \quad \cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\tan \alpha = -\tan \beta, \quad \cot \alpha = -\cot \beta$$

تست

مقدار عبارت $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، آن‌گاه $\sin \alpha = \sin \beta$. بنابراین

راه‌حل

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}$$

در نتیجه

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}} = 1$$

تست

مقدار عبارت $A = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 180^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸۰

ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = 180^\circ$ ، آن‌گاه $\cos \beta = -\cos \alpha$ و در نتیجه $\cos \alpha + \cos \beta = 0$. بنابراین

راه‌حل

$$\cos 1^\circ + \cos 179^\circ = 0, \quad \cos 2^\circ + \cos 178^\circ = 0, \quad \dots, \quad \cos 89^\circ + \cos 91^\circ = 0$$

از طرف دیگر $\cos 90^\circ = 0$ و $\cos 180^\circ = -1$. بنابراین $A = -1$

تست
 □□□□

 حاصل $A = \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \dots + \cos^3 \frac{10\pi}{11}$ کدام است؟

- (۱) $5 \cos^3 \frac{\pi}{11}$ (۲) $10 \cos^3 \frac{\pi}{11}$ (۳) ۱ (۴) صفر

 ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha + \beta = \pi$ آن گاه $\cos \beta = -\cos \alpha$. پس $\cos^3 \beta = -\cos^3 \alpha$ و در نتیجه $\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta = 0$. بنابراین

را حل

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{11} + \frac{10\pi}{11} &= \pi \Rightarrow \cos^3 \frac{\pi}{11} + \cos^3 \frac{10\pi}{11} = 0 \\ \frac{2\pi}{11} + \frac{9\pi}{11} &= \pi \Rightarrow \cos^3 \frac{2\pi}{11} + \cos^3 \frac{9\pi}{11} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{5\pi}{11} + \frac{6\pi}{11} &= \pi \Rightarrow \cos^3 \frac{5\pi}{11} + \cos^3 \frac{6\pi}{11} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 0$$

۹۴

نکته

 اگر زاویه های α و β متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است و تانژانت یکی برابر کتانژانت دیگری است.

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta$$

تست
 □□□□

 مقدار $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱

 توجه کنید که $\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$. پس $\sin \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{10}$. در نتیجه $\sin^2 \frac{2\pi}{5} = \cos^2 \frac{\pi}{10}$. بنابراین $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \sin^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{\pi}{10} = 1$
را حل

دست گرمی

 حاصل عبارت $A = \frac{2 \sin(\pi + \alpha) - 4 \sin(\pi - \alpha)}{3 \cos(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)}$ کدام است؟

- (۱) $3 \tan \alpha$ (۲) $\frac{3}{2} \tan \alpha$ (۳) $-\tan \alpha$ (۴) $-3 \tan \alpha$

 اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ، مقدار $\frac{\cos(\pi - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(-\alpha) - \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\cot \alpha$ (۲) $-\cot \alpha$ (۳) $\cos \alpha$ (۴) $-\cos \alpha$

 حاصل عبارت $\frac{\sin 135^\circ - \cos 12^\circ}{\sin 135^\circ + \cos 12^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $1 + 2\sqrt{2}$ (۲) $2 - 3\sqrt{2}$ (۳) $3 + 2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

 حاصل عبارت $A = \sin \frac{7\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} + \cot \frac{7\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

 مقدار $\cos^3 \frac{\pi}{8} + \cos^3 \frac{3\pi}{8} + \cos^3 \frac{5\pi}{8} + \cos^3 \frac{7\pi}{8}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۱)

آزمون ۴۸

سؤال	گام
۴۷۱	۸۲ ۹۲
۴۷۲	۸۲ ۹۲
۴۷۳	۸۲ ۹۲
۴۷۴	۹۴
۴۷۵	۹۲
۴۷۶	۹۲
۴۷۷	۹۲
۴۷۸	۹۲
۴۷۹	۹۳
۴۸۰	۹۳

۴۷۱- حاصل عبارت $A = \tan \alpha \cot(-\alpha) + \sin^2(-\alpha) + \cos^2 \alpha$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $-2 \sin^2 \alpha$

۴۷۲- حاصل $\cos(x-90^\circ) \cot(-x-180^\circ)$ کدام است؟

- (۱) $-\sin x$ (۲) $-\cos x$ (۳) $\sin x$ (۴) $\cos x$

۴۷۳- اگر $\tan \theta = 0/4$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) + \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) + \sin(3\pi - \theta)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۴۷۴- اگر $x + 3y = \frac{\pi}{2}$ ، حاصل $\tan(2x + 3y)$ کدام است؟

- (۱) $-\tan x$ (۲) $-\cot x$ (۳) $\tan x$ (۴) $\cot x$

۴۷۵- اگر $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = 2 \sin(\frac{5\pi}{2} + x)$ ، حاصل $\tan x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{2}$

۴۷۶- حاصل $\cos 510^\circ$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۷۷- حاصل $\cos \frac{43\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۷۸- حاصل $\sin \frac{23\pi}{6} \cos \frac{16\pi}{3} \tan \frac{35\pi}{4} \cot(-\frac{43\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۴۷۹- مقدار عبارت $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۴۸۰- مقدار عبارت $A = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) صفر

نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها (۲)

آزمون ۴۹

۴۸۱- حاصل عبارت $A = 3 \sin(3\pi - \alpha) + 4 \sin(4\pi + \alpha) + 5 \sin(5\pi + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $4 \sin \alpha$ (۲) $8 \sin \alpha$ (۳) $2 \sin \alpha$ (۴) $12 \sin \alpha$

۴۸۲- حاصل عبارت $A = \frac{3 \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{2 \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cot(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

- (۱) $2 \cot^2 \alpha$ (۲) $\frac{4}{3} \cot^2 \alpha$ (۳) $2 \tan^2 \alpha$ (۴) $\frac{4}{3} \tan^2 \alpha$

۴۸۳- اگر $3 = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - 2 \cos(3\pi + \alpha)}$ ، مقدار $\tan(\alpha - \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۴۸۴- اگر $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2}$ ، حاصل $\frac{1}{1 - \cot \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \beta}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan \beta$ (۴) $\cot \alpha$

۴۸۵- اگر $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ و $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{5}{12}$

۴۸۶- حاصل کسر $\frac{\cos(-60^\circ) + \cot 675^\circ}{\tan 945^\circ - \sin(-33^\circ)}$ کدام است؟

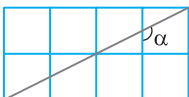
- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۴۸۷- اگر $\tan 15^\circ = a$ ، حاصل عبارت $A = \frac{2 \tan 75^\circ + \tan 15^\circ}{3 \tan 165^\circ - \tan 255^\circ}$ برحسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{3a^2 + 1}$ (۲) $\frac{3}{3a^2 - 1}$ (۳) $\frac{1}{3a^2 - 1}$ (۴) $\frac{-1}{3a^2 + 1}$

۴۸۸- مقدار عبارت $A = 4 \sin^2 \frac{101\pi}{3} - 2 \cos \frac{98\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $1 + \sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۸۹- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با یک واحد است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۴۹۰- حاصل عبارت $A = \tan \frac{\pi}{14} \tan \frac{2\pi}{14} \dots \tan \frac{6\pi}{14}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

سؤال	گام
۴۸۱	۹۲
۴۸۲	۸۲ ۹۲
۴۸۳	۸۲ ۹۲
۴۸۴	۸۲ ۹۲
۴۸۵	۷۵ ۸۲ ۹۲
۴۸۶	۹۲
۴۸۷	۹۲ ۲۸۴
۴۸۸	۹۲
۴۸۹	۹۳ ۹۴
۴۹۰	۹۴

نسبت‌های مثلثاتی همهٔ زاویه‌ها (۳)

آزمون ۵۰

سؤال	گام
۴۹۱	۹۲
۴۹۲	۹۲
۴۹۳	۹۴
۴۹۴	۸۲ ۹۲
۴۹۵	۹۴
۴۹۶	۹۲
۴۹۷	۸۲ ۹۲
۴۹۸	۹۲
۴۹۹	۸۲ ۹۴
۵۰۰	۹۳

۴۹۱- حاصل عبارت $A = \frac{\tan(\pi - \alpha) + 2 \tan(\pi + \alpha)}{\tan(2\pi - \alpha) - \tan(2\pi + \alpha)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۴۹۲- مقدار عبارت $A = \frac{4 \sin(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) + 2 \cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{3 \tan(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) - 6 \cot(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6})}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (۳) $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

۴۹۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حاصل عبارت $\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۹۴- اگر $a + b = \frac{5\pi}{2}$ ، حاصل $\frac{\sin a + \tan a \tan b - 1}{\sin b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1}$ کدام است؟

- (۱) $\tan b$ (۲) $\cot b$ (۳) $-\cot b$ (۴) $-\tan b$

۴۹۵- اگر $3a + 2b = \pi$ و $\cos(a + b) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin \frac{a}{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۴۹۶- حاصل عبارت $\frac{\sin^2 41^\circ + \sin^2 49^\circ}{\tan 73^\circ \times \cot 11^\circ}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۴۹۷- اگر $a = \cot 25^\circ$ ، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 115^\circ - 3 \cos 155^\circ}{3 \cos 295^\circ + \cos 335^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3a+1}{3-a}$ (۲) $\frac{3a-1}{a-3}$ (۳) $\frac{3a-1}{a+3}$ (۴) $\frac{a+1}{3a-1}$

۴۹۸- حاصل عبارت $A = \sin \frac{11\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{4} - \cot \frac{9\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۴۹۹- حاصل عبارت $A = \cos^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{3\pi}{16} + \cos^2 \frac{5\pi}{16} + \cos^2 \frac{7\pi}{16}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۵۰۰- مقدار عبارت $A = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ}{\cos 91^\circ + \cos 92^\circ + \dots + \cos 179^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

درس ششم: سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه

در این درس به رابطه‌هایی اشاره می‌کنیم که به کمک آن‌ها می‌توان سینوس و کسینوس مجموع یا تفاضل دو زاویه را برحسب سینوس و کسینوس این دو زاویه پیدا کرد.

۹۵

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

نکته

اگر α و β دو زاویه دلخواه باشند، آن‌گاه

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha+\beta)=\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin \alpha \cos \beta-\cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos \alpha \cos \beta+\sin \alpha \sin \beta$$

مثال:

$$۱) \sin ۷۵^{\circ}=\sin (۴۵^{\circ}+۳۰^{\circ})=\sin ۴۵^{\circ} \cos ۳۰^{\circ}+\cos ۴۵^{\circ} \sin ۳۰^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$۲) \cos ۷۵^{\circ}=\cos (۴۵^{\circ}+۳۰^{\circ})=\cos ۴۵^{\circ} \cos ۳۰^{\circ}-\sin ۴۵^{\circ} \sin ۳۰^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$۳) \sin ۱۵^{\circ}=\sin (۴۵^{\circ}-۳۰^{\circ})=\sin ۴۵^{\circ} \cos ۳۰^{\circ}-\cos ۴۵^{\circ} \sin ۳۰^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(البته توجه کنید که $\sin ۱۵^{\circ}=\sin (۹۰^{\circ}-۷۵^{\circ})=\cos ۷۵^{\circ}$.)

تست

۱

مقدار عبارت $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4}-\cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

را حل

عبارت مورد نظر به شکل $\sin \alpha \cos \beta-\cos \alpha \sin \beta$ است، که در اینجا $\alpha=\frac{\pi}{12}$ و $\beta=\frac{\pi}{4}$. در نتیجه، اگر در تساوی

$$\sin (\alpha-\beta)=\sin \alpha \cos \beta-\cos \alpha \sin \beta \quad \text{قرار دهیم} \quad \alpha=\frac{\pi}{12} \quad \text{و} \quad \beta=\frac{\pi}{4}, \quad \text{به دست می‌آید}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4}-\cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}=\sin \left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin \frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

تست

۲

مقدار عبارت $\frac{\sin ۲^{\circ} \cos ۵^{\circ}+\cos ۲^{\circ} \sin ۵^{\circ}}{\cos ۳^{\circ} \cos ۱۰^{\circ}+\sin ۳^{\circ} \sin ۱۰^{\circ}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\tan ۷^{\circ}$ ۴) $\tan ۲^{\circ}$

را حل

توجه کنید که

$$\sin ۲^{\circ} \cos ۵^{\circ}+\cos ۲^{\circ} \sin ۵^{\circ}=\sin (۲^{\circ}+۵^{\circ})=\sin ۷^{\circ}, \quad \cos ۳^{\circ} \cos ۱۰^{\circ}+\sin ۳^{\circ} \sin ۱۰^{\circ}=\cos (۳^{\circ}-۱۰^{\circ})=\cos ۷^{\circ}$$

از طرف دیگر، چون زاویه‌های ۷° و ۲° متمم یکدیگرند، پس $\sin ۷^{\circ}=\cos ۲^{\circ}$. بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر با ۱ است.

تست

۳

مقدار عبارت $\sqrt{2} \sin \left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin \alpha$ کدام است؟

۱) $\cos \alpha$ ۲) $-\cos \alpha$ ۳) $\sin \alpha$ ۴) $-\sin \alpha$

را حل

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin \alpha &=\sqrt{2}\left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4}-\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha\right)-\sin \alpha=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha\right)-\sin \alpha \\ &=\sin \alpha-\cos \alpha-\sin \alpha=-\cos \alpha \end{aligned}$$

تست ۴

مقدار عبارت $\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan(\alpha+\beta)$ (۴) $\cot(\alpha+\beta)$

راه حل

صورت عبارت داده شده برابر است با

$$\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

و مخرج عبارت داده شده برابر است با

$$2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \\ =\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta)$

تست ۵

اگر $\sin\alpha=\frac{8}{17}$ ، $\cos\beta=\frac{4}{5}$ و $0<\alpha, \beta<\frac{\pi}{2}$ ، مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{75}$ (۲) $\frac{77}{85}$ (۳) $\frac{44}{945}$ (۴) $\frac{4}{105}$

راه حل

ابتدا توجه کنید که چون α و β هر دو زاویه‌های حاده هستند، پس $\cos\alpha=\sqrt{1-(\frac{8}{17})^2}=\frac{15}{17}$ و $\sin\beta=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$ بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{8}{17}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{15}{17}=\frac{32+45}{85}=\frac{77}{85}$$

تست ۶

اگر $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$ و $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{4\pi}{3}$ ، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

راه حل

توجه کنید که

$$\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{10}\Rightarrow\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{1}{5}$$

در نتیجه $\cos\alpha=\sin\alpha-\frac{1}{5}$. اکنون اگر در تساوی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ، به جای $\cos\alpha$ قرار دهیم $\sin\alpha-\frac{1}{5}$ ، به دست می‌آید

$$\sin^2\alpha+(\sin\alpha-\frac{1}{5})^2=1\Rightarrow\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\frac{2}{5}\sin\alpha+\frac{1}{25}=1\Rightarrow\sin^2\alpha-\frac{1}{5}\sin\alpha-\frac{12}{25}=0\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}, \sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

اکنون توجه کنید که چون $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{4\pi}{3}$ ، پس انتهای کمان نظیر α در ربع سوم است، در نتیجه $\sin\alpha$ عددی منفی است. به این ترتیب،

$$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

تست ۷

اگر $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$ و $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{5}$ ، حاصل $\tan\alpha\cot\beta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) $\frac{1}{10}$

راه حل

از تساوی‌های فرض مسئله نتیجه می‌شود $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$ و $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$. با جمع و تفریق طرفین این

دو تساوی معلوم می‌شود $\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{12}$ و $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$. در نتیجه

$$\tan\alpha\cot\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{12}}=5$$

تست

۸

در شکل مقابل مقدار $\cos(\hat{BCD})$ کدام است؟

(۱) $\frac{84}{85}$

(۲) $\frac{76}{85}$

(۳) $\frac{36}{85}$

(۴) $\frac{32}{85}$

راهنما

توجه کنید که با نمادگذاری شکل مقابل $\hat{BCD} = \alpha + \beta$. از طرف دیگر، بنابر قضیه فیثاغورس،

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow AC = 15$$

در نتیجه

$$\cos(\hat{BCD}) = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{12}{15} \times \frac{15}{17} - \frac{9}{15} \times \frac{8}{17} = \frac{180}{255} - \frac{72}{255} = \frac{108}{255} = \frac{36}{85}$$

تست

۹

در شکل مقابل ABCD مربع است و $\tan \alpha = \frac{4}{3}$. مقدار $\cos \beta$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$

(۲) $-\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

(۴) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

راهنما

چون ABCD مربع است، پس $\hat{ABD} = 45^\circ$. از طرف دیگر، چون $\hat{AKD} = \beta$ برای مثلث AKB زاویه‌ای خارجی است، پس $\beta = 45^\circ + \alpha$. به

این ترتیب

$$\cos \beta = \cos(45^\circ + \alpha) = \cos 45^\circ \cos \alpha - \sin 45^\circ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) \quad (1)$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

توجه کنید که چون α زاویه حاده است،

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

همین‌طور $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{3}{5} - \frac{4}{5}) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ به دست می‌آید (۱) در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید

۹۶

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد،

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}), \quad \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

تست

۱۰

اگر $\sin x = \frac{4+3 \cos x}{3}$ ، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{4} - x)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

(۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(۴) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

راهنما

از فرض سؤال نتیجه می‌شود

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{4})) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در نتیجه

$$\cos(\frac{3\pi}{4} - x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

بنابراین

تذکر

عبارت $a \sin x + b \cos x$ را با فرض اینکه $\frac{b}{a} = \tan \theta$ و θ زاویه‌ای معلوم است، می‌توانیم به صورت $\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)$ بنویسیم.همچنین با فرض $\frac{a}{b} = \tan \alpha$ می‌توانیم آن را به صورت $\sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$ بنویسیم.

تست ۱۱

مقدار عبارت $\frac{\sqrt{3} \sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{\cos 14^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

توجه کنید که $\sqrt{3} = \tan 6^\circ$. بنابراین

راهنما

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} \sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{\cos 14^\circ} &= \frac{\tan 6^\circ \sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{\cos 14^\circ} = \frac{\sin 6^\circ \sin 2^\circ + \cos 6^\circ \cos 2^\circ}{\cos 6^\circ \cos 14^\circ} \\ &= \frac{\cos(6^\circ - 2^\circ)}{\frac{1}{2} \cos 14^\circ} = \frac{2 \cos 4^\circ}{\cos 14^\circ - \cos 4^\circ} = -2 \end{aligned}$$

تست ۱۲

حداقل و حداکثر عبارت $\sin x + \sqrt{3} \cos x$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) ۱ و -۱ (۲) ۲ و -۲ (۳) ۳ و -۳ (۴) $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$. در نتیجه

راهنما

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sin x + \tan \frac{\pi}{3} \cos x = \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} + x)}{\frac{1}{2}} = 2 \sin(\frac{\pi}{3} + x)$$

از طرف دیگر، چون $1 \geq \sin(\frac{\pi}{3} + x) \geq -1$ ، پس $-2 \leq 2 \sin(\frac{\pi}{3} + x) \leq 2$ ، بنابراین $-2 \leq \sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 2$. بنابراین حداقل مقدار عبارت مورد نظر

برابر ۲- است (که مثلاً به ازای $x = \frac{7\pi}{6}$ به دست می‌آید) و حداکثر مقدار این عبارت برابر ۲ است (که مثلاً به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ به دست می‌آید).

