جلد دوم: پاسخ‌های تشریحی

جامع ریاضی ۱ و حسابان

+ موج آزمون ویراست دوم

رشتهٔ ریاضی

کاظم اجلالی، ارشک حمیدی

نشر الگو

فهرست

فصل اول: پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

فصل دوم: پاسخ آزمون‌ها

فصل اول

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

پاسخ سؤال‌های دست‌گرمی

۱- گزینهٔ ۲ از تساوی دو زوج مرتب نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}a+2b=-1\\2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow a-b=2$$

۲- گزینهٔ ۳ از هریک از عددهای ۱ و ۲ دو پیکان خارج شده است، پس $a+b=2$ و $a-b=6$ که نتیجه می‌شود $a=4$ و $b=-2$. بنابراین $ab=-8$.

۳- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(3,4)$ و $(3,m^2)$ نتیجه می‌شود $m^2=4$، پس $m=\pm2$. با توجه به زوج‌های مرتب $(4,m+n)$ و $(4,2n+1)$ نتیجه می‌شود $m+n=2n+1$، پس $n=m-1$. اگر $m=2$، آن‌گاه $n=1$ و $f=\{(3,4),(3,2),(4,3)\}$ که به خاطر دو زوج مرتب $(3,4)$ و $(3,2)$ که عضو رابطه هستند، این رابطه، تابع نیست. اگر $m=-2$، آن‌گاه $n=-3$ و $f=\{(3,4),(-2,-9),(4,-5)\}$. بنابراین رابطهٔ f، تابع است، پس $mn=6$.

۴- گزینهٔ ۱ برای اینکه برد تابع f تک‌عضوی باشد باید اعداد ۶، $3m$ و $2m+n$ یکسان باشند:

$$3m=6\Rightarrow m=2,\quad 2m+n=6\xrightarrow{m=2}4+n=6\Rightarrow n=2$$

بنابراین $mn=4$.

۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=4x+4\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{x}{2})=4(\frac{x}{2})+4=2x+4\\ f(\frac{x}{4})=4(\frac{x}{4})+4=x+4\end{cases}$$

بنابراین $f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})=2x+4-(x+4)=x$.

۶- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\frac{2}{x-1}$، آن‌گاه $t\neq0$ و $\frac{1}{t}=\frac{x-1}{2}$، پس $x=\frac{2}{t}+1=\frac{2+t}{t}$. به این ترتیب

$$f(\frac{2}{x-1})=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f(t)=\frac{\frac{2+t}{t}+1}{\frac{2+t}{t}-1}=\frac{2+2t}{2}=t+1$$

بنابراین اگر $x\neq0$، آن‌گاه $f(x)=x+1$.

۷- گزینهٔ ۴ چون $f(2)-f(4)=\frac{2}{5}$، پس ابتدا مقادیر $f(2)$ و $f(4)$ را حساب می‌کنیم:

$$2<4\Rightarrow f(2)=k\times2+4=2k+4,\quad 4\geq4\Rightarrow f(4)=\frac{2}{5}\times4=\frac{8}{5}$$

بنابراین

$$f(2)-f(4)=\frac{2}{5}\Rightarrow2k+4-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow2k=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}-4=-2$$

پس $2k=-2$، یعنی $k=-1$.

۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابع ثابت باشد، باید فقط یک عضو در برد آن وجود داشته باشد. با توجه به آنکه $f(1)=2$، پس $\begin{cases}a-b=2\\3a-7b=2\end{cases}$. بنابراین $a=3$ و $b=1$. در نتیجه $a+b=4$.

۹- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که چون تابع f همانی است، پس $f(x-4)=x-4$. بنابراین

$$(2a-7)x+b+1=x-4\Rightarrow\begin{cases}2a-7=1\Rightarrow a=4\\b+1=-4\Rightarrow b=-5\end{cases}$$

در نتیجه $f(a+b)=f(-1)=-1$.

راه‌حل دوم اگر در تساوی داده شده قرار دهیم $x=\frac{1}{2}$، به‌دست می‌آید

$$f(-\frac{7}{2})=(2a-7)\times\frac{1}{2}+b+1\Rightarrow-\frac{7}{2}=a-\frac{7}{2}+b+1\Rightarrow a+b=-1$$

۱۰- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=ax^2-3ax+x^2-bx+b=(a+1)x^2-(3a+b)x+b$$

برای اینکه تابع f خطی باشد، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس

$$a+1=0\Rightarrow a=-1\Rightarrow f(x)=(3-b)x+b$$

در نتیجه $f(1)=3-b+b=3$.

۱۱- گزینهٔ ۲ مقادیر $x=3$، $x=2$ و $x=0$ را در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$$f(3)=9a+3b+c,\quad f(2)=4a+2b+c,\quad f(0)=c$$

بنابراین

$$f(3)-2f(2)+2f(0)=9a+3b+c-8a-4b-2c+2c=a-b+c=f(-1)$$

۱۲- گزینهٔ ۴ تساوی را به شکل $2x+f(x)=4x\times f(x)-12$ می‌نویسیم. در نتیجه $(4x-1)\times f(x)=2x+12$، پس $f(x)=\frac{2x+12}{4x-1}$.

۱۳- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$، $x=-\frac{b}{2a}$ است. بنابراین طبق معادلهٔ داده شده $x=-\frac{2}{2a}$ طول رأس سهمی است. پس $1=\frac{-2}{2a}$ و در نتیجه $a=-1$. مختصات رأس سهمی در معادلهٔ آن صدق می‌کند، پس

$$-1=a+2+b\xrightarrow{a=-1}-1=-1+2+b\Rightarrow b=-2$$

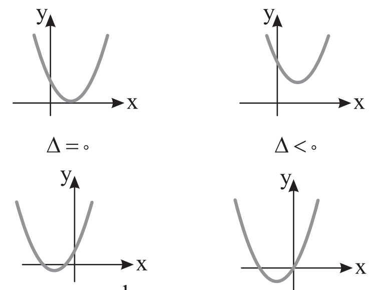
بنابراین $ab=2$.

۱۴- گزینهٔ ۱ چون سهمی در نقاطی به طول -1 و ۵ محور طول‌ها را قطع کرده است، این نقاط عرض یکسان دارند. پس معادلهٔ محور تقارن به‌صورت $x=\frac{5-1}{2}=2$ است که نقاط $(-1,0)$ و $(5,0)$ نسبت به آن قرینهٔ یکدیگرند.

۱۵- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم می‌شود که $c=5$. همچنین با توجه به معادلهٔ داده شده، طول رأس سهمی برابر $x=-\frac{b}{2}$ است، پس $-\frac{b}{2}=-2$. بنابراین $b=4$، در نتیجه $b-c=-1$.

۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که محور تقارن سهمی مورد نظر خط $x=-\frac{b}{2a}$ است. چون علامت a و b فرق می‌کند، پس $-\frac{b}{2a}>0$ و در نتیجه محور تقارن از ناحیه‌های اول و چهارم می‌گذرد (گزینه‌های (۱) و (۳)). همچنین، اگر سهمی از مبدأ مختصات بگذرد، آن‌گاه $c=0$، که درست نیست. بنابراین سهمی مورد نظر می‌تواند به‌صورت گزینهٔ (۳) باشد.

۱۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع در حالت‌های زیر از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد:



$\Delta<0$ ، $\Delta=0$

$\Delta>0, c=0, -\frac{b}{a}<0$ ، $\Delta>0, \frac{c}{a}>0, -\frac{b}{a}<0$

بنابراین Δ را حساب می‌کنیم: $\Delta=m^2-4(4-m^2)=5m^2-16$. اکنون توجه کنید که

حالت‌های اول و دوم: $\Delta\le 0\Rightarrow 5m^2-16\le 0\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt5}\le m\le \frac{4}{\sqrt5}$

حالت‌های سوم و چهارم:
$$\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow 5m^2-16>0\Rightarrow m<-\frac{4}{\sqrt5} \text{ یا } m>\frac{4}{\sqrt5}\\ \frac{c}{a}\ge 0\Rightarrow 4-m^2\ge 0\Rightarrow -2\le m\le 2\\ -\frac{b}{a}<0\Rightarrow -m<0\Rightarrow m>0\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{بازه‌های به‌دست آمده}]{\text{اشتراک‌گیری از}} \frac{4}{\sqrt5}<m\le 2$$

اجتماع محدوده‌های به‌دست آمده در همهٔ حالت‌ها برابر است با

$$-\frac{4}{\sqrt5}\le m\le 2$$

۱۸- گزینهٔ ۲ محیط شکل برابر است با

$$4x+4y=40\Rightarrow y=10-x$$

مساحت شکل برابر است با

$$S=2xy+xy=3xy=3x(10-x)=-3x^2+30x$$

بیشترین مقدار این عبارت درجهٔ دوم برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است. بنابراین

$$S_{max}=-\frac{900}{4(-3)}=75$$

۱۹- گزینهٔ ۳ اعدادی که جواب معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. با توجه به معادله مجموع این اعداد برابر $S=-\frac{b}{a}=3$ است.

۲۰- گزینهٔ ۴ اگر دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرج $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفر باشد، پس

$$x^2+kx+1=0\xrightarrow{\Delta<0}\Delta=k^2-4<0$$

$$k^2<4\Rightarrow |k|<2\Rightarrow -2<k<2$$

با توجه به مقادیر داده شده گزینهٔ (۴) درست است.

۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_f=\{x|9-x^2\ge 0, x^2-1>0\}$$

$$9-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 9\Rightarrow -3\le x\le 3$$

$$x^2-1>0\Rightarrow x^2>1\Rightarrow x>1 \text{ یا } x<-1$$

از اشتراک ناحیه‌های فوق معلوم می‌شود که $D_f=[-3,-1)\cup(1,3]$. پس عددهای صحیح ±3 و ±2 در دامنهٔ تابع هستند.

۲۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از $-4\le x\le 4$ نتیجه می‌گیریم $-8\le -2x\le 8$، پس $-5=3-8\le 3-2x\le 3+8=11$. بنابراین برد تابع f بازهٔ $[-5,11]$ است.

راه‌حل دوم چون $f(x)=-2x+3$ یک تابع خطی است که ضریب x در آن منفی است برد آن با توجه به دامنه برابر $[f(4),f(-4)]$ است که برابر $[-5,11]$ می‌شود.

۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$.
از طرف دیگر، اگر $x\in[-4,5]$، آن‌گاه

$$-4\le x\le 5\Rightarrow -3\le x+1\le 6\Rightarrow 0\le (x+1)^2\le 36\Rightarrow -3\le (x+1)^2-3\le 33$$

بنابراین بزرگ‌ترین عضو برد f برابر ۳۳ است.

۲۴- گزینهٔ ۴ در مورد گزینهٔ (۴)، $D_f=D_g=[0,1]$ و اگر $x\in[0,1]$، آن‌گاه $f(x)=g(x)$. بنابراین این دو تابع برابرند. در مورد گزینه‌های دیگر، یا دامنهٔ تابع‌ها برابر نیست، یا $f(x)\ne g(x)$.

گزینهٔ (۱) $D_f=\mathbb{R}-\{0\}, D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\ne D_g$

گزینهٔ (۲) $D_f=D_g=\mathbb{R}, \quad f(x)=|x|, g(x)=x\Rightarrow f(x)\ne g(x)$

گزینهٔ (۳) $D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty), D_g=[1,+\infty)\Rightarrow D_f\ne D_g$

۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $S=\pi r^2$ و در نتیجه $r=\frac{\sqrt S}{\sqrt\pi}$. بنابراین

$$P=2\pi r=2\pi(\frac{\sqrt S}{\sqrt\pi})\Rightarrow P(S)=2\sqrt\pi\sqrt S=2\sqrt{\pi S}$$

۲۶- گزینهٔ ۱ اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم، شعاع دایره $\frac{a}{2}$ و محیط مربع برابر $4a$ می‌شود. بنابراین

$$\text{مساحت مربع}=a^2, \quad \text{مساحت دایره}=\pi\frac{a^2}{4}, \quad P=4a\Rightarrow a=\frac{P}{4}$$

$$\text{مساحت قسمت‌های رنگ شده}=a^2-\frac{\pi a^2}{4}=a^2(\frac{4-\pi}{4})$$

$$=\frac{P^2}{16}(\frac{4-\pi}{4})=(\frac{4-\pi}{64})P^2$$

۲۷- گزینهٔ ۳ معادلهٔ نیم‌دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+y^2=1\Rightarrow y^2=1-x^2\xrightarrow{y\ge 0}y=\sqrt{1-x^2}$$

بنابراین طول مستطیل $2x$ و عرض آن $\sqrt{1-x^2}$ می‌شود و محیط آن برابر است با $P(x)=2(2x+\sqrt{1-x^2})=4x+2\sqrt{1-x^2}$.

۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{matrix}(f+g)(2)=f(2)+g(2)=-1-2=-3\\ (f-g)(1)=f(1)-g(1)=2-(-1)=3\end{matrix}\Rightarrow\frac{(f+g)(2)}{(f-g)(1)}=\frac{-3}{3}=-1$$

۲۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_{\frac{f}{g}}=\{x|x\in D_f\cap D_g\ ,\ g(x)\neq ۰\}=\{۱,۲,۳\}$$

بنابراین

$$(\frac{f}{g})(۱)=\frac{f(۱)}{g(۱)}=\frac{۶}{-۱}=-۶,\quad (\frac{f}{g})(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۳}{۱}=۳$$

$$(\frac{f}{g})(۳)=\frac{f(۳)}{g(۳)}=\frac{۰}{۹}=۰$$

بنابراین مجموع مقادیر تابع $\frac{f}{g}$ برابر ۳- است.

۳۰- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^۲+۳x+۲)-(x^۲+۲x+۱)=x+۱$$

بنابراین $(f-g)(x-۱)=x-۱+۱=x$.

راه‌حل دوم چون $f(۱)=۶$ و $g(۱)=۴$، پس $(f-g)(۱)=۶-۴=۲$. اکنون اگر در عبارت $(f-g)(x-۱)$ به‌جای x قرار دهیم ۲، $(f-g)(۱)$ به‌دست می‌آید که برابر ۲ است. تنها در عبارت گزینهٔ (۱)، با قرار دادن $x=۲$، حاصل ۲ می‌شود.

۳۱- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول دامنهٔ تابع f به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} ۸-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۸ \\ x-۳>۰\Rightarrow x>۳ \end{cases}\Rightarrow ۳<x\leq ۸\Rightarrow D_f=(۳,۸]$$

دامنهٔ تابع g به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

x	$-\infty$		۳		۵		$+\infty$
$\frac{x-۳}{۵-x}$		$-$	۰	$+$	ت.ن	$-$	

$$\Rightarrow D_g=[۳,۵)$$

بنابراین دامنهٔ تابع $f\times g$ به‌صورت زیر است

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(۳,۸]\cap[۳,۵)=(۳,۵)$$

راه‌حل دوم با توجه به گزینه‌ها امتحان می‌کنیم که آیا عدد ۶ در دامنهٔ تابع $f\times g$ قرار دارد یا نه. چون $x=۶$ عبارت زیر رادیکال در تابع g را منفی می‌کند، پس $x=۶$ در دامنهٔ تابع g نیست و در نتیجه در دامنهٔ $f\times g$ هم نیست. پس گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نمی‌توانند جواب باشند.

۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=|x-۱|=\begin{cases} x-۱ & x\geq ۱ \\ -x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases} ۲x-۱-(x-۱) & x\geq ۱ \\ ۳x+۱-(-x+۱) & x<۱ \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x & x\geq ۱ \\ ۴x & x<۱ \end{cases}$$

۳۳- گزینهٔ ۳ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(-۱)=۲$$

$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(-۱)=۲$$

$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۳)=۲$$

$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(-۲)=۴$$

بنابراین $gof=\{(۱,۲),(۲,۲),(-۱,۲),(۳,۴)\}$.

۳۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(fof)(۳)=f(f(۳))$. از طرف دیگر،

$$f(۳)=۳^۲+۴=۱۳,\quad f(f(۳))=f(۱۳)=\frac{۱۳-۱}{۲}=۶$$

بنابراین $(fof)(۳)=۶$.

۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا $(fog)(a)$ و $(gof)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(a)=f(g(a))=f(۳a-۲)=۲(۳a-۲)+۳=۶a-۱$$

$$(gof)(a)=g(f(a))=g(۲a+۳)=۳(۲a+۳)-۲=۶a+۷$$

بنابراین معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$۶a-۱+۶a+۷=۲a\Rightarrow ۱۰a=-۶\Rightarrow a=-\frac{۳}{۵}$$

۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^۲+۲x)=a(x^۲+۲x)+۱=ax^۲+۲ax+۱$$

بنابراین باید مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+۲ax+۱=۲$ دوعضوی باشد. یعنی باید Δ ی معادلهٔ $ax^۲+۲ax-۱=۰$ مثبت باشد:

$$\Delta=(۲a)^۲-۴a(-۱)=۴a^۲+۴a>۰\Rightarrow ۴a(a+۱)>۰\Rightarrow a>۰ \text{ یا } a<-۱$$

۳۷- گزینهٔ ۱ به محاسبات زیر توجه کنید

$$(fog)(-۳)=f(g(-۳))=f(۱)=\sqrt{۳}$$

$$(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۰)=۲$$

$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۱)=\sqrt{۳}$$

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۳) \text{ تعریف نشده}$$

بنابراین $fog=\{(-۳,\sqrt{۳}),(-۲,۲),(-۱,\sqrt{۳})\}$.

۳۸- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع fog به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq ۲, -۱\leq ۵-۲x\leq ۳\}$$

از نامعادلهٔ $-۱\leq ۵-۲x\leq ۳$ نتیجه می‌شود $-۶\leq -۲x\leq -۲$ پس $۱\leq x\leq ۳$.

بنابراین $D_{fog}=\{۰\leq x\leq ۲, ۱\leq x\leq ۳\}=[۱,۲]$.

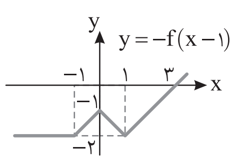
۳۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به‌ترتیب $D_f=[۱,+\infty)$ و $D_g=[-\sqrt{۳},\sqrt{۳}]$ است. بنابراین

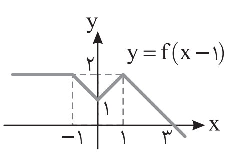
$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x|\ x\geq ۱, -\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}\}$$

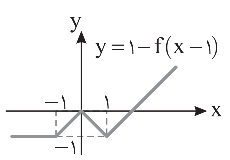
از نامعادلهٔ $-\sqrt{۳}\leq\sqrt{x-۱}\leq\sqrt{۳}$ نتیجه می‌شود $x-۱\leq ۳$ پس $x\leq ۴$.

بنابراین $D_{gof}=\{x|x\geq ۱,\ x\leq ۴\}=[۱,۴]$.

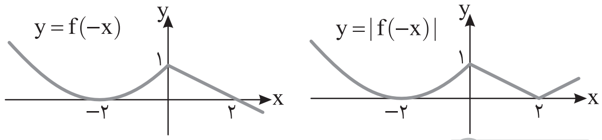
۴۰- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x-۱)$ به‌دست بیاید. در آخر، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۱-f(x-۱)$ به‌دست بیاید.



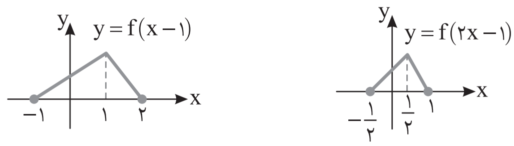




۴۱- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. اکنون، برای رسم کردن نمودار تابع $y=|f(-x)|$، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

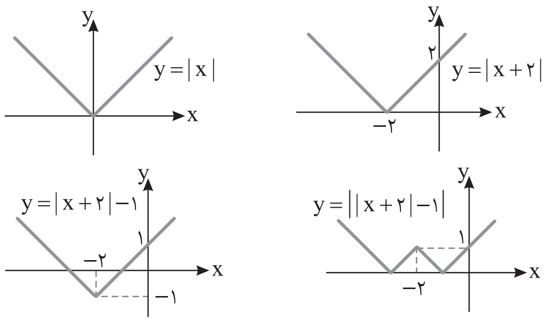


۴۲- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ کافی است ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-۱)$ رسم شود. سپس در نمودار اخیر طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ به‌دست آید. توجه کنید که با این کار نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود.



۴۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(۲(x-۱))-۱$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۲(۲x-۱))-۱=f(۴x-۲)-۱$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=۲(f(۴x-۲)-۱)$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابعی که نمودار آن به‌دست آمده به‌صورت $y=۲f(۴x-۲)-۲$ است.

۴۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را رسم می‌کنیم و آن را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+۲|$ به‌دست آید. این نمودار را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x+۲|-۱$ رسم شود. اکنون قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=||x+۲|-۱|$ رسم شود.



۴۵- گزینهٔ ۳ در تابع $\{(۱,۳),(۲,۴),(۵,۷),(۶,۱)\}$ هر مؤلفهٔ دوم متناظر دقیقاً یک مؤلفهٔ اول است. یعنی هیچ دو زوج مرتبی مؤلفهٔ دوم یکسان ندارند، پس این تابع یک‌به‌یک است.