دست‌گرمی

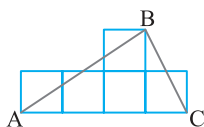
۸۶- حاصل $\frac{\cos 2^\circ \cos 4^\circ - \sin 2^\circ \sin 4^\circ}{\sin 2^\circ \cos 4^\circ + \sin 4^\circ \cos 2^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) $\tan 2^\circ$

۸۷- مقدار $\sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x$ به ازای $x = \frac{\pi}{15}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۸۸- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر ۱ است. مقدار $\cos(\angle ABC)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{7\sqrt{65}}{65}$ (۲) $\frac{\sqrt{65}}{65}$ (۳) $\frac{4}{65}$ (۴) $\frac{56}{65}$

۸۹- حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 2^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۱

۹۰- حاصل عبارت $A = \sqrt{3} \sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ برابر است با

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

آزمون ۵۱

سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۱)

۵۰۱- مقدار $\sin \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

۵۰۲- اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه A در ناحیه اول باشد و $\sin \hat{A} = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه B در ناحیه سوم باشد ومقدار $\cos \hat{B} = -\frac{5}{13}$ ، مقدار $\cos(\hat{A} + \hat{B})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{65}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{16}{65}$ (۴) $\frac{1}{13}$

۵۰۳- اگر $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{10}$ و $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\sin \alpha \cos \beta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۵۰۴- مقدار $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۵۰۵- اگر $\frac{3\pi}{4} < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، $\cos(\alpha - \beta) = \frac{12}{13}$ و $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{14}{65}$ (۲) $-\frac{16}{65}$ (۳) $-\frac{56}{65}$ (۴) $-\frac{8}{65}$

۵۰۶- مقدار $\frac{\sin 61^\circ \sin 31^\circ + \sin 59^\circ \sin 29^\circ}{\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ}$ کدام است؟

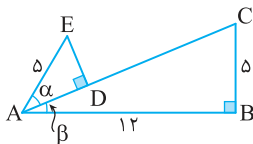
- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۰۷- مقدار عبارت $A = \sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ$ کدام است؟

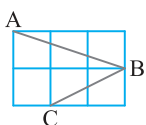
- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $-\sqrt{3}$

۵۰۸- حاصل $\frac{\sin(\pi - x) - \cos(\pi + x)}{\cos(x - \frac{\pi}{4})}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $2\sqrt{2}$

۵۰۹- در شکل مقابل $AD = 4$ ، مقدار $\cos(\alpha + \beta)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{27}{65}$ (۲) $\frac{33}{65}$ (۳) $\frac{42}{65}$ (۴) $\frac{47}{65}$

۵۱۰- در شکل روبه‌رو طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار $\cos(\angle ABC)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

سؤال	گام
۵۰۱	۹۵
۵۰۲	۷۵ ۹۵
۵۰۳	۹۵
۵۰۴	۹۶
۵۰۵	۷۵ ۹۵
۵۰۶	۹۴ ۹۵
۵۰۷	۹۶
۵۰۸	۹۲ ۹۶
۵۰۹	۹۵
۵۱۰	۹۵

سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۲)

سؤال	گام
۵۱۱	۹۵
۵۱۲	۷۵ ۹۵
۵۱۳	۹۵
۵۱۴	۹۴ ۹۵
۵۱۵	۹۶
۵۱۶	۹۶
۵۱۷	۹۶
۵۱۸	۹۵
۵۱۹	۹۵
۵۲۰	۹۲ ۹۵

۵۱۱- ساده شده عبارت $\sin(x+\frac{\pi}{3})-\cos(x+\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) $-\cos x$ (۲) $-\sin x$ (۳) $\cos x$ (۴) $\sin x$

۵۱۲- اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ، $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ ، $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ و $\cos \beta = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

- (۱) $\frac{11}{25}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{25}$

۵۱۳- اگر $\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}$ و $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{1}{4}$ ، مقدار $\cos \alpha \cos \beta$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

۵۱۴- مقدار $\sin 35^\circ \cos 25^\circ + \cos 65^\circ \sin 55^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۱۵- اگر $\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 3 \cos(x+\frac{\pi}{4})$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

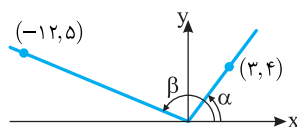
۵۱۶- اگر $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3$ ، مقدار $\cos(x-\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۵۱۷- مقدار $\frac{\cos 10^\circ + \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\cos 50^\circ}$ کدام است؟

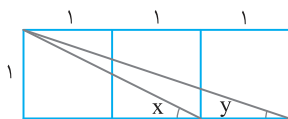
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۵۱۸- در شکل روبه‌رو مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ کدام است؟



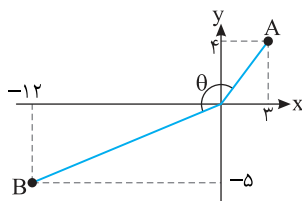
- (۱) $-\frac{33}{65}$ (۲) $\frac{63}{65}$ (۳) $\frac{33}{65}$ (۴) $-\frac{63}{65}$

۵۱۹- در شکل مقابل سه مربع به ضلع ۱ واحد وجود دارد. مقدار $\sin(x-y)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{\sqrt{75}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{50}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{50}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{75}}$

۵۲۰- در شکل مقابل مقدار $\cos \theta$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{61}{65}$ (۲) $-\frac{56}{65}$ (۳) $-\frac{31}{65}$ (۴) $-\frac{27}{65}$

سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۳)

آزمون ۵۳

۵۲۱- ساده شده عبارت $A = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}$ کدام است؟

- (۱) $\tan \alpha$ (۲) $\cot \alpha$ (۳) $\tan \beta$ (۴) $\cot \beta$

۵۲۲- اگر $\cos \theta = -\frac{12}{13}$ و $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ ، حاصل $\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3\sqrt{2}}{26}$ (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{26}$ (۳) $\frac{7\sqrt{2}}{26}$ (۴) $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$

۵۲۳- اگر $\sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{8}$ و $\tan \alpha \tan \beta = 4$ ، مقدار $\cos(\alpha + \beta)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{32}$ (۲) $-\frac{9}{32}$ (۳) $\frac{15}{32}$ (۴) $-\frac{15}{32}$

۵۲۴- اگر $x + y = \frac{5\pi}{6}$ ، مقدار $(\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) $2 + \sqrt{3}$

۵۲۵- اگر $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = 1$ ، حاصل $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{32}$ (۲) $\frac{17}{16}$ (۳) $\frac{15}{32}$ (۴) $\frac{15}{16}$

۵۲۶- اگر α و β حاده باشند، $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin \beta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{25}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{7}{25}$ (۴) $\frac{1}{5}$

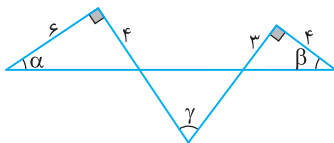
۵۲۷- در مثلث ABC، اگر $\cos \hat{A} = \frac{3}{5}$ و $\cos \hat{B} = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\cos \hat{C}$ کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2} - 3$ (۲) $8\sqrt{2} + 3$ (۳) $3 - 8\sqrt{2}$ (۴) $-3 - 8\sqrt{2}$

۵۲۸- اگر $\sin a = 4 \sin b \sin(a+b)$ و $\cos a = -4 \cos b \cos(a+b)$ ، مقدار $\tan a$ کدام است؟

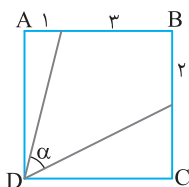
- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۵۲۹- در شکل مقابل مقدار $\sin \gamma$ کدام است؟



- (۱) $\frac{8}{5\sqrt{13}}$ (۲) $\frac{2}{5\sqrt{13}}$ (۳) $\frac{17}{5\sqrt{13}}$ (۴) $\frac{18}{5\sqrt{13}}$

۵۳۰- در شکل مقابل ABCD مربع است. مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{\sqrt{85}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{85}}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{85}}$ (۴) $\frac{6}{\sqrt{85}}$

سؤال	گام
۵۲۱	۹۵
۵۲۲	۷۵ ۹۵
۵۲۳	۹۵
۵۲۴	۹۵
۵۲۵	۹۵
۵۲۶	۷۵ ۹۵
۵۲۷	۹۲ ۹۵
۵۲۸	۹۵
۵۲۹	۹۵
۵۳۰	۹۴ ۹۵

سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه (۴)

آزمون ۵۴

سؤال	گام
۵۳۱	۹۵
۵۳۲	۹۶
۵۳۳	۹۵
۵۳۴	۹۵
۵۳۵	۹۵
۵۳۶	۹۲ ۹۵
۵۳۷	۹۴ ۹۵
۵۳۸	۹۴ ۹۵
۵۳۹	۹۶
۵۴۰	۹۵

۵۳۱- اگر $\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{3}{2}$ و $\tan a = \frac{1}{5}$ ، مقدار $\cot b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) ۵ (۴) -۱

۵۳۲- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$ ، حاصل $24 \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

۵۳۳- اگر $\sin a - \cos b = \frac{2}{3}$ و $\cos a - \sin b = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ، مقدار $\sin(a+b)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

۵۳۴- اگر $\cos x + \cos y = \frac{1}{4}$ و $\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$ ، حاصل $\cos(x-y)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{13}{32}$ (۲) $-\frac{27}{32}$ (۳) $\frac{27}{32}$ (۴) $\frac{13}{32}$

۵۳۵- اگر $\cos 17^\circ + \cos 28^\circ = k^3$ ، مقدار $\cos 17^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k}{\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{k}{2}$ (۳) $\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{k^3}{2}$

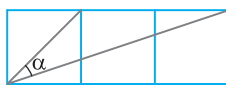
۵۳۶- در مثلث ABC می‌دانیم $\sin \hat{A} \sin \hat{B} - \sin \hat{A} \cos \hat{B} = -\frac{1}{4}$ ، مقدار $\cos \hat{C}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۳۷- در مثلث ABC، $\sin \hat{A} \sin \hat{B} = \cos \hat{A} \cos \hat{B}$ ، مقدار $\frac{\cos \hat{B}}{\sin \hat{A}} + \sin \hat{C}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۵۳۸- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

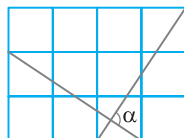


- (۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{15}}$

۵۳۹- حداقل و حداکثر عبارت $\sqrt{3} \sin x - \cos x$ به ترتیب کدام است؟

- (۱) ۱ و -۱ (۲) ۲ و -۲ (۳) ۳ و -۳ (۴) $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

۵۴۰- در شکل مقابل طول هر ضلع مربع‌های کوچک برابر با ۱ است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) ۱

درس هفتم: سینوس و کسینوس زاویه 2α سینوس و کسینوس زاویه 2α

اگر در دستور $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ قرار دهیم $\beta=\alpha$ ، به دست می‌آید

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

بنابراین $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

همین‌طور، اگر در دستور $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ قرار دهیم $\beta=\alpha$ ، به دست می‌آید

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

بنابراین $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

اگر در این اتحاد به جای $\cos^2\alpha$ قرار دهیم $1-\sin^2\alpha$ ، به دست می‌آید

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$

همین‌طور، اگر به جای $\sin^2\alpha$ قرار دهیم $1-\cos^2\alpha$ ، به دست می‌آید

۹۷

نکته

اگر α زاویه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ ، $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

مثال: اگر $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ ، آن‌گاه $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{119}{169}$

تست

اگر $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$$-\frac{12}{25} \quad (۴)$$

$$\frac{12}{25} \quad (۳)$$

$$\frac{24}{25} \quad (۲)$$

$$-\frac{24}{25} \quad (۱)$$

را حل

ابتدا توجه کنید که $\cos\alpha$ عددی منفی است. پس

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\frac{9}{25}+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-4}{5}, \quad \cos\alpha=\frac{4}{5} \quad (\text{غ.ق.})$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}\times\frac{-4}{5}=-\frac{24}{25} \quad \text{بنابراین}$$

تست

حاصل عبارت $\frac{2\cos^2x-\cos 2x}{2\sin^2x+\cos 2x}$ کدام است؟

$$\cot x \quad (۴)$$

$$\tan x \quad (۳)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

را حل

توجه کنید که $\cos 2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$ ، بنابراین

$$\frac{2\cos^2x-\cos 2x}{2\sin^2x+\cos 2x}=\frac{2\cos^2x-(2\cos^2x-1)}{2\sin^2x+(1-2\sin^2x)}=\frac{1}{1}=1$$

تست

حاصل عبارت $A=\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x-1}-\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{\sin x+\cos x}+\sqrt{2}\cos x$ کدام است؟

$$2\sqrt{2}\cos x \quad (۴)$$

$$2\sqrt{2}\sin x \quad (۳)$$

$$1 \quad (۲)$$

$$-1 \quad (۱)$$

از اتحاد $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم:

را حل

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2} \cos 2x}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x = \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2} \sin x)(1 + \sqrt{2} \sin x)}{\sqrt{2} \sin x - 1} - \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} + \sqrt{2} \cos x \\ &= -1 - \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = -1 \end{aligned}$$

تست
□□□□

حاصل $\frac{2\sin^2 40^\circ - 1}{\sin 20^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2\cos 10^\circ}$ (۲) $-\frac{1}{2\cos 10^\circ}$ (۳) $2\cos 10^\circ$ (۴) $-\frac{1}{\cos 10^\circ}$

توجه کنید که $1 - 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ و $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ ، بنابراین

را حل

$$\frac{2\sin^2 40^\circ - 1}{\sin 20^\circ} = \frac{-\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos(90^\circ - 10^\circ)}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = -\frac{1}{2\cos 10^\circ}$$

تست
□□□□

مقدار $\sin 10^\circ \cos 10^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

$$\sin 10^\circ = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ, \quad \cos 10^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) = -\sin 80^\circ$$

ابتدا توجه کنید که

را حل

$$\sin 10^\circ \cos 10^\circ = -\sin 80^\circ \cos 10^\circ = -\frac{1}{2}(2\sin 10^\circ \cos 10^\circ) = -\frac{1}{2}\sin(2 \times 10^\circ) = -\frac{1}{2}\sin 20^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

بنابراین

تست
□□□□

مقدار عبارت $A = (\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ})(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{4}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) 2

می‌توان نوشت

را حل

$$\begin{aligned} A &= (\cos 75^\circ - \frac{1}{\sin 75^\circ})(\sin 75^\circ - \frac{1}{\cos 75^\circ}) = \frac{(\cos 75^\circ \sin 75^\circ - 1)}{\sin 75^\circ} \cdot \frac{(\sin 75^\circ \cos 75^\circ - 1)}{\cos 75^\circ} \\ &= \frac{(\frac{1}{2}\sin 150^\circ - 1)(\frac{1}{2}\sin 150^\circ - 1)}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} \rightarrow A = \frac{(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1)}{\frac{1}{2}\sin 150^\circ} = \frac{(-\frac{3}{4})(-\frac{3}{4})}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

تست
□□□□

مقدار $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 24^\circ} - \frac{\cos 72^\circ}{\cos 24^\circ}$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $2\sin 48^\circ$ (۴) $\frac{1}{2}\sin 48^\circ$

$$\frac{\sin 72^\circ}{\sin 24^\circ} - \frac{\cos 72^\circ}{\cos 24^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 24^\circ - \cos 72^\circ \sin 24^\circ}{\sin 24^\circ \cos 24^\circ} = \frac{\sin(72^\circ - 24^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 48^\circ} = \frac{2\sin 48^\circ}{\sin 48^\circ} = 2$$

می‌توان نوشت

را حل

تست
□□□□

مقدار عبارت $A = \sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

$$A = \sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

راهنما

$$A = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{24} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8}$$

بنابراین به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ به دست می‌آید

تست
□□□□

مقدار عبارت $\cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)

راهنما

فرض کنید $A = \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$. دوطرف این تساوی را در $\sin 2^\circ$ ضرب می‌کنیم و از دستور $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 2^\circ \cdot A = \sin 2^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \sin 4^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 8^\circ \right) \cos 8^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 16^\circ \right) = \frac{1}{8} \sin 16^\circ$$

اکنون توجه کنید که $\sin 16^\circ = \sin(18^\circ - 2^\circ) = \sin 2^\circ \cos 18^\circ$. بنابراین $\sin 2^\circ \cdot A = \frac{1}{8} \sin 2^\circ$. پس $A = \frac{1}{8}$.

۹۸

نکته

چون نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 3° و 45° را می‌دانیم، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 15° و 22.5° را حساب کنیم.

مثال: مقدار $\cos 15^\circ$ را حساب می‌کنیم. اگر در تساوی $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ قرار دهیم $\alpha = 15^\circ$ ، به دست می‌آید

$$\cos 30^\circ = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 2}{2}$$

تست
□□□□

اگر $\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{a-a}}{2}$ ، مقدار a کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

راهنما

در اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ قرار می‌دهیم $\alpha = 22.5^\circ$. در این صورت

$$\cos 45^\circ = 1 - 2 \sin^2 22.5^\circ \Rightarrow \sin^2 22.5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow a = 2$$

۹۹

نکته

اتحادهای $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ و $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ را می‌توانیم به صورت‌های زیر نیز بنویسیم:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

تست
□□□□

مقدار $2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

راهنما

$$2 \sin^2 \frac{5\pi}{16} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1 - \cos \left(2 \times \frac{5\pi}{16} \right) + \cos \frac{5\pi}{8} = 1 - \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} = 1$$

عبارت‌های $1 + \sin 2\alpha$ و $1 - \sin 2\alpha$ را می‌توانیم به صورت مربع کامل بنویسیم:

$$1 \pm \sin 2\alpha = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2$$

۱۰۰

نکته

$$1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2, \quad 1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$$

تست
□□□□

ساده شده عبارت $A = \sqrt{1 - \sin 1^\circ} + \sqrt{1 + \sin 1^\circ}$ کدام است؟

$\cos 1^\circ$ (۴)

$\sin 1^\circ$ (۳)

$2 \cos 5^\circ$ (۲)

$2 \sin 5^\circ$ (۱)

راه حل ابتدا توجه کنید که $1 - \sin 1^\circ = (\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2$. به همین ترتیب $1 + \sin 1^\circ = (\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2$. بنابراین

$$A = \sqrt{(\sin 5^\circ - \cos 5^\circ)^2} + \sqrt{(\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2} = |\sin 5^\circ - \cos 5^\circ| + |\sin 5^\circ + \cos 5^\circ|$$

با توجه به اینکه $\cos 5^\circ > \sin 5^\circ > 0$ نتیجه می شود $A = -\sin 5^\circ + \cos 5^\circ + \sin 5^\circ + \cos 5^\circ = 2 \cos 5^\circ$

تست ۱۳ اگر $\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} = 7 - 4\sqrt{3}$ مقدار $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ کدام است؟

(۱) $\pm(\frac{2 - \sqrt{3}}{2})$ (۲) $\pm(\frac{3 - \sqrt{2}}{2})$ (۳) $\pm(2 - \sqrt{2})$ (۴) $\pm(2 - \sqrt{3})$

راه حل توجه کنید که $\frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{1 + 2 \sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = 7 - 4\sqrt{3}$

از طرف دیگر $(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x})^2 = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \pm(2 - \sqrt{3})$ در نتیجه

مجموع و تفاضل تانژانت و کتانژانت زاویه α را می توانیم بر حسب نسبت های مثلثاتی 2α بنویسیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha$$

۱۰۱

نکته

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

تست ۱۴ مقدار $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

راه حل می توان نوشت $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = \frac{2}{\sin 15^\circ} = \frac{2}{\sin(18^\circ - 3^\circ)} = \frac{2}{\sin 3^\circ} = 4$

توجه کنید که

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos 2\alpha$$

۱۰۲

نکته

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

تست ۱۵ اگر $\cot x = \frac{1}{2}$ مقدار $\frac{1 + 2 \cos 2x}{\sin 2x}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

راه حل توجه کنید که $\tan x = \frac{1}{\cot x} = 2$ پس $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{3}{5}$ و $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5}$ در نتیجه $\frac{1 + 2 \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1 - \frac{6}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{1}{4}$

توجه کنید که

$$\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2$$

$$= 1 - 3 \left(\frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \right) = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{2} \right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

۱۰۳

نکته

$$\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha, \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

تست ۱۶

اگر $\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha = \frac{9}{16}$ مقدار $\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha}$ کدام است؟

$-\frac{3}{8}$ (۱) $-\frac{5}{8}$ (۲) $-\frac{11}{24}$ (۳) $-\frac{7}{8}$ (۴)

$\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos 4\alpha = -\frac{3}{4}$

$\frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{8}(-\frac{3}{4})}{-\frac{3}{4}} = -\frac{11}{24}$

بنابراین

توجه کنید که

راه حل

دست گرمی

۹۱- اگر $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

$-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

۹۲- حاصل $\frac{1 - 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - x)}{\cos x}$ کدام است؟

$\sin x$ (۱) $2 \sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $2 \cos x$ (۴)

۹۳- مقدار $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ}$ کدام است؟

1 (۱) 9 (۲) 16 (۳) 4 (۴)

۹۴- مقدار $\cos \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$ (۱) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2}$ (۴)

۹۵- مقدار $3 \cos^2 105^\circ + \sin^2 105^\circ$ کدام است؟

$1 + \sqrt{3}$ (۱) $\frac{4 - \sqrt{3}}{2}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ (۴)

۹۶- مقدار $\tan 22/5^\circ - \cot 22/5^\circ$ کدام است؟

1 (۱) -1 (۲) 2 (۳) -2 (۴)

۹۷- ساده شده عبارت $\frac{\tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ}$ کدام است؟

$\frac{1}{8}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۱)

آزمون ۵۵

سؤال	گام
۵۴۱	۹۷
۵۴۲	۹۷ ۲۷۶
۵۴۳	۹۴ ۹۷
۵۴۴	۷۵ ۸۲ ۹۷
۵۴۵	۸۲ ۹۷ ۱۰۱
۵۴۶	۹۷ ۹۹
۵۴۷	۹۷
۵۴۸	۹۷ ۲۷۶
۵۴۹	۱۰۳
۵۵۰	۸۲ ۹۷ ۲۷۶

۵۴۱- حاصل $\frac{\cos 2x}{1 - \tan^2 x}$ برابر کدام است؟

$$\cos^2 x \quad (1) \quad \sin^2 x \quad (2) \quad \frac{1}{\cos^2 x} \quad (3) \quad \frac{1}{\sin^2 x} \quad (4)$$

۵۴۲- مقدار $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (4)$$

۵۴۳- مقدار $\cos 15^\circ \sin 75^\circ$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{3}+2}{4} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}-2}{4} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{3}+1}{4} \quad (4)$$

۵۴۴- اگر $0 < \theta < \pi$ و $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟

$$-\frac{24}{25} \quad (1) \quad \frac{24}{25} \quad (2) \quad \frac{12}{25} \quad (3) \quad -\frac{12}{25} \quad (4)$$

۵۴۵- اگر $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad 8 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 16 \quad (4)$$

۵۴۶- اگر $\cot x = 3$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$ کدام است؟

$$3 \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad \frac{1}{9} \quad (4)$$

۵۴۷- حاصل $\frac{1 - \cos 4^\circ}{\sin 4^\circ}$ برابر کدام است؟

$$\sin 2^\circ \quad (1) \quad \cos 2^\circ \quad (2) \quad \tan 2^\circ \quad (3) \quad \cot 2^\circ \quad (4)$$

۵۴۸- مقدار $\frac{\cos 8^\circ}{\cos 4^\circ - \sin 4^\circ} - \sin 4^\circ$ برابر کدام است؟

$$\sin 4^\circ \quad (1) \quad \cos 4^\circ \quad (2) \quad -\cos 4^\circ \quad (3) \quad -\sin 4^\circ \quad (4)$$

۵۴۹- اگر $\sin 2x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $A = \sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

$$\frac{7}{9} \quad (1) \quad \frac{5}{6} \quad (2) \quad \frac{8}{9} \quad (3) \quad \frac{17}{18} \quad (4)$$

۵۵۰- اگر $\frac{\sin^3 x}{2 \sin x - \sin 2x} = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

$$-\frac{1}{9} \quad (1) \quad \frac{1}{9} \quad (2) \quad -\frac{7}{9} \quad (3) \quad \frac{7}{9} \quad (4)$$

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۲)

آزمون ۵۶

سؤال	گام
۵۵۱	۹۴ ۹۵ ۹۷
۵۵۲	۹۷
۵۵۳	۹۴ ۹۷
۵۵۴	۱۰۲
۵۵۵	۹۷
۵۵۶	۹۴ ۹۷
۵۵۷	۷۵ ۱۰۳
۵۵۸	۹۴ ۹۷
۵۵۹	۹۴ ۹۷
۵۶۰	۹۴ ۹۷ ۱۰۱

۵۵۱- مقدار $\frac{\sin 78^\circ}{\sin 86^\circ} - \frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۵۵۲- مقدار $\sin \frac{\pi}{12} (2 \cos^2 \frac{\pi}{24} - 1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۵۵۳- مقدار $\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}+2}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}-2}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$

۵۵۴- اگر $\tan x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin 2x + \cos 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{5}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۵۵۵- اگر $\frac{1}{\cos \theta} = 10$ ، مقدار $\cos 2\theta$ کدام است؟ $(\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$

- (۱) $-\frac{71}{81}$ (۲) $-\frac{79}{81}$ (۳) $-\frac{7}{9}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۵۵۶- اگر $\cos 3^\circ = a$ ، مقدار $\sin 84^\circ$ برحسب a کدام است؟

- (۱) $\frac{1-a^2}{2}$ (۲) $\frac{a^2-1}{2}$ (۳) $2a^2-1$ (۴) $1-2a^2$

۵۵۷- اگر $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{2}{3}$ ، و انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۵۵۸- مقدار $\frac{\sin 50^\circ \sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۵۵۹- اگر $x = \frac{\pi}{24}$ ، مقدار $\cos 10^\circ x \cos 2x$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۵۶۰- مقدار $\frac{\tan 50^\circ - \tan 40^\circ}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\tan 10^\circ$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\cot 10^\circ$

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۳)

آزمون ۵۷

سؤال	گام
۵۶۱	۹۷
۵۶۲	۹۷
۵۶۳	۷۵ ۸۲ ۹۷
۵۶۴	۸۲ ۹۷ ۱۰۱
۵۶۵	۹۷
۵۶۶	۹۷ ۲۷۵ ۲۷۶ ۲۸۱
۵۶۷	۹۴ ۹۷
۵۶۸	۹۴ ۹۷ ۹۹
۵۶۹	۹۷
۵۷۰	۸۲ ۱۰۳

۵۶۱- ساده شده عبارت $A = \sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4} \sin 4x$ (۲) $\frac{1}{2} \sin 2x$ (۳) $\frac{1}{4} \cos 4x$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 2x$

۵۶۲- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵۶۳- اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟ $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$

- (۱) $\frac{29}{7}$ (۲) $\frac{24}{7}$ (۳) $\frac{23}{7}$ (۴) $\frac{18}{7}$

۵۶۴- اگر $2 \sin x = 5 \cos x$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{10}{29}$ (۳) $\frac{20}{29}$ (۴) $\frac{1}{29}$

۵۶۵- اگر $\sin x = 4 \sin y$ و $\cos y = 3 \cos x$ ، مقدار $\frac{\sin 2x}{\sin 2y}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۵۶۶- اگر $\sin x - \cos x = \frac{4}{3}$ ، مقدار عبارت $A = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{25}{24}$ (۲) $-\frac{25}{24}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۶۷- مقدار $\frac{\sin^2 11^\circ - \sin^2 2^\circ}{\sin 5^\circ}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۵۶۸- حاصل $\frac{1 + \cos 40^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\cos 2^\circ$ (۲) $2 \cos 2^\circ$ (۳) $4 \cos 2^\circ$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 2^\circ$

۵۶۹- اگر $\cos a \cos 2a = \frac{1}{16 \sin a}$ ، مقدار $\cos 8a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵۷۰- اگر $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{4}{5}$ ، مقدار $\cos^2 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{60}$ (۲) $\frac{59}{60}$ (۳) $\frac{13}{15}$ (۴) $\frac{11}{15}$

سینوس و کسینوس زاویه 2α (۴)

آزمون ۵۸

- ۵۷۱- مقدار $\tan 75^\circ - \tan 15^\circ$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$
- ۵۷۲- اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = 2$ ، مقدار $\tan x + 2 \cot x$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-3\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$
- ۵۷۳- مقدار $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}}}$ کدام است؟
 (۱) $2 \sin \frac{\pi}{32}$ (۲) $2 \cos \frac{\pi}{32}$ (۳) $\sin \frac{\pi}{32}$ (۴) $\cos \frac{\pi}{32}$
- ۵۷۴- مقدار $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \cos^4 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$
- ۵۷۵- مقدار $\tan^2 \frac{\pi}{8} + \cot^2 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸
- ۵۷۶- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2}$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{15}{4}$ (۳) $-\frac{7}{4}$ (۴) $-\frac{11}{4}$
- ۵۷۷- حاصل $1 + \frac{\cos 2^\circ}{\sqrt{2} \cos 1^\circ + 1}$ چند برابر $\sin 8^\circ$ است؟
 (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$
- ۵۷۸- اگر $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ جواب‌های معادله $x^2 - (m+3)x + 2m - 1 = 0$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$
- ۵۷۹- اگر $\tan^2 x + \cot^2 x = 5$ ، مقدار $\sin^2 2x$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{8}{9}$
- ۵۸۰- ساده شده عبارت $\frac{1 + \sin 4^\circ - \cos 4^\circ}{1 + \sin 4^\circ + \cos 4^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\tan 2^\circ$ (۲) $\cot 2^\circ$ (۳) $\tan 4^\circ$ (۴) $\cot 4^\circ$

سؤال	گام
۵۷۱	۹۵ ۹۷ ۱۰۱
۵۷۲	۷۵ ۹۹
۵۷۳	۷۵ ۹۹
۵۷۴	۱۰۳
۵۷۵	۹۷ ۱۰۱ ۲۷۵
۵۷۶	۷۵ ۱۰۱ ۲۷۶
۵۷۷	۹۴ ۹۷ ۲۷۶
۵۷۸	۸۲ ۹۷ ۱۰۳ ۲۹۶
۵۷۹	۹۷ ۱۰۱ ۲۷۵
۵۸۰	۸۲ ۹۷

درس هشتم: تانژانت مجموع دو زاویه

۱۰۴

تانژانت مجموع دو زاویه

به کمک روابط مربوط به سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه می‌توانیم تانژانت مجموع دو زاویه را بر حسب تانژانت‌های این دو زاویه حساب کنیم (البته، به شرطی که تانژانت‌ها معنی داشته باشند). در حقیقت،

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

اگر صورت و مخرج کسر آخر را بر $\cos \alpha \cos \beta$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

اگر در این تساوی به جای β قرار دهیم $-\beta$ ، چون $\tan(-\beta) = -\tan \beta$ ، نتیجه می‌شود

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

نکته

اگر α و β دو زاویه باشند، آن‌گاه (به شرطی که عبارت‌ها بامعنی باشند)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

تست

اگر $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ و $\tan \beta = -\frac{1}{2}$ ، مقدار $\tan(\alpha-\beta)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{6}$

با توجه به تساوی $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ ، مقدار $\tan(\alpha-\beta)$ را به‌دست می‌آوریم

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{1}{3} - (-\frac{1}{2})}{1 + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

راه‌حل

تست

اگر $\tan a = \frac{1}{3}$ و $\tan b = \frac{1}{2}$ ، مقدار $a+b$ برابر کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{7\pi}{4}$ (۴) $\frac{11\pi}{4}$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = 1$$

توجه کنید که

راه‌حل

بنابراین $a+b$ می‌تواند برابر $\frac{5\pi}{4}$ باشد، تانژانت بقیه گزینه‌ها برابر -۱ است.

تست

اگر $\tan(a+\frac{b}{2}) = 3$ و $\tan(a-\frac{b}{2}) = 2$ ، مقدار $\cot b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸

فرض کنید $\alpha = a - \frac{b}{2}$ و $\beta = a + \frac{b}{2}$. در این صورت $b = \beta - \alpha$ و در نتیجه

$$\tan b = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3 - 2}{1 + 3 \times 2} = \frac{1}{7} \Rightarrow \cot b = 7$$

راه‌حل

تست
 □□□□

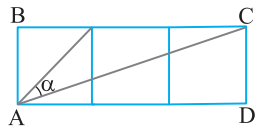
 ۴ اگر $\tan(x + \frac{\pi}{6}) = 3$ ، مقدار $\tan(x - \frac{\pi}{12})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) -1 (۳) 1 (۴) $-\frac{1}{2}$

راه حل

توجه کنید که $x - \frac{\pi}{12} = (x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{4}$ ، بنابراین $\tan(x - \frac{\pi}{12}) = \tan((x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan(x + \frac{\pi}{6}) - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan(x + \frac{\pi}{6}) \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{3 - 1}{1 + 3 \times 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

تست
 □□□□

 ۵ شکل مقابل از سه مربع به طول ضلع ۱ درست شده است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟


- (۱) 1 (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

راه حل

توجه کنید با نمادگذاری شکل مقابل $\alpha = \theta - \beta$ ، $\tan \beta = \frac{1}{3}$ و $\tan \theta = 1$. پس

$$\tan \alpha = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

تست
 □□□□

 ۶ حاصل عبارت $A = \tan 1^\circ + \tan 3^\circ + \tan 1^\circ \tan 3^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) -1 (۴) $-\frac{1}{2}$

راه حل

چون عبارت‌های $\tan \alpha + \tan \beta$ و $\tan \alpha \tan \beta$ در عبارت A وجود دارند، از بسط $\tan(\alpha + \beta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \xrightarrow[\beta = 3^\circ]{\alpha = 1^\circ} \tan 4^\circ = \frac{\tan 1^\circ + \tan 3^\circ}{1 - \tan 1^\circ \tan 3^\circ}$$

$$1 = \frac{\tan 1^\circ + \tan 3^\circ}{1 - \tan 1^\circ \tan 3^\circ} \Rightarrow 1 - \tan 1^\circ \tan 3^\circ = \tan 1^\circ + \tan 3^\circ \Rightarrow 1 = \tan 1^\circ + \tan 3^\circ + \tan 1^\circ \tan 3^\circ$$

بنابراین $A = 1$.

تست
 □□□□

 ۷ مقدار عبارت $A = (1 + \cot 72^\circ)(1 - \tan 18^\circ)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) 4

راه حل

توجه کنید که

$$A = (1 + \cot(90^\circ - 18^\circ))(1 - \tan(18^\circ - 72^\circ)) = (1 + \tan 18^\circ)(1 + \tan 72^\circ) = 1 + \tan 18^\circ + \tan 72^\circ + \tan 18^\circ \tan 72^\circ$$

$$\tan 4^\circ = \tan(18^\circ + 72^\circ) = \frac{\tan 18^\circ + \tan 72^\circ}{1 - \tan 18^\circ \tan 72^\circ} = 1 \Rightarrow \tan 18^\circ + \tan 72^\circ = 1 - \tan 18^\circ \tan 72^\circ$$

از طرف دیگر،

$$A = 1 + 1 + 2 = 4 \text{ پس } \tan 18^\circ + \tan 72^\circ + \tan 18^\circ \tan 72^\circ = 1$$

نکته

اگر در رابطه $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ قرار دهیم $\alpha = \beta$ ، به دست می‌آید $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

به شرطی که تانژانت‌ها بامعنی باشند، $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

تست

اگر $\sin x - 2 \cos x = 0$ ، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

$$\sin x - 2 \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 2 \cos x \Rightarrow \tan x = 2$$

ابتدا توجه کنید که

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \times 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

را حل

تست

اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = 5 \Rightarrow \tan^2 x = 4 \Rightarrow \tan x = \pm 2$$

مقدار $\tan x$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{4}{3}$$

در نتیجه، چون انتهای کمان x در ربع چهارم است، پس $\tan x = -2$. بنابراین

را حل

تست

اگر α زاویه‌ای حاده باشد و $\tan 2\alpha = \frac{3}{4}$ ، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (۳) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

ابتدا توجه کنید که $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ و چون $\tan 2\alpha = \frac{3}{4}$ ، پس

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{3}{4} \Rightarrow 8 \tan \alpha = 3 - 3 \tan^2 \alpha \Rightarrow 3 \tan^2 \alpha + 8 \tan \alpha - 3 = 0 \Rightarrow (3 \tan \alpha - 1)(\tan \alpha + 3) = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \alpha = -3 \xrightarrow{\text{حاده است}} \tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad \text{پس} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{10} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10} \quad \text{و} \quad \cot \alpha = 3$$

به این ترتیب

را حل

اگر در رابطه $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ قرار دهیم $\alpha = \frac{\pi}{4}$ و $\beta = x$ ، چون $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ ، نتیجه می‌شود

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $-x$ ، به دست می‌آید

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

۱۰۵

نکته

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

به شرطی که تانژانت‌ها بامعنی باشند.