۴۶- گزینهٔ ۲ چون مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(a,۱)$ و $(۴-a,۱)$ یکسان هستند، پس باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشند،

$$۴-a=a\Rightarrow a=۲$$

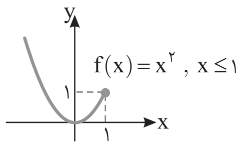
به همین ترتیب باید مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب $(۱۰,۳)$ و $(۱+b,۳)$ برابر باشند،

$$۱۰=۱+b\Rightarrow b=۹$$

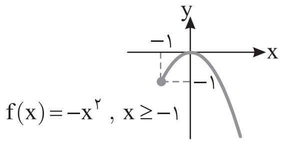
بنابراین $a+b=۱۱$.

۴۷- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار تابع‌های داده شده، واضح است که تابع $f(x)=۱-x^۲, x\le ۰$ یک‌به‌یک است.

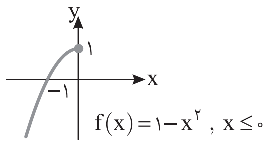
گزینهٔ (۱)



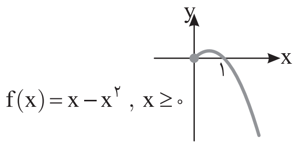
گزینهٔ (۲)



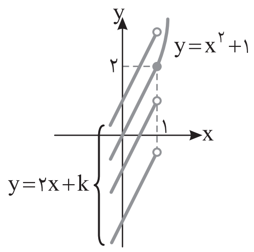
گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)



۴۸- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول نمودار تابع به ازای مقادیر مختلف k به شکل زیر است



واضح است که بیشترین مقدار تابع $y=۲x+k$ به ازای $x<۱$ نباید از ۲ بیشتر باشد، پس

$$۲+k\le ۲\Rightarrow k\le ۰$$

راه‌حل دوم اگر $x\ge ۱$، آن‌گاه تابع $g(x)=x^۲+۱$ یک‌به‌یک است و $R_g=[۲,+\infty)$ و اگر $x<۱$، آن‌گاه تابع $h(x)=۲x+k$ یک‌به‌یک است و $R_h=(-\infty,۲+k)$. در نتیجه برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد باید $R_g\cap R_h=\varnothing$، پس $۲+k\le ۲\Rightarrow k\le ۰$

۴۹- گزینهٔ ۳ تابع گزینهٔ (۱) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-۳<-۱$، اما $f(-۳)<f(-۱)$. تابع گزینهٔ (۲) اکیداً نزولی نیست، زیرا $۰<۱$، اما $f(۰)=f(۱)$. تابع گزینهٔ (۳) اکیداً نزولی است، زیرا $-۳<-۱<۱$ و $f(-۳)>f(-۱)>f(۱)$. تابع گزینهٔ (۴) اکیداً نزولی نیست، زیرا $-۲<-۱$، اما $f(-۲)=f(-۱)$.

۵۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f نزولی است و $۱<۲<۳$، پس

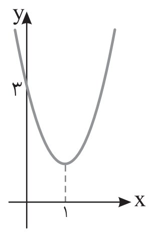
$$f(۱)\ge f(۲)\ge f(۳)\Rightarrow ۲a+۱\ge a-۲\ge ۲-a$$

اکنون توجه کنید که

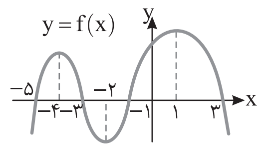
$$۲a+۱\ge a-۲\Rightarrow a\ge -۳ \quad (۱),\qquad a-۲\ge ۲-a\Rightarrow a\ge ۲ \quad (۲)$$

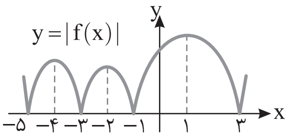
اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $a\ge ۲$.

۵۱- گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $y=۲x^{۲}-۴x+۳$ برابر است با $-\frac{b}{۲a}=۱$. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ و هر زیر مجموعهٔ آن اکیداً صعودی است. از بازه‌های داده شده فقط بازهٔ $(۱,۲)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.

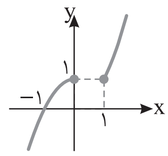


۵۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌دست می‌آید. بنابراین، اگر نمودار تابع $y=f(x-۱)$ را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف کنیم، نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌دست می‌آید. از روی این نمودار معلوم است که تابع $y=|f(x)|$ روی بازهٔ $(-۲,-۱)$ اکیداً نزولی است.



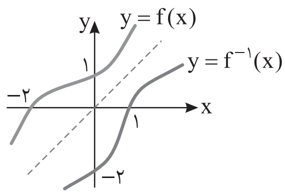


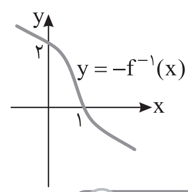
۵۳- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار، تابع f صعودی است.



۵۴- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابعی وارون‌پذیر باشد، باید یک‌به‌یک باشد. تابع گزینهٔ (۱) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۱)=f(۳)=۲$. تابع گزینهٔ (۲) یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۲)=f(۵)=۳$. تابع گزینهٔ (۳) یک‌به‌یک است، زیرا $f(۱)=-۱$، $f(۲)=-۲$، $f(۳)=-۴$ و $f(۴)=-۵$، بنابراین مقادیر تابع f متمایزند. تابع گزینهٔ (۴) هم یک‌به‌یک نیست، زیرا $f(۱)=f(۳)=۰$.

۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار f را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم. سپس نمودار تابع $-f^{-۱}$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید قرینهٔ نمودار تابع $f^{-۱}$ را نسبت به محور x رسم کنیم.





۵۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f^{-۱}og)(۲)=f^{-۱}(g(۲))=f^{-۱}(۱)=۴$$

$$(g^{-۱}of)(۳)=g^{-۱}(f(۳))=g^{-۱}(۴)=۳$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(۱)=۲$، پس $f^{-۱}(۲)=۱$. به این ترتیب، $f(۱)+f^{-۱}(۲)=۳$.

۵۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $y=(x-۲)^{۲}-۴$ می‌نویسیم و x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$(x-۲)^{۲}=y+۴\Rightarrow |x-۲|=\sqrt{y+۴}\xrightarrow{x<۲}$$

$$۲-x=\sqrt{y+۴}\Rightarrow x=۲-\sqrt{y+۴}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۴}$$

راه‌حل دوم چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۲۱,-۳)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(-۳,۲۱)$ عبور می‌کند. اکنون گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

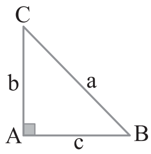
گزینهٔ (۱) $f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۲۵}=-۳$

گزینهٔ (۲) $f^{-۱}(۲۱)=-۲+\sqrt{۲۵}=۳$

گزینهٔ (۳) $f^{-۱}(۲۱)=۲-\sqrt{۱۷}$

گزینهٔ (۴) $f^{-۱}(۲۱)=۲+\sqrt{۱۷}$

۵۹- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل،



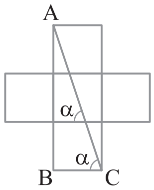
$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}=\frac{c}{a}\Rightarrow c=\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}a$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow a^{۲}=۲۵+(\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}a)^{۲}\Rightarrow a^{۲}=۲۵+\frac{۲۴}{۴۹}a^{۲}$$

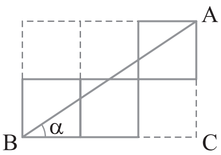
$$\frac{۲۵}{۴۹}a^{۲}=۲۵\Rightarrow a^{۲}=۴۹\Rightarrow a=۷$$

۶۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat{C}B$. در نتیجه،



$$\tan\alpha=\tan A\hat{C}B=\frac{AB}{BC}=\frac{۳}{۱}=۳$$

۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا شکل را به‌صورت مقابل کامل می‌کنیم. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،



$$AB^{۲}=AC^{۲}+BC^{۲}=۲^{۲}+۳^{۲}=۱۳\Rightarrow AB=\sqrt{۱۳}$$

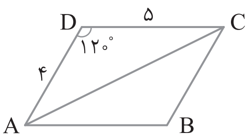
در نتیجه، $\triangle ABC:\ \sin\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$.

۶۲- گزینهٔ ۴ صورت کسر برابر است با

$$۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۳}-۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=۰$$

بنابراین $A=۰$.

۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که



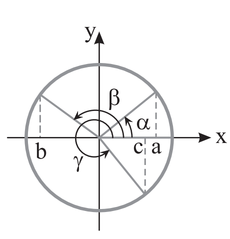
$$S_{ABCD}=۲S_{ADC}$$

$$=۲(\frac{۱}{۲}DC\times AD\times\sin\hat{D})$$

$$=۵\times۴\times\sin۱۲۰^{\circ}=۲۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۰\sqrt{۳}$$

۶۴- گزینهٔ ۲ اگر $۱۸۰^{\circ}<\alpha<۲۷۰^{\circ}$، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

۶۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل مقابل معلوم می‌شود که $b<۰$ و $a>c$. بنابراین $a>c>b$.



۶۶- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin\alpha\cos\alpha>۰$، مشخص است که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم‌علامت هستند. با توجه به $\cos\alpha\cot\alpha<۰$، مشخص است که مقادیر $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ مختلف‌العلامت هستند. بنابراین انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد. در این ناحیه،

$$\sin\alpha<۰,\quad \cos\alpha<۰,\quad \cot\alpha>۰$$

۶۷- گزینهٔ ۱ چون $۹۰^\circ\le\alpha\le۱۸۰^\circ$، پس $۰\le\sin\alpha\le۱$ و در نتیجه

$$۰\le\frac{m}{۲}-۱\le۱\Rightarrow۱\le\frac{m}{۲}\le۲\Rightarrow۲\le m\le۴$$

۶۸- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $-۱\le\sin x\le۱$، بنابراین $۰\le\sin^۲x\le۱$، پس $۰\le۳\sin^۲x\le۳$ و در نتیجه $۲\le۲+۳\sin^۲x\le۵$. بنابراین کمترین مقدار عبارت ۲ و بیشترین مقدار آن ۵ است، که حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۰ می‌شود.

۶۹- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه محور طول‌ها با خط مورد نظر زاویهٔ مثلثاتی ۳۰° تشکیل می‌دهد، شیب خط برابر $\tan ۳۰^\circ$ یا همان $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است.

پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x+b$ است و چون خط از نقطهٔ $(۶,\sqrt{۳})$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:

$$\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times۶+b\Rightarrow b=-\sqrt{۳}$$

پس معادلهٔ خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-\sqrt{۳}$ یا همان $x-\sqrt{۳}y-۳=۰$ است.

۷۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{۱-\tan x}{\tan x}=۲\Rightarrow ۱-\tan x=۲\tan x\Rightarrow\tan x=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین $\cot x=\frac{۱}{\tan x}=۳$. در نتیجه $\frac{\cot x}{\cot x-۱}=\frac{۳}{۳-۱}=\frac{۳}{۲}$.

۷۱- گزینهٔ ۲ با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ می‌توان نوشت

$$\left(\frac{۱}{۲m-۱}\right)(m+۲)=۱\Rightarrow ۲m-۱=m+۲\Rightarrow m=۳$$

بنابراین $\tan\alpha=\frac{۱}{۵}$ و $\cot\alpha=۵$ و در نتیجه

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{۲۵}+۲۵=\frac{۶۲۶}{۲۵}$$

۷۲- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ می‌توان نوشت

$$\left(\frac{۳}{۵}\right)^۲+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۴}{۵}$$

با توجه به اینکه $۹۰^\circ<\alpha<۱۸۰^\circ$، مقدار $\cos\alpha$ باید منفی باشد، پس $\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$. با توجه به رابطهٔ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، به‌دست می‌آید

$\tan\alpha=\frac{\frac{۳}{۵}}{-\frac{۴}{۵}}=-\frac{۳}{۴}$. بنابراین $\tan\alpha-\cos\alpha=-\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۲۰}$.

۷۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$ و $۱+\cot^۲x=\frac{۱}{\sin^۲x}$ به‌دست می‌آید

$$A=\frac{\tan^۲x}{\frac{۱}{\cos^۲x}}+\frac{\cot^۲x}{\frac{۱}{\sin^۲x}}=\tan^۲x\cos^۲x+\cot^۲x\sin^۲x$$

$$=\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}\times\cos^۲x+\frac{\cos^۲x}{\sin^۲x}\times\sin^۲x=\sin^۲x+\cos^۲x=۱$$

۷۴- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{\sin^۴\theta}-\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\frac{\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}$$

$$=\frac{\cos^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}{\sin^۴\theta}=\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\cot^۲\theta$$

راه‌حل دوم اگر در عبارت داده شده به جای θ مقدار ۳۰° را قرار دهیم، مقدار عبارت برابر است با $\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}-۹=۱۶-۴-۹=۳$. اگر در گزینه‌ها به جای θ مقدار ۳۰° را قرار دهیم، فقط $\cot^۲\theta$ برابر ۳ می‌شود. تنها گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۷۵- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی $\tan\alpha+\cot\alpha=۳$ را به توان دو می‌رسانیم: $\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲\tan\alpha\cot\alpha=۹$.

چون $\tan\alpha\cot\alpha=۱$، پس

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲=۹\Rightarrow\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=۷$$

۷۶- گزینهٔ ۱ دو طرف تساوی داده شده را بر $\sin x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۳+\frac{۲\cos x}{\sin x}=\frac{۳}{\sin x}\Rightarrow ۳+۲\cot x=\frac{۳}{\sin x}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$۹+۱۲\cot x+۴\cot^۲x=\frac{۹}{\sin^۲x}=۹(۱+\cot^۲x)$$

$$۹+۱۲\cot x+۴\cot^۲x=۹+۹\cot^۲x\Rightarrow۵\cot^۲x-۱۲\cot x=۰$$

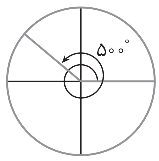
$$\cot x=۰,\ \cot x=\frac{۱۲}{۵}$$

چون $\cos x\ne۰$، پس $\cot x\ne۰$ و در نتیجه $\cot x=\frac{۱۲}{۵}$.

۷۷- گزینهٔ ۴ در تساوی $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$ قرار می‌دهیم $D=۷۵^\circ$:

$$\frac{۷۵^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۵\pi}{۱۲}$$

۷۸- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ۵۰۰° را می‌توان ۵ تا ۹۰° به علاوهٔ ۵۰° در نظر گرفت. ۵ تا ۹۰° یعنی ۵ تا ربع دایره، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ ۵۰۰° در ناحیهٔ دوم قرار دارد.



راه‌حل دوم $۵۰۰^\circ=۳۶۰^\circ+۱۴۰^\circ$ و $۹۰^\circ\le۱۴۰^\circ\le۱۸۰^\circ$، پس انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی ۵۰۰° در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

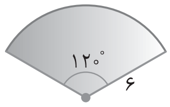
۷۹- گزینهٔ ۳ ابتدا اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB را برحسب رادیان حساب می‌کنیم:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{۹}$$

طول مسیر ماهواره برابر طول کمان AB است که برابر است با

$$l=r\times\theta\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=۳۶۰۰۰\times\frac{\pi}{۹}=۴۰۰۰\pi\ \text{کیلومتر}$$

۸۰- گزینهٔ ۱ ناحیهٔ مورد نظر قطاعی از دایرهٔ به شعاع ۶ است، که اندازهٔ زاویهٔ قطاع برحسب درجه ۱۲۰° است. ابتدا اندازهٔ زاویهٔ قطاع را برحسب رادیان حساب می‌کنیم. اگر این اندازه θ باشد، آن‌گاه



$$\frac{۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{\theta}{\pi}\Rightarrow\theta=\frac{۲\pi}{۳}$$

مساحت قطاعی که در آن $r=۶$ و $\theta=\frac{۲\pi}{۳}$ برابر است با

$$\frac{۱}{۲}r^۲\theta=\frac{۱}{۲}\times۶^۲\times\frac{۲\pi}{۳}=۱۲\pi\ m^۲$$

۸۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

بنابراین

$$A=\frac{-۲\sin\alpha-۴\sin\alpha}{-۳\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{-۶\sin\alpha}{-۲\cos\alpha}=۳\tan\alpha$$

۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\ ,\qquad \sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\ ,\qquad \cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha-\sin\alpha}=\frac{-۲\cos\alpha}{-۲\sin\alpha}=\cot\alpha$$

۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin۱۳۵^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=\sin۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\cos۱۲۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\cos۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{\sin۱۳۵^\circ-\cos۱۲۰^\circ}{\sin۱۳۵^\circ+\cos۱۲۰^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}$$
$$=\frac{(\sqrt{۲}+۱)^۲}{۲-۱}=(\sqrt{۲}+۱)^۲=۳+۲\sqrt{۲}$$

۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{۷\pi}{۶}=\sin(\pi+\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$
$$\tan\frac{۵\pi}{۴}=\tan(\pi+\frac{\pi}{۴})=\tan\frac{\pi}{۴}=۱$$
$$\cot\frac{۷\pi}{۴}=\cot(۲\pi-\frac{\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۴}=-۱$$
$$\cos\frac{۵\pi}{۳}=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $A=-\frac{۱}{۲}\times۱-۱\times\frac{۱}{۲}=-۱$.

۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{\pi}{۸}+\frac{۷\pi}{۸}=\pi\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۸}=-\cos\frac{۷\pi}{۸}$$
$$\frac{۳\pi}{۸}+\frac{۵\pi}{۸}=\pi\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{۸}=-\cos\frac{۵\pi}{۸}$$

بنابراین

$$\cos^۳\frac{\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۳\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}$$
$$=-\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}-\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۵\pi}{۸}+\cos^۳\frac{۷\pi}{۸}=۰$$

۸۶- گزینهٔ ۱ از رابطه‌های نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه‌ها نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos۲۰^\circ\cos۴۰^\circ-\sin۲۰^\circ\sin۴۰^\circ}{\sin۲۰^\circ\cos۴۰^\circ+\sin۴۰^\circ\cos۲۰^\circ}=\frac{\cos(۲۰^\circ+۴۰^\circ)}{\sin(۲۰^\circ+۴۰^\circ)}=\cot۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

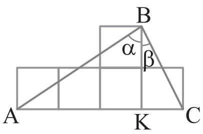
۸۷- گزینهٔ ۴ چون $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$، پس

$$\sin۳x\cos۲x+\cos۳x\sin۲x=\sin(۳x+۲x)=\sin۵x$$

بنابراین مقدار عددی عبارت مورد نظر به ازای $x=\frac{\pi}{۱۵}$ برابر می‌شود با

$$\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۸۸- گزینهٔ ۲ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. در این صورت، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،



$$\triangle AKB: AB^۲=AK^۲+BK^۲=۳^۲+۲^۲=۱۳\Rightarrow AB=\sqrt{۱۳}$$
$$\triangle BKC: BC^۲=BK^۲+CK^۲=۲^۲+۱^۲=۵\Rightarrow BC=\sqrt{۵}$$

اکنون توجه کنید که $A\hat{B}C=\alpha+\beta$، در نتیجه

$$\cos(A\hat{B}C)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۲}{\sqrt{۵}}-\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{۴}{\sqrt{۶۵}}-\frac{۳}{\sqrt{۶۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۶۵}}=\frac{\sqrt{۶۵}}{۶۵}$$

۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin۲۵^\circ+\cos۲۵^\circ=\sqrt{۲}\sin(۲۵^\circ+۴۵^\circ)=\sqrt{۲}\sin۷۰^\circ$$

در نتیجه، چون $\sin۷۰^\circ=\cos۲۰^\circ$، پس

$$\frac{\sin۲۵^\circ+\cos۲۵^\circ}{\cos۲۰^\circ}=\frac{\sqrt{۲}\sin۷۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}=\frac{\sqrt{۲}\cos۲۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}=\sqrt{۲}$$

۹۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$A=۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin۱۵^\circ+\frac{۱}{۲}\cos۱۵^\circ)$$
$$=۲(\cos۳۰^\circ\sin۱۵^\circ+\sin۳۰^\circ\cos۱۵^\circ)$$
$$=۲\sin(۳۰^\circ+۱۵^\circ)=۲\sin(۴۵^\circ)=\sqrt{۲}$$

۹۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin\alpha$ مقداری منفی است. پس

$$\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\Rightarrow\frac{۱}{۳}=۱-۲\sin^۲\alpha\Rightarrow۲\sin^۲\alpha=\frac{۲}{۳}$$
$$\sin^۲\alpha=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-\sqrt{۳}}{۳},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\ (\text{غ.ق.ق})$$

۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$. پس

$$\frac{۱-۲\sin^۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos۲(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cos x}=\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}-۲x)}{\cos x}$$
$$=\frac{\sin۲x}{\cos x}=\frac{۲\sin x\cos x}{\cos x}=۲\sin x$$

۹۳- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\sin^2 15^\circ}+\frac{1}{\cos^2 15^\circ}=\frac{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ\cos^2 15^\circ}$$
$$=\frac{1}{(\sin 15^\circ\cos 15^\circ)^2}=\frac{1}{(\frac{1}{2}\sin 30^\circ)^2}=\frac{1}{(\frac{1}{4})^2}=16$$

۹۴- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه $\frac{3\pi}{8}$ رادیان، نصف $\frac{3\pi}{4}$ رادیان است، در تساوی $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ قرار می‌دهیم $\alpha=\frac{3\pi}{8}$ و در نتیجه

$$\cos(2\times\frac{3\pi}{8})=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1\Rightarrow\cos\frac{3\pi}{4}=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$$
$$\cos(\pi-\frac{\pi}{4})=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$$
$$2\cos^2\frac{3\pi}{8}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\cos^2\frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

۹۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 105^\circ=\cos(90^\circ+15^\circ)=-\sin 15^\circ$$
$$\sin 105^\circ=\sin(90^\circ+15^\circ)=\cos 15^\circ$$

بنابراین

$$3\cos^2 105^\circ+\sin^2 105^\circ=3\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ$$
$$=2\sin^2 15^\circ+(\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ)=2\sin^2 15^\circ+1$$
$$=1-\cos(2\times 15^\circ)+1=2-\cos 30^\circ=2-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$$

۹۶- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول می‌توان نوشت

$$\frac{\sin 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ}-\frac{\cos 22.5^\circ}{\sin 22.5^\circ}=\frac{\sin^2 22.5^\circ-\cos^2 22.5^\circ}{\sin 22.5^\circ\times\cos 22.5^\circ}$$
$$=\frac{-\cos(2\times 22.5^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(2\times 22.5^\circ)}=\frac{-\cos 45^\circ}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ}=-2$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$، بنابراین

$$\tan 22.5^\circ-\cot 22.5^\circ=-(\cot 22.5^\circ-\tan 22.5^\circ)$$
$$=-2\cot 45^\circ=-2$$

۹۷- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}=\frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{1}{\cos^2 15^\circ}}=\sin 15^\circ\cos 15^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$، پس

$$\frac{\tan 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}$$

۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{4}+x)=7\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=7\Rightarrow\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=7$$
$$1+\tan x=7-7\tan x\Rightarrow 8\tan x=6\Rightarrow\tan x=\frac{3}{4}$$

بنابراین

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos x=\frac{4}{5}$$

پس

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{\sin x}{\frac{4}{5}}\Rightarrow\sin x=\frac{3}{5}$$

۹۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan 285^\circ=\tan(180^\circ+105^\circ)=\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)$$
$$=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3}$$
$$=\frac{1+3+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$$

۱۰۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $\alpha=a-b$ و $\beta=a+b$. در این صورت $2b=\beta-\alpha$ و در نتیجه

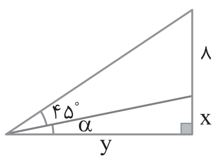
$$\tan 2b=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3+4}{1-12}=-\frac{7}{11}$$

پس $\cot 2b=-\frac{11}{7}$.