تست

حاصل عبارت $B = \frac{\cot 75^\circ + 1}{\cot 75^\circ - 1}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

ابتدا توجه کنید که $\cot 75^\circ = \tan 15^\circ$. چون $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ ، پس

$$B = -\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = -\tan(45^\circ + 15^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

را حل

دست گرمی

۹۸- اگر $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = 7$ و x زاویه حاده باشد، مقدار $\sin x$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱) $\frac{4}{5}$

۹۹- مقدار $\tan 285^\circ$ کدام است؟

(۴) $-1 - \sqrt{3}$

(۳) $1 - \sqrt{3}$

(۲) $-2 - \sqrt{3}$

(۱) $2 - \sqrt{3}$

۱۰۰- اگر $\tan(a+b) = 3$ و $\tan(a-b) = -4$ ، مقدار $\cot 2b$ کدام است؟

(۴) -13

(۳) $-\frac{1}{13}$

(۲) $-\frac{7}{11}$

(۱) $-\frac{11}{7}$

۱۰۱- اگر $\cot(\alpha + 35^\circ) = 2$ ، مقدار $\tan(10^\circ - \alpha)$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{4}$

(۳) ۴

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) ۳

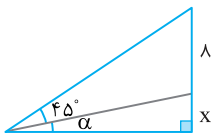
۱۰۲- در شکل مقابل $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ، مقدار x کدام است؟

(۱) $1/5$

(۲) ۲

(۳) $1/6$

(۴) $2/5$



تانژانت مجموع دو زاویه (۱)

آزمون ۵۹

سؤال	گام
۵۸۱	۱۰۵
۵۸۲	۱۰۴
۵۸۳	۱۰۴
۵۸۴	۱۰۴ ۲۹۶
۵۸۵	۱۰۵
۵۸۶	۱۰۵
۵۸۷	۱۰۴
۵۸۸	۹۲ ۱۰۴
۵۸۹	۱۰۴
۵۹۰	۱۰۴

۵۸۱- مقدار $\tan \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $2-\sqrt{3}$ (۲) $3-\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{3+\sqrt{2}}{4}$

۵۸۲- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ و $\tan \beta = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{7}$ (۲) $\frac{6}{7}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۵۸۳- اگر $\tan \alpha = m$ ، $\tan \beta = \frac{2}{m}$ و $\tan(\alpha+\beta) = 3 - \frac{2}{m}$ ، مقدار $\tan(\alpha-\beta)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{-7}{9}$ (۴) $\frac{-5}{9}$

۵۸۴- اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ جواب‌های معادله $x^2 - 5x - 2 = 0$ باشند، مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

- (۱) -5 (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) 5

۵۸۵- حاصل عبارت $A = \frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۵۸۶- اگر $\tan(\delta^\circ + \alpha) = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\tan(\delta^\circ + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

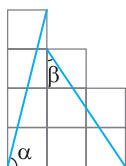
۵۸۷- مقدار $(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 25^\circ)$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۵۸۸- در مثلث ABC ، $\cot \hat{A} = 3$ و $\cot \hat{B} = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\tan \hat{C}$ کدام است؟

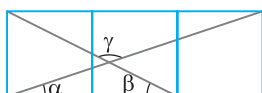
- (۱) -6 (۲) 7 (۳) 6 (۴) -7

۵۸۹- در شکل مقابل طول ضلع هر یک از مربع‌ها برابر یک واحد است. مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟



- (۱) $\frac{14}{11}$ (۲) $\frac{-14}{5}$ (۳) $\frac{13}{11}$ (۴) $\frac{-13}{5}$

۵۹۰- شکل مقابل از سه مربع به طول ضلع ۱ درست شده است. اندازه γ کدام است؟

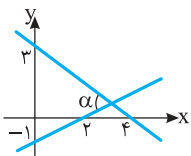


- (۱) 105° (۲) 120° (۳) 135° (۴) 150°

تانژانت مجموع دو زاویه (۲)

آزمون ۶۰

- ۵۹۱- مقدار $\tan 105^\circ$ کدام است؟
 (۱) $2-\sqrt{3}$ (۲) $-2-\sqrt{3}$ (۳) $1-\sqrt{3}$ (۴) $-1-\sqrt{3}$
- ۵۹۲- اگر $\tan \alpha = 2$ و $\tan(\alpha - \beta) = 3$ ، مقدار $\tan \beta$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) -1 (۳) $\frac{5}{7}$ (۴) $-\frac{1}{7}$
- ۵۹۳- اگر $\tan(x - \frac{\pi}{4}) = 4$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{5}{3}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{3}{5}$
- ۵۹۴- اگر $\cot \alpha$ و $\cot \beta$ جوابهای معادله $x^2 - 6x - 2 = 0$ باشند، مقدار $\cot(\alpha + \beta)$ کدام است؟
 (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -2 (۳) 2 (۴) $\frac{1}{2}$
- ۵۹۵- مقدار $\frac{\tan 50^\circ - \cot 50^\circ}{1 + \tan 50^\circ \cot 50^\circ}$ برابر کدام است؟
 (۱) $\tan 10^\circ$ (۲) $\tan 20^\circ$ (۳) $\cot 10^\circ$ (۴) $\cot 40^\circ$
- ۵۹۶- اگر $\tan \alpha \tan \beta = \frac{-1}{3}$ و $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟ (α زاویه حاده‌ای است).
 (۱) $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ (۲) $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ (۳) $\frac{2+\sqrt{7}}{6}$ (۴) $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$
- ۵۹۷- اگر $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ ، مقدار عبارت $A = (1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta)$ کدام است؟
 (۱) 1 (۲) 2 (۳) -1 (۴) -2
- ۵۹۸- اگر $2x + 3y = 90^\circ$ ، $\tan x = 2$ و $\tan y = 3$ ، مقدار $\tan(\delta x + \gamma y)$ کدام است؟
 (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{6}$
- ۵۹۹- در شکل مقابل مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟
 (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4
- ۶۰۰- اگر $\tan x - \cot x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\tan 4x$ کدام است؟
 (۱) $\frac{8}{15}$ (۲) $\frac{3}{10}$ (۳) $-\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{9}{7}$



سؤال	گام
۵۹۱	۱۰۵
۵۹۲	۱۰۴
۵۹۳	۱۰۵
۵۹۴	۱۰۴ ۲۹۶
۵۹۵	۹۴ ۱۰۴
۵۹۶	۱۰۴
۵۹۷	۱۰۴
۵۹۸	۹۲ ۱۰۴
۵۹۹	۱۰۴
۶۰۰	۱۰۱ ۱۰۴

تانژانت مجموع دو زاویه (۳)

آزمون ۶۱

سؤال	گام
۶۰۱	۱۰۵
۶۰۲	۷۵ ۱۰۴
۶۰۳	۷۵ ۱۰۵
۶۰۴	۷۵ ۱۰۴
۶۰۵	۱۰۴ ۱۰۵
۶۰۶	۱۰۴
۶۰۷	۱۰۴
۶۰۸	۹۵ ۱۰۴
۶۰۹	۱۰۴
۶۱۰	۱۰۴

۶۰۱- مقدار $\tan \frac{5\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $2+\sqrt{3}$ (۲) $3+\sqrt{2}$ (۳) $2+\sqrt{2}$ (۴) $3+\sqrt{3}$

۶۰۲- اگر $\tan a - \tan b = 2$ و $\cot a \cot b = 3$ ، مقدار $\cot(a-b)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{3}{2}$

۶۰۳- اگر $\cos x = \frac{3}{5}$ و x زاویه‌ای حاده باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + x)$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) -۷ (۳) $\frac{1}{7}$ (۴) $-\frac{1}{7}$

۶۰۴- اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2} < y < \pi$ ، $\sin x = \frac{3}{5}$ و $\sin y = \frac{5}{13}$ ، مقدار $\tan(x+y)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{23}{63}$ (۲) $\frac{20}{63}$ (۳) $\frac{17}{63}$ (۴) $\frac{16}{63}$

۶۰۵- اگر $\tan(x + \frac{\pi}{4}) = 2$ ، مقدار $\tan(x + \frac{\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{6-5\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{6+5\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{6+5\sqrt{3}}{13}$ (۴) $\frac{6-5\sqrt{3}}{13}$

۶۰۶- اگر $\alpha - \beta = \frac{7\pi}{4}$ و $\tan \alpha \tan \beta = -6$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) ۲ یا -۳ (۲) -۲ یا ۳ (۳) ۲ یا ۳ (۴) ۴ یا ۴

۶۰۷- حاصل $\tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۰۸- اگر $\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$ و $\tan \alpha \tan \beta = -3$ ، مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

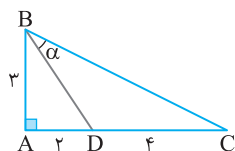
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۶۰۹- اگر $\tan \alpha = 3$ و $\tan(\alpha + \beta) = -1$ ، مقدار $\tan 2\beta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۶۱۰- در شکل مقابل مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$



تانژانت مجموع دو زاویه (۴)

آزمون ۶۲

۶۱۱- کدام یک برابر $\cot(\alpha+\beta)$ است؟

$$(۱) \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha - \cot \beta} \quad (۲) \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \quad (۳) \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha - \cot \beta} \quad (۴) \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

۶۱۲- اگر $\cot a - \cot b = 2$ و $\tan a \tan b = 3$ ، مقدار $\tan(a-b)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{2}{3} \quad (۲) -\frac{2}{3} \quad (۳) \frac{3}{2} \quad (۴) -\frac{3}{2}$$

۶۱۳- اگر $\tan(\alpha+\beta) = -2$ و $\tan(\alpha-\beta) = 3$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{7} \quad (۲) \frac{5}{7} \quad (۳) -\frac{1}{7} \quad (۴) -\frac{5}{7}$$

۶۱۴- مقدار $\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4}) + \tan(x-\frac{\pi}{4})}{\cot(x+\frac{\pi}{4}) + \cot(x-\frac{\pi}{4})}$ کدام است؟

$$(۱) 2 \quad (۲) 1 \quad (۳) -2 \quad (۴) -1$$

۶۱۵- اگر $\tan(\alpha+\frac{5\pi}{36}) = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\tan(\frac{\pi}{9}-\alpha)$ کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{3} \quad (۲) \frac{2}{3} \quad (۳) \frac{3}{4} \quad (۴) \frac{4}{5}$$

۶۱۶- مقدار $\tan 40^\circ + 2 \tan 10^\circ$ کدام است؟

$$(۱) \tan 50^\circ \quad (۲) 2 \tan 50^\circ \quad (۳) \frac{\tan 50^\circ}{2} \quad (۴) \frac{\tan 50^\circ}{3}$$

۶۱۷- مقدار $\tan 20^\circ - \tan 80^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 80^\circ$ کدام است؟

$$(۱) \sqrt{3} \quad (۲) -\sqrt{3} \quad (۳) -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۴) \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۶۱۸- اگر $\frac{1}{2} \leq \tan \alpha < 1$ ، حداقل مقدار $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

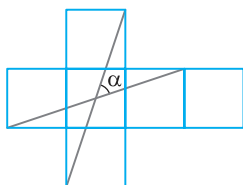
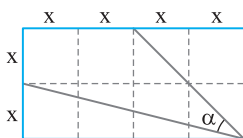
$$(۱) 2 \quad (۲) 3 \quad (۳) 4 \quad (۴) 5$$

۶۱۹- در شکل مقابل مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

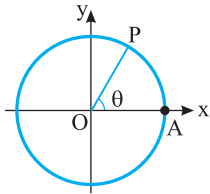
$$(۱) \frac{1}{2} \quad (۲) \frac{2}{5} \quad (۳) \frac{3}{5} \quad (۴) \frac{3}{4}$$

۶۲۰- شکل مقابل از شش مربع به طول ضلع ۱ درست شده است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{3} \quad (۲) \frac{2}{3} \quad (۳) 1 \quad (۴) \frac{4}{3}$$



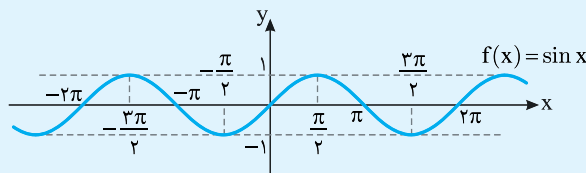
سؤال	گام
۶۱۱	۱۰۴
۶۱۲	۱۰۴
۶۱۳	۱۰۴
۶۱۴	۱۰۵
۶۱۵	۱۰۵
۶۱۶	۱۰۴
۶۱۷	۱۰۴
۶۱۸	۱۰۵
۶۱۹	۱۰۴
۶۲۰	۹۴ ۱۰۴



فرض کنید در دایره مثلثاتی شعاع OA را به اندازه θ رادیان دوران دهیم. در این صورت، مسافتی را که نقطه A روی دایره طی کرده است (طول AP) با در نظر گرفتن علامت θ با x نشان می‌دهیم، یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد، x را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد، x را منفی می‌گیریم. در این صورت $x = \theta$ ، که در اینجا x عددی حقیقی است (معلوم است که اگر $\theta = 0$ ، آن گاه $x = 0$). به این ترتیب می‌توانیم سینوس عدد حقیقی x را برابر با $\sin \theta$ تعریف کنیم. به همین ترتیب می‌توانیم کسینوس عدد حقیقی x را برابر با $\cos \theta$ تعریف کنیم. به تابعی که به عدد حقیقی x سینوس آن را نسبت می‌دهد **تابع سینوس** و به تابعی که به عدد حقیقی x کسینوس آن را نسبت می‌دهد **تابع کسینوس** می‌گویند. این تابع‌ها را به ترتیب با $\sin$ و $\cos$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که دامنه این تابع‌ها مجموعه اعداد حقیقی است.

ویژگی‌های تابع سینوس

نمودار تابع سینوس در شکل زیر رسم شده است.



(۱) از روی نمودار معلوم است که $R_f = [-1, 1]$.

(۲) صفرهای تابع f نقطه‌های با طول $x = k\pi$ هستند، که در این جا k هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

(۳) کمترین مقدار تابع f برابر با -۱ است که در نقطه‌های با طول $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۴) بیشترین مقدار تابع f برابر با ۱ است که در نقطه‌های با طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۵) از روی نمودار معلوم است که تابع f غیریکنواست، ولی روی هر بازه به صورت $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و روی هر بازه به صورت

$[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است ($k \in \mathbb{Z}$).

اگر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2a - b \sin x$ محور عرض‌ها را در نقطه به عرض ۴ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{6}$ قطع

تست

کند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

نمودار تابع از نقاط $(0, 4)$ و $(\frac{\pi}{6}, 0)$ عبور می‌کند. پس

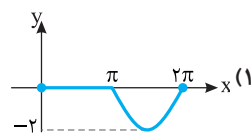
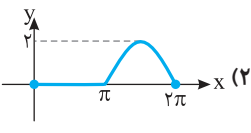
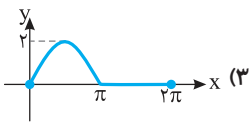
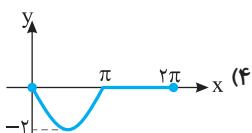
راه‌حل

$$f(0) = 4 \Rightarrow 2a - b \sin 0 = 4 \Rightarrow a = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 2a - b \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow 2a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 4a = 8$$

بنابراین $a+b=10$.

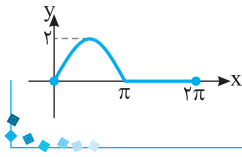
نمودار تابع $f(x) = \sin x + |\sin x|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

تست



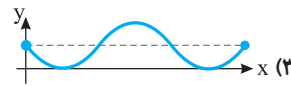
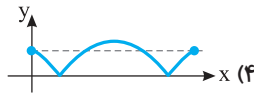
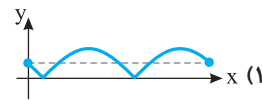
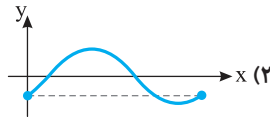
راه حل

توجه کنید که اگر $0 \leq x \leq \pi$ ، آن گاه $\sin x \geq 0$ ، پس $f(x) = \sin x + \sin x = 2 \sin x$ از طرف دیگر، اگر $\pi < x \leq 2\pi$ ، آن گاه $\sin x \leq 0$ ، در نتیجه $f(x) = \sin x - \sin x = 0$. بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است.



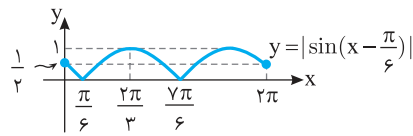
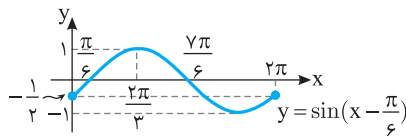
تست

نمودار تابع $y = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



راه حل

ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ به دست آید. سپس قرینه قسمت‌هایی را که پایین محور x هاست، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که پایین محور x است، حذف می‌کنیم، تا نمودار تابع $y = |\sin(x - \frac{\pi}{6})|$ به دست آید.



تست

برد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$ و دامنه $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ کدام است؟

(۴) $[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}]$

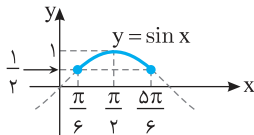
(۳) $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

(۲) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$

(۱) $[\frac{1}{3}, 1]$

راه حل

ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع $y = \sin x$ معلوم می‌شود که



$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq \sin x + 2 \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin x + 2} \leq \frac{2}{5} \Rightarrow R_f = [\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$$

تست

برد تابع f با ضابطه $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ و دامنه $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

(۴) $[-\frac{1}{4}, 1]$

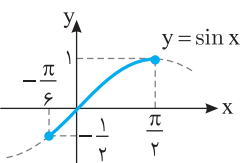
(۳) $[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

(۲) $[-\frac{1}{4}, 0]$

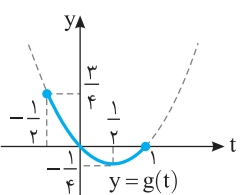
(۱) $[0, 2]$

راه حل

ابتدا توجه کنید که از روی نمودار تابع $y = \sin x$ معلوم می‌شود که $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$ در نتیجه $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.



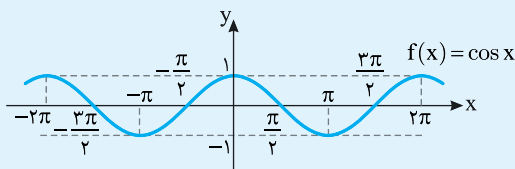
بنابراین اگر فرض کنیم $\sin x = t$ ، باید برد تابع $g(t) = t^2 - t$ را با دامنه $[-\frac{1}{2}, 1]$ پیدا کنیم. از روی نمودار



این تابع معلوم می‌شود که $R_g = [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

ویژگی‌های تابع کسینوس

نمودار تابع کسینوس در شکل زیر رسم شده است:



(۱) از روی نمودار معلوم است که $R_f = [-1, 1]$.

(۲) صفرهای تابع f نقطه‌های با طول $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ هستند، که در این جا k هر عدد صحیحی می‌تواند باشد.

(۳) کمترین مقدار تابع f برابر با -1 است که در نقطه‌های با طول $x = (2k+1)\pi$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۴) بیشترین مقدار تابع f برابر با 1 است که در نقطه‌های با طول $x = 2k\pi$ پیش می‌آید ($k \in \mathbb{Z}$).

(۵) از روی نمودار معلوم است که تابع f غیریکناوست، ولی روی هر بازه به صورت $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ اکیداً صعودی و روی هر بازه به صورت $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ اکیداً نزولی است ($k \in \mathbb{Z}$).

تست ۶

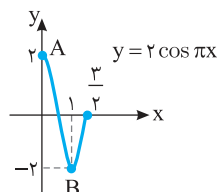
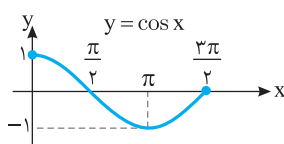
اگر A و B به ترتیب نقطه‌های ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = 2 \cos \pi x$ روی بازه $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$ باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{17}$

اگر در نمودار تابع $y = \cos x$ روی بازه $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$ طول نقطه‌ها را بر π تقسیم کنیم و عرض نقطه‌ها را در 2 ضرب کنیم، نمودار تابع f مانند شکل

زیر به دست می‌آید. بنابراین A نقطه $(0, 2)$ و B نقطه $(1, -2)$ است. پس

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{17}$$



تست ۷

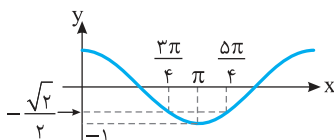
اگر $\cos x = \frac{2m+1}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ ، مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $[\frac{2\sqrt{2}-1}{2}, \frac{2\sqrt{2}+1}{2}]$ (۲) $[-\frac{5}{2}, -\frac{2\sqrt{2}+1}{2}]$ (۳) $[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}]$ (۴) $[-\frac{5}{2}, \frac{2\sqrt{2}-1}{2}]$

از روی نمودار تابع $y = \cos x$ در شکل زیر معلوم است که اگر $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ ، آن گاه $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < -\frac{1}{2}$. بنابراین

$$-1 \leq \frac{2m+1}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -4 \leq 2m+1 < -2\sqrt{2}$$

$$-5 \leq 2m < -2\sqrt{2}-1 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq m < -\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$$



تست



تابع $f(x) = -\cos 2x$ روی بازه $[a, 0]$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار a کدام است؟

$$-\pi \quad (۴)$$

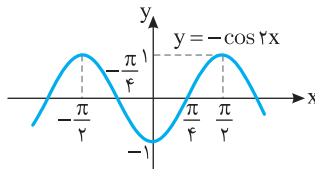
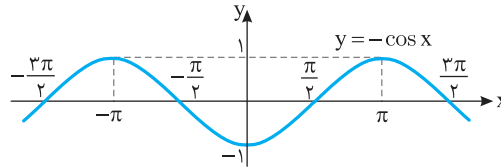
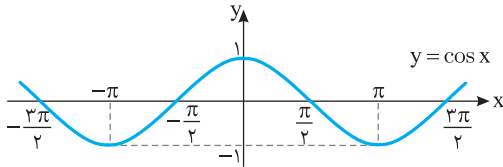
$$-\frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$-\frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

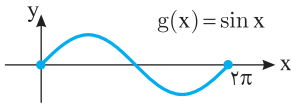
راه حل

اگر نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = -\cos x$ به دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y = -\cos 2x$ به دست می‌آید (شکل‌ها را ببینید). تابع f روی بازه $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{2}$ است.