۱۰۱- گزینهٔ ۲ چون $\tan(\alpha+35^\circ)=\frac{1}{2}$، پس

$$\tan(10^\circ-\alpha)=\tan(45^\circ-(\alpha+35^\circ))=\frac{\tan 45^\circ-\tan(\alpha+35^\circ)}{1+\tan 45^\circ\tan(\alpha+35^\circ)}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

۱۰۲- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل،



$\tan\alpha=\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ و

$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{8+x}{y}$$

از طرف دیگر،

$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{\tan 45^\circ+\tan\alpha}{1-\tan 45^\circ\tan\alpha}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

بنابراین

$$\frac{8+x}{y}=3,\quad\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2x$$

در نتیجه

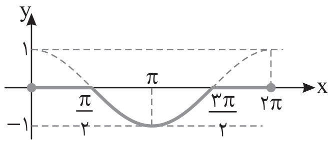
$$\frac{8+x}{2x}=3\Rightarrow 6x=8+x\Rightarrow x=\frac{8}{5}=1.6$$

۱۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos x}{2} & \cos x\geq 0\\[2mm] \dfrac{\cos x+\cos x}{2} & \cos x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\ \text{یا}\ \dfrac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\\[2mm] \cos x & \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

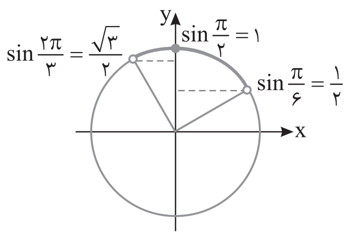
بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو رسم می‌شود:

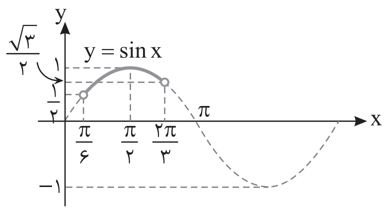


۱۰۴- گزینهٔ ۲ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{6}<x<\frac{2\pi}{3}$، آن‌گاه $\frac{1}{2}<\sin x\leq 1$ و می‌توان نوشت

$$\frac{1}{2}<\frac{m-1}{4}\leq 1\Rightarrow 2<m-1\leq 4\Rightarrow 3<m\leq 5$$

بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ۴ و ۵ باشد.





۱۰۵- گزینهٔ ۳ می‌دانیم دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)$ و $y=a\cos(bx+c)$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است. پس $T_f=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ و $T_g=\frac{2\pi}{|-a|}=\frac{2\pi}{|a|}$. بنابراین

$$T_f=2T_g\Rightarrow 4=\frac{4\pi}{|a|}\Rightarrow |a|=\pi\Rightarrow a=\pm\pi$$

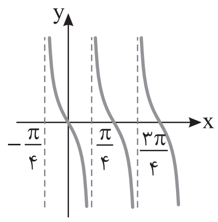
۱۰۶- گزینهٔ ۱ چون $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$، پس

$$f(x)=\sin^2 x+12=\frac{1-\cos 2x}{2}+12=\frac{25-\cos 2x}{2}$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$.

نکته دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin^2(bx+c)$ و $y=a\cos^2(bx+c)$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

۱۰۷- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=-\tan 2x$ روی بازه‌های به صورت $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4})$ که $k\in\mathbb{Z}$ اکیداً نزولی است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ اکیداً نزولی است و روی بازه‌های دیگر چنین نیست.



۱۰۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع تانژانت روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ اکیداً صعودی است، پس

$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan(-\frac{\pi}{4})<\tan x<\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow -1<\tan x<1$$

$$-1<\frac{2m-3}{5}<1\Rightarrow -1<m<4$$

۱۰۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos x$ می‌نویسیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+x\Rightarrow 2k\pi=-\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-x\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8}\ ,k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را مشخص می‌کنیم:

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۱۱۰- گزینهٔ ۲ معادله را به صورت $\tan(x-\frac{\pi}{6})=\tan 2x$ می‌نویسیم و جواب‌های آن به صورت زیر هستند

$$2x=k\pi+x-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ را به‌دست می‌آوریم. به دو روش می‌توان این کار را انجام داد.

راه‌حل اول

k	۰	۱	۲	−۱
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$ (غ.ق.ق.)	$-\frac{7\pi}{6}$ (غ.ق.ق.)

راه‌حل دوم

$$-\pi<k\pi-\frac{\pi}{6}<\pi\Rightarrow -\frac{5\pi}{6}<k\pi<\frac{7\pi}{6}\Rightarrow -\frac{5}{6}<k<\frac{7}{6},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0,1\}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ دو جواب دارد.

۱۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\sin(\frac{\pi}{۶}-۲x)=\sin\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{۶}-۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{۶}-۲x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{(۲k+۱)}{۲}\pi+\frac{\pi}{۴}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

۱۱۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۳\tan^{۲}x=۱\Rightarrow\tan^{۲}x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\tan x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت $x=k\pi+\frac{\pi}{۶}$ و $x=k\pi-\frac{\pi}{۶}$ هستند.

۱۱۳- گزینهٔ ۴ جایی که نمودار تابع f خط $y=-۱$ را قطع می‌کند، $f(x)=-۱$ است، پس

$$\sin(\frac{\pi}{۴}-۲x)=۰\Rightarrow\frac{\pi}{۴}-۲x=k\pi\Rightarrow ۲x=-k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$x=-\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ عبارت‌اند از

k	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	$\frac{\pi}{۸}$	$-\frac{۳\pi}{۸}$	$-\frac{۷\pi}{۸}$	$\frac{۵\pi}{۸}$	$\frac{۹\pi}{۸}$

بنابراین نمودار تابع خط $y=-۱$ را در پنج نقطه از بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ قطع می‌کند.

۱۱۴- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

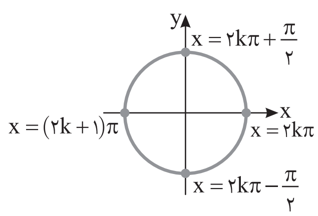
$$\sin^{۳}x-\sin x=۰\Rightarrow\sin x(\sin^{۲}x-۱)=۰$$

$$\sin x(\sin x-۱)(\sin x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

نقاط انتهایی کمان‌های نظیر جواب‌ها را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

بنابراین جواب‌های کلی معادله را می‌توان به صورت $x=\frac{k\pi}{۲}$ ، $k\in\mathbb{Z}$ نوشت.



راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\sin^{۳}x-\sin x=۰\Rightarrow\sin x(\sin^{۲}x-۱)=۰\Rightarrow-\sin x\cos^{۲}x=۰$$

$$\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌ها به‌صورت مضارب زوج و مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ هستند که می‌توان آن‌ها را به‌صورت جواب کلی $x=\frac{k\pi}{۲}$ ، $k\in\mathbb{Z}$ نوشت.

۱۱۵- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\cos^{۲}x)+۵\cos x=۴\Rightarrow ۲\cos^{۲}x-۵\cos x+۲=۰$$

$$(\cos x-۲)(۲\cos x-۱)=۰\Rightarrow\cos x=۲,\ \cos x=\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ $\cos x=۲$ جواب ندارد، پس $\cos x=\frac{۱}{۲}$. جواب‌های معادله که در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ قرار دارند، $\frac{\pi}{۳}$ و $۲\pi-\frac{\pi}{۳}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۲π است.

۱۱۶- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow ۲\sin x\cos^{۲}x=\sin x$$

$$\sin x(۲\cos^{۲}x-۱)=۰\Rightarrow\sin x\cos ۲x=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از π، $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$.

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۱۱۷- گزینهٔ ۱ در یک همسایگی محذوف ۱، مقادیر f منفی هستند، بنابراین در این همسایگی $|f(x)|=-f(x)$، پس

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(x)}{|f(x)|}=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)}{-f(x)}=-۱$$

۱۱۸- گزینهٔ ۴ اگر $x\to۱^{+}$، آن‌گاه $f(x)\to(-۱)^{-}$. بنابراین

$$\lim_{x\to۱^{+}}f(f(x))=\lim_{t\to(-۱)^{-}}f(t)=۲$$

۱۱۹- گزینهٔ ۴ مقادیر حد راست و حد چپ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲^{+}}f(x)=\lim_{x\to۲^{+}}(x^{۳}+۲x)=۸+۴=۱۲$$

$$\lim_{x\to۲^{-}}f(x)=\lim_{x\to۲^{-}}(x^{۲}-۳x)=۴-۶=-۲$$

بنابراین مقدار حد راست تابع در $x=۲$، ۱۴ واحد از مقدار حد چپ آن در این نقطه بیشتر است.

۱۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to۲^{-}}f(x)=\lim_{x\to۲^{-}}\frac{۳x+a}{۲x-۳}=\frac{۳\times۲+a}{۲\times۲-۳}=۶+a$$

$$\lim_{x\to۲^{+}}f(x)=\lim_{x\to۲^{+}}(x^{۲}+ax+b)=۲^{۲}+a(۲)+b=۴+۲a+b$$

چون $\lim_{x\to۲}f(x)=۴$، پس هر یک از حدهای بالا برابر با ۴ است:

$$\begin{cases}۶+a=۴\\ ۴+۲a+b=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ b=۴\end{cases}\Rightarrow a+b=۲$$

۱۲۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ وجود دارد. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to -1}(x^2-x+1-xf(x))=6\Rightarrow(-1)^2-(-1)+1-(-1)\lim_{x\to -1} f(x)=6$$

پس $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=3$.

۱۲۲- گزینهٔ ۲ اگر $x\to 2^+$، آن‌گاه $\sqrt{2x}\to 2\sqrt{2}^+$. در نتیجه $[\sqrt{2x}]=2$. پس $\lim\limits_{x\to 2^+}(x[\sqrt{2x}])=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x)=4$.

۱۲۳- گزینهٔ ۲ عامل $x-3$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم، سپس حد را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

۱۲۴- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-64}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x^2+4x+16)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x^2+4x+16}=\frac{4+4}{4^2+4\times 4+16}=\frac{1}{6}$$

۱۲۵- گزینهٔ ۱ وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $3x-4$ از سمت چپ به -1 نزدیک می‌شود، پس $[3x-4]=-2$، از طرف دیگر وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، $|x-1|=-(x-1)$. بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 1^-}\left([3x-4]+\frac{|x-1|}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(-2+\frac{-(x-1)}{x-1}\right)=-2-1=-3$$

۱۲۶- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج، $x-9=(\sqrt{x})^2-3^2=(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$. در نتیجه

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

۱۲۷- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x^2-49}=\lim_{x\to 7}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x^2-49}\times\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 7}\left(\frac{x+1-8}{(x-7)(x+7)}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{(x+7)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{x+1}+4)}=\frac{1}{14(4+4+4)}=\frac{1}{168}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 2\pi}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 2\pi}(1+\cos x)=1+1=2$$

راه‌حل دوم اگر $x-2\pi=t$، آن‌گاه $x=2\pi+t$. همچنین اگر $x\to 2\pi$، آن‌گاه $t\to 0$. بنابراین

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2(2\pi+t)}{1-\cos(2\pi+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{1-\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\frac{t^2}{2}}=2$$

۱۲۹- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$$

۱۳۰- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x}=2$$

۱۳۱- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin 2x}{x-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2\frac{\sin 2x}{2x}}{1-\frac{\sin^2 x}{x}}=\frac{0+2\times 1}{1-0}=2$$

۱۳۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^4-16}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+4}=1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

۱۳۳- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1+\frac{(2x)^2}{2}}{x(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+2x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

۱۳۴- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $4x-\pi=t$. در این صورت $x=\frac{\pi+t}{4}$ و اگر $x\to\frac{\pi}{4}$، آن‌گاه $t\to 0$. بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{4x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2(\frac{\pi+t}{4})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2})}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\frac{t}{2}}{t}=-\frac{1}{2}$$

۱۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(2)=1$ و

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x-\frac{x-2}{x-2}\right)=2-1=1$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x+\frac{x-2}{x-2}\right)=2+1=3$$

بنابراین تابع در $x=2$ فقط پیوستگی راست دارد.

۱۳۶- گزینهٔ ۴ چون تابع در نقطهٔ ۳ پیوسته است، حدهای چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابرند:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۱۶-ax^۲)=۱۶-۹a$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(۲x+a)=۶+a$$

بنابراین $۶+a=۱۶-۹a$ و در نتیجه $a=۱$. به این ترتیب

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۳ \\ ۱۶-x^۲ & x<۳ \end{cases}$$

در نتیجه $\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(۱۶-x^۲)=۱۶-۱^۲=۱۵$.

۱۳۷- گزینهٔ ۳ باید مخرج هیچ‌جا صفر نشود، در نتیجه باید دلتای معادلهٔ $x^۲-۲mx+m+۶=۰$ منفی باشد

$$\Delta=(-۲m)^۲-۴(m+۶)<۰\Rightarrow ۴m^۲-۴(m+۶)<۰$$

$$m^۲-m-۶<۰\Rightarrow (m-۳)(m+۲)<۰\Rightarrow -۲<m<۳$$

بنابراین تابع f به ازای چهار مقدار صحیح ۱-، ۰، ۱ و ۲ برای m روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۳۸- گزینهٔ ۱ در نقاطی که مقدار $\frac{۱}{x}$ عددی صحیح شود، تابع $y=[\frac{۱}{x}]$ ناپیوسته است. این نقاط به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{۱}{x}=k,\quad k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{۱}{k}$$

در بازهٔ $(\frac{۱}{۱۰},۱)$، $\frac{۱}{۱۰}<\frac{۱}{k}<۱\Rightarrow ۱<k<۱۰\Rightarrow ۲\leq k\leq ۹$

یعنی در هشت نقطه تابع ناپیوسته است.

۱۳۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که وقتی x از سمت چپ به ۲- نزدیک می‌شود، $x+۲$ از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۱}{x+۲}=-\infty$$

۱۴۰- گزینهٔ ۴

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{-۱}{x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{[-x]}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۰}{x}=\lim_{x\to ۰^-} ۰=۰$$

۱۴۱- گزینهٔ ۱ اگر $x\to ۳$، آن‌گاه $(x-۳)^۲\to ۰^+$، بنابراین برای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر عددی منفی شود:

$$\lim_{x\to ۳}(ax^۳+۳)<۰\Rightarrow ۲۷a+۳<۰\Rightarrow a<-\frac{۱}{۹}$$

۱۴۲- گزینهٔ ۴ برای اینکه نمودار تابع شبیه شکل مورد نظر شود، وقتی $x\to ۲^-$ و $x\to ۲^+$، باید $f(x)\to -\infty$. فقط در گزینهٔ (۴)،

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=-\infty$$

۱۴۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim_{x\to ۱^+} x^۲=۱$ و اگر $x\to ۱^+$، مقادیر $x-۱$ مثبت‌اند و به صفر میل می‌کنند. بنابراین $\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲}{x-۱}=+\infty$.

همین‌طور $\lim_{x\to ۱^-} x^۲=۱$ و اگر $x\to ۱^-$، مقادیر $x-۱$ منفی‌اند و به صفر میل می‌کنند. بنابراین $\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲}{x-۱}=-\infty$. به این ترتیب، نمودار تابع f در همسایگی نقطهٔ $x=۱$ به شکل گزینهٔ (۳) است.

۱۴۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to ۱^-$، آن‌گاه $\frac{۱}{x}\to ۱^+$، پس

$$t=\frac{x+۱}{x}=۱+\frac{۱}{x}\Rightarrow t\to ۲^+$$

پس $\lim_{x\to ۱^-} f(\frac{x+۱}{x})=\lim_{t\to ۲^+} f(t)=+\infty$.

۱۴۵- گزینهٔ ۲ اگر $x\to(\frac{\pi}{۲})^+$، آن‌گاه $\tan x\to -\infty$. همچنین چون $۴x\to(۲\pi)^+$، پس $\cos ۴x\to ۱^-$، و در نتیجه $(\cos ۴x-۱)\to ۰^-$.

بنابراین $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{\cos ۴x-۱}=+\infty$.

۱۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim_{x\to ۲} x=۲$ و چون حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=۲$ برابر $+\infty$ است، باید $x=۲$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد. به عبارت دیگر مخرج باید به صورت $(x-۲)^۲$ باشد. زیرا فقط در این صورت مقادیر تابع در دو طرف $x=۲$ هم‌علامت خواهند بود. پس

$$x^۲+۲ax+b=(x-۲)^۲\Rightarrow x^۲+۲ax+b=x^۲-۴x+۴\Rightarrow a=-۲,\ b=۴$$

پس $a+b=۲$.

۱۴۷- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر را تجزیه، سپس کسر را ساده می‌کنیم: $f(x)=\frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۱)(x-۲)(x+۲)}=\frac{x+۱}{(x-۱)(x+۲)}$. پس $x=۱$ و $x=-۲$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند.

۱۴۸- گزینهٔ ۱ در حالتی‌که مخرج ریشهٔ مضاعف دارد، نمودار تابع یک مجانب قائم دارد:

$$\Delta=۰\Rightarrow m^۲-۸m=۰\Rightarrow m=۰,\ m=۸$$

در حالت $m=۰$، تنها مجانب قائم $x=۰$ و در حالت $m=۸$، تنها مجانب قائم $x=۲$ است. همچنین اگر $x=۳$ ریشهٔ مخرج باشد، مخرج عامل $x-۳$ دارد که با صورت کسر ساده می‌شود. در این‌صورت مخرج درجهٔ اول است و تنها یک ریشه دارد. در نتیجه نمودار تابع یک مجانب قائم دارد:

$$۲(۳)^۲-۳m+m=۰\Rightarrow m=۹,\quad f(x)=\frac{x-۳}{(x-۳)(۲x-۳)}=\frac{۱}{۲x-۳}$$

پس $x=\frac{۳}{۲}$ مجانب قائم نمودار تابع است. بنابراین به‌ازای سه مقدار m، نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

۱۴۹- گزینهٔ ۳ مخرج توابع $y=\frac{x}{x^۲+۱}$ و $y=\frac{x}{\sqrt{x}+۱}$ ریشه ندارد، پس نمودار این توابع مجانب قائم ندارد. همچنین ریشهٔ مخرج تابع $y=\frac{\sqrt{x-۱}}{x}$، $x=۰$ است که تابع در اطراف آن تعریف نشده است. پس نمودار این تابع نیز مجانب قائم ندارد. $x=۰$ مجانب قائم نمودار تابع $y=\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{x}$ است:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{x}=-\infty,\qquad \lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}}{x}=+\infty$$

۱۵۰- گزینهٔ ۲ ریشه‌های مخرج در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از $x=\frac{\pi}{4}$ و $x=\frac{5\pi}{4}$ که $x=\frac{5\pi}{4}$ ریشهٔ صورت کسر نیست، پس خط $x=\frac{5\pi}{4}$ مجانب قائم نمودار تابع است. با اینکه $x=\frac{\pi}{4}$ ریشهٔ صورت نیز هست، ولی خط $x=\frac{\pi}{4}$ مجانب قائم نمودار تابع است، زیرا

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4x-\pi}}{\sqrt{2}(x-\frac{\pi}{4})}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4}(x-\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2}(x-\frac{\pi}{4})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}(x-\frac{\pi}{4})^{\frac{2}{3}}}=+\infty$$

پس نمودار تابع f دو مجانب قائم دارد.

۱۵۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

بنابراین خطهای $\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند.

پس خطهای $x=2k\pi+\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ مجانب‌های قائم نمودار این تابع هستند.

۱۵۲- گزینهٔ ۲ از روی شکل معلوم است که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

۱۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to1^+}(fof)(x)=\lim_{x\to1^+}f(f(x))=\lim_{t\to+\infty}f(t)=2$$

۱۵۴- گزینهٔ ۴ بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^2$ برابر x^2 است. همچنین بزرگ‌ترین جملهٔ $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$ برابر x^3 است. پس

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^3+(x-1)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{2x^3}=1$$

۱۵۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر $x+1$ و $3-x$ به‌ترتیب منفی و مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a|x+1|+3x-1}{|3-x|+ax-15}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a(-x-1)+3x-1}{3-x+ax-15}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-a+3)x-a-1}{(a-1)x-12}=\frac{3-a}{a-1}$$

در نتیجه $\frac{3-a}{a-1}=2$، بنابراین $a=\frac{5}{3}$.

۱۵۶- گزینهٔ ۳ برای آنکه حد مورد نظر برابر صفر شود، باید درجهٔ مخرج بیشتر از درجهٔ صورت باشد. مخرج از درجهٔ اول است، پس باید ضریب جملات درجهٔ دوم و سوم در صورت برابر صفر باشند:

$$\begin{cases}a-1=0\Rightarrow a=1\\ 2a-b=0\Rightarrow 2a=b\end{cases}\Rightarrow b=2$$

بنابراین $a+b=3$.

۱۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow[\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}]=[0]=0$$

از طرف دیگر، اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $-1<\frac{1}{x}<0$، بنابراین $[\frac{1}{x}]=-1$، پس $\lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)=-1$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر -1 است.

۱۵۸- گزینهٔ ۲ چون خط $y=2$ مجانب افقی نمودار تابع f است، پس $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{(a-1)x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{(a-1)x}=\frac{a}{a-1}$$

(همین‌طور وقتی که $x\to-\infty$)

بنابراین $\frac{a}{a-1}=2$، پس $a=2$ و در نتیجه $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$. بنابراین $x=2$ ریشهٔ مخرج و خط $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

۱۵۹- گزینهٔ ۴ چون

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

پس خط $y=2$ مجانب افقی تابع f است. برای پیدا کردن محل برخورد نمودار تابع با مجانب افقی آن، باید معادلهٔ $f(x)=2$ را حل کنیم:

$$\frac{2x^2}{x^2+x+1}=2\Rightarrow2x^2=2x^2+2x+2\Rightarrow x=-1$$

چون $f(-1)=2$، پس نقطهٔ مورد نظر $(-1,2)$ است.

۱۶۰- گزینهٔ ۱ خط $y=-1$ مجانب افقی نمودار تابع $y=\frac{-x+1}{x+1}$ است. برای یافتن رفتار این تابع در اطراف مجانب افقی باید ببینیم وقتی $x\to+\infty$ یا وقتی $x\to-\infty$، مقادیر تابع بیشتر از -1 هستند یا کمتر از آن:

$$y=\frac{-x+1}{x+1}=\frac{-(x+1)+2}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y>-1\\ x\to-\infty\Rightarrow y<-1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

۱۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به‌صورت

$$f(x)=\frac{x^2-4x+7}{x^2-4}=1+\frac{-4x+11}{x^2-4}$$

می‌نویسیم تا بتوان آن را راحت‌تر بررسی کرد. پس وقتی $x\to+\infty$،

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1,\quad f(x)<1$$

و وقتی $x\to-\infty$،

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1,\quad f(x)>1$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب افقی آن به شکل گزینهٔ (۱) است.

۱۶۲- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=3$ برابر $f'(3)=2$ است. پس شیب خط عمود بر این خط، که همان خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x=-1$ است، برابر $-\frac{1}{2}$ است. پس $f'(-1)=-\frac{1}{2}$.

۱۶۳- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های $x=a$ و $x=c$ صفر، در نقطهٔ $x=b$ منفی و در نقطهٔ $x=d$ مثبت است.

۱۶۴- گزینهٔ ۲ با توجه به تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=1$،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+2}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}(-2)=-1$$

۱۶۵- گزینهٔ ۱ تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=5$ را می‌نویسیم:

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-5)-0}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}((x-1)(x-2)(x-3)(x-4))=4\times3\times2\times1=24$$

۱۶۶- گزینهٔ ۲ با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=1$ مقدار $f'(1)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{(x-1)\cos^3(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{4})}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^3(\pi x)}{\tan(\frac{\pi x}{4})}=\frac{\cos^3\pi}{\tan\frac{\pi}{4}}=-1$$

۱۶۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر تابع f در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+mh)-f(x_0+nh)}{h}=(m-n)f'(x_0)$. بنابراین

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{3h}=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h)-f(2-2h)}{h}$$

$$=\frac{1}{3}(2-(-2))f'(2)=\frac{4}{3}f'(2)$$

۱۶۸- گزینهٔ ۳ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x^2+1}=1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+1)}{x^2+1}=-1$$

بنابراین مقدار مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ به اندازهٔ ۲ واحد از مشتق چپ تابع در این نقطه بیشتر است.

۱۶۹- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطه‌های ۳−، ۱ و ۵ پیوسته نیست، پس در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. همین‌طور، در نقطه‌های ۱− و ۳ مشتق چپ و مشتق راست تابع f برابر نیستند، پس تابع f در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. تابع f در نقطه‌های ۲− و ۴ مشتق‌پذیر است. بنابراین تابع f در پنج نقطهٔ صحیح از دامنه‌اش مشتق‌پذیر نیست.

۱۷۰- گزینهٔ ۴ بنابر تعریف مشتق، $g(x)=f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. بنابراین

$$g(8)=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$$

۱۷۱- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

پس $(\frac{f}{g})'(-1)=\frac{f'(-1)g(-1)-g'(-1)f(-1)}{g^2(-1)}$. از طرف دیگر،

$$\begin{cases}f(x)=x^3+x-1\\ f'(x)=3x^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(-1)=-3\\ f'(-1)=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}g(x)=x^4+1\\ g'(x)=4x^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g(-1)=2\\ g'(-1)=-4\end{cases}$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(-1)=\frac{4\times2-(-4)(-3)}{(2)^2}=-1$.

۱۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$f(x)=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=x(x^4-1)(x^4+1)$$

$$=x(x^8-1)=x^9-x$$

بنابراین $f'(x)=9x^8-1$. پس $f'(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})=9(\frac{1}{\sqrt[4]{3}})^8-1=0$.

۱۷۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مقدار عبارت $4x-x^2$ در اطراف نقطهٔ $x=-2$ منفی است و مقدار عبارت $x+1$ هم در اطراف $x=-2$ منفی است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^2-4x-x-1=x^2-5x-1$$

$$f'(x)=2x-5\Rightarrow f'(-2)=-9$$

همچنین توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=5$ مقدار عبارت‌های $4x-x^2$ و $x+1$ به‌ترتیب منفی و مثبت است. پس در اطراف این نقطه

$$f(x)=x^2-4x+x+1=x^2-3x+1\Rightarrow f'(x)=2x-3\Rightarrow f'(5)=7$$

در نتیجه $f'(5)+f'(-2)=-2$.

۱۷۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(\sin x+x\cos x-\sin x)(x\cos x-\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}-\frac{(\cos x-x\sin x-\cos x)(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$

$$=\frac{x\cos x(x\cos x-\sin x)+x\sin x(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{(-1)^2}=\frac{\pi^2}{4}$.

۱۷۵- گزینهٔ ۳ در نقطهٔ $x=\pi$، عبارت $\sin x$ عامل صفرکننده است، بنابراین کافی است فقط مشتق آن را در نقطهٔ $x=\pi$ حساب کنیم و در بقیهٔ عبارت ضرب کنیم:

$$f'(\pi)=\cos(\pi)\times\cos^8(\pi)=\cos^9(\pi)=-1$$

۱۷۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=4(2x^2+3)'(2x^2+3)^{4-1}=4(4x)(2x^2+3)^3=16x(2x^2+3)^3$$

بنابراین $f'(-1)=16(-1)(2(-1)^2+3)^3=-16\times5^3$.

۱۷۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{۲\sqrt{g}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳+۱}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۳\times۴}{۲\sqrt{۹}}=۲$$

۱۷۸- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(۹x^۲-۴x)(x+۱)^۲-۲(x+۱)(۳x^۳-۲x^۲+۱)}{(x+۱)^۴}$$

در نتیجه $f'(۱)=\frac{۳}{۴}$.

۱۷۹- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $f(-۳x+۵)=۲x^۳+۴x-۶$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$(-۳x+۵)'f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴$$

$$-۳f'(-۳x+۵)=۶x^۲+۴\xrightarrow{x=۱}-۳f'(۲)=۱۰\Rightarrow f'(۲)=-\frac{۱۰}{۳}$$

۱۸۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(۲x)g'(f(۲x))=\frac{۱}{۲}(g(f(۲x)))'=(\frac{۱}{۲}g(f(۲x)))'$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))$ را به‌دست می‌آوریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{۲}g(f(۲x))=\frac{۱}{۲}g(۸x^۳+۱)=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۱-(۸x^۳+۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{-۸x^۳}=-x$$

در نتیجه $y'=-۱$.

۱۸۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^۲)'=۲g'g$. بنابراین

$$f'(x)=۲(\tan x)'(\tan x)=۲(۱+\tan^۲ x)(\tan x)$$

در نتیجه

$$f'(\frac{\pi}{۳})=۲(۱+۳)(\sqrt{۳})=۸\sqrt{۳}$$

۱۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-۱}$. بنابراین

$$f'(x)=۳(\sin x^۲)'\sin^۲ x^۲=۳(x^۲)'\cos x^۲\times\sin^۲ x^۲$$

$$=۳(۲x)\cos x^۲\times\sin^۲ x^۲=۶x\sin^۲ x^۲\cos x^۲$$

در نتیجه

$$f'(\frac{\sqrt{\pi}}{۲})=۶\times\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳}{۴}\sqrt{۲\pi}$$

۱۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۱\\ ۳x^۲+۲ & x>۱\end{cases}$$

بنابراین $f'(-۱)+f'(۲)=-۳+۱۴=۱۱$.

۱۸۴- گزینهٔ ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است:

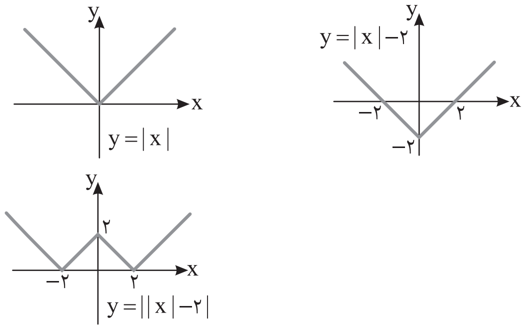
$$f(۱)=\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)\Rightarrow a+۲=۱+۲b\Rightarrow a-۲b=-۱$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}۲ax+۲ & x>۱\\ ۳x^۲+۲b & x<۱\end{cases}\Rightarrow ۲a+۲=۳+۲b\Rightarrow ۲a-۲b=۱$$

$$\begin{cases}a-۲b=-۱\\ ۲a-۲b=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{۷}{۲}$$

۱۸۵- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم می‌شود:



در نقاط $x=۰$، $x=۲$ و $x=-۲$ نمودار تابع نقطهٔ گوشه‌ای دارد و تابع در این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۲\}$.

۱۸۶- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست، پس مقدار $x^۲+ax-۱۲$ به‌ازای $x=۳$ صفر است: $۹+۳a-۱۲=۰\Rightarrow a=۱$
بنابراین $f(x)=|x^۲+x-۱۲|$. در نزدیکی نقطهٔ -۲ علامت عبارت $x^۲+x-۱۲$ منفی است، بنابراین

$$f(x)=-(x^۲+x-۱۲)\Rightarrow f'(x)=-۲x-۱\Rightarrow f'(-۲)=۳$$

۱۸۷- گزینهٔ ۲ فرض کنید نقطهٔ مورد نظر $(x_۰,y_۰)$ باشد. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر با $f'(x_۰)$ است، که چون خط مماس موازی محور x است، پس $f'(x_۰)=۰$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۶x+۳=۳(x-۱)^۲$$

$$f'(x_۰)=۰\Rightarrow ۳(x_۰-۱)^۲=۰\Rightarrow x_۰=۱$$

بنابراین $y_۰=f(x_۰)=f(۱)=-۱$.

۱۸۸- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس مورد نظر برابر $f'(-۲)$ است:

$$f(x)=\frac{۲x}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(-۲)=۲$$

از طرف دیگر $f(-۲)=۴$، پس خط مماس از نقطهٔ $(-۲,۴)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-۴=۲(x+۲)\Rightarrow y=۲x+۸$$

۱۸۹- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ بر نمودار تابع، که سهمی است، مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق f به‌ازای $x=x_۰$ برابر با شیب خط $y=x+۵$ است. بنابراین

$$y'=۴x-۴\Rightarrow ۴x_۰-۴=۱\Rightarrow x_۰=\frac{۵}{۴}$$

چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی سهمی $y=۲x^۲-۴x+۶$ است، پس

$$y_۰=۲x_۰^۲-۴x_۰+۶=۲\times(\frac{۵}{۴})^۲-۴\times\frac{۵}{۴}+۶=\frac{۳۳}{۸}$$

بنابراین خط مورد نظر از نقطهٔ $(\frac{۵}{۴},\frac{۳۳}{۸})$ می‌گذرد و شیب آن ۱ است، پس معادله‌اش به‌صورت $y-\frac{۳۳}{۸}=x-\frac{۵}{۴}$، یعنی $۸y-۸x-۲۳=۰$ است.

۱۹۰- گزینهٔ ۲ نقطهٔ تماس را $(a,\frac{۱}{\sqrt{a}})$ فرض می‌کنیم. شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(a)=-\frac{۱}{۲a\sqrt{a}}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}(x-a)$ است.

نقطهٔ $(3,0)$ را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$0-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{-1}{2a\sqrt{a}}(3-a)\Rightarrow 2a=3-a\Rightarrow a=1$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ است. در نتیجه عرض از مبدأ خط مماس برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۹۱- گزینهٔ ۲ مقدار دو آهنگ تغییر را حساب می‌کنیم:

$$A_1=-\frac{1}{6}=\frac{\frac{1}{2}-1}{3}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=$$ آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[1,4]$

$$\frac{f(4/41)-f(4)}{4/41-4}=$$ آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[4,4/41]$

$$=\frac{\frac{1}{2/1}-\frac{1}{2}}{0/41}=\frac{\frac{2-2/1}{4/2}}{\frac{41}{100}}=\frac{-\frac{1}{42}}{\frac{41}{100}}=-\frac{50}{41\times21}=A_2$$

بنابراین $\frac{A_1}{A_2}=\frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{50}{41\times21}}=\frac{41\times21}{6\times50}=\frac{41\times7}{2\times50}=\frac{287}{100}=2/87$.

۱۹۲- گزینهٔ ۱ مقدار آهنگ تغییر متوسط را در بازهٔ $[1,2]$ حساب می‌کنیم:

$$2=\frac{1-(-1)}{1}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=$$ آهنگ تغییر متوسط

از طرف دیگر، آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ مورد نظر همان مشتق تابع در این نقطه است که باید برابر ۲ باشد. پس

$$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}=2\Rightarrow\frac{2}{x^2}=1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=-\sqrt{2}\ \text{(غ.ق.ق)}\ ,\ x=\sqrt{2}$$

۱۹۳- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع همان مشتق آن است. پس مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=-3x^2+6x-6$. بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است، پس بیشترین مقدار آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با $-\frac{36-4(-3)(-6)}{4(-3)}=-3$.

۱۹۴- گزینهٔ ۴ مشتق اول و دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=2ax+b\Rightarrow f''(x)=2a$$

بنابراین

$$f''(2)=-2\Rightarrow 2a=-2\Rightarrow a=-1$$

$$f'(2)=-2\Rightarrow 4a+b=-2\Rightarrow b=2$$

در نتیجه $a-b=-3$.

۱۹۵- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=6x^2+6x-2\Rightarrow f''(x)=12x+6$$

بنابراین

$$f''(a)=0\Rightarrow 12a+6=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۱۹۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3}\Rightarrow f''(-1)=-2$$

۱۹۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2\cos2x\Rightarrow f''(x)=-4\sin2x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{12})=-4(\frac{1}{2})=-2$$

۱۹۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=1-\sin2x$. بنابراین

$$f'(x)=-2\cos2x\Rightarrow f''(x)=-2(-2\sin2x)=4\sin2x$$

۱۹۹- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^3-3x^2+5}{x^3+3x^2-2}=\lim_{x\to-1}\frac{6x^2-6x}{3x^2+6x}=\frac{6+6}{3-6}=-4$$

۲۰۰- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x}-x}{x^2-7x+12}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}-1}{2x-7}=\frac{\frac{3}{2\times3}-1}{6-7}=\frac{1}{2}$$

۲۰۱- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{f'(1+h)+f'(1-h)}{1}=f'_+(1)+f'_-(1)$$

اکنون تابع مشتق را پیدا می‌کنیم: $f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x>1\\ 4x^3 & x<1\end{cases}$.

واضح است که $f'_+(1)=3$ و $f'_-(1)=4$، بنابراین $L=3+4=7$.

۲۰۲- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۰۳- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر $f'(x)\geq0$ و نقاطی که $f'(x)=0$، تشکیل یک بازه ندهند تابع اکیداً صعودی است. روی بازهٔ $(-\infty,3]$ نمودار تابع مشتق بالای محور x یا مماس بر آن است و فقط در نقطهٔ $x=1$ و $x=3$ مشتق برابر صفر است. پس تابع روی بازهٔ $(-\infty,3]$ اکیداً صعودی است. بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر ۳ است.

۲۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=x^2-1$، پس

$$f'(x)\geq0\Rightarrow x^2-1\geq0\Rightarrow x\leq-1\ \text{یا}\ x\geq1$$

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-1]$ و $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازهٔ $(-1,2)$ اکیداً صعودی نیست.

۲۰۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=-3x^2+2x=x(-3x+2)$.

بنابراین

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

در نتیجه تابع f روی بازهٔ $(0,\frac{2}{3})$ اکیداً صعودی است. بنابراین بیشترین مقدار ممکن a برابر $\frac{2}{3}$ است.

۲۰۶- گزینهٔ ۴ مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=-x^{۳}+mx^{۲}-۱۲x+۱ \Rightarrow f'(x)=-۳x^{۲}+۲mx-۱۲$$

باید مشتق تابع نامثبت باشد، یعنی $f'(x)\le ۰$، در نتیجه $-۳x^{۲}+۲mx-۱۲\le ۰$.

برای اینکه این نابرابری همواره درست باشد، باید

$$\Delta\le ۰ \Rightarrow ۴m^{۲}-۱۴۴\le ۰ \Rightarrow m^{۲}\le ۳۶ \Rightarrow -۶\le m\le ۶$$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $\{۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴,\pm۵,\pm۶\}$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

۲۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=\dfrac{۲\sin ۲x}{\cos^{۲} ۲x}$. از طرف دیگر،

$$x\in(\pi,\frac{۳\pi}{۲})\Rightarrow ۲x\in(۲\pi,۳\pi)\Rightarrow \sin ۲x>۰$$

$$x\in(-\frac{\pi}{۴},-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow ۲x\in(-\frac{\pi}{۲},-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow \sin ۲x<۰$$

$$x\in(\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲})\Rightarrow ۲x\in(\frac{\pi}{۳},\pi)\Rightarrow \sin ۲x>۰$$

$$x\in(-\frac{۵\pi}{۸},-\frac{۷\pi}{۱۲})\Rightarrow ۲x\in(-\frac{۵\pi}{۴},-\frac{۷\pi}{۶})\Rightarrow \sin ۲x>۰$$

بنابراین f' فقط روی بازهٔ $(-\frac{\pi}{۴},-\frac{\pi}{۶})$ اکیداً نزولی است.

۲۰۸- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=-۶x^{۲}+۶x=۰ \Rightarrow x=۰, x=۱$$

پس $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر $\sqrt{۲}$ است.

۲۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴-x^{۲} & x\ge -۲ \\ -۲x-۴-x^{۲} & x<-۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲-۲x & x>-۲ \\ -۲-۲x & x<-۲ \end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x=-۲$ مشتق ندارد، پس نقطهٔ به طول -۲ نقطهٔ بحرانی تابع است.

از طرف دیگر،

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲-۲x=۰ \Rightarrow x=۱ \\ -۲-۲x=۰ \Rightarrow x=-۱ \quad (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

بنابراین نقطهٔ به طول ۱ نقطهٔ بحرانی تابع است. مجموع عرض‌های نقاط بحرانی برابر است با $f(-۲)+f(۱)=-۴+۵=۱$.