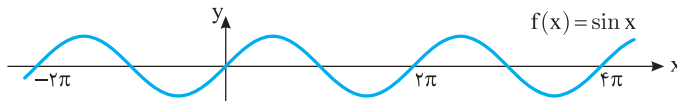


تابع متناوب

نمودار تابع $g(x) = \sin x$ روی بازه $[0, 2\pi]$ به شکل مقابل است.



نمودار تابع $f(x) = \sin x$ با دامنه $\mathbb{R}$ به شکل زیر است:



از روی این نمودار معلوم است که نمودار تابع f روی بازه‌های $[-2\pi, 0]$ ، $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ مانند هم است. در حقیقت، نمودار تابع f از تکرار نمودار تابع g به دست آمده است. اگر نمودار تابعی از آن به دست بیاید، می‌گوییم این تابع متناوب است. نمودار تابع f از تکرار نمودار تابع g به دست آمده و چون نمودار تابع g روی بازه‌ای به طول 2π رسم شده است، پس می‌گوییم دوره تناوب تابع f برابر 2π است.

۱۰۸

تعریف

فرض کنید عددی حقیقی و غیر صفر مانند T وجود دارد که به ازای هر $x \in D_f$ (۱) $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$ (۲) در این صورت می‌گوییم f تابعی متناوب است. کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که در شرایط فوق صدق می‌کند، دوره تناوب تابع f می‌نامیم.

تابع‌های $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ متناوب‌اند و دوره تناوب آن‌ها برابر 2π است، زیرا دامنه آن‌ها $\mathbb{R}$ است و

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع $y = a \sin(x+b) + c$ از روی نمودار تابع $y = \sin x$ به صورت زیر به دست می‌آید:

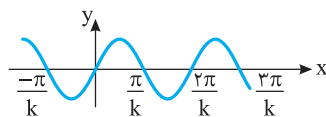
(۱) عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ را a برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y = a \sin x$ به دست بیاید.

(۲) نمودار تابع $y = a \sin x$ را b واحد در راستای محور x انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = a \sin(x+b)$ به دست بیاید.

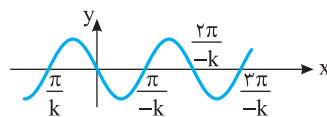
(۳) نمودار تابع $y = a \sin(x+b)$ را c واحد در راستای محور y انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = a \sin(x+b) + c$ به دست بیاید.

معلوم است که در هیچ یک از این مراحل دوره تناوب تابع عوض نمی‌شود، بنابراین دوره تناوب تابع $y = a \sin(x+b) + c$ هم برابر 2π است.

از طرف دیگر، برای رسم تابع $y = \sin kx$ ، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y = \sin x$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم، پس نمودار تابع $y = \sin x$ در راستای محور x منقبض یا منبسط می‌شود. پس دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ نیز از ضرب کردن $\frac{1}{|k|}$ در دوره تناوب تابع $y = \sin x$ به دست می‌آید (توجه کنید که چون دوره تناوب تابع عددی مثبت است و k می‌تواند منفی باشد، برای k قدر مطلق گذاشته‌ایم).



$$y = \sin kx, \quad k > 0$$



$$y = \sin kx, \quad k < 0$$

به این ترتیب، در مورد توابع $y = a \sin(bx+c)+d$ و $y = a \cos(bx+c)+d$ دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

۱۰۹

نکته

اگر a, b, c, d عددهایی حقیقی باشند که $a, b \neq 0$ ، آن‌گاه تابع‌های $y = a \sin(bx+c)+d$ و $y = a \cos(bx+c)+d$ متناوب‌اند و دوره تناوب آن‌ها برابر با $\frac{2\pi}{|b|}$ است. ماکزیمم مقدار این توابع برابر $|a|+d$ و مینیمم مقدار آن‌ها برابر $-|a|+d$ است.

تست

۹

دوره تناوب تابع $f(x) = 2 \cos(1-2x) + 5$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{4}$

دوره تناوب تابع $y = a \cos(bx+c)+d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است. بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با π .

را حل

تست

۱۰

دوره تناوب تابع $f(x) = -3 \sin \frac{\pi x}{4}$ دو برابر دوره تناوب تابع $g(x) = 2 \cos(\frac{\pi}{4} - ax)$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) فقط $\frac{\pi}{2}$ (۲) فقط 2π (۳) $\pm \frac{\pi}{2}$ (۴) $\pm 2\pi$

می‌دانیم دوره تناوب توابع $y = a \sin(bx+c)$ و $y = a \cos(bx+c)$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. پس $T_f = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{4}|} = 8$ ، $T_g = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{|a|}$

$$T_f = 2T_g \Rightarrow 8 = \frac{4\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\pi}{2}$$

بنابراین

را حل

تست

۱۱

اگر دوره تناوب تابع $f(x) = 2 - a^2 \sin ax$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، بیشترین مقدار تابع f کدام است؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۶۶ (۴) ۶۸

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. پس $\frac{2\pi}{|a|} = \frac{\pi}{4}$ در نتیجه $|a| = 8$. اگر $\sin ax = -1$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع f اتفاق می‌افتد که برابر $2 + a^2 = 66$ است.

را حل

تست

۱۲

دوره تناوب تابع $f(x) = \sin^2 2x - \cos^2 2x$ کدام است؟

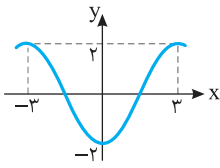
- (۱) 4π (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{2}$

توجه کنید که $f(x) = -\cos 4x$ ، بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

را حل

تست
 □□□□

۱۳

 بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \cos bx$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام می‌تواند باشد؟


(۲) $-\frac{\pi}{3}$

(۱) $\frac{\pi}{3}$

(۴) $-\frac{\pi}{6}$

(۳) $-\frac{2\pi}{3}$

راه‌حل

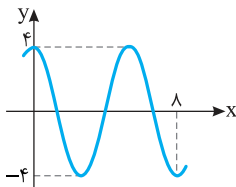
 با توجه به شکل $f(0) = -2$ پس $-2 = a \cos 0$ در نتیجه $a = -2$. از طرف دیگر، دوره تناوب تابع برابر ۶ است. پس

$$\frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{3}$$

 بنابراین مقدار ab می‌تواند $\frac{2\pi}{3}$ یا $-\frac{2\pi}{3}$ باشد.

تست
 □□□□

۱۴

 قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin((\frac{\delta}{\gamma} + bx)\pi)$ به صورت مقابل است. مقدار ab کدام است؟ ($b > 0$)


(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $-\frac{3}{2}$

(۴) $-\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{3}{2}$

راه‌حل

توجه کنید که

$$f(x) = a \sin(\pi bx + \frac{\delta\pi}{\gamma}) = a \cos \pi bx$$

 از طرف دیگر، $f(0) = 4$ پس $a \times 1 = 4$ ، در نتیجه $a = 4$. همچنین، دوره تناوب تابع $f(x) = 4 \cos \pi bx$ برابر است با $\frac{2}{|\pi b|} = \frac{2}{|b|}$. از روی نمودار معلوم

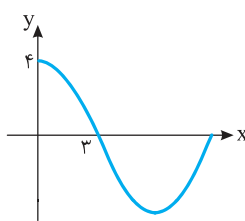
 می‌شود که $1/5$ برابر دوره تناوب تابع f برابر ۸ است. بنابراین

$$1/5 T = 8 \Rightarrow T = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{16}{3} = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{8} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{8}$$

 b باید مثبت باشد، در نتیجه مقدار ab برابر است با $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{2}$.

تست
 □□□□

۱۵

 قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 4 \cos \frac{\pi x}{a} + b$ به شکل مقابل است. دوره تناوب تابع f

 کدام است؟ ($a > 0$)

(۲) ۶

(۱) ۳

(۴) ۱۲

(۳) ۹

راه‌حل

با توجه به نمودار،

$$f(0) = 4 \Rightarrow 4 + b = 4 \Rightarrow b = 0, \quad f(3) = 0 \Rightarrow 4 \cos \frac{3\pi}{a} + 0 = 0 \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{a} = 0$$

 کوچک‌ترین زاویه مثبتی که کسینوس آن صفر می‌شود، زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان است. پس $\frac{3\pi}{a} = \frac{\pi}{2}$ در نتیجه $a = 6$. بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{6} = 12$$

$$\left| \frac{\pi}{a} \right| = \frac{\pi}{6}$$

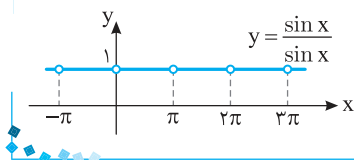
نکته

دوره تناوب برخی تابع‌ها را می‌توان از روی نمودار آن‌ها پیدا کرد.

تست ۱۶

دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) 4π



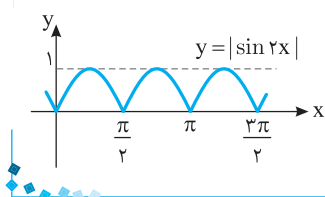
تابع f به ازای هر x که مضرب صحیح π باشد، تعریف نشده و به ازای بقیه x های حقیقی برابر تابع $y=1$ است. بنابراین نمودار آن به شکل روبه‌رو است. واضح است که دوره تناوب تابع f برابر π است.

راه حل

تست ۱۷

دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin 2x|$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$



با توجه به نمودار تابع f ، دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ است.

راه حل

نکته

دوره تناوب توابع $f(x) = |a \sin(bx+c)|$ و $g(x) = |a \cos(bx+c)|$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۸

اگر دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin 3x|$ با دوره تناوب تابع $g(x) = |\cos \frac{ax}{2}|$ برابر باشد، مقدار $|a|$ کدام است؟

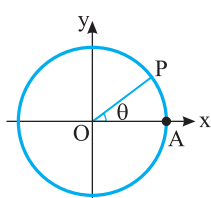
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{\pi}{3}$ و دوره تناوب تابع g برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است. بنابراین

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow |a| = 6$$

راه حل

تابع تانژانت

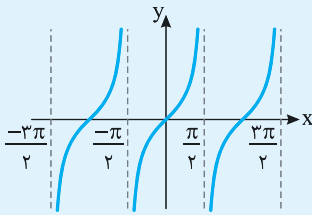


فرض کنید در دایره مثلثاتی شعاع OA را به اندازه θ رادیان دوران دهیم. در این صورت مسافتی را که نقطه A روی دایره طی کرده است (طول $\widehat{AP}$) با در نظر گرفتن علامت θ با x نمایش می‌دهیم، یعنی اگر جهت دوران مثبت باشد، x را مثبت و اگر جهت دوران منفی باشد، x را منفی می‌گیریم. در این صورت $x = \theta$ ، که در اینجا x عددی حقیقی است (معلوم است که اگر $\theta = 0$ ، آن گاه $x = 0$). به این ترتیب می‌توانیم تانژانت عدد حقیقی x را که $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)، برابر تانژانت θ تعریف کنیم. اگر $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)، تانژانت x تعریف نمی‌شود.

اگر x عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)، تابعی که به عدد x تانژانت آن را نسبت می‌دهد **تابع تانژانت** نامیده می‌شود. اگر $f(x) = \tan x$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}, \quad R_f = \mathbb{R}$$

آن گاه



نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع تنازانت تابعی متناوب با دوره تناوب π است و روی هر بازه به صورت $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ که $k \in \mathbb{Z}$ ، اکیداً صعودی است. این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست.

نکته

اگر a, b, c و d عددهایی حقیقی باشند و $a, b \neq 0$ ، آنگاه دوره تناوب تابع $f(x) = a \tan(bx + c) + d$ برابر با $\frac{\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۹

دامنه تابع $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$ کدام است؟

- (۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$
 (۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$

- (۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$
 (۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{\pi x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}$$

هر x که در تساوی $\frac{\pi x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ صدق نکند، در دامنه این تابع قرار دارد:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4k + 2, k \in \mathbb{Z}\} \text{ بنابراین}$$

راه‌حل

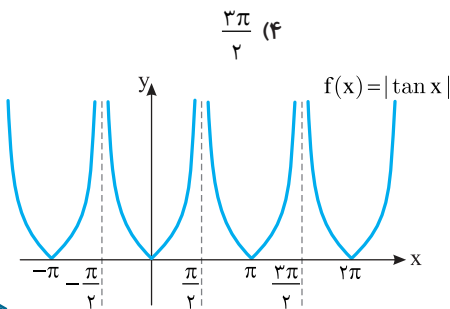
تست ۲۰

دوره تناوب تابع $f(x) = |\tan x|$ کدام است؟

(۳) 2π

(۲) π

(۱) $\frac{\pi}{2}$



برای اینکه نمودار تابع $f(x) = |\tan x|$ را رسم کنیم، قرینه قسمت‌هایی از نمودار تابع $y = \tan x$ را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است، حذف می‌کنیم. از روی این نمودار معلوم است که دوره تناوب تابع $f(x) = |\tan x|$ برابر π است.

راه‌حل

تست ۲۱

تابع $f(x) = 1 - \tan 4x$ روی کدام یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

(۴) $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$

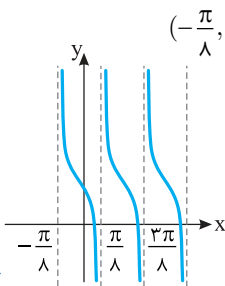
(۳) $(-\frac{\pi}{4}, 0)$

(۲) $(0, \frac{\pi}{4})$

(۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

تابع $f(x) = 1 - \tan 4x$ روی بازه‌های به صورت $(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}, \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8})$ که $k \in \mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین

تابع f روی بازه $(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



راه‌حل

تست ۲۲

اگر $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$ و $\tan 2x = \frac{2m+3}{4}$ ، حدود m کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

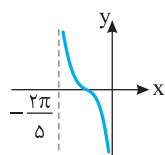
(۱) $-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{2}$

توجه کنید که $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4}$ و تابع تنازانت روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(-\frac{\pi}{4}) < \tan 2x < \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \tan 2x < 1 \Rightarrow -1 < \frac{2m+3}{4} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$$

راه‌حل

تست ۲۳



قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \tan(ax+b)$ به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{5}{2}$

راه حل

توجه کنید که دوره تناوب تابع f برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است. از روی نمودار مشخص است که دوره تناوب تابع $\frac{2\pi}{5}$ است، پس

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow |a| = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{5}{2}$$

چون تابع f روی بازه $(-\frac{2\pi}{5}, 0)$ نزولی است، پس a منفی است و جواب $a = -\frac{5}{2}$ غیر قابل قبول است.

تست ۲۴

برد تابع $f(x) = 1 - \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ با دامنه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(-1, +\infty)$

راه حل

ابتدا توجه کنید که

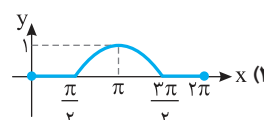
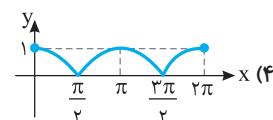
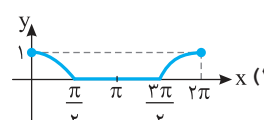
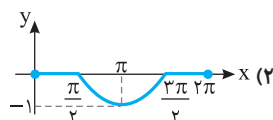
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$$

اکنون از روی نمودار تابع تانژانت و اکیداً صعودی بودن آن روی بازه $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ نتیجه می شود

$$\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow -\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0 \Rightarrow 1 - \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) > 1 \Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow R_f = (1, +\infty)$$

دست گرمی

۱۰۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{\cos x - |\cos x|}{2}$ روی بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۱۰۴- اگر $0 < x < \frac{2\pi}{3}$ و $\sin x = \frac{m-1}{4}$ ، چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۵- دوره تناوب تابع $f(x) = -2 \sin \frac{\pi x}{2}$ دو برابر دوره تناوب تابع $g(x) = 3 \cos(\frac{\pi}{2} - ax)$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) π (۲) -2π (۳) $\pm\pi$ (۴) $\pm 2\pi$

۱۰۶- دوره تناوب تابع $f(x) = \sin^2 x + 12$ چقدر است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۰۷- تابع $f(x) = -\tan 2x$ روی کدام یک از بازه های زیر اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ (۲) $(0, \frac{\pi}{2})$ (۳) $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ (۴) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

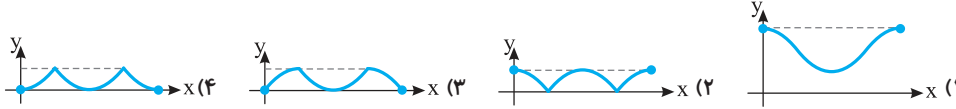
۱۰۸- اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{2m-3}{5}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $-4 < m < 1$ (۲) $-1 < m < 4$ (۳) $-1 < m < 2$ (۴) $-1 < m < 1$

توابع مثلثاتی (۱)

آزمون ۶۳

۶۲۱- نمودار تابع $y = 1 - |\cos x|$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۶۲۲- نمودار تابع $f(x) = a \cos x - b$ از نقطه $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}-1)$ عبور می‌کند و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{3}$ قطع می‌کند. حاصل ab کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $-2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) 2

۶۲۳- اگر $\cos x = \sqrt{3}m$ و $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ ، حدود m کدام است؟

- (۱) $0 < m < 1$ (۲) $0 < m < \frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$

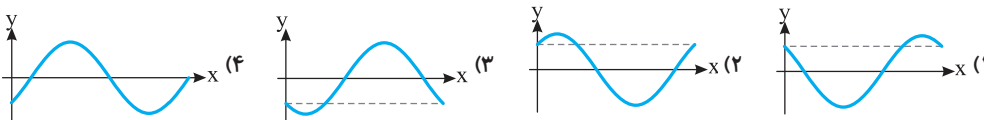
۶۲۴- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = -3 \cos kx$ برابر $\frac{\pi}{2k+1}$ باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{2}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

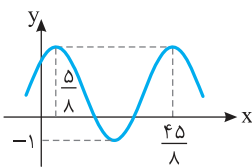
۶۲۵- دوره تناوب تابع $f(x) = |\cos 4x|$ چقدر است؟

- (۱) 2π (۲) π (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۲۶- نمودار تابع $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$ کدام است؟



۶۲۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + 2 \sin(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. مقدار $b-a$ کدام است؟



- (۱) 3 (۲) 4 (۳) -4 (۴) -6

۶۲۸- دامنه تابع $f(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq k, k \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\mathbb{Z}$

۶۲۹- اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ و $\tan x = \frac{2-m}{\sqrt{3}}$ ، حداکثر مقدار m کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 3 (۳) -1 (۴) صفر

۶۳۰- تابع $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ روی بازه $(a, \frac{11\pi}{6})$ اکیداً صعودی است. حداقل مقدار a کدام است؟

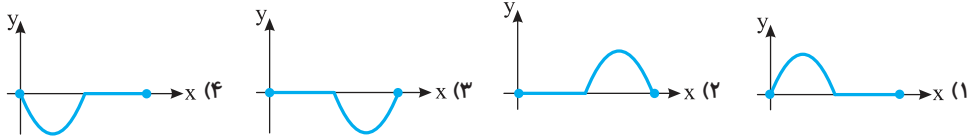
- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $-\frac{\pi}{6}$