۲۱۰- گزینهٔ ۳ ریشه‌های صورت و مخرج تابع مشتق اگر در دامنهٔ تابع باشند، طول نقاط بحرانی هستند.

$$f'(x)=۲x\sqrt[۳]{x}+\frac{(x^{۲}-۴)}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}=\frac{۶x^{۲}+x^{۲}-۴}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}=\frac{۷x^{۲}-۴}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

مشخص است که صورت کسر دو ریشه و مخرج آن یک ریشه دارد که همگی در دامنهٔ تابع هستند (دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است)، بنابراین تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۲۱۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[۱,۳]$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳-x}}$$

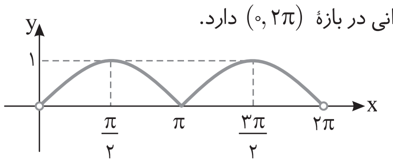
تابع f در نقاط $x=۱$ و $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \sqrt{x-۱}=\sqrt{۳-x} \Rightarrow x-۱=۳-x \Rightarrow x=۲$$

پس مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\{۱,۲,۳\}$ است که دارای سه عضو است.

۲۱۲- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. در $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ مشتق تابع f برابر صفر است و در $x=\pi$ تابع f مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای).

پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



۲۱۳- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطه‌های -۱ و ۲ مینیمم نسبی دارد. مجموع این عددها برابر ۱ است.

۲۱۴- گزینهٔ ۳ جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است.

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x=-۲$ دارد.

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

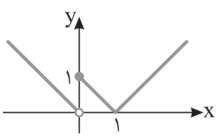
۲۱۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۸x^{۳}-۳x^{۲}=x^{۲}(۸x-۳)$.

بنابراین جدول تغییرات تابع f به‌صورت زیر است:

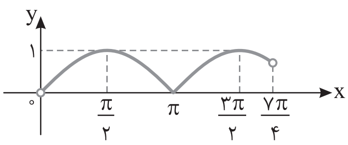
x	$-\infty$		۰		$\frac{۳}{۸}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↘		↘	min نسبی	↗	

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۲۱۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به شکل مقابل است. این تابع در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=۱$ مینیمم نسبی دارد.



۲۱۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است و تابع در نقاط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=\pi$ مینیمم نسبی دارد.



۲۱۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۱-۲\cos x$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}$$

x	۰		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		۲π
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

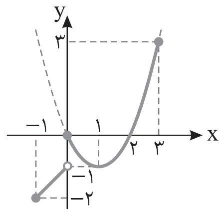
بنابراین تابع f در نقاط $x=\frac{\pi}{۳}$ و $x=\frac{۵\pi}{۳}$ اکسترمم نسبی دارد.

۲۱۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۴x-۸$. بنابراین

$$f'(x)=۰ \Rightarrow x=۲$$

اکنون توجه کنید که چون $f(۰)=۱$، $f(۲)=-۷$ و $f(۵)=۱۱$. پس مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f به‌ترتیب برابر ۱۱ و -۷ و اختلاف آن‌ها برابر $۱۱-(-۷)=۱۸$ است.

۲۲۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حداکثر مقدار تابع برابر ۳ و حداقل مقدار آن برابر ۲− است و اختلاف این دو مقدار برابر ۵ است.



۲۲۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^{۲}+۱-۲x(x)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{۱-x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}},\quad x>۰$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱-x^{۲}=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=-۱\ (\text{غ.ق.ق})$$

از طرف دیگر، $f(۱)=\frac{۱}{۲}$، $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=۰$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر است با $f(۱)=\frac{۱}{۲}$.

۲۲۲- گزینهٔ ۲ نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=-۲\sin ۲x+۲\cos x=۰\Rightarrow -۴\sin x\cos x+۲\cos x=۰$$

$$۲\cos x(۱-۲\sin x)=۰\Rightarrow \begin{cases}\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\ x=\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

اکنون مقادیر تابع در نقاط زیر را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{\pi}{۲})=۱,\quad f(\frac{\pi}{۶})=\frac{۳}{۲},\quad f(\frac{۵\pi}{۶})=\frac{۳}{۲},\quad f(۰)=۱,\quad f(\pi)=۱$$

در نتیجه بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۲۲۳- گزینهٔ ۳ چون $y=۲x-a$، پس

$$A(x)=xy=x(۲x-a)=۲x^{۲}-ax$$

$$A'(x)=۰\Rightarrow ۴x-a=۰\Rightarrow x=\frac{a}{۴}$$

بنابراین کمترین مقدار xy برابر است با $۲(\frac{a}{۴})^{۲}-a\times\frac{a}{۴}=-\frac{a^{۲}}{۸}$.

۲۲۴- گزینهٔ ۱ طول اضلاع قائمهٔ مثلث را a و b فرض می‌کنیم. می‌خواهیم بیشترین مقدار مساحت، یعنی $S=\frac{۱}{۲}ab$ را به‌دست آوریم. توجه کنید که $a^{۲}+b^{۲}=۱۶$. پس $b=\sqrt{۱۶-a^{۲}}$، در نتیجه

$$S(a)=\frac{۱}{۲}a\sqrt{۱۶-a^{۲}}$$

$$S'(a)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶-a^{۲}}-\frac{a^{۲}}{۲\sqrt{۱۶-a^{۲}}}\Rightarrow S'(a)=۰\Rightarrow a=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲})\sqrt{۸}=۴$.

۲۲۵- گزینهٔ ۴ نقطهٔ $B(x,y)$ را روی نمودار در نظر می‌گیریم. پس $y=\sqrt{۲x+۹}$. بنابراین

$$d(x)=AB=\sqrt{(x-۴)^{۲}+(y-۰)^{۲}}=\sqrt{(x-۴)^{۲}+۲x+۹}=\sqrt{x^{۲}-۶x+۲۵}$$

$$d'(x)=\frac{۲x-۶}{۲\sqrt{x^{۲}-۶x+۲۵}},\quad d'(x)=۰\Rightarrow x=۳$$

بنابراین کمترین مقدار d به‌ازای $x=۳$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۴.

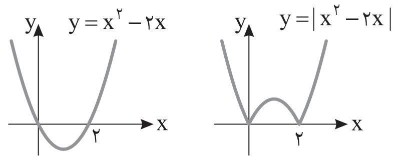
۲۲۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که مساحت مستطیل ABCD برابر است با $(۱-۲x)(۳x-۱)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=(۳x-۱)(۱-۲x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۳(۱-۲x)+(۳x-۱)(-۲)=-۱۲x+۵$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow -۱۲x+۵=۰\Rightarrow x=\frac{۵}{۱۲}$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و بیشترین مقدار آن به ازای $x=\frac{۵}{۱۲}$ به‌دست می‌آید، که برابر است با $\frac{۱}{۲۴}$. در نتیجه بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD برابر $\frac{۱}{۲۴}$ است.

۲۲۷- گزینهٔ ۲ نمودار تابع را رسم می‌کنیم. جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ رو به بالا، روی بازهٔ $(۰,۲)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(۲,+\infty)$ رو به بالاست. پس دوبار جهت تقعر نمودار تابع f تغییر کرده است.



۲۲۸- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^{۴}-۶x^{۲}+x-۱\Rightarrow f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x+۱\Rightarrow f''(x)=۱۲x^{۲}-۱۲$$

برای اینکه جهت تقعر نمودار تابع رو به پایین باشد، باید علامت مشتق دوم تابع منفی باشد:

$$۱۲x^{۲}-۱۲<۰\Rightarrow x^{۲}<۱\Rightarrow -۱<x<۱$$

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-۱,۱)$ رو به پایین است. پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $۱-(-۱)=۲$.

۲۲۹- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{-۲x}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{-۲(x^{۲}+۱۲)^{۲}+۸x^{۲}(x^{۲}+۱۲)}{(x^{۲}+۱۲)^{۴}}$$

$$=\frac{۶x^{۲}-۲۴}{(x^{۲}+۱۲)^{۳}}$$

پس $f''(x)=۰\Rightarrow x=\pm ۲$

با توجه به جدول زیر، جهت تقعر f روی بازهٔ $(-۲,۲)$ رو به پایین است. پس بیشترین مقدار a برابر ۲ است.

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$f''(x)$		+	۰	−	۰	+	

۲۳۰- گزینهٔ ۱ باید مشتق دوم تابع روی $\mathbb{R}$ نامنفی باشد. پس

$$f'(x)=۸x^{۳}-۶mx^{۲}+۶x$$

$$f''(x)=۲۴x^{۲}-۱۲mx+۶=۶(۴x^{۲}-۲mx+۱)\geq ۰$$

در نتیجه باید

$$\Delta\leq ۰\Rightarrow ۴m^{۲}-۱۶\leq ۰\Rightarrow m^{۲}\leq ۴\Rightarrow -۲\leq m\leq ۲$$

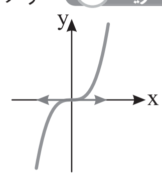
۲۳۱- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f''(x)=۲-\frac{۱}{۴\sqrt{x^۳}}=\frac{۸\sqrt{x^۳}-۱}{۴\sqrt{x^۳}}$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow ۸\sqrt{x^۳}=۱\Rightarrow x^۳=(\frac{۱}{۸})^۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

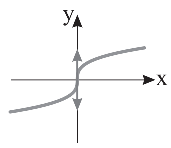
چون مخرج کسر $f''(x)$ روی بازهٔ مورد نظر مثبت است، علامت $f''(x)$ و صورت کسر یکسان است. بنابراین روی بازهٔ $(۰,\frac{۱}{۴})$، $f''(x)<۰$ و روی بازهٔ $(\frac{۱}{۴},۱)$، $f''(x)>۰$. پس جهت تقعر نمودار تابع f ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالاست.

۲۳۲- گزینهٔ ۳ نمودار توابع به شکل زیر است:



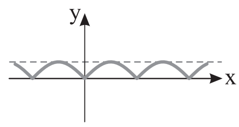
$y=x^۳$

در $x=۰$ نقطهٔ عطف دارد.



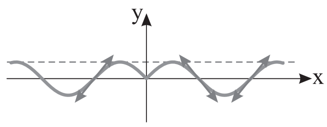
$y=\sqrt[۳]{x}$

در $x=۰$ نقطهٔ عطف دارد.



$y=|\sin x|$

نقطهٔ عطف ندارد.



$y=\sin|x|$

در تمام نقاط برخورد با محور طول‌ها به جز $x=۰$ نقطهٔ عطف دارد.

۲۳۳- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=x^۴-x^۳\Rightarrow f''(x)=۴x^۳-۳x^۲=x^۲(۴x-۳)$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow x=۰,\frac{۳}{۴}$$

x	$-\infty$		۰		$\frac{۳}{۴}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	۰	−	۰	+	
f		∩		∩	نقطهٔ عطف	∪	

مشتق دوم در $x=\frac{۳}{۴}$ تغییر علامت می‌دهد و تابع در این نقطه مشتق دارد، یعنی خط مماس دارد. پس $x=\frac{۳}{۴}$ طول تنها نقطهٔ عطف نمودار تابع است.

۲۳۴- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{x^۲-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-x^۲-۱}{(x^۲-۱)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{۲x(x^۲+۳)}{(x^۲-۱)^۳}$$

x	$-\infty$		−۱		۰		۱		$+\infty$
$f''(x)$		−	ت‌ن	+	۰	−	ت‌ن	+	
f(x)		∩		∪	نقطهٔ عطف	∩		∪	

جهت تقعر نمودار در $x=۰$، $x=۱$ و $x=-۱$ تغییر می‌کند ولی فقط در نقطهٔ $x=۰$ خط مماس وجود دارد. پس نمودار تابع فقط یک نقطهٔ عطف دارد.

۲۳۵- گزینهٔ ۴ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$y'=۴x^۳+۳ax^۲+۱۲x\Rightarrow y''=۱۲x^۲+۶ax+۱۲=۶(۲x^۲+ax+۲)$$

برای اینکه نمودار تابع نقطهٔ عطف نداشته باشد، باید مشتق دوم تغییر علامت ندهد، یعنی معادلهٔ $۲x^۲+ax+۲=۰$ نباید ریشهٔ ساده داشته باشد. پس

$$\Delta\le۰\Rightarrow a^۲-۴\times۲\times۲\le۰\Rightarrow a^۲\le۱۶\Rightarrow -۴\le a\le۴$$

۲۳۶- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=۳ax^۲+۲x+b\Rightarrow f''(x)=۶ax+۲$$

در نقطهٔ $x=۱$ که طول نقطهٔ عطف نمودار تابع است، مقدار مشتق دوم موجود و برابر صفر است. پس

$$f''(۱)=۰\Rightarrow ۶a+۲=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

از طرف دیگر مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند. پس

$$f(۱)=۱\Rightarrow -\frac{۱}{۳}(۱)^۳+(۱)^۲+b+۱=۱\Rightarrow -\frac{۱}{۳}+۱=-b\Rightarrow b=-\frac{۲}{۳}$$

۲۳۷- گزینهٔ ۳ نمودار در نقطهٔ $x=-۱$ بر محور طول‌ها مماس شده است. پس در این نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع هر دو صفر هستند:

$$f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۲\Rightarrow f(-۱)=-۱+a-b+۲=۰$$

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax+b\Rightarrow f'(-۱)=۳-۲a+b=۰$$

$$\begin{cases}a-b=-۱\\-۲a+b=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\b=۵\end{cases}\Rightarrow ab=۲۰$$

۲۳۸- گزینهٔ ۳ مجانب‌های نمودار تابع $x=-۲$ و $y=\frac{a}{۲}$ هستند.

پس محل برخورد آن‌ها نقطهٔ $(-۲,\frac{a}{۲})$ است که مختصات آن در معادلهٔ خط $y=۲x+۱$ صدق می‌کنند: $\frac{a}{۲}=۲(-۲)+۱\Rightarrow a=-۶$

۲۳۹- گزینهٔ ۳ مجانب قائم تابع $x=a$ است که نباید در بازهٔ $(۲,+\infty)$ قرار بگیرد. پس $a\le۲$. از طرف دیگر، مشتق تابع باید منفی باشد تا تابع اکیداً نزولی باشد:

$$f'(x)=\frac{-۲a-a-۳}{(x-a)^۲}<۰\Rightarrow -۳a-۳<۰\Rightarrow a>-۱$$

بنابراین $-۱<a\le۲$. توجه کنید که اگر $a=-۱$، آن‌گاه $f(x)=۲$. این تابع نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

۲۴۰- گزینهٔ ۴ طبق نمودار $f(۰)=\frac{۱}{۲}$، چون $f(۰)=\frac{b}{۲}$، پس $b=۱$.

در نتیجه $f(x)=\frac{x^۲+ax+۱}{x^۲+x+۲}$. از اینکه نمودار بر محور x (در قسمت $x<۰$) مماس است، نتیجه می‌گیریم معادلهٔ $x^۲+ax+۱=۰$ ریشهٔ مضاعف منفی دارد:

$$\Delta=۰\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲\xrightarrow{\text{ریشهٔ منفی}}a=۲\Rightarrow a+b=۳$$

۲۴۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است، پس $f(۰)=۰$، در نتیجه $a=۰$. همچنین $x=۱$ مجانب قائم نمودار تابع است و چون $\lim_{x\to۱}f(x)=+\infty$، پس $x=۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج است. بنابراین،

$$۲x^۲+bx+c=۲(x-۱)^۲=۲x^۲-۴x+۲\Rightarrow b=-۴,c=۲$$

پس $f(x)=\frac{x}{۲x^۲-۴x+۲}$، در نتیجه $f(۲)=۱$.

۲۴۲- گزینهٔ ۱ خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع است، پس درجهٔ صورت باید کمتر از درجهٔ مخرج باشد. بنابراین $a=0\Rightarrow f(x)=\frac{bx+1}{x^2+1}$

تابع در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ ماکزیمم نسبی دارد و مشتق آن در این نقطه صفر است:

$$f'(x)=\frac{b(x^2+1)-2x(bx+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-bx^2-2x+b}{(x^2+1)^2}$$

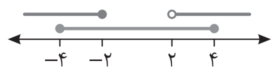
$$f'(\frac{1}{2})=0\Rightarrow -\frac{b}{4}-1+b=0\Rightarrow b=\frac{4}{3}$$

۲۴۳- گزینهٔ ۱ تابع در $x=-1$ و $x=1$ تعریف نشده است. پس این اعداد باید ریشهٔ مخرج باشند: $\begin{cases}1+b+c=0\\1-b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\c=-1\end{cases}$. در $x=1$ حفره وجود دارد، پس باید صورت کسر هم در این نقطه صفر باشد:

$$1+a-2=0\Rightarrow a=1\Rightarrow a+b+c=0$$

۲۴۴- گزینهٔ ۲ در نقطه‌ای که f ناپیوسته است، f' تعریف نمی‌شود. پس گزینهٔ (۴) نادرست است. اگر نقطهٔ ناپیوستگی f را $x=a$ بنامیم، نمودار f روی بازهٔ $(-\infty,a)$ نزولی است، پس f' روی این بازه منفی است و گزینهٔ (۱) نادرست است. در نقطه‌ای از بازهٔ $(-\infty,a)$ جهت تقعر نمودار f تغییر می‌کند (از رو به بالا به رو به پایین)، پس نمودار f' در این نقطه باید از حالت صعودی به حالت نزولی تغییر کند. پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۴۵- گزینهٔ ۲ به کمک شکل زیر، مجموعهٔ داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم: $A=[-4,-2]\cup(2,4]$. بنابراین اعداد صحیح ۴-، ۳-، ۲-، ۳ و ۴ در مجموعهٔ A قرار دارند.

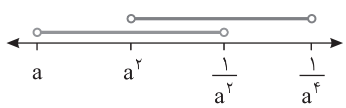


۲۴۶- گزینهٔ ۲ عدد ۲ باید در نامساوی‌های زیر صدق کند:

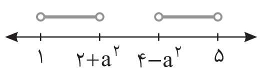
$$2a\le 2\Rightarrow a\le 1,\quad 2<3+a\Rightarrow a>-1$$

بنابراین $-1<a\le 1$ و در نتیجه $a\in(-1,1]$.

۲۴۷- گزینهٔ ۴ چون $-1<a<0$، پس $a<a^2<\frac{1}{a^2}<\frac{1}{a^4}$. بنابراین با توجه به شکل زیر، $(a,\frac{1}{a^2})\cap(a^2,\frac{1}{a^4})=(a^2,\frac{1}{a^2})$



۲۴۸- گزینهٔ ۳ در حالت زیر اشتراک بازه‌ها تهی خواهد بود:



پس $4-a^2\ge 2+a^2\Rightarrow a^2\le 1\Rightarrow -1\le a\le 1$

یعنی $a\in[-1,1]$

۲۴۹- گزینهٔ ۳ ابتدا مجموعهٔ A را با نوشتن اعضایش مشخص می‌کنیم. توجه کنید برای آنکه $\frac{10}{x}$ عددی صحیح شود، مقادیر صحیحی که x می‌تواند اختیار کند، شامل مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۰ یعنی $\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$ است. بنابراین $A=\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. در نتیجه A مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعهٔ B شامل اعداد صحیحی است که معکوسشان از ۱ بزرگ‌ترند. می‌دانیم معکوس همهٔ عددهای صحیح (به جز صفر)، از ۱ کوچک‌ترند پس مجموعهٔ B تهی است. بنابراین مجموعهٔ B نیز مجموعه‌ای متناهی است.

۲۵۰- گزینهٔ ۴ اگر تعداد محدودی از اعضای مجموعهٔ نامتناهی A را که در مجموعهٔ متناهی B نیز قرار دارند، حذف کنیم، باز هم مجموعه‌ای نامتناهی باقی می‌ماند. یعنی $A-B$ نامتناهی است.

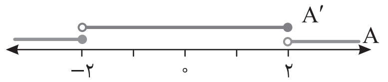
بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) اگر $A=\mathbb{W}$ و $B=\mathbb{N}$، آن‌گاه $A-B=\{0\}$. پس $A-B$ متناهی است ولی A و B نامتناهی‌اند.

گزینهٔ (۲) اگر $A=\mathbb{Z}$ و $B=\{1\}$، آن‌گاه $A-B=\mathbb{Z}-\{1\}$. پس $A-B$ نامتناهی است ولی B متناهی است.

گزینهٔ (۳) اگر $A=\{\frac{1}{2}\}$ و $B=\mathbb{Z}$، آن‌گاه $A-B=\varnothing$. پس A متناهی و B نامتناهی است ولی $A-B$ متناهی است.

۲۵۱- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، $A'=(-2,2]$. بنابراین اعداد صحیح ۱-، صفر، ۱ و ۲ عضو A' هستند، که مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



۲۵۲- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ علاقه‌مندان به فوتبال را با A و مجموعهٔ علاقه‌مندان به والیبال را با B نشان می‌دهیم. در این صورت $n(A)=30$، $n(B)=35$. از طرف دیگر ۴۰ نفر حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند. پس $n(A\cup B)=40$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$40=30+35-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=25$$

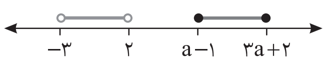
پس ۲۵ نفر به هر دو رشته علاقه دارند.

۲۵۳- گزینهٔ ۲

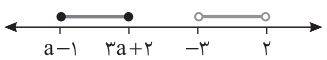
$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A-B)+n(B-A)$$

$$20-4=n(A-B)+n(B-A)\Rightarrow n(A-B)+n(B-A)=16$$

۲۵۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در دو حالت زیر این دو بازه جدا از هم هستند:



$$a-1\ge 2\Rightarrow a\ge 3$$



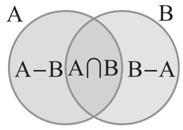
$$3a+2\le -3\Rightarrow a\le -\frac{5}{3}$$

از طرف دیگر برای اینکه $[a-1,3a+2]$ بازه باشد باید $a-1<3a+2$ و در نتیجه $a>-\frac{3}{2}$. بنابراین

$$a\in([3,+\infty)\cup(-\infty,-\frac{5}{3}])\cap(-\frac{3}{2},+\infty)$$

اگر $a\ge 3$، دو بازهٔ مورد نظر جدا از هم هستند.

۲۵۵- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل مجموعه‌های $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ دو به دو جدا از هم هستند.



۲۵۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در شکل اول، ۶ دایرهٔ رنگی وجود دارد. در شکل دوم، ۴ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، در شکل سوم، 2×4 دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود، ... در شکل nاُم، $4\times(n-1)$ دایرهٔ رنگی به دایره‌های رنگی اولیه اضافه می‌شود. بنابراین اگر تعداد دایره‌های رنگی در شکل nاُم را a_n بگیریم، $a_n=6+4(n-1)=4n+2$ (توجه کنید که شکل nاُم، n دایرهٔ خاکستری دارد). بنابراین

$$a_{20}=4\times20+2=82$$

۲۵۷- گزینهٔ ۱ جملهٔ عمومی الگو $t_n=an+b$ است، پس

$$\begin{cases}t_4=16\\t_{16}=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+b=16\\16a+b=28\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به‌دست می‌آید $a=1$ و $b=12$. بنابراین

$$t_n=n+12\Rightarrow t_2=14$$

۲۵۸- گزینهٔ ۲ شکل nاُم از $(n+2)^2$ مربع کوچک تشکیل شده است که اگر n زوج باشد، $2(n+2)$ مربع کوچک سفید و اگر n فرد باشد، $2(n+2)-1=2n+3$ مربع کوچک سفید در شکل وجود دارد. بنابراین در شکل هجدهم، $(20)^2$ مربع کوچک وجود دارد که ۴۰تای آن‌ها سفید هستند. پس در شکل هجدهم ۳۶۰ مربع کوچک رنگی وجود دارد.

۲۵۹- گزینهٔ ۳ باید ببینیم به ازای کدام مقدار n تساوی $\frac{4n-3}{n+3}=3$ برقرار می‌شود. پس

$$4n-3=3n+9\Rightarrow n=12$$

بنابراین جملهٔ دوازدهم دنباله برابر ۳ است.

۲۶۰- گزینهٔ ۴ عدد آخر دستهٔ اول 2^2، عدد آخر دستهٔ دوم 4^2، عدد آخر دستهٔ سوم 6^2 و ... عدد آخر دستهٔ nاُم برابر $(2n)^2$ است. پس عدد آخر دستهٔ دهم 20^2 است. بنابراین عدد اول دستهٔ یازدهم ۴۰۲ است.

۲۶۱- گزینهٔ ۴ از رابطهٔ داده شده $a_n=a_{n-1}-3$ به‌دست می‌آید. یعنی هر جملهٔ دنباله از جمع کردن ۳− با جملهٔ قبلی آن به‌دست می‌آید. پس یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳− و جملهٔ اول ۴− داریم که جملهٔ بیستم آن برابر است با $a_{20}=a_1+19d=-4+19(-3)=-61$.

۲۶۲- گزینهٔ ۱ فرض کنید جملهٔ اول این دنباله، a_1 و قدرنسبت آن d باشد. در این‌صورت

$$a_4=5\Rightarrow a_1+(4-1)d=5\Rightarrow a_1+3d=5 \qquad (1)$$

$$a_9=30\Rightarrow a_1+(9-1)d=30\Rightarrow a_1+8d=30 \qquad (2)$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید $5d=25$، پس $d=5$. اکنون اگر این مقدار d را در تساوی (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید $a_1=-10$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی مورد نظر، برابر است با

$$a_n=a_1+(n-1)d=-10+(n-1)(5)=5n-15$$

۲۶۳- گزینهٔ ۲ این اعداد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند که متناهی بوده و قدرنسبت آن ۷ است. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۱۰۵ و بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی که بر ۷ بخش‌پذیر است، ۹۹۴ است. پس تعداد این اعداد $\frac{994-105}{7}+1$ است که برابر است با ۱۲۸.

۲۶۴- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{1}{2}$ واسطهٔ حسابی $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+2}$ است، پس

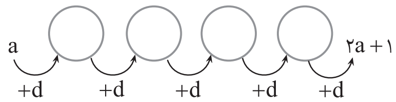
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\Rightarrow 1=\frac{x+2+x}{x(x+2)}$$

در نتیجه

$$x^2+2x=2x+2\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

۲۶۵- گزینهٔ ۲ چون $a>0$، پس $2a+1>a$. اکنون قدرنسبت دنباله را به‌دست می‌آوریم $d=\frac{2a+1-a}{4+1}=\frac{a+1}{5}$. اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهایی که درج کرده‌ایم برابر $3d$ است و در نتیجه

$$\frac{3(a+1)}{5}=9\Rightarrow 3a+3=45\Rightarrow 3a=42\Rightarrow a=14$$



۲۶۶- گزینهٔ ۳ جملات دنبالهٔ حسابی را به‌صورت $a-d, a, a+d$ درنظر می‌گیریم. مجموع آن‌ها $3a$ است. پس $3a=21$ و در نتیجه $a=7$. از طرف دیگر،

$$(a-d)(a)(a+d)=168\Rightarrow 7(49-d^2)=168$$

$$49-d^2=24\Rightarrow d^2=25\Rightarrow d=\pm5\Rightarrow 2,7,12 \text{ یا } 12,7,2$$

پس نسبت بزرگ‌ترین عدد به کوچک‌ترین عدد برابر ۶ است.

۲۶۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید قدرنسبت این دنبالهٔ هندسی r باشد $(r>0)$. در این‌صورت

$$a_1+a_5=30\Rightarrow a_1+a_1r^4=30\Rightarrow a_1(1+r^4)=30 \qquad (1)$$

$$a_3+a_7=120\Rightarrow a_1r^2+a_1r^6=120\Rightarrow a_1r^2(1+r^4)=120 \qquad (2)$$

اگر تساوی (۲) را بر تساوی (۱) تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید $r^2=4$؛ پس $r^4=16$. به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $a_1=\frac{30}{17}$.

۲۶۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** چون $3+9=5+7=4+8$ پس

$$a_3a_9=a_5a_7=a_4a_8$$

در نتیجه $a_3a_5a_7a_9=(a_4a_8)^2=9$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a_4=a_1r^3,\quad a_8=a_1r^7\Rightarrow a_4a_8=a_1^2r^{10}=3$$

پس

$$a_3a_5a_7a_9=a_1r^2a_1r^4a_1r^6a_1r^8=a_1^4r^{20}=(a_1^2r^{10})^2=9$$

۲۶۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$a_1a_2\cdots a_8=\sqrt{(a_1a_8)^8}\Rightarrow 81=\sqrt{(a_1a_8)^8}\Rightarrow a_1a_8=\pm3$$

از طرف دیگر،

$$2+7=1+8\Rightarrow a_2a_7=a_1a_8,\quad 4+5=1+8\Rightarrow a_4a_5=a_1a_8$$

پس $a_2a_4a_5a_7=(a_2a_7)(a_4a_5)=(a_1a_8)^2=9$.

۲۷۰- گزینهٔ ۲ اگر جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی a و قدرنسبت آن d باشد، جملات دوم، چهارم و نهم به‌ترتیب $a+d$، $a+3d$ و $a+8d$ هستند. پس $a+3d$ واسطهٔ هندسی $a+d$ و $a+8d$ است و درنتیجه

$$(a+3d)^2=(a+d)(a+8d)\Rightarrow a^2+6ad+9d^2=a^2+9ad+8d^2$$

$$d^2=3ad\Rightarrow d=3a$$

پس قدرنسبت دنبالهٔ حسابی ۳ برابر جملهٔ اول آن است.

۲۷۱- گزینهٔ ۴ در این دنباله $a_1=-7$ و $d=2$، بنابراین

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2\times(-7)+9\times2)=20$$

۲۷۲- گزینهٔ ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_{15}=\frac{15}{2}(2a_1+14d)=300\Rightarrow a_1+7d=20$$

بنابراین $a_8=a_1+7d=20$.

۲۷۳- گزینهٔ ۳ جملهٔ اول دنباله برابر ۹ و قدرنسبت آن ۸ است. بنابراین مجموع n جملهٔ نخست دنباله برابر است با

$$\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(2\times9+8(n-1))=\frac{n}{2}(18+8n-8)=4n^2+5n$$

در نتیجه $4n^2+5n=636\Rightarrow 4n^2+5n-636=0$

$$(4n+53)(n-12)=0\Rightarrow n=-\frac{53}{4}\ (\text{غ.ق.ق.}),\ n=12$$

بنابراین باید دوازده جملهٔ نخست دنباله را جمع کنیم.

۲۷۴- گزینهٔ ۲ با قرار دادن $n=1$ جملهٔ نخست به‌دست می‌آید

$$a_1=S_1=5-4=1$$

با قرار دادن $n=2$ مجموع جمله‌های اول و دوم به‌دست می‌آید، سپس جملهٔ دوم را حساب می‌کنیم:

$$S_2=a_1+a_2=5\times2^2-4\times2=12\Rightarrow a_2=12-a_1=12-1=11$$

بنابراین $d=a_2-a_1=11-1=10$

۲۷۵- گزینهٔ ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_3=a_1\frac{q^3-1}{q-1}=195\Rightarrow 135(q^3-1)=195(q-1)$$

$$135(q-1)(q^2+q+1)=195(q-1)\Rightarrow 9q^2+9q+9=13$$

$$9q^2+9q-4=0\Rightarrow(3q-1)(3q+4)=0\Rightarrow q=\frac{1}{3},\ q=-\frac{4}{3}$$

۲۷۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$. در این دنباله $a_1=\frac{2}{9}$ و $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}}=-\frac{3}{2}$. بنابراین

$$S_n=\frac{55}{72}\Rightarrow\frac{55}{72}=\frac{2}{9}\times\frac{(-\frac{3}{2})^n-1}{-\frac{3}{2}-1}\Rightarrow(-\frac{3}{2})^n=-\frac{243}{32}=(-\frac{3}{2})^5$$

بنابراین $n=5$. یعنی باید پنج جملهٔ نخست دنبالهٔ موردنظر را با هم جمع کنیم تا حاصل برابر $\frac{55}{72}$ شود.

۲۷۷- گزینهٔ ۱ بنابر فرض مسئله،

$$S_5=5a_1\Rightarrow a_1\frac{q^5-1}{q-1}=5a_1\Rightarrow q^5-1=5(q-1)\qquad(1)$$

$$S_{15}=100\Rightarrow a_1\frac{q^{15}-1}{q-1}=100\Rightarrow a_1(q^{15}-1)=100(q-1)\qquad(2)$$

دو طرف تساوی (۲) را بر دو طرف تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1(q^{15}-1)}{q^5-1}=\frac{100(q-1)}{5(q-1)}\Rightarrow\frac{a_1(q^5-1)(q^{10}+q^5+1)}{q^5-1}=20$$

پس $a_1q^{10}+a_1q^5+a_1=20$، بنابراین $a_1+a_6+a_{11}=20$.

۲۷۸- گزینهٔ ۲ چون $x<0$، پس $\sqrt[4]{x^4}=|x|=-x$. در نتیجه

$$3\sqrt[3]{x^3}+2\sqrt[4]{x^4}=3x+2(-x)=x$$

۲۷۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$b\sqrt[6]{a^6}-a=0\Rightarrow b|a|-a=0\Rightarrow b|a|=a$$

بنابراین اگر $a>0$، $b=1$ و اگر $a<0$، $b=-1$. در نتیجه $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{b^6}=|a|+|b|=|a|+1$ که اگر a مثبت باشد برابر با $a+1$ و اگر a منفی باشد، برابر با $1-a$ است.

۲۸۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt{2^n}}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{8}}}\Rightarrow\sqrt[4\times2\times2]{2^n}=\sqrt[3\times4\times2]{8}\Rightarrow2^{\frac{n}{4\times2\times2}}=2^{\frac{3}{3\times4\times2}}$$

$$2^{\frac{n}{16}}=2^{\frac{1}{8}}\Rightarrow\frac{n}{16}=\frac{1}{8}\Rightarrow n=2$$

۲۸۱- گزینهٔ ۳ از $a>\sqrt{a}$ نتیجه می‌شود $a>1$. بنابراین $a^2<a^3$ و در نتیجه $\sqrt[3]{a^2}<\sqrt[3]{a^3}$. یعنی $\sqrt[3]{a^2}<a$. همچنین $\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$ پس

$$a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}>\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین نابرابری داده شده در گزینهٔ (۳) نادرست است.

۲۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a^{\frac{3}{5}}=16\Rightarrow(a^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}}=16^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=16^{\frac{5}{3}}$$

بنابراین $a^{\frac{3}{4}}=(16^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{4}}=16^{\frac{5}{3}\times\frac{3}{4}}=16^{\frac{5}{4}}=(2^4)^{\frac{5}{4}}=2^5=32$.

۲۸۳- گزینهٔ ۳ با استفاده از نمایش اعداد با نمای گویا به‌دست می‌آید

$$\sqrt{3\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{3}}=\sqrt{3\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{3^{\frac{19}{12}}}=3^{\frac{19}{24}}$$

بنابراین $a=\frac{19}{24}$.

۲۸۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $4a^2+\frac{9}{a^2}=(2a+\frac{3}{a})^2-12$. از طرف دیگر، بنابر فرض $a+\frac{3}{2a}=4$. اگر دو طرف این تساوی را در ۲ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید $2a+\frac{3}{a}=8$. بنابراین، حاصل عبارت موردنظر برابر است با $8^2-12=52$.

۲۸۵- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\div\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{3-2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6-2\sqrt{5}}}\times\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6+2\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}=\sqrt{\frac{3^2-(2\sqrt{2})^2}{6^2-(2\sqrt{5})^2}}=\sqrt{\frac{9-8}{36-20}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$$

۲۸۶- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد مربع مجموع سه جمله،

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(-ab-bc+ca)\qquad(1)$$

از طرف دیگر، $ab+bc-ca=8\Rightarrow-ab-bc+ca=-8$

در نتیجه، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$36=a^2+b^2+c^2-16\Rightarrow a^2+b^2+c^2=52$$

۲۸۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ و $(x-4)(x+1)=x^2-3x-4$. بنابراین

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x+1)=(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)$$
$$=(7+2)(7-4)=27$$

۲۸۸- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=x^3-6x^2+12x-8-(8x^3-12x^2+6x-1)$$
$$=-7x^3+6x^2+6x-7$$

بنابراین ضریب x^2 برابر ۶ است.

۲۸۹- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به کمک اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر ساده می‌کنیم:

$$A=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)+1$$
$$=((x-1)(x^2+x+1))((x+1)(x^2-x+1))+1$$
$$=(x^3-1)(x^3+1)+1=x^6-1+1=x^6$$

حال قرار می‌دهیم $x=\sqrt[12]{2}$ و نتیجه می‌شود $A=(\sqrt[12]{2})^6=\sqrt{2}$.

۲۹۰- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت

$$x^2-y^2-6x-8y-7=(x^2-6x+9)-(y^2+8y+16)$$
$$=(x-3)^2-(y+4)^2=(x-3-(y+4))(x-3+y+4)$$
$$=(x-y-7)(x+y+1)$$

بنابراین $x+y+1$ عامل عبارت مورد نظر است.

۲۹۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^4+3x^2+4=x^4+4x^2+4-x^2=(x^2+2)^2-x^2$$
$$=(x^2+2-x)(x^2+2+x)$$

بنابراین x^2-x+2 عاملی از عبارت مورد نظر است.

۲۹۲- گزینهٔ ۳ صورت کسر اول برابر است با

$$3y^3+3=3(y^3+1)=3(y+1)(y^2-y+1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{3(y+1)(y^2-y+1)}{y-x}\times\frac{x(y-x)}{x(1-y+y^2)}=3(y+1)$$

۲۹۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد جملهٔ مشترک، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a^2+ab+ac+bc=a^2+a(b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

توجه کنید که $a+c=a+b+c-b=3+2=5$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $3\times5=15$.

۲۹۴- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^2)^3-1}{a^2(a^2-1)}=\frac{(a^2-1)((a^2)^2+a^2+1)}{a^2(a^2-1)}$$
$$=\frac{a^4+a^2+1}{a^2}=\frac{a^4}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+1$$
$$=(a-\frac{1}{a})^2+2+1=\sqrt{5}^2+3=8$$

۲۹۵- گزینهٔ ۱ مخرج کسر را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-5=\frac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-5=\frac{4\sqrt{3}+4+6+2\sqrt{3}}{3-1}-5$$
$$=\frac{10+6\sqrt{3}}{2}-5=5+3\sqrt{3}-5=3\sqrt{3}$$

۲۹۶- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر داده شده را در $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

اکنون صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

۲۹۷- گزینهٔ ۴ ابتدا مخرج طرف چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}\times\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{(\sqrt[3]{3})^3-1}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}+\frac{1}{2}$$

بنابراین $a=\frac{1}{2}$.

۲۹۸- گزینهٔ ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر است با $P(2)=2^5-4(2)^3+3(2)^2-2+1=11$.

۲۹۹- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ برابر است با $P(1)=3-4a-5=-4a-2$. چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس این باقی‌مانده صفر است، در نتیجه

$$-4a-2=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۳۰۰- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر با $P(-4)$ است و چون بنابر فرض، این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(-4)=16$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{13}+bx^{97}-5\Rightarrow P(-4)=a(-4)^{13}+b(-4)^{97}-5$$
$$16=-4^{13}a-4^{97}b-5\Rightarrow 4^{13}a+4^{97}b=-21 \quad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-4$ برابر با $P(4)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(4)=4^{13}a+4^{97}b-5\xrightarrow{\text{بنابر تساوی (1)}}P(4)=-21-5=-26$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر -26 است.

۳۰۱- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر با ۴ است، پس $P(2)=4$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(4x)$ بر $2x-1$ برابر است با $P(4\times\frac{1}{2})=P(2)=4$.

۳۰۲- گزینهٔ ۱ جواب‌های معادله برابر هستند با

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\times13}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{12}}{2}=4\pm\sqrt{3}$$

۳۰۳- گزینهٔ ۳ معادلهٔ گزینهٔ (۳) به ازای هر مقدار m جواب حقیقی دارد، زیرا معادله‌ای که به‌ازای هر m، دلتای مربوط به آن همیشه مثبت باشد، جواب این تست است.

$$mx^2-x-m=0\Rightarrow\Delta=1+4m^2>0$$

توجه کنید که اگر $m=0$، آن‌گاه معادله به یک معادلهٔ درجهٔ اول تبدیل می‌شود که باز هم دارای جواب حقیقی است. بررسی سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) $x^2-2x+m=0\Rightarrow\Delta=4-4m\Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

گزینهٔ (۲) $x^2-x+m^2=0\Rightarrow\Delta=1-4m^2\Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

گزینهٔ (۴) $mx^2-x+1=0\Rightarrow\Delta=1-4m\Rightarrow$ Δ همواره مثبت نیست.

۳۰۴- گزینهٔ ۱ باید $\Delta\ge0$، پس

$$x^2-(k+1)x+1=0\Rightarrow\Delta=(k+1)^2-4\ge0$$

$$(k+1)^2\ge4\xrightarrow{k>0}k+1\ge2\Rightarrow k\ge1$$

پس حداقل مقدار مثبت k برابر ۱ است.

۳۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که چون مجموع ضریب‌های معادلهٔ $92x^2-167x+75=0$ برابر با صفر است، پس یکی از جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۱ و جواب دیگر آن $\frac{75}{92}$ است. چون $\frac{75}{92}<1$، پس کوچک‌ترین جواب $\frac{75}{92}$ است.

۳۰۶- گزینهٔ ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{3})(x-2\sqrt{2})=0\xrightarrow{x_1<x_2}x_1=\sqrt{3},\quad x_2=2\sqrt{2}$$

بنابراین $x_1^4+x_2^2=(\sqrt{3})^4+(2\sqrt{2})^2=9+8=17$.

۳۰۷- گزینهٔ ۳ این دو عدد فرد را x و $x+2$ فرض می‌کنیم. بنابراین

$$x^2+(x+2)^2=130\Rightarrow2x^2+4x+4=130\Rightarrow x^2+2x-63=0$$

$$(x+9)(x-7)=0\Rightarrow x=-9\ (\text{غ.ق.ق}),\ x=7$$

بنابراین دو عدد مورد نظر، ۷ و ۹ هستند و اختلاف مربع‌های آن‌ها برابر ۸۱−۴۹ یعنی ۳۲ است.

۳۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)$$

از طرف دیگر، $x_1+x_2=4$ و $x_1x_2=-1$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $(-1)(4)=-4$.

۳۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=2$ و $\alpha\beta=-5$. بنابراین

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=8-3\times(-5)\times2=38$$

۳۱۰- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=-\frac{1}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=-1$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2}=-1\Rightarrow m-1=-2\Rightarrow m=-1$$

۳۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_1+x_2=-5$ و چون $2x_1-x_2=17$، پس با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها به‌دست می‌آید $x_1=4$. چون x_1 جواب معادلهٔ مورد نظر است، پس ۴ در این معادله صدق می‌کند:

$$4^2+5(4)-4m+16=0\Rightarrow m=13$$

۳۱۲- گزینهٔ ۴ β جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2-\beta-7=0\Rightarrow2\beta^2=\beta+7$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$. بنابراین $\alpha+2\beta^2=\alpha+\beta+7=\frac{1}{2}+7=\frac{15}{2}$.