سؤال	گام
۶۲۱	۳۱ ۳۳ ۳۸ ۱۰۷
۶۲۲	۱۰۷
۶۲۳	۱۰۷
۶۲۴	۱۰۹
۶۲۵	۱۱۰
۶۲۶	۹۶ ۱۰۶
۶۲۷	۱۰۶ ۱۰۹
۶۲۸	۱۱۱
۶۲۹	۱۱۱
۶۳۰	۳۲ ۴۷ ۱۱۱

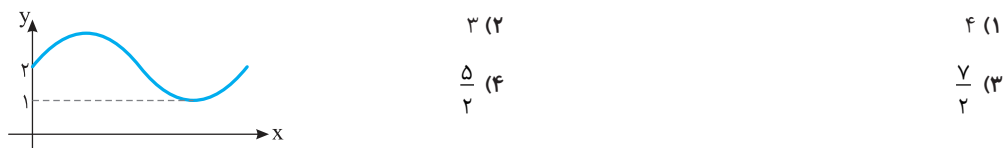
توابع مثلثاتی (۲)

آزمون ۶۴

۶۳۱- نمودار تابع $f(x) = \sin x - |\sin x|$ روی بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟



۶۳۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = (a+b) \sin x + 2a - b$ به شکل مقابل است. بیشترین مقدار تابع کدام است؟



۶۳۳- اگر $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ و $\sin x = \frac{m+1}{2m}$ ، حدود m کدام است؟

(۱) $m > \frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}$ (۳) $m > -\frac{1}{2}$ (۴) $m < -\frac{1}{2}$

۶۳۴- برد تابع $f(x) = \sin^2 x + 3 \cos^2 x$ کدام است؟

(۱) $[0, 3]$ (۲) $[0, 4]$ (۳) $[1, 3]$ (۴) $[1, 4]$

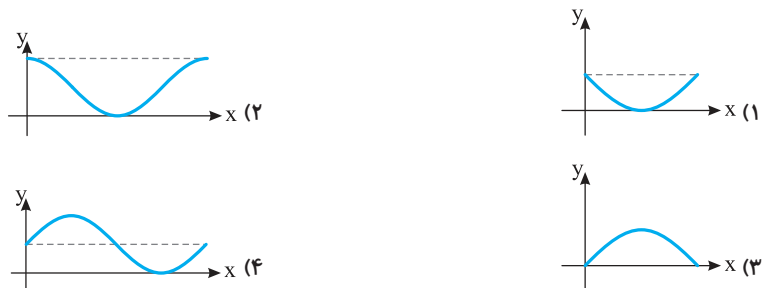
۶۳۵- اگر کمترین مقدار تابع $f(x) = 3a + a^2 \cos ax$ برابر ۲ باشد، دوره تناوب آن کدام است؟

(۱) 2π یا π (۲) π یا $\frac{\pi}{2}$ (۳) 2π یا 4π (۴) $\frac{3\pi}{2}$ یا $\frac{\pi}{2}$

۶۳۶- دوره تناوب تابع $f(x) = \cos 4x + \cos^2 2x$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{4}$

۶۳۷- نمودار تابع $f(x) = 2 \sin^2(\frac{\pi+x}{2})$ در یک دوره تناوب خود کدام است؟



۶۳۸- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + 2 \cos(\frac{\pi}{2} - bx)$ است. مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۳۹- برد تابع f با دامنه $[0, \frac{\pi}{4}]$ و ضابطه $f(x) = \frac{3 - \tan x}{2}$ کدام است؟

(۱) $[\frac{3}{2}, 2]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[1, \frac{3}{2}]$ (۴) $[1, 2]$

۶۴۰- اگر $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) - \{\frac{\pi}{2}\}$ و $\tan x = \frac{m-1}{2}$ ، کدام‌یک درست است؟

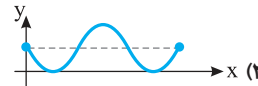
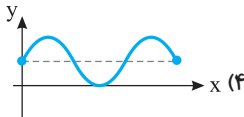
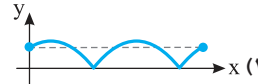
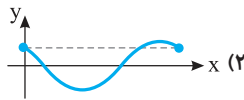
(۱) $m > 3$ (۲) $m > 3$ یا $m < -1$ (۳) $m > 1$ یا $m < -3$ (۴) $-1 < m < 3$

سوال	گام
۶۳۱	۳۴ ۱۰۶ ۳۳۱
۶۳۲	۱۰۶
۶۳۳	۱۰۶ ۳۲۰
۶۳۴	۸۲ ۱۰۶
۶۳۵	۱۰۹
۶۳۶	۹۹ ۱۰۹
۶۳۷	۹۹ ۱۰۷ ۱۰۹
۶۳۸	۹۴ ۱۰۶ ۱۰۹
۶۳۹	۲۳ ۱۱۱
۶۴۰	۱۱۱

توابع مثلثاتی (۳)

آزمون ۶۵

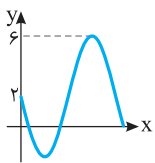
۶۴۱- نمودار تابع $f(x) = |\cos(2x - \frac{\pi}{4})|$ روی بازه $[0, \pi]$ کدام است؟



۶۴۲- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 2b \sin x$ به شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟

(۱) -۴ (۲) ۴

(۳) ۲ (۴) -۲



۶۴۳- اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ و $\cos x = \frac{m^2 + 1}{4}$ ، کدام یک درست است؟

(۱) $\frac{3}{2} < |m| \leq \sqrt{3}$ (۲) $1 < |m| \leq \sqrt{3}$ (۳) $1 < |m| \leq \frac{3}{2}$ (۴) $0 < |m| \leq \sqrt{3}$

۶۴۴- برد تابع $f(x) = \sin^4 x + 2 \sin^2 x$ کدام است؟

(۱) $[0, 3]$ (۲) $[0, 2]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[0, \frac{3}{2}]$

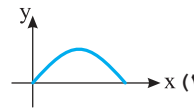
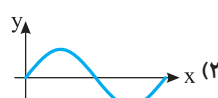
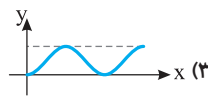
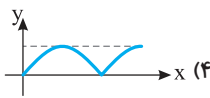
۶۴۵- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = |a| + b \cos a\pi x$ برابر ۳- باشد، بیشترین مقدار آن کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) ۴

۶۴۶- دوره تناوب تابع $f(x) = \cos^2 ax - \cos^4 ax$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است. مقدار a کدام است؟

(۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) ± 3 (۴) ± 4

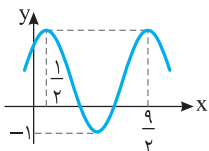
۶۴۷- نمودار تابع $f(x) = 4|\sin x \cos x|$ در یک دوره تناوب کدام است؟



۶۴۸- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + a \sin(\frac{\pi}{b}x + \frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۴

(۳) ± 4 (۴) صفر



۶۴۹- برد تابع f با ضابطه $f(x) = -\tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3})$ و دامنه $[0, 2]$ کدام است؟

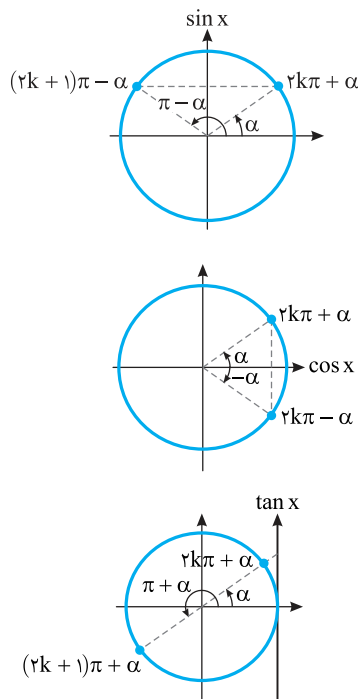
(۱) $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ (۲) $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ (۳) $[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ (۴) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

۶۵۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$ و دامنه $(2, a)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

سؤال	گام
۶۴۱	۳۲ ۳۶ ۳۸ ۱۰۷
۶۴۲	۱۰۶ ۱۰۹
۶۴۳	۱۰۶
۶۴۴	۲۳ ۱۰۶ ۲۷۵
۶۴۵	۱۰۹
۶۴۶	۸۲ ۹۷ ۱۰۹
۶۴۷	۹۷ ۱۰۶ ۱۱۰
۶۴۸	۱۰۶ ۱۰۹
۶۴۹	۲۳ ۱۱۱
۶۵۰	۳۶ ۴۷ ۱۱۱

معادلات مثلثاتی ساده



فرض کنید α زاویه‌ای حاده باشد. معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = \pi - \alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[0, 2\pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k ، $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ ، پس $x = 2k\pi + \alpha$ نیز جواب است. همین طور $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ ، یعنی $x = (2k+1)\pi - \alpha$ نیز برای هر عدد صحیح k جواب این معادله است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

اکنون معادله مثلثاتی $\cos x = \cos \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = -\alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[-\pi, \pi]$ ندارد. البته چون برای هر عدد صحیح k ، $\cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$ ، پس $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi - \alpha$ نیز جواب معادله مورد نظر هستند. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

اکنون معادله $\tan x = \tan \alpha$ را در نظر بگیرید. از روی دایره مثلثاتی شکل مقابل معلوم است که $x = \alpha$ و $x = \pi + \alpha$ جواب‌های این معادله هستند. همچنین، معادله مورد نظر جواب دیگری در بازه $[0, 2\pi]$ ندارد. البته، چون اگر k عددی صحیح باشد، $\tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha$ ، پس $x = k\pi + \alpha$ نیز جواب معادله مورد نظر است. این نتیجه در مورد هر زاویه دلخواهی مانند α نیز درست است.

نکته

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

• جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت مقابل هستند:

• جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت مقابل هستند:

• جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت مقابل هستند:

مثال:

$$۱) \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$۲) \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$۳) \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

تست

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$۱) k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{4} \quad ۲) \frac{k\pi}{3}, \frac{(2k+1)\pi}{6} \quad ۳) \frac{2k\pi}{5}, \frac{(2k+1)\pi}{5} \quad ۴) -\frac{k\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

توجه کنید که

راه حل

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست

□□□□

جواب‌های کلی معادله $\cos 4x = \cos x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

(۳) $\frac{2k\pi}{3}, \frac{2k\pi}{5}$

(۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{5}, 2k\pi - \frac{2\pi}{5}$

(۱) $2k\pi$

را حل

معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 4x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست

□□□□

جواب‌های کلی معادله $\tan 4x = \tan 2x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $\frac{k\pi}{4}$

(۳) $\frac{k\pi}{2}$

(۲) $k\pi$

(۱) $2k\pi$

را حل

توجه کنید که

$$\tan 4x = \tan 2x \Rightarrow 4x = k\pi + 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

۱۱۳

تذکر

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه می‌توانیم به ترتیب زیر عمل کنیم:

(۱) به ازای $k=0$ جواب را به دست می‌آوریم و اگر در بازه مورد نظر بود، آن را قبول می‌کنیم.(۲) به ازای $k=1, k=2, \dots$ جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار نداشته باشند.(۳) به ازای $k=-1, k=-2, \dots$ جواب‌ها را به دست می‌آوریم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جواب‌ها در بازه مورد نظر قرار نداشته باشند.

تست

□□□□

معادله $\sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sin x = 0$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

را حل

معادله را به صورت $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x \Rightarrow \frac{\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (غ.ق.ق.)}, \quad x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(0, 2\pi)$ را به دست می‌آوریم

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$

(غ.ق.ق.)

پس معادله دو جواب در این بازه دارد.

نکته

در معادلات مثلثاتی که نسبت مثلثاتی در مخرج وجود دارد، جواب‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند قابل قبول نیستند. توجه کنید که در معادلاتی که شامل تانژانت و کتانژانت هستند، نسبت مثلثاتی در مخرج وجود دارد.

تست

□□□□

جواب‌های کلی معادله $\tan 3x = \tan x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $2k\pi + \pi$

(۳) $2k\pi$

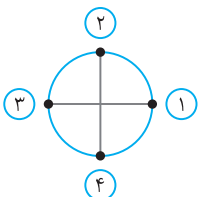
(۲) $k\pi$

(۱) $\frac{k\pi}{2}$

را حل

جواب‌های کلی معادله به صورت روبه‌رو به دست می‌آیند:

$$3x = k\pi + x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



توجه کنید که نقاط انتهایی کمان زاویه‌های متناظر $\frac{k\pi}{2}$ روی دایره مثلثاتی به صورت مقابل هستند که چهار نقطه هستند و تانژانت زاویه‌هایی که نقاط انتهایی کمان متناظر آنها روی نقاط (۲) و (۴) قرار می‌گیرد تعریف شده نیست.

این نقاط به صورت $k\pi + \frac{\pi}{2}$ هستند ($k \in \mathbb{Z}$). بنابراین جواب‌های معادله متناظر با نقاط (۱) و (۳) هستند که به صورت $x = k\pi$ هستند.

۱۱۴

نکته

گاهی ممکن است چند مجموعه جواب کلی برای معادله مثلثاتی به دست بیاید که یکی از آن‌ها زیر مجموعه دیگری باشد.

تست
□□□□

معادله $\cos 3x = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۲ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

معادله را حل می‌کنیم:

راه‌حل

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مجموعه جواب $\frac{k\pi}{2}$ شامل مجموعه جواب $k\pi$ نیز هست. پس جواب‌های معادله به صورت $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ هستند که در بازه $[0, 2\pi]$

عبارت‌اند از $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, x = \frac{3\pi}{2}, x = 2\pi$ و $x = \frac{3\pi}{2}$.

۱۱۵

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توان با استفاده از روابط میان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم یا مکمل به معادله‌های ساده مثلثاتی تبدیل کرد.

تست
□□□□

معادله $\cos 4x + \cos x = 0$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

راه‌حل

$$\cos 4x = -\cos x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow x = \frac{(2k-1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف k جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱	۲
$\frac{(2k+1)\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	π

k	۱	۲
$\frac{(2k-1)\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π

با توجه به مشترک بودن $x = \pi$ در این جواب‌ها، معادله در بازه $[0, \pi]$ چهار جواب دارد: $x = \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{\pi}{3}$.

تست
□□□□

معادله $\cos 4x + \sin x = 0$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

راه‌حل

$$\cos 4x = -\sin x \Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow x = \frac{(4k-1)\pi}{10}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اکنون اگر بخواهیم جواب‌های واقع در بازه $[0, \pi]$ را بیابیم، می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف k جواب‌ها را مشخص کنیم:

k	۰	۱
$\frac{(4k+1)\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

k	۱	۲
$\frac{(4k-1)\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{7\pi}{10}$

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد.

تست

۹

جواب‌های کلی معادله $\tan x = \cot 3x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(۳) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

(۲) $\frac{k\pi}{8}$

(۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

را حل

معادله را به صورت $\tan x = \tan(\frac{\pi}{2} - 3x)$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر است:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۱۶

نکته

- (۱) برای حل کردن معادله $\sin x = m$ که $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه α را طوری پیدا کنیم که $\sin \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ را پیدا می‌کنیم.
- (۲) برای حل کردن معادله $\cos x = m$ که $-1 \leq m \leq 1$ ، کافی است زاویه α را طوری پیدا کنیم که $\cos \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله $\cos x = \cos \alpha$ را پیدا می‌کنیم.
- (۳) برای حل کردن معادله $\tan x = m$ ، کافی است زاویه α را طوری پیدا کنیم که $\tan \alpha = m$ ، سپس جواب‌های معادله $\tan x = \tan \alpha$ را پیدا می‌کنیم.

تست

۱۰

جواب‌های کلی معادله $\sqrt{2} \sin 2x - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$

(۳) $k\pi + \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$

(۲) $k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi - \frac{\pi}{8}$

(۱) $k\pi + \frac{5\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}$

را حل

معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\sqrt{2} \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۱۷

نکته

برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی در بازه $[a, b]$ می‌توانیم پس از پیدا کردن جواب‌های کلی x ، نامعادله $a \leq x \leq b$ را حل کنیم و مقادیر k را پیدا کنیم. در مورد بازه‌های دیگر نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

تست

۱۱

معادله $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ چند جواب در بازه $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ دارد؟

(۴) ۶

(۳) ۴

(۲) ۵

(۱) ۲

را حل

ابتدا جواب‌های کلی معادله مورد نظر را به دست می‌آوریم. توجه کنید که $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$ ، بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌ها عبارت‌اند از

$$x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون از این جواب‌ها، آن‌هایی را پیدا می‌کنیم که در بازه $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ هستند. توجه کنید که

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -2\pi \leq 2k\pi \leq 2\pi \Rightarrow -1 \leq k \leq 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $-\frac{\pi}{2}$ و $2\pi - \frac{\pi}{2}$.

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{11\pi}{3} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{11}{6} \leq k \leq \frac{1}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1, 0, \text{ همچنین}$$

در نتیجه، در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi$ و $\frac{7\pi}{6}$. بنابراین معادله مورد نظر در بازه $[-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ پنج جواب دارد.

۱۱۸

تذکر واضح است که معادله‌های $\sin x = m$ و $\cos x = m$ به‌ازای m هایی که در بازه $[-1, 1]$ نیستند، جواب ندارند. ولی معادله $\tan x = m$ به‌ازای هر عدد حقیقی m جواب دارد.

تست

۱۲

به‌ازای چه مقادیری از k معادله $2 \cos x + 3k = 1$ جواب دارد؟

$$\text{(۱)} \quad 0 \leq k \leq \frac{4}{3} \quad \text{(۲)} \quad -1 \leq k \leq 1 \quad \text{(۳)} \quad -1 \leq k \leq \frac{1}{3} \quad \text{(۴)} \quad -\frac{1}{3} \leq k \leq 1$$

توجه کنید که $2 \cos x + 3k = 1$ در نتیجه $\cos x = \frac{1-3k}{2}$ و چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس

$$-1 \leq \frac{1-3k}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 1-3k \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -3k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 1$$

راه‌حل

تست

۱۳

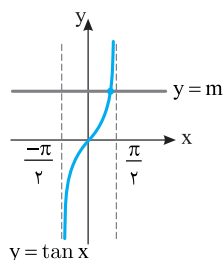
معادله $\sin x = m \cos x$ چند جواب در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ دارد؟

$$\text{(۱)} \quad 1 \quad \text{(۲)} \quad 2 \quad \text{(۳)} \quad \text{صفر} \quad \text{(۴)} \quad \text{بستگی به مقدار } m \text{ دارد.}$$

معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin x = m \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = m \Rightarrow \tan x = m$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، به‌ازای هر مقدار m ، معادله دقیقاً یک جواب دارد.



راه‌حل

تست

۱۴

معادله $\tan^2 x + 4 \tan x + k = 0$ جواب دارد. حدود k کدام است؟

$$\text{(۱)} \quad k \leq 4 \quad \text{(۲)} \quad 0 < k \leq 4 \quad \text{(۳)} \quad -4 < k < 4 \quad \text{(۴)} \quad 0 \leq k \leq 4$$

اگر فرض کنیم $t = \tan x$ ، آن‌گاه معادله به‌صورت $t^2 + 4t + k = 0$ درمی‌آید. شرط وجود جواب برای این معادله این است که

$$\Delta = 16 - 4k \geq 0 \Rightarrow k \leq 4$$

از طرف دیگر اگر این معادله درجه دوم جوابی مانند t_1 داشته باشد، آن‌گاه معادله $\tan x = t_1$ قطعاً جواب دارد، پس معادله اصلی هم جواب خواهد داشت. بنابراین تنها شرط جواب داشتن معادله، $k \leq 4$ است.

معادلات خاص مثلثاتی

در برخی معادلات مثلثاتی، جواب‌های کلی را می‌توان به‌صورت یک دسته جواب نوشت. مثلاً، معادله مثلثاتی $\sin x = 1$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که

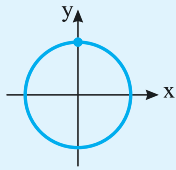
$$\sin x = 1 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های کلی این معادله به‌صورت $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ هستند. جواب‌های کلی معادلات خاص را در نکته بعد آورده‌ایم.

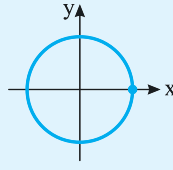
۱۱۹

معادلات خاص مثلثاتی

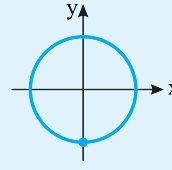
نکته



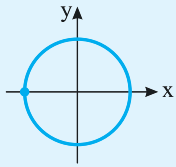
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



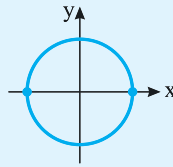
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



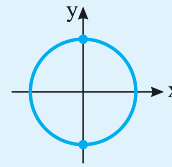
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

تست ۱۵

جواب‌های کلی معادله $\sin x \cos 2x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$k\pi, k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, 2k\pi \quad (۳)$$

$$k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

توجه کنید که

را حل

تست ۱۶

نمودار تابع $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = -k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

جایی که نمودار محور x را قطع می‌کند، $y = 0$. پسجواب‌های واقع در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ عبارت‌اند از

را حل

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$

۱۲۰

نکته

گاهی می‌توان چند مجموعه جواب کلی معادله مثلثاتی را به صورت یک مجموعه جواب کلی نوشت.

مثال: مجموعه جواب‌های معادله $\sin \frac{x}{2} (\cos x + 1) = 0$ به صورت زیر است:

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

چون مضارب زوج π و مضارب فرد π جواب‌های این معادله هستند. مجموعه جواب‌های این معادله را می‌توان به صورت مضارب صحیح π نوشت، که می‌شود $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

تست ۱۷

جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

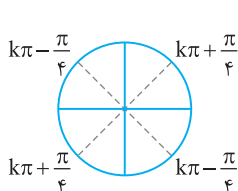
$$(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$2 \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۱), \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۲)$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۳), \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (۴)$$



اکنون توجه کنید که اجتماع جواب‌های (۱) و (۴) را می‌توان به صورت $k\pi + \frac{\pi}{4}$ نوشت. همین‌طور، اجتماع جواب‌های

(۲) و (۳) به صورت $k\pi - \frac{\pi}{4}$ است. بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر به صورت $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ است که می‌توان با

توجه به شکل روبه‌رو آن‌ها را به صورت $k\pi + \frac{\pi}{4}$ نوشت ($k \in \mathbb{Z}$).

راه‌حل دوم چون $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$ ، معادله مورد نظر را می‌توان به صورت $-\cos 2x = 0$ نوشت، که مجموعه جواب‌های آن به صورت زیر است:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

راه‌حل

توجه کنید که

تست

جواب‌های کلی معادله $\cos^3 x - \cos x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

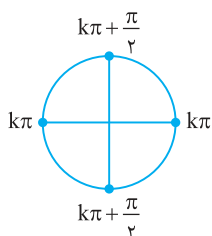
$$\frac{k\pi}{2} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$k\pi \quad (۱)$$

$$\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$k\pi, \quad k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

توجه کنید که اجتماع دو جواب آخر را می‌توان به صورت $k\pi$ نوشت ($k \in \mathbb{Z}$).

بنابراین جواب‌های کلی معادله مورد نظر عبارت‌اند از

که با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان آن‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{2}$ نوشت ($k \in \mathbb{Z}$).

راه‌حل دوم معادله مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow -\cos x \sin^2 x = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \quad \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

که مشابه راه‌حل اول می‌توان مجموعه جواب‌ها را به صورت $\frac{k\pi}{2}$ نوشت ($k \in \mathbb{Z}$).

راه‌حل

توجه کنید که

نکته

برخی معادله‌های مثلثاتی را می‌توانیم با استفاده از اتحادها به معادله‌های ساده مثلثاتی تبدیل و حل کنیم.

تست

معادله $2 \cos^2 x = \cos x + 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$۵ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

توجه کنید که

راه‌حل

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

معادله مورد نظر چهار جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

تست

جواب‌های کلی معادله $\cos^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ (۳) $2k\pi - \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ، در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - \sin^2 x + \sin x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

$$(\sin x + \frac{1}{2})(\sin x - \frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \sin x = \frac{3}{2} \text{ (غ.ق.ی.)}$$

از طرف دیگر، $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

تست

جواب‌های کلی معادله $\sin 6x = 2 \sin 3x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{2k\pi}{3}$ (۲) $\frac{k\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. در نتیجه، معادله مورد نظر می‌شود

$$2 \sin 3x \cos 3x = 2 \sin 3x \Rightarrow 2 \sin 3x (\cos 3x - 1) = 0$$

بنابراین $\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \quad \cos 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

توجه کنید که مضارب زوج $\frac{2k\pi}{3}$ و $\frac{k\pi}{3}$ همه مضارب صحیح $\frac{\pi}{3}$ هستند. بنابراین مجموعه جواب‌های کلی معادله مورد نظر $\frac{k\pi}{3}$ است ($k \in \mathbb{Z}$).

تست

جواب‌های کلی معادله $\cos 2x = 1 + \sin x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

راه‌حل

ابتدا توجه کنید که $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$. بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

$$1 - 2 \sin^2 x = 1 + \sin x \Rightarrow \sin x (1 + 2 \sin x) = 0$$

در نتیجه

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}, \quad x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست

تعداد جواب‌های معادله $\sin \Delta x \cos 2x - \cos \Delta x \sin 2x = -\frac{1}{2}$ در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ چند تا است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

راه‌حل

با استفاده از دستور سینوس تفاضل دو زاویه می‌توان معادله مورد نظر را به صورت روبه‌رو نوشت: $\sin(\Delta x - 2x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 3x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6})$

جواب‌های کلی این معادله به صورت زیر است:

$$3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, k \in \mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{17}{6} \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$-\frac{\pi}{6} < (2k+1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{5}{6} < k < \frac{13}{6} \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

بنابراین معادله مورد نظر در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ شش جواب دارد.

تست
□□□□

جواب‌های کلی معادله $\sin(\frac{\pi}{6}+x)+\sin(\frac{\pi}{6}-x)=\frac{1}{2}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

راه‌حل

اگر از دستوره‌های سینوس مجموع و تفاضل دو زاویه استفاده کنیم، معلوم می‌شود که

$$\sin(\frac{\pi}{6}+x) = \sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{6}-x) = \sin \frac{\pi}{6} \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین معادله مورد نظر می‌شود

تست
□□□□

معادله $\sin^2 x - \sin x = \cos^2 x$ در بازه $[-\pi, 0]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

راه‌حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin x \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \Rightarrow -\cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin(-x)$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2}+x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi - \pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, 0]$ عبارت‌اند از $x = -\frac{\pi}{6}$ و $x = -\frac{5\pi}{6}$. بنابراین معادله در بازه $[-\pi, 0]$ دو جواب دارد.

تست
□□□□

جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi + \pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

راه‌حل

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow -2(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 \Rightarrow \cos 4x = -1$$

$$4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi + \pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت مقابل هستند:

تست
□□□□

مجموع جواب‌های معادله $\sin x + \cos x = 1$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

- (۱) 2π (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) 4π (۴) 5π

راه‌حل

راه‌حل اول اگر طرفین معادله را بر $\sqrt{2}$ تقسیم کنیم، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi, \quad x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت روبه‌رو هستند:

راه‌حل دوم طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2\sin x \cos x = 0$$

بنابراین جواب‌هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، به صورت روبه‌رو هستند:

در نتیجه جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $0, \pi, 2\pi$ و $\frac{3\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

توجه کنید که جواب‌های π و $\frac{3\pi}{2}$ قابل قبول نیستند، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کنند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده‌اند. بنابراین مجموع جواب‌هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

راه حل سوم با استفاده از اتحادهای $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ و $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x = 1 - \cos x \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) = 0$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، به صورت زیر هستند:

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0, \frac{x}{2} = \pi \Rightarrow x = 0, x = 2\pi, \quad \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

راه حل چهارم اگر از دستورهای $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ و $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$ استفاده کنیم و فرض کنیم $\tan \frac{x}{2} = t$ ، معادله مورد نظر می‌شود:

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow 1+t^2 = 2t+1-t^2 \Rightarrow 2t^2-2t=0 \Rightarrow t(t-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ t=1 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در نتیجه جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از 0 ، 2π و $\frac{\pi}{2}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

تست

□□□□

معادله $\tan 3x - \tan 5x = 1 + \tan 3x \tan 5x$ چند جواب در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ دارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

اگر دو طرف معادله داده شده را بر سمت راست آن تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود

راه حل

$$\frac{\tan 3x - \tan 5x}{1 + \tan 3x \tan 5x} = 1 \Rightarrow \tan(3x - 5x) = 1 \Rightarrow \tan(-2x) = 1 \Rightarrow -\tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4})$$

بنابراین $2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ، پس $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ($k \in \mathbb{Z}$). اکنون توجه کنید که $-\frac{\pi}{6} < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{12} < k < \frac{47}{12} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$

بنابراین معادله مورد نظر چهار جواب در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$ دارد.

تست

□□□□

جواب‌های کلی معادله $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $k\pi$ (۳) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۱)

معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم

راه حل

$$\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = 2 \Rightarrow \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 2$$

$$(1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 = 2(1 - \tan^2 x)$$

$$2 + 2 \tan^2 x = 2 - 2 \tan^2 x \Rightarrow 4 \tan^2 x = 0 \Rightarrow \tan x = 0$$

بنابراین جواب کلی معادله به صورت $x = k\pi$ است.

تعداد جواب‌های برخی معادلات مثلثاتی را می‌توانیم به کمک رسم نمودار پیدا کنیم.

تست ۳۰

تعداد جواب‌های معادله $(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

توجه کنید که

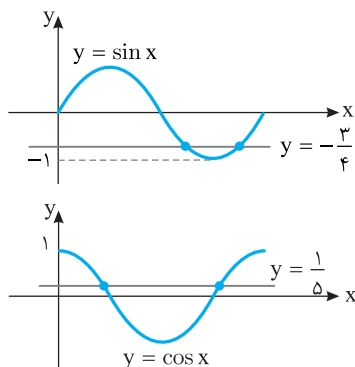
راه‌حل

$$(\sin x + \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{4}, \cos x = \frac{1}{5}$$

از طرف دیگر، جواب‌های معادله $\sin x = -\frac{3}{4}$ طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع $y = \sin x$

و خط $y = -\frac{3}{4}$ هستند. بنابراین از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که معادله $\sin x = -\frac{3}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد.

به همین ترتیب، از روی شکل زیر معلوم می‌شود که معادله $\cos x = \frac{1}{5}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دو جواب دارد. بنابراین معادله مورد نظر در بازه $[0, 2\pi]$ چهار جواب دارد.



تست ۳۱

معادله $\frac{\sin 2x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

راه‌حل

$$\sin 2x = (1 + \cos x)(1 - \cos x), \cos x \neq -1$$

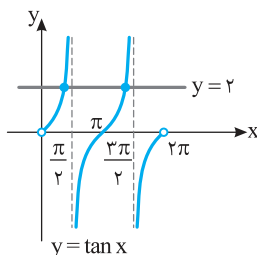
$$2 \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \sin^2 x \Rightarrow \sin x (2 \cos x - \sin x) = 0$$

جواب معادله $\sin x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ عبارت است از $x = \pi$ که قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادله اصلی می‌شود.

معادله $2 \cos x - \sin x = 0$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin x = 2 \cos x \Rightarrow \tan x = 2$$

با توجه به نمودار زیر، معادله دو جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد.



دست‌گرمی

۱۰۹- معادله $\cos(x - \frac{\pi}{4}) - \cos x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱۰- معادله $\tan(x - \frac{\pi}{6}) - \tan 2x = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, \pi)$ دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱۱- جواب‌های کلی معادله $\sin(\frac{\pi}{6} - 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) \quad -k\pi - \frac{\pi}{12} \text{ و } -\frac{(2k+1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \quad -k\pi + \frac{\pi}{12} \text{ و } -\frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \quad -k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ و } (2k+1)\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$(4) \quad (2k+1)\pi + \frac{\pi}{12} \text{ و } k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۱۱۲- جواب‌های کلی معادله $3 \tan^2 x - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) \quad k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$$

۱۱۳- نمودار تابع $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) - 1$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه خط $y = -1$ را قطع می‌کند؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 5$$

۱۱۴- جواب‌های کلی معادله $\sin^3 x - \sin x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) \quad x = k\pi \quad (2) \quad x = \frac{k\pi}{2} \quad (3) \quad x = \frac{k\pi}{4} \quad (4) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱۱۵- مجموع جواب‌های معادله $4 \cos x + 5 \sin^2 x = 2$ که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند، کدام است؟

$$(1) \quad \pi \quad (2) \quad 2\pi \quad (3) \quad \frac{3\pi}{2} \quad (4) \quad \frac{5\pi}{2}$$

۱۱۶- معادله $\sin 2x = \tan x$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 5 \quad (4) \quad 6$$

معادلات مثلثاتی (۱)

آزمون ۶۶

سوال	گام
۶۵۱	۱۱۲ ۱۱۴
۶۵۲	۱۱۲ ۱۱۶
۶۵۳	۱۱۷ ۱۱۹
۶۵۴	۱۱۲ ۱۱۳
۶۵۵	۱۱۲ ۱۱۵
۶۵۶	۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۶۵۷	۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۵۸	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۵۹	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۶۰	۱۱۹ ۱۲۱

۶۵۱- جواب‌های کلی معادله $\cos 3x = \cos 2x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{2k\pi}{5}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{5}$ (۳) $\frac{k\pi}{5}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{5}$

۶۵۲- جواب‌های کلی معادله $\sqrt{2} \sin \frac{x}{4} - 1 = 0$ کدام‌اند؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $8k\pi + \pi$ یا $8k\pi - \pi$ (۲) $8k\pi + 2\pi$ یا $8k\pi - \pi$
(۳) $8k\pi + 3\pi$ یا $8k\pi - \pi$ (۴) $8k\pi + 3\pi$ یا $8k\pi + \pi$

۶۵۳- نمودار تابع $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ چند بار محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶۵۴- مجموع جواب‌های معادله $\tan 4x = \tan(2x - \frac{\pi}{3})$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{13\pi}{3}$ (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{20\pi}{3}$ (۴) $\frac{9\pi}{2}$

۶۵۵- جواب‌های کلی معادله $\sin x + \cos(x + \frac{\pi}{5}) = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{7\pi}{20}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{20}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{20}$ (۴) $k\pi - \frac{7\pi}{20}$

۶۵۶- جواب‌های کلی معادله $\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{4}$

۶۵۷- جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 2x - 7 \sin 2x + 5 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۶۵۸- معادله $\sin 4x = \sqrt{2} \sin 2x$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶۵۹- معادله $\cos 2x = \cos x - 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۶۶۰- جواب‌های کلی معادله $\cos 2x - \sin 2x + 2 \sin^2 x = 0$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2}$

معادلات مثلثاتی (۲)

آزمون ۶۷

- ۶۶۱- جواب‌های کلی معادله $\cos 5x = \cos 4x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $\frac{2k\pi}{9}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{9}$ (۳) $\frac{k\pi}{9}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{9}$
- ۶۶۲- جواب‌های کلی معادله $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{4\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}$
- ۶۶۳- تابع $f(x) = 2\sin 3x + 1$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ چند بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۶۶۴- معادله $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{2x}{3} = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۶۵- جواب‌های کلی معادله $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \cot(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{12}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{24}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{12}$
- ۶۶۶- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{2}\sin^2 x = \sin x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟
- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$
- ۶۶۷- معادله $2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, 0)$ دارد؟
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۶۶۸- مجموع جواب‌های معادله $\frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\sin 4x} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟
- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$
- ۶۶۹- مجموع جواب‌های معادله $\tan 2x = 3\tan x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟
- (۱) 4π (۲) 5π (۳) 6π (۴) 7π
- ۶۷۰- مجموع جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{16}{3}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟
- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

سؤال	گام
۶۶۱	۱۱۲ ۱۱۴
۶۶۲	۱۱۲ ۱۱۶
۶۶۳	۱۱۳ ۱۱۹
۶۶۴	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۶۶۵	۱۱۲ ۱۱۵
۶۶۶	۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹
۶۶۷	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۶۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۶۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۷۰	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۲۱

معادلات مثلثاتی (۳)

آزمون ۶۸

سوال	گام
۶۷۱	۱۱۲
۶۷۲	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶
۶۷۳	۱۱۳ ۱۱۹
۶۷۴	۱۱۲ ۱۱۵
۶۷۵	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹
۶۷۶	۱۱۶ ۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۷۷	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۰ ۱۲۱
۶۷۸	۱۱۲ ۱۲۱
۶۷۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۸۰	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱

۶۷۱- جواب‌های کلی معادله $\sin 5x = \sin 3x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}$
 (۲) $2k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4}$
 (۳) $k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$
 (۴) $2k\pi$ یا $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۶۷۲- معادله $2 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$ در بازه $(-\pi, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۷۳- تابع $f(x) = -2 \cos 4x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ چند بار به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶۷۴- جواب‌های کلی معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = -\sin 2x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{36}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{36}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{72}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{72}$

۶۷۵- معادله $2 \cos^3 x - \cos x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۶۷۶- جواب‌های کلی معادله $\sin^2(\pi + x) - \sin x - 2 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۶۷۷- معادله $1 - \cos 2x = \sin^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۷۸- مجموع جواب‌های معادله $3 \tan x - 3 \cot x = 2\sqrt{3}$ در بازه $(\pi, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{19\pi}{6}$ (۲) $\frac{17\pi}{6}$ (۳) $\frac{13\pi}{6}$ (۴) $\frac{7\pi}{6}$

۶۷۹- مجموع جواب‌های معادله $1 + \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \cos(3\pi - x)$ که در بازه $(0, 2\pi)$ قرار دارند، کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) π (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{7\pi}{3}$

۶۸۰- چند جواب معادله $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

معادلات مثلثاتی (۴)

آزمون ۶۹

سؤال	گام
۶۸۱	۱۱۲ ۱۱۷
۶۸۲	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶
۶۸۳	۱۱۹ ۱۲۱
۶۸۴	۱۱۲ ۱۱۵ ۱۱۷
۶۸۵	۱۲۲
۶۸۶	۱۱۲ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۸۷	۱۱۲ ۱۲۱
۶۸۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵ ۱۲۱
۶۸۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۶۹۰	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱ ۲۸۵

۶۸۱- معادله $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x - \frac{\pi}{9})$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۶۸۲- مجموع جواب‌های معادله $2 \cos^3 x - 1 = 0$ که در بازه $(0, \pi)$ قرار دارند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) $\frac{13\pi}{9}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{8\pi}{9}$

۶۸۳- جواب‌های کلی معادله $2 \cos^2(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}) - 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۶۸۴- معادله $\frac{\sin 3x}{\cos(x - \frac{\pi}{6})} = -1$ در بازه $(0, \pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۸۵- معادله $(\Delta \cos x - 3) = 0$ چند جواب در بازه $[0, \frac{3\pi}{4}]$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۸۶- جواب‌های کلی معادله $\tan x + \cot x = 2$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{4}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۶۸۷- جواب‌های کلی معادله $3 \tan^2 x + 4\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ به صورت $x = k\pi - \frac{n\pi}{6}$ هستند. n چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n < 6$)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۸۸- معادله $\sin^2 x + \sin^2 4x = 1$ چند جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۸۹- مجموع جواب‌های معادله $\cos^4 x - 1 = \sin^4 x$ در بازه $(0, 3\pi)$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) 3π (۴) 4π