۳۱۳- گزینهٔ ۳ مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها را حساب می‌کنیم

$$S=\alpha+\beta=2-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}=5$$

$$P=\alpha\beta=(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-5x+3-\sqrt{3}=0$$

۳۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x_1+x_2=1$ و $x_1x_2=-1$. بنابراین

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_2+1+x_1+1}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{x_1+x_2+2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{1+2}{1+1-1}=3$$

$$\frac{1}{x_1+1}\times\frac{1}{x_2+1}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{1}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{1}{1+1-1}=1$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^2-3x+1=0$ است.

۳۱۵- گزینهٔ ۲ برای اینکه جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ مختلف‌العلامت باشند، کافی است $\frac{c}{a}<0$. توجه کنید که در این حالت $\Delta>0$. بنابراین

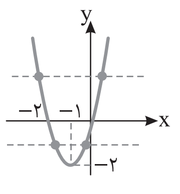
$$\frac{m+2}{m}<0\Rightarrow-2<m<0$$

۳۱۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** برای اینکه معادلهٔ مورد نظر دو جواب منفی داشته باشد، باید $\Delta>0$، مجموع جواب‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. در نتیجه

$$\Delta>0\Rightarrow16-4(-2)(a)>0\Rightarrow a>-2,\quad \frac{4}{-2}=-2<0,\quad \frac{a}{-2}>0\Rightarrow a<0$$

بنابراین $-2<a<0$.

راه‌حل دوم ابتدا معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت $2x^2+4x=a$ می‌نویسیم. اکنون سهمی به معادلهٔ $y=2x^2+4x$ و خط $y=a$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. بنابراین اگر $-2<a<0$، معادله دو جواب منفی دارد و اگر $a>0$، معادله یک جواب منفی و یک جواب مثبت دارد.



توجه کنید که $x=0$ و $x=-2$ طول نقاط برخورد سهمی با محور x هستند و رأسش که نقطهٔ مینیمم آن است نقطهٔ $(-1,-2)$ است.

۳۱۷- گزینهٔ ۱ شرط داشتن دو جواب، مثبت بودن Δ است. پس

$$\Delta=(a+1)^2-64>0\Rightarrow(a+1)^2>64\Rightarrow\begin{cases}a+1>8\Rightarrow a>7\\ \text{یا}\\ a+1<-8\Rightarrow a<-9\end{cases}\quad(1)$$

شرط مثبت بودن دو جواب این است که مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها مثبت باشند. حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر ۴ است که مثبت است و مجموع جواب‌ها برابر $-\frac{a+1}{2}$ است. پس $-\frac{a+1}{2}>0\Rightarrow a+1<0\Rightarrow a<-1\quad(2)$

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a<-9$.

۳۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که معادله دو جواب دارد که یکی مثبت و یکی منفی است، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها منفی است:

$$\frac{5(k-2)}{k+6}<0 \Rightarrow k\in(-6,2)$$

از طرف دیگر چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع جواب‌ها منفی است

$$-\frac{17(k+1)}{k+6}<0\Rightarrow \frac{k+1}{k+6}>0 \Rightarrow k\in(-\infty,-6)\cup(-1,+\infty)$$

بنابراین $k\in(-1,2)$.

۳۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x=-1$ یک جواب معادله است.

$$(-1)^3-(-1)^2-3(-1)-1=0$$

بنابراین معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x^3+x^2-2x^2-3x-1=0 \Rightarrow x^2(x+1)-(2x^2+3x+1)=0$$

$$x^2(x+1)-(x+1)(2x+1)=0\Rightarrow (x+1)(x^2-2x-1)=0$$

پس جواب‌های دیگر از حل معادلهٔ $x^2-2x-1=0$ به دست می‌آیند که عبارت‌اند از $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$. در نتیجه مجموع جواب‌های منفی معادله برابر است با $-1+(1-\sqrt{2})=-\sqrt{2}$.

۳۲۰- گزینهٔ ۴ چون $x=2$ یکی از جواب‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند: $8+4a+2+6=0$ پس $a=-4$. چون $x-2$ عاملی از x^3-4x^2+x+6 است، بنابراین $x^3-4x^2+x+6=(x-2)Q(x)$.

برای به دست آوردن $Q(x)$ چندجمله‌ای x^3-4x^2+x+6 را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم، که نتیجه می‌شود $Q(x)=x^2-2x-3$. بنابراین

$$x^3-4x^2+x+6=(x-2)(x^2-2x-3)=(x-2)(x+1)(x-3)$$

پس به غیر از $x=2$ جواب‌های دیگر معادله ۱- و ۳ هستند که مجموع مربع‌های آن‌ها ۱۰ است.

۳۲۱- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^2\ge 0$، معادله به‌صورت $t^2-3t-1=0$ در می‌آید که جواب‌های آن $t=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ است. عدد $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ منفی است و قابل قبول نیست. بنابراین

$$x^2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با

$$-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}=-\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

۳۲۲- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^2=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$ و $t\ge 0$. همچنین معادله به شکل $t^2-2t+m^2-1=0$ در می‌آید. اگر این معادله دو جواب مثبت داشته باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. بنابراین در معادلهٔ $t^2-2t+m^2-1=0$ باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$\Delta>0\Rightarrow 4-4(m^2-1)>0\Rightarrow m^2<2\Rightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$$

$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow 2>0\ ,\quad \frac{c}{a}>0\Rightarrow m^2-1>0\Rightarrow m<-1$ یا $m>1$

بنابراین اگر m عضو مجموعهٔ $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$ باشد، معادلهٔ اصلی چهار جواب خواهد داشت. این مجموعه را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت

$$m\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})-[-1,1]$$

۳۲۳- گزینهٔ ۳ معادله را به شکل $(x^2-x)^2+2(x^2-x)-3=0$ می‌نویسیم. با قرار دادن $x^2-x=t$ به‌دست می‌آید

$$t^2+2t-3=0\Rightarrow t=-3\ ,\ t=1$$

$x^2-x=-3\Rightarrow x^2-x+3=0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow$ معادله جواب ندارد

$x^2-x=1\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow$ مجموع جواب‌ها$=1$

۳۲۴- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=0\Rightarrow x\left(\frac{2(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)=0$$

$$x\left(\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}\right)=0\Rightarrow \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)}=0$$

جواب‌های این معادله ۰ و ۳- هستند که هر دو قابل قبول هستند و مجموع آن‌ها ۳- است.

۳۲۵- گزینهٔ ۳ دو طرف معادله را در مخرج مشترک کسرهای دو طرف که برابر $3(x-3)(x+3)$ است ضرب می‌کنیم:

$$3(x-3)(x+3)\frac{x+3}{x-3}+3(x-3)(x+3)\frac{x-3}{x+3}=\frac{10}{3}\times 3(x-3)(x+3)$$

$$3(x+3)^2+3(x-3)^2=10(x-3)(x+3)$$

$$3(x^2+6x+9)+3(x^2-6x+9)=10(x^2-9)$$

$$6x^2+54=10x^2-90\Rightarrow 4x^2=144\Rightarrow x=\pm 6$$

چون ۶- و ۶ هیچ‌کدام از مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۳۶- است.

۳۲۶- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{2x-2a+x+3}{(x+3)(x-a)}=4\Rightarrow\frac{3x-2a+3}{(x+3)(x-a)}=4$$

$$3x-2a+3=4x^2+(12-4a)x-12a$$

$$4x^2+(9-4a)x-10a-3=0$$

بنابراین $\text{مجموع جواب‌ها}=\frac{4a-9}{4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 4a-9=-1\Rightarrow a=2$

اگر $a=2$، آن‌گاه معادله به‌صورت $4x^2+x-23=0$ درمی‌آید که چون $\Delta>0$ پس معادله دو جواب دارد. ($x=2$ و $x=-3$ که هر کدام مخرج یکی از کسرها را در معادلهٔ اولیه صفر می‌کنند، هیچ کدام جواب معادلهٔ بالا نیستند. پس هر دو جواب این معادله قابل قبول هستند.)

۳۲۷- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را در $x(x+a)$ ضرب می‌کنیم

$$x+a+3x=2x^2+2ax\Rightarrow 2x^2+(2a-4)x-a=0$$

برای اینکه معادله جواب داشته باشد باید $\Delta\ge 0$. پس

$$(2a-4)^2+8a\ge 0\Rightarrow 4a^2-16a+16+8a\ge 0\Rightarrow a^2-2a+4\ge 0$$

عبارت a^2-2a+4 همواره مثبت است، پس معادله به‌ازای تمام مقادیر a جواب دارد.

۳۲۸- گزینهٔ ۲ سمت راست معادلهٔ داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{15}{x^2+x+1}=2(x^2+x+1)-1$$

اگر فرض کنیم $x^2+x+1=t$، این معادله می‌شود

$$\frac{15}{t}=2t-1\Rightarrow 15=2t^2-t\Rightarrow 2t^2-t-15=0\Rightarrow t=-\frac{5}{2}\ ,\ t=3$$

به این ترتیب

$x^2+x+1=-\frac{5}{2}\Rightarrow x^2+x+\frac{7}{2}=0$ جواب ندارد $(\Delta<0)$

$x^2+x+1=3\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=-2\,,\,x=1$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۳۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=(x-\frac{1}{x})^2+4$$

پس معادلهٔ مورد نظر به معادلهٔ $(x-\frac{1}{x})^2=\frac{3}{2}(x-\frac{1}{x})$ تبدیل می‌شود.

بنابراین یا $x-\frac{1}{x}=0$، یعنی $x^2-1=0$، که مجموع جواب‌هایش صفر است،

یا $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$، یعنی $x^2-\frac{3}{2}x-1=0$ که مجموع جواب‌هایش $\frac{3}{2}$ است.

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر با $\frac{3}{2}$ است.

۳۳۰- گزینهٔ ۴ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4\Rightarrow x+1=4x^2\Rightarrow 4x^2-x-1=0$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $-\frac{1}{4}$ است.

۳۳۱- گزینهٔ ۳ اگر ماشین کندتر به تنهایی در t ساعت کار را تمام کند، ماشین سریع‌تر به تنهایی در $\frac{t}{3}$ ساعت کار را تمام می‌کند. پس ماشین کندتر به تنهایی در یک ساعت $\frac{1}{t}$ کار و ماشین سریع‌تر به تنهایی در یک ساعت $\frac{3}{t}$ کار را انجام می‌دهد. از طرف دیگر دو ماشین با هم در یک ساعت $\frac{1}{6}$ کار را انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{1}{t}+\frac{3}{t}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{4}{t}=\frac{1}{6}\Rightarrow t=24$$

بنابراین ماشین کندتر به تنهایی در ۲۴ ساعت کار را انجام می‌دهد.

۳۳۲- گزینهٔ ۳ با توجه به جدول تعیین علامت باید $a-b<0$، پس $a<b$. همچنین $x=b$ ریشهٔ عبارت است، بنابراین

$$(a-b)b-2a+2b=0\Rightarrow(a-b)b-2(a-b)=0$$

$$(a-b)(b-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\Rightarrow a=b & \text{(غ.ق.ق.)}\\ b-2=0\Rightarrow b=2\end{cases}$$

چون a عددی طبیعی است، پس

$$a<b=2\Rightarrow a=1$$

بنابراین $a+b=3$.

۳۳۳- گزینهٔ ۲ با توجه به جدول تعیین علامت، مشخص است که عبارت مورد نظر باید چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس $a-2=0$ و در نتیجه $a=2$. بنابراین عبارت به صورت $y=-(2+b)x+4$ است. چون $x=4$ ریشهٔ عبارت است، پس

$$-(2+b)\times4+4=0\Rightarrow b=-1$$

بنابراین $a-b=3$.

۳۳۴- گزینهٔ ۳ ابتدا عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y=\frac{(x-1)(x-2)(x-1)(x+1)}{(x-2)^3}$$

اکنون آن را ساده می‌کنیم $y=\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-2)^2}$. چون عبارت‌های $(x-1)^2$ و $(x-2)^2$ نامنفی هستند، علامت عبارت اخیر را با توجه به علامت $x+1$ تعیین می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
y		−	0	+	0	+	ت.ن	+	

۳۳۵- گزینهٔ ۲ دو نامعادلهٔ $3x-2<5x+6$ و $4x-1<3x-2$ را حل می‌کنیم:

$$3x-2<5x+6\Rightarrow-2x<8\Rightarrow x>-4$$

$$4x-1<3x-2\Rightarrow x<-1$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های فوق یعنی $-4<x<-1$ جواب مسئله است. پس $a=-4$ و $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-5$.

۳۳۶- گزینهٔ ۱ باید شرایط $\Delta<0$ و $a>0$ برقرار باشند. پس

$$m-1>0\Rightarrow m>1\quad(1)$$

$$\Delta=8-4m(m-1)<0\Rightarrow m^2-m-2>0\Rightarrow(m+1)(m-2)>0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر باید

$m<-1$ یا $m>2$ (۲)

از دو شرط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m>2$.

m	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
m^2-m-2		+	0	−	0	+	

۳۳۷- گزینهٔ ۴ ابتدا جدول تعیین علامت عبارت $y=\frac{(1-x)^2(x+2)^3}{x|x|(2-x)^5}$ را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
y		+	0	−	ت.ن	+	0	+	ت.ن	−	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-2]\cup(0,2)$ است.

۳۳۸- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x-\frac{2}{x}-1\geq0\Rightarrow\frac{x^2-x-2}{x}\geq0$$

به کمک تعیین علامت مجموعهٔ جواب‌های نامعادله را تعیین می‌کنیم.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$\frac{x^2-x-2}{x}$		−	0	+	ت.ن	−	0	+	

این مجموعه به‌صورت $[-1,+\infty)-[0,2)$ است. پس $a=-1$ و $b=2$. در نتیجه $a+b=1$.

۳۳۹- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$x-۱=x^۲-۴x+۴ \Rightarrow x^۲-۵x+۵=۰$$

جواب‌های این معادله به‌صورت $x=\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ و $x=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ هستند. ولی $\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند زیرا این عدد کوچک‌تر از ۲ است و در معادلهٔ $\sqrt{x-۱}=x-۲$ اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه سمت چپ معادله، نامنفی و سمت راست آن منفی است که قابل قبول نیست. بنابراین فقط $x=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله است.

۳۴۰- گزینهٔ ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x+۱}+۱=\sqrt{۲x+۳}$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$x+۱+۱+۲\sqrt{x+۱}=۲x+۳ \Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}=x+۱$$

دوباره طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴(x+۱)=(x+۱)^۲ \Rightarrow ۴x+۴=x^۲+۲x+۱$$

$$x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow x=-۱\,,\,x=۳$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس مجموع جواب‌ها برابر ۲ است.

۳۴۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را این‌طور می‌نویسیم:

$$x^۲+۵x+۲۸-۲۴-۵\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=۰$$

اکنون اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}$، این معادله می‌شود

$$t^۲-۲۴-۵t=۰ \Rightarrow (t-۸)(t+۳)=۰ \Rightarrow t=۸\,,\,t=-۳$$

چون $t\geq ۰$، پس $t=۸$، یعنی

$$\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}=۸ \Rightarrow x^۲+۵x+۲۸=۶۴ \Rightarrow x^۲+۵x-۳۶=۰$$

$$(x-۴)(x+۹)=۰ \Rightarrow x=۴\,,\,x=-۹$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۳۶− است.

۳۴۲- گزینهٔ ۲ اگر این عدد را x فرض کنیم، آن‌گاه

$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲}=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} \frac{x^۲}{۴}=x \Rightarrow x^۲=۴x$$

$$x=۰,\ \ x=۴$$

چون هر دو عدد در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند، بنابراین دو عدد با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

۳۴۳- گزینهٔ ۱ از روی شکل معلوم است که $a>۱$. چون $x=۱$ جواب معادله است، پس

$$۲\times ۱^۲-۱=|۱-a| \Rightarrow |۱-a|=۱ \xrightarrow{a>۱} a-۱=۱$$

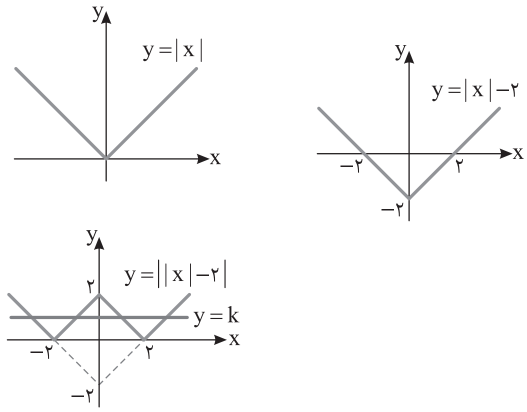
بنابراین $a=۲$.

۳۴۴- گزینهٔ ۴ اگر خط و سهمی نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، باید معادلهٔ $x^۲+۲kx+k+۱=-x$ جواب نداشته باشد. بنابراین معادلهٔ $x^۲+(۲k+۱)x+k+۱=۰$ جواب ندارد، یعنی

$$\Delta=(۲k+۱)^۲-۴(k+۱)<۰ \Rightarrow ۴k^۲+۴k+۱-۴k-۴<۰$$

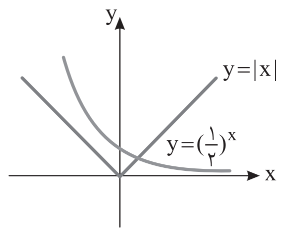
$$k^۲<\frac{۳}{۴} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲}<k<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۴۵- گزینهٔ ۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر، تعداد نقطه‌های برخورد نمودار تابع‌های $y=||x|-۲|$ و $y=k$ است. نمودار $y=||x|-۲|$ را در شکل زیر رسم کرده‌ایم:



از روی شکل معلوم است که اگر خط $y=k$ نمودار $y=||x|-۲|$ را در چهار نقطه قطع کرده باشد، باید $۰<k<۲$.

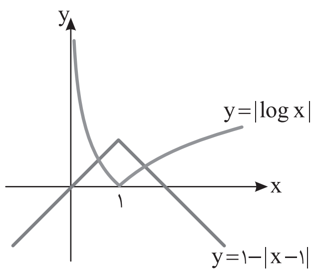
۳۴۶- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $|x|=(\frac{۱}{۲})^x$ می‌نویسیم و نمودار تابع‌های $y=|x|$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم می‌کنیم. نمودارها یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، پس معادله یک جواب دارد.



۳۴۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$|\log x|=۱-|x-۱|$$

و نمودار تابع‌های $y=۱-|x-۱|$ و $y=|\log x|$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.



۳۴۸- گزینهٔ ۱

$$|۳+|۲-|۱+a|||=|۳+|۲-(-(۱+a))|| \quad (\text{چون } ۱+a<۰)$$

$$=|۳+|۳+a||=|۳-(۳+a)| \quad (\text{چون } ۳+a<۰)$$

$$=|-a|=-a \quad (\text{چون } a<۰)$$

۳۴۹- گزینهٔ ۴ چون a منفی است، پس $|a|=-a$، در نتیجه $||a|-b|=|-a-b|$

اکنون توجه کنید که $b<|a|=-a \Rightarrow a+b<0$

بنابراین $||a|-b|=|-a-b|=-a-b$. از طرف دیگر،

$$|b-|2a||=|b-2|a||=|b+2a|$$

چون $b+2a=\underbrace{b+a}_{<0}+\underbrace{a}_{<0}<0$، در نتیجه $|b+2a|=-b-2a$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-a-b-(-b-2a)=a$.

۳۵۰- گزینهٔ ۳ چون $1<x<2$، پس

$$\frac{|x-2|}{x-2}=\frac{2-x}{x-2}=-1,\quad \frac{x-1}{|x-1|}=\frac{x-1}{x-1}=1,\quad \frac{|x|}{x}=1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-1+1-1=-1$.

۳۵۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x^2<x \Rightarrow x^2-x=x(x-1)<0$

در نتیجه $0<x<1$. بنابراین $|x+1|=x+1$، $|1-x|=1-x$ و $|x|=x$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $x+1-(1-x)+x=3x$.

۳۵۲- گزینهٔ ۱ عبارت A را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A=|2x-6|+|7-2x|$$

با توجه به نابرابری مثلث، $A\geq|2x-6+7-2x| \Rightarrow A\geq 1$

پس کمترین مقدار عبارت A برابر ۱ است.

۳۵۳- گزینهٔ ۴ معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$|x-2|=3 \Rightarrow \begin{cases} x-2=3 \\ x-2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ است.

۳۵۴- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که $|-x|=|x|$ و $|3x|=3|x|$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$|x|+|x|+3|x|=15 \Rightarrow 5|x|=15 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=-3\ ,\ x=3$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر صفر است.

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر x جواب معادلهٔ مورد نظر باشد، $-x$ هم جواب این معادله است. بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد صفر است.

۳۵۵- گزینهٔ ۴ از تساوی $|3x-x^2|=|x-1|$ تساوی‌های زیر نتیجه می‌شوند

$$3x-x^2=x-1 \Rightarrow x^2-2x-1=0 \qquad (1)$$

$$3x-x^2=-(x-1) \Rightarrow x^2-4x+1=0 \qquad (2)$$

مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر ۲ و مجموع جواب‌های معادلهٔ (۲) برابر ۴ است. پس مجموع جواب‌های معادلهٔ اصلی برابر ۶ است (توجه کنید که معادله‌های به‌دست آمده، جواب مشترک ندارند).