۶۹۰- تعداد جواب‌های معادله $(2 - \sqrt{2}) \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

معادلات مثلثاتی (۵)

آزمون ۷۰

سؤال	گام
۶۹۱	۱۱۲ ۱۱۳
۶۹۲	۱۱۲ ۱۱۶
۶۹۳	۱۱۲ ۱۱۶
۶۹۴	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۶۹۵	۱۲۲
۶۹۶	۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۶۹۷	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۶۹۸	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱
۶۹۹	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱ ۲۷۹
۷۰۰	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۲۱

۶۹۱- معادله $\sin(x - \frac{\pi}{3}) - \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶۹۲- جواب‌های کلی معادله $2 \sin(x + \frac{5\pi}{36}) = \sqrt{2}$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{18}$ است. مجموعه مقادیر i کدام است؟

($k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}, i < 18$)

- (۱) $\{1, 4\}$ (۲) $\{3, 8\}$ (۳) $\{2, 11\}$ (۴) $\{3, 10\}$

۶۹۳- جواب‌های کلی معادله $1 - 4 \sin^2(\delta x - \frac{\pi}{3}) = 0$ به صورت $x = \frac{k\pi}{5} + \frac{i\pi}{3}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای i کدام است؟

($0 < i < 5, i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۳

۶۹۴- معادله $\frac{\sin(x + \frac{\pi}{4})}{\cos 2x} = 1$ در بازه $(0, \pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۶۹۵- معادله $(4 \sin x - \sqrt{3})(4 \cos x - \sqrt{13}) = 0$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۶۹۶- جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} - x)$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۶۹۷- معادله $\tan 2x \tan 4x = 1$ چند جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۹۸- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

۶۹۹- معادله $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۷۰۰- جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x + \tan^2 x = 2$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

معادلات مثلثاتی (۶)

آزمون ۷۱

- ۷۰۱- مجموع جواب‌های معادله $\sin x - \sin^3 x = \cos x - \cos^3 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟
 (۱) $\frac{9\pi}{2}$ (۲) 5π (۳) $\frac{11\pi}{2}$ (۴) $\frac{13\pi}{2}$
- ۷۰۲- جواب‌های کلی معادله $\sin^2(x + \frac{\pi}{9}) + 2\sin^2(x - \frac{7\pi}{18}) = 2$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $k\pi + \frac{\pi}{9}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{9}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$
- ۷۰۳- معادله $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۷۰۴- مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \sqrt{3}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟
 (۱) 2π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 3π (۴) $\frac{7\pi}{2}$
- ۷۰۵- مجموع جواب‌های معادله $\cos(2\pi \sin x) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟
 (۱) 3π (۲) 4π (۳) 5π (۴) 6π
- ۷۰۶- معادله $\sin(x + \frac{\pi}{12}) = 3 \sin(x - \frac{\pi}{12})$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۷۰۷- جواب‌های کلی معادله $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- ۷۰۸- معادله $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 2x$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۷۰۹- معادله $\frac{\tan 3x - \tan x}{\tan 5x + \tan x} = \frac{1 + \tan x \tan 3x}{1 - \tan x \tan 5x}$ چند جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- ۷۱۰- معادله $3 \tan x + k \cot x = 2$ جواب دارد. حدود k کدام است؟
 (۱) $k > \frac{1}{3}$ (۲) $0 \leq k \leq \frac{1}{3}$ (۳) $k \leq \frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{3}$

سؤال	گام
۷۰۱	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱
۷۰۲	۱۱۲ ۱۱۵ ۱۱۹
۷۰۳	۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱ ۲۷۶ ۲۷۹
۷۰۴	۱۱۳ ۱۱۸ ۱۱۹ ۱۲۱
۷۰۵	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۸ ۱۱۹
۷۰۶	۱۱۸ ۱۲۱ ۳۲۳
۷۰۷	۱۱۲ ۱۲۱
۷۰۸	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۷۰۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۲۱
۷۱۰	۱۱۸ ۱۲۱

آزمون فصل دوم (۱)

آزمون ۷۲

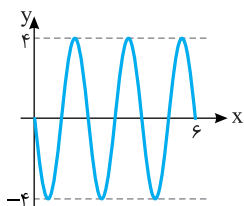
۷۱۱- اگر انتهای کمان نظیر زاویه α در ناحیه چهارم باشد و $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin \alpha - \cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{17}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $-\frac{8}{9}$

۷۱۲- اندازه یک زاویه برحسب درجه از $\frac{200}{\pi}$ برابر اندازه آن برحسب رادیان ۵ واحد کمتر است. اندازه این زاویه برحسب رادیان کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{3\pi}{8}$

۷۱۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟



- (۱) -۶
(۲) ۴
(۳) -۴
(۴) ۶

۷۱۴- حاصل $\frac{1}{1 - \cot 38^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 110^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan 20^\circ$ (۴) $\cot 10^\circ$

۷۱۵- حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $4\sqrt{6}$

۷۱۶- اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{1}{16}$

۷۱۷- اگر $\cos 4x = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۴) $\frac{17}{18}$

۷۱۸- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{6}$ (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۷۱۹- معادله $1 + \sin 2x = \cos x + \sin x$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۲۰- معادله $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} \tan x - 3}$ چند جواب در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

سؤال	گام
۷۱۱	۷۵ ۸۲ ۲۷۵
۷۱۲	۸۸
۷۱۳	۱۰۶ ۱۰۹
۷۱۴	۸۲ ۹۲
۷۱۵	۹۵ ۹۷
۷۱۶	۹۷ ۲۷۵
۷۱۷	۱۰۳
۷۱۸	۱۱۲ ۱۱۳
۷۱۹	۱۰۰ ۱۱۳ ۱۱۹ ۱۲۱
۷۲۰	۱۰۴ ۱۱۲ ۱۲۱ ۲۹۳

آزمون فصل دوم (۲)

آزمون ۷۳

۷۲۱- مقدار عبارت $A = \frac{(1+\cot \frac{\pi}{5})(1-\tan \frac{\pi}{5})}{(1-\cot \frac{\pi}{5})(1+\tan \frac{\pi}{5})}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۷۲۲- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{7}{25}$ ، مقدار $\cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۷۲۳- اگر $\sin x \cos x = \sin x + \cos x$ ، حاصل $\sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (۳) $1-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

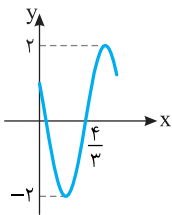
۷۲۴- حاصل عبارت $A = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۵/۵ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۷۲۵- اگر $-\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ و $\tan x = m + 2\sqrt{3}$ ، حداقل مقدار m کدام است؟

- (۱) $-3\sqrt{3}$ (۲) $-4\sqrt{3}$ (۳) $-2\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۷۲۶- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(\pi(b-x))$ به شکل مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟ ($2 < b < 3$)



- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$

- (۳) $-\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{13}{3}$

۷۲۷- در شکل روبه‌رو $AD=8$ و $BC=3$. مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$

- (۳) $\frac{7}{15}$ (۴) $\frac{14}{15}$

۷۲۸- اگر $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) + \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ کدام است؟

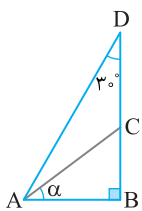
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۷۲۹- مجموع جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = -1$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{11\pi}{4}$ (۲) $\frac{21\pi}{8}$ (۳) $\frac{23\pi}{16}$ (۴) $\frac{21\pi}{16}$

۷۳۰- مجموع جواب‌های معادله $1 + 2 \sin 3x \cos 4x = 2 \sin 4x \cos 3x$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

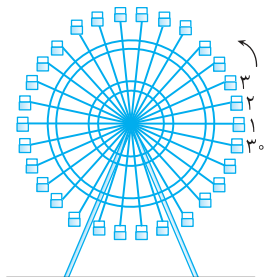
- (۱) π (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{5\pi}{6}$ (۴) $\frac{3\pi}{2}$



سؤال	گام
۷۲۱	۸۲
۷۲۲	۷۵ ۸۲
۷۲۳	۷۷ ۸۲ ۲۷۵
۷۲۴	۸۲ ۹۳
۷۲۵	۱۱۱
۷۲۶	۱۰۶ ۱۰۹
۷۲۷	۷۰ ۹۷
۷۲۸	۹۷ ۱۰۵
۷۲۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۷۳۰	۹۵ ۱۱۲

آزمون فصل دوم (۳)

آزمون ۷۴



۷۳۱- چرخ و فلکی مطابق شکل ۳۰ کابین دارد که از شماره ۱ تا ۳۰ شماره گذاری شده‌اند. این چرخ و فلک در هر دقیقه ۲ دور می‌چرخد. اگر چرخ و فلک ۱۸۴ ثانیه در جهت مثبت مثلثاتی بچرخد، کابین شماره یک به محل کدام کابین منتقل می‌شود؟

- (۱) کابین سوم
- (۲) کابین پنجم
- (۳) کابین هفتم
- (۴) کابین نهم

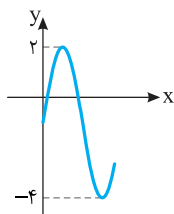
۷۳۲- حاصل عبارت $A = \frac{\sin 25^\circ - \sin^3 25^\circ}{\cos 25^\circ - \cos^3 25^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\tan^2 25^\circ$
- (۲) $\tan 25^\circ$
- (۳) $\cot 25^\circ$
- (۴) $\cot^2 25^\circ$

۷۳۳- اگر $a = \frac{\pi}{32}$ ، مقدار $\frac{\sin 2a \cos 2a}{\sin 2a \cos 9a}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) -۱
- (۴) -۲

۷۳۴- در شکل مقابل، قسمتی از نمودار کدام تابع رسم شده است؟



(۱) $y = 2 \cos(2x) - 4$

(۲) $y = 3 \sin(2x) - 1$

(۳) $y = -3 \sin(2x) - 1$

(۴) $y = -2 \cos(2x) + 1$

۷۳۵- اگر $\tan(x+10^\circ) = \frac{2}{3}$ و $\tan(y+35^\circ) = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\tan(x+y)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{1}{8}$
- (۴) $\frac{1}{12}$

۷۳۶- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\sin^2 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{25}$
- (۲) $\frac{25}{81}$
- (۳) $\frac{9}{16}$
- (۴) $\frac{49}{81}$

۷۳۷- مقدار عبارت $A = \left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \right)^2$ به ازای $x = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2 - \sqrt{2}}{4}$
- (۲) $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$
- (۳) $\frac{\sqrt{2} - 1}{4}$
- (۴) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

۷۳۸- نمودار تابع $f(x) = 1 - \sin(2x)$ در بازه $(0, 4\pi)$ چندبار بر محور طول‌ها مماس می‌شود؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۷۳۹- مجموع جواب‌های معادله $2 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) π
- (۲) $\frac{3\pi}{2}$
- (۳) 2π
- (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۷۴۰- معادله $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ چند جواب در بازه $(0, 2\pi)$ دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

سؤال	گام
۷۳۱	۸۷
۷۳۲	۵۲
۷۳۳	۹۲
۷۳۴	۱۰۶ ۱۰۷ ۱۰۹
۷۳۵	۱۰۴
۷۳۶	۹۷ ۲۷۵
۷۳۷	۸۲ ۹۷ ۹۹
۷۳۸	۱۰۶ ۱۱۷ ۱۱۹
۷۳۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۶ ۱۱۹ ۱۲۱
۷۴۰	۱۱۲ ۱۲۱

آزمون فصل دوم (۴) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

آزمون ۷۵

سؤال	گام
۷۴۱	۸۲ ۹۲
۷۴۲	۸۲ ۹۲ ۹۷
۷۴۳	۱۰۶ ۱۰۹
۷۴۴	۱۰۱
۷۴۵	۹۵ ۹۷
۷۴۶	۱۰۲ ۱۰۵
۷۴۷	۹۲ ۱۱۲
۷۴۸	۱۱۲ ۱۱۵
۷۴۹	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵ ۱۱۶
۷۵۰	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵

۷۴۱- اگر $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

ریاضی - ۹۱

- (۱) -۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

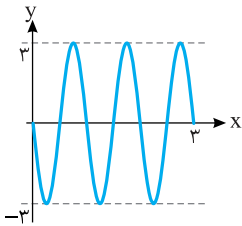
۷۴۲- ساده شدهٔ کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$ کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

- (۱) $8 \cos^{-2} \theta$ (۲) $8 \sin^{-2} \theta$ (۳) $16 \cos^{-2} \theta$ (۴) $16 \sin^{-2} \theta$

۷۴۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۲



- (۱) -۶ (۲) -۳ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۶

۷۴۴- اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ ، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

تجربی - ۹۶

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۷۴۵- اگر $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$ ، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

تجربی - ۹۳

- (۱) $-\frac{2}{9}$ (۲) $-\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{2}{9}$

۷۴۶- اگر $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ ، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

تجربی - ۹۴

- (۱) $\frac{1}{45}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{75}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۷۴۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟

خارج از کشور تجربی - ۹۳

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۷۴۸- جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

خارج از کشور تجربی - ۹۴

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۷۴۹- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

۷۵۰- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

خارج از کشور تجربی - ۹۶

- (۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π

آزمون فصل دوم (۵) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

آزمون ۷۶

سؤال	گام
۷۵۱	۹۲ ۹۷ ۲۷۵
۷۵۲	۸۲ ۹۲
۷۵۳	۹۲ ۱۰۶ ۱۰۹
۷۵۴	۹۶ ۹۷
۷۵۵	۱۰۵
۷۵۶	۹۷ ۱۱۲ ۱۲۱ ۲۷۶
۷۵۷	۹۷ ۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۸ ۱۲۱
۷۵۸	۹۷ ۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۷۵۹	۹۷ ۱۱۲ ۱۱۵ ۱۲۱
۷۶۰	۱۱۲ ۱۱۹ ۱۲۱

تجربی - ۹۵

۷۵۱- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

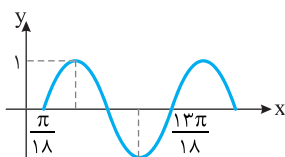
- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۷۵۲- حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = \frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{5}{8}$

ریاضی - ۹۵

۷۵۳- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a - 2 \cos(bx + \frac{\pi}{2})$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟


- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

ریاضی - ۹۶

۷۵۴- حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۷۵۵- اگر $\tan \alpha = 2$ و $\tan \beta = \frac{1}{3}$ ، مقدار $\tan(\alpha - \beta)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۳

تجربی - ۹۲

۷۵۶- جواب‌های کلی معادله $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۷۵۷- جواب‌های کلی معادله $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ کدام است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

تجربی - ۹۱

۷۵۸- جواب‌های کلی معادله $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

تجربی - ۹۴

۷۵۹- جواب‌های کلی معادله $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

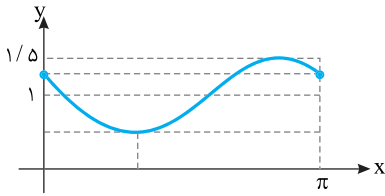
۷۶۰- نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی هستند؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

آزمون فصل دوم (۶) (برگزیده کنکورهای سراسری)

آزمون ۷۷



۷۶۱- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۷۶۲- ساده شده عبارت $\cos 5^\circ (\tan 7^\circ + \tan 1^\circ)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sin 2^\circ$ (۲) $\cos 2^\circ$ (۳) $2 \sin 2^\circ$ (۴) $2 \cos 2^\circ$

ریاضی - ۸۵

۷۶۳- جواب‌های کلی معادله $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi + \pi}{2}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۷۶۴- جواب‌های کلی معادله $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

تجربی - ۹۵

۷۶۵- جواب‌های کلی معادله $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

تجربی - ۹۶

۷۶۶- جواب‌های کلی معادله $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi + \pi}{2}$ (۳) $\frac{k\pi + 3\pi}{2}$ (۴) $\frac{k\pi + \pi}{4}$

تجربی - ۹۷

۷۶۷- جواب‌های کلی معادله $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{2k\pi - \pi}{3}$ (۳) $\frac{2k\pi + \pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

ریاضی - ۹۲

۷۶۸- جواب‌های کلی معادله $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi - \pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi + \pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi - \pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi + \pi}{4}$

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۷۶۹- جواب‌های کلی معادله $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۷۷۰- جواب‌های کلی معادله $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ با شرط $x \neq \frac{k\pi}{2}$ کدام است؟

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

سؤال	گام
۷۶۱	۱۰۹
۷۶۲	۹۴ ۹۵
۷۶۳	۱۰۵ ۱۱۲
۷۶۴	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۱۸ ۱۲۱
۷۶۵	۱۱۲ ۱۱۶ ۱۲۱
۷۶۶	۱۱۲ ۱۱۳ ۱۱۵
۷۶۷	۹۶ ۱۱۲ ۱۱۴ ۱۲۱
۷۶۸	۱۰۶ ۱۱۲
۷۶۹	۹۵ ۱۱۲ ۱۲۱
۷۷۰	۱۱۲ ۱۲۱

آزمون فصل دوم (۷) (برگزیدهٔ کنکورهای سراسری)

آزمون ۷۸

- ۷۷۱- شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right)$ در بازه $[0, 4]$ است. مقدار b کدام است؟ ریاضی - ۹۷
-
- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲
- ۷۷۲- اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۶
- (۱) $-\frac{2}{3}$
(۲) $-\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{2}{3}$
- ۷۷۳- اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$ ، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟ خارج از کشور ریاضی - ۸۸
- (۱) $\frac{1}{5}$
(۲) $\frac{1}{8}$
(۳) $\frac{2}{4}$
(۴) $\frac{2}{5}$
- ۷۷۴- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin 3x + \sin x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟ خارج از کشور تجربی - ۹۷
- (۱) $\frac{k\pi}{5}$
(۲) $\frac{2k\pi}{5}$
(۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$
(۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$
- ۷۷۵- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$ در بازهٔ $[0, \pi]$ برابر کدام است؟ ریاضی - ۹۵
- (۱) $\frac{7\pi}{4}$
(۲) $\frac{9\pi}{4}$
(۳) $\frac{5\pi}{2}$
(۴) $\frac{11\pi}{3}$
- ۷۷۶- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟ تجربی - ۹۳
- (۱) $\frac{3\pi}{4}$
(۲) $\frac{5\pi}{4}$
(۳) $\frac{3\pi}{2}$
(۴) $\frac{7\pi}{4}$
- ۷۷۷- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ کدام است؟ ریاضی - ۹۳
- (۱) $\frac{k\pi}{2}$
(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
(۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$
(۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$
- ۷۷۸- جواب‌های کلی معادلهٔ $\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x$ کدام است؟ ریاضی - ۹۴
- (۱) $\frac{k\pi}{5}$
(۲) $\frac{2k\pi}{5}$
(۳) $\frac{3k\pi}{5}$
(۴) $\frac{1}{5}(2k+1)\pi$
- ۷۷۹- جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \sin 3x = \cos 2x$ کدام است؟ ریاضی - ۹۶
- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$
(۲) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$
(۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$
(۴) $\frac{k\pi}{3}$
- ۷۸۰- جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$ کدام است؟ ریاضی - ۹۷
- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{6}$
(۲) $\frac{(2k+1)\pi}{6}$
(۳) $k\pi - \frac{\pi}{6}$
(۴) $\frac{k\pi}{6}$