۳۵۶- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$-3\leq 2x-a\leq 3 \Rightarrow a-3\leq 2x\leq a+3 \Rightarrow \frac{a-3}{2}\leq x\leq\frac{a+3}{2}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله، بازهٔ $[\frac{a-3}{2},\frac{a+3}{2}]$ است. پس

$$\frac{a-3}{2}=-a \Rightarrow a-3=-2a \Rightarrow a=1,\quad \frac{a+3}{2}=b \Rightarrow b=2$$

۳۵۷- گزینهٔ ۲ نامعادله را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$||x|-2|<6 \Rightarrow -6<|x|-2<6 \Rightarrow -4<|x|<8$$

نابرابری $|x|>-4$ همواره برقرار است، پس کافی است نامعادلهٔ $|x|<8$ را حل کنیم:

$$|x|<8 \Rightarrow -8<x<8$$

بنابراین اعداد صحیح -7 تا ۷ در نامعادله صدق می‌کنند که تعداد آن‌ها ۱۵ تا است.

۳۵۸- گزینهٔ ۲ ابتدا نامعادله را به‌صورت $2|x|>|x-2|$ می‌نویسیم.

اکنون دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$4x^2>(x-2)^2 \Rightarrow (2x)^2-(x-2)^2>0$$

در نتیجه $(2x-(x-2))(2x+x-2)>0$ یا به طور معادل

$$(x+2)(3x-2)>0$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های مورد نظر برابر است با $(-\infty,-2)\cup(\frac{2}{3},+\infty)$.

۳۵۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $x-2+x-4=2x-6$، در نتیجه

$$|x-2|+|x-4|=|x-2+x-4|$$

بنابراین، حالت تساوی نابرابری مثلث پیش آمده است. در نتیجه

$$(x-2)(x-4)\geq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}-(2,4)$$

پس تنها عدد صحیحی که تساوی مورد نظر به‌ازای آن برقرار نیست ۳ است.

۳۶۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

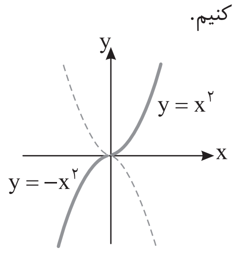
$$f(\sqrt{3}-1)+f(\sqrt{5}-2)=5|3(\sqrt{3}-1)-2|-3|5(\sqrt{3}-1)-2|$$

$$+5|3(\sqrt{5}-2)-2|-3|5(\sqrt{5}-2)-2|=5|\underbrace{3\sqrt{3}-5}_{+}|-3|\underbrace{5\sqrt{3}-7}_{+}|$$

$$+5|\underbrace{3\sqrt{5}-8}_{-}|-3|\underbrace{5\sqrt{5}-12}_{-}|=-4+4=0$$

۳۶۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع f به شکل $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x\leq 0 \end{cases}$ است.

پس باید برای $x\geq 0$ نمودار تابع $y=x^2$ را رسم کنیم و برای $x\leq 0$ نمودار تابع $y=-x^2$ را رسم کنیم.



۳۶۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases} 1 & x>1 \\ -1 & x<1 \end{cases}$. بنابراین

$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>1 \\ x^2-1 & x<1 \end{cases}$. در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینهٔ (۱) است.

۳۶۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} -(x+1)+x & x\leq -1 \\ x+1+x & -1<x\leq 0 \\ x+1-x & x>0 \end{cases}=\begin{cases} -1 & x\leq -1 \\ 2x+1 & -1<x\leq 0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

در نتیجه نمودار تابع f مانند گزینهٔ (۳) است.

۳۶۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$[\frac{1}{2}]=0\ ,\ [\frac{2}{2}]=[\frac{3}{2}]=1\ ,\ [\frac{4}{2}]=[\frac{5}{2}]=2\ ,\ \cdots\ ,\ [\frac{18}{2}]=[\frac{19}{2}]=9\ ,\ [\frac{20}{2}]=10$$

از جمع تساوی‌های بالا نتیجه می‌شود

$$[\frac{1}{2}]+[\frac{2}{2}]+[\frac{3}{2}]+\cdots+[\frac{20}{2}]=2(1+2+\cdots+9)+10=90+10=100$$

۳۶۵- گزینهٔ ۴ ابتدا با حل نامعادله، محدودهٔ x را می‌یابیم:

$$x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0 \Rightarrow -1<x<0$$

اگر عددی بین ۱- و صفر باشد و به توان هر عدد فردی برسد، در همان محدوده باقی می‌ماند، ولی اگر به توان عددی زوج برسد، عددی بین صفر و ۱ می‌شود، یعنی

$$-1<x<0 \Rightarrow \begin{cases} 0<x^{2k}<1 \Rightarrow [x^{2k}]=0 \\ -1<x^{2k+1}<0 \Rightarrow [x^{2k+1}]=-1 \end{cases}$$

$$[x]+[x^2]+\cdots+[x^{10}]=5\times 0+5\times(-1)=-5$$

۳۶۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از نابرابری $n^3<n^3+3n^2<(n+1)^3$، نتیجه می‌گیریم $n<\sqrt[3]{n^3+3n^2}<n+1$، بنابراین $[\sqrt[3]{n^3+3n^2}]=n$.

راه‌حل دوم چون تساوی به ازای هر عدد طبیعی n باید برقرار باشد، پس مثلاً به ازای $n=2$ باید تساوی برقرار باشد. اگر $n=2$، آن‌گاه

$$[\sqrt[3]{n^3+3n^2}]=[\sqrt[3]{20}]=2$$

از طرف دیگر فقط عبارت گزینهٔ (۱) به ازای $n=2$ برابر ۲ می‌شود.

۳۶۷- گزینهٔ ۳ چون $[x]$ عدد صحیح است، معادله را به‌صورت $[x]+[x]=[x]-[x]-2$ می‌نویسیم. بنابراین $[x]=-1 \Rightarrow -1\le x<0$

۳۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(-\frac{1}{2})=|[-\frac{5}{2}]+[-\frac{7}{2}]|=|-3+(-4)|=7$$

۳۶۹- گزینهٔ ۱ به جای x در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم $x+1$، پس

$$f(x+1)=4(x+1)-[x+1]-[3(x+1)]=4x+4-[x]-1-[3x]-3$$
$$=4x-[x]-[3x]=f(x)$$

۳۷۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که باید

$$[x]-2\ge 0 \Rightarrow [x]\ge 2 \Rightarrow x\ge 2$$

بنابراین $D_f=[2,+\infty)$.

۳۷۱- گزینهٔ ۲ مقادیری از x که مخرج $f(x)$ را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع f قرار ندارند. اکنون توجه کنید که

$$[\frac{x}{3}]-2=0 \Rightarrow [\frac{x}{3}]=2 \Rightarrow 2\le \frac{x}{3}<3 \Rightarrow 6\le x<9$$

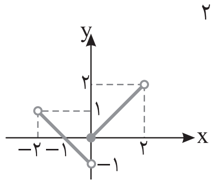
بنابراین $D_f=\mathbb{R}-[6,9)$. پس $a=6$، $b=9$ و در نتیجه $a+b=15$.

۳۷۲- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است

$$-2<x<0 \Rightarrow -1<\frac{x}{2}<0 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=-1 \Rightarrow f(x)=-x-1$$

$$0\le x<2 \Rightarrow 0\le \frac{x}{2}<1 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=0 \Rightarrow f(x)=x$$

پس نمودار تابع به شکل مقابل است



۳۷۳- گزینهٔ ۲ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0)=-\frac{3}{4} \Rightarrow 4^a+b=-\frac{3}{4}$$

$$f(1)=0 \Rightarrow 4^{1+a}+b=0 \Rightarrow 4\times 4^a+b=0$$

اگر رابطهٔ اول را از رابطهٔ دوم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$3\times 4^a=\frac{3}{4} \Rightarrow a=-1$$

$$4^{-1}+b=-\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}+b=-\frac{3}{4} \Rightarrow b=-1$$

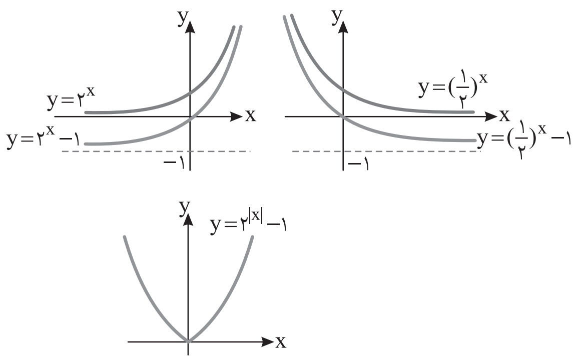
در نتیجه $a+b=-2$.

۳۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا $f(-x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{2^x}-1}{\frac{1}{2^x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}$$

بنابراین $f(x)+f(-x)=\frac{2^x-1}{1+2^x}+\frac{1-2^x}{1+2^x}=\frac{2^x-1+1-2^x}{1+2^x}=0$.

۳۷۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & x\ge 0 \\ 2^{-x}-1 & x<0 \end{cases}$ یعنی $f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & x\ge 0 \\ (\frac{1}{2})^x-1 & x<0 \end{cases}$. بنابراین نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.



۳۷۶- گزینهٔ ۱ اگر تابع $y=a^x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $a>1$. بنابراین $3k+1>1$، پس $k>0$.

۳۷۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{81}{16}=(\frac{3}{2})^4=(\frac{2}{3})^{-4}$، بنابراین

$$(\frac{2}{3})^{x+2}=(\frac{81}{16})^{x-1} \Rightarrow (\frac{2}{3})^{x+2}=((\frac{3}{2})^4)^{x-1}=(\frac{2}{3})^{-4(x-1)}$$

در نتیجه $x+2=-4(x-1)$، پس $x=\frac{2}{5}$.

۳۷۸- گزینهٔ ۱ با فاکتورگیری از 5^x معادله را حل می‌کنیم

$$5^x(1+3\times 5^{-2})=140 \Rightarrow 5^x(1+\frac{3}{25})=140 \Rightarrow 5^x\times\frac{28}{25}=140$$

$$5^x=\frac{25\times 140}{28}=125=5^3 \Rightarrow x=3$$

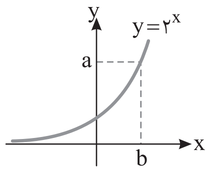
پس معادله یک جواب دارد.

۳۷۹- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار تابع $y=2^x$، معادلهٔ $2^x=a$ در صورتی که $a>0$، دقیقاً یک جواب دارد $(x=b)$ و اگر $a\le 0$، جواب ندارد. بنابراین

$2^x-5=0\Rightarrow$ یک جواب دارد. , $2^x-6=0\Rightarrow$ یک جواب دارد.

$2^x+6=0\Rightarrow$ جواب ندارد. , $2^x+5=0\Rightarrow$ جواب ندارد.

چون تابع $y=2^x$ یک‌به‌یک است، پس معادلهٔ اصلی دو جواب دارد.



۳۸۰- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $3^x=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$3\times9\times9^x-6\times3^x-1=0\Rightarrow 27t^2-6t-1=0\Rightarrow t=-\frac{1}{9},\ t=\frac{1}{3}$$

چون $t>0$، پس $t=\frac{1}{3}$، یعنی $3^x=\frac{1}{3}=3^{-1}$، پس $x=-1$. در نتیجه معادله یک جواب دارد.

۳۸۱- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $0<a<1$ و $a^{f(x)}<a^{g(x)}$، آن‌گاه $f(x)>g(x)$ و بالعکس. چون $0<\frac{1}{2}<1$، پس

$$3-x>x-3\Rightarrow x<3$$

۳۸۲- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $5^x=t$، نامعادلهٔ داده شده را می‌توان این‌طور نوشت

$$25^x+24\times5^{x-1}<1\Rightarrow t^2+24\times\frac{t}{5}<1\Rightarrow 5t^2+24t<5$$

$$5t^2+24t-5<0\Rightarrow(t+5)(t-\frac{1}{5})<0$$

چون $t+5>0$، پس $t-\frac{1}{5}<0$، یعنی $5^x<\frac{1}{5}=5^{-1}$، در نتیجه $x<-1$.

۳۸۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}=7^{\frac{1}{5}}\times7^{\frac{1}{5\times4}}=7^{\frac{1}{4}}$. اکنون اگر از ویژگی $\log_a x^n=n\log_a x$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$\log_7\sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}=\log_7 7^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\log_7 7=\frac{1}{4}$$

۳۸۴- گزینهٔ ۳ با استفاده از تساوی $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$ به‌دست می‌آید

$$\log_4(\sqrt{3}-1)+\log_4(\sqrt{3}+1)=\log_4((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1))=\log_4 2=\frac{1}{2}$$

۳۸۵- گزینهٔ ۱ چون $\frac{1}{\log_a x}=\log_x a$، پس

$$\frac{1}{\log_4 6}+\frac{1}{\log_9 6}=\log_6 4+\log_6 9=\log_6(4\times9)$$

$$=\log_6 36=\log_6 6^2=2\log_6 6=2$$

۳۸۶- گزینهٔ ۳ به کمک تساوی $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ می‌توان نوشت

$$3^{\log_9 6}=6^{\log_9 3}=6^{\log_{3^2}3}=6^{\frac{1}{2}\log_3 3}=6^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$$

۳۸۷- گزینهٔ ۲ از تساوی $\log4=a$ نتیجه می‌شود

$$\log2^2=a\Rightarrow2\log2=a\Rightarrow\log2=\frac{a}{2}$$

بنابراین $\log125=\log5^3=3\log5=3\log\frac{10}{2}=3(\log10-\log2)$

$$=3(1-\frac{a}{2})=3-\frac{3a}{2}$$

۳۸۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\log30=a\Rightarrow\log(3\times10)=a\Rightarrow\log3+\log10=a\Rightarrow\log3=a-1$$

$$\log50=b\Rightarrow\log(5\times10)=b\Rightarrow\log5+\log10=b\Rightarrow\log5=b-1$$

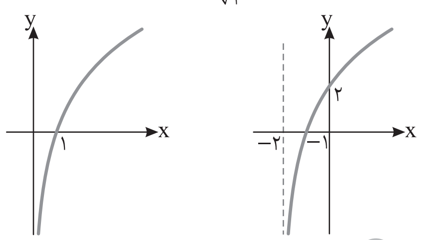
بنابراین $\log_5 3=\frac{\log3}{\log5}=\frac{a-1}{b-1}$.

۳۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $3^{x+2}=3^2\times3^x=9\times3^x=4$. بنابراین

$$3^x=\frac{4}{9}\Rightarrow x=\log_3\frac{4}{9}$$

۳۹۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید که نمودار f از روی نمودار $y=\log_a x$ به‌دست آمده باشد. معلوم است که نمودار $y=\log_a x$، دو واحد به سمت چپ منتقل شده است تا نمودار f به‌دست آید. بنابراین ضابطهٔ تابع f می‌تواند $f(x)=\log_a(x+2)$ باشد. از طرف دیگر $f(0)=2$، پس $\log_a 2=2$، یعنی $a^2=2$. بنابراین $a=\sqrt{2}$ (توجه کنید که $a>0$). بنابراین

$$f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x+2)$$



۳۹۱- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$f(x)=4+\log(2x-4)=6\Rightarrow\log(2x-4)=2\Rightarrow2x-4=10^2\Rightarrow x=52$$

بنابراین $f(52)=6$، پس $f^{-1}(6)=52$.

۳۹۲- گزینهٔ ۲

۳۹۳- گزینهٔ ۲ لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود، پس

$$9-x^2>0\Rightarrow x^2<9\Rightarrow-3<x<3\Rightarrow D_f=(-3,3)$$

بنابراین اعداد صحیح ±2، ±1 و صفر در دامنهٔ تابع هستند.

۳۹۴- گزینهٔ ۴ اگر $y=3^{5x-1}$، آن‌گاه

$$\log_3 y=5x-1\Rightarrow x=\frac{\log_3 y+1}{5}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{\log_3 x+1}{5}$.

۳۹۵- گزینهٔ ۲ ابتدا x را بر حسب y حساب می‌کنیم:

$$y=\log_3(x-2)\Rightarrow3^y=x-2\Rightarrow x=3^y+2$$

بنابراین $f^{-1}(x)=3^x+2$.

۳۹۶- گزینهٔ ۱ کافی است معادلهٔ $x^2-7x=x$ را حل کنیم:

$$x^2-8x=0\Rightarrow x=0,\ x=8$$

واضح است که $x=0$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۳۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\log_4(x-6)=\log_{2^2}(x-6)=\frac{1}{2}\log_2(x-6)$$

در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2(x-6)=2\Rightarrow\log_2 x+\log_2(x-6)=4$$

$$\log_2(x(x-6))=4\Rightarrow x(x-6)=2^4\Rightarrow x^2-6x-16=0$$

$$(x-8)(x+2)=0\Rightarrow x=8\ ,\quad x=-2\ (\text{غ.ق.ق.})$$

دقت کنید که $x=-2$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند، بنابراین غیرقابل قبول است.

۳۹۸- گزینهٔ ۴ با استفاده از تعریف لگاریتم معادله را به‌صورت $(2x-1)^2=x$ می‌نویسیم. بنابراین

$$4x^2-4x+1=x\Rightarrow 4x^2-5x+1=0$$

$$(4x-1)(x-1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{4},\ x=1$$

پایهٔ لگاریتم عبارت $2x-1$ است که به ازای $x=1$ برابر ۱ و به ازای $x=\frac{1}{4}$ برابر $-\frac{1}{2}$ می‌شود. ولی می‌دانیم که پایهٔ لگاریتم باید مثبت و مخالف ۱ باشد. پس هیچ‌کدام از مقدارهای به‌دست آمده قابل قبول نیستند و معادله جواب ندارد.

۳۹۹- گزینهٔ ۴ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\log_3(10-x)\le\log_3 9$$

نتیجه می‌گیریم

$$10-x\le 9\Rightarrow x\ge 1$$

از طرف دیگر عبارت $\log_3(10-x)$ وقتی معنادار است که $10-x>0$ و در نتیجه $x<10$. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[1,10)$ است.

۴۰۰- گزینهٔ ۲ از نامعادلهٔ $\log(x+2)>\log(2x+1)$ نتیجه می‌شود

$$x+2>2x+1\Rightarrow x<1$$

عبارت $\log(x+2)$ برای $x>-2$ و عبارت $\log(2x+1)$ برای $x>-\frac{1}{2}$ معنادار است. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\frac{1}{2},1)$ است.

۴۰۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $x-2>0$، یعنی $x>2$. از طرف دیگر، باید

$$\log_{0/5}(x-2)\ge 0=\log_{0/5}1$$

در نتیجه (چون ۰/۵<۱)

$$x-2\le 1\Rightarrow x\le 3$$

بنابراین $D_f=(2,3]$. به این ترتیب $a=2$ و $b=3$، پس $ab=6$.

۴۰۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$AB=AC\Rightarrow\sqrt{(a+1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(1-5)^2}$$

$$\sqrt{a^2+2a+1+0}=\sqrt{a^2-6a+9+16}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به دست می‌آید

$$a^2+2a+1=a^2-6a+25\Rightarrow 8a=24\Rightarrow a=3$$

۴۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $AB=\sqrt{(0-3)^2+(0-0)^2}=3$. بنابراین

$$AC=3\Rightarrow\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2}=3\Rightarrow a^2+b^2=9\qquad(1)$$

$$BC=3\Rightarrow\sqrt{(3-a)^2+(0-b)^2}=3\Rightarrow(3-a)^2+b^2=9$$

$$9-6a+a^2+b^2=9\qquad(2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $9-6a=0$، پس $a=\frac{3}{2}$. در نتیجه از تساوی (۱) به دست می‌آید $b^2=9-a^2=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$، بنابراین

$$|b|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۴۰۴- گزینهٔ ۱ وسط ضلع BC نقطهٔ $(\frac{-2+4}{2},\frac{3+1}{2})$ یعنی نقطهٔ $(1,2)$ است. طول میانهٔ نظیر رأس A برابر با فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ وسط ضلع BC است، یعنی برابر است با $\sqrt{(2-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{10}$.

۴۰۵- گزینهٔ ۳ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(3,a)$ و $(2,7)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{a-7}{3-2}=a-7$. شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-1,4)$ و $(1,8)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{4-8}{-1-1}=2$. اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 است، پس

$$(a-7)(2)=-1\Rightarrow a=\frac{13}{2}$$

۴۰۶- گزینهٔ ۳ طول عمود وارد از نقطهٔ $(3,1)$ بر خط $4x+3y+20=0$ فاصلهٔ این نقطه از این خط است که برابر است با

$$\frac{|4\times3+3\times1+20|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{35}{5}=7$$

۴۰۷- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط $ax+by+c=0$ ویژگی‌های مورد نظر را داشته باشد، چون شیب این خط -1 است، پس $-\frac{a}{b}=-1$، در نتیجه $a=b$. از طرف دیگر، چون فاصلهٔ مبدأ از این خط برابر با ۵ است، پس

$$\frac{|a\times0+a\times0+c|}{\sqrt{a^2+a^2}}=5\Rightarrow\frac{|c|}{\sqrt{2}|a|}=5\Rightarrow|c|=5\sqrt{2}|a|\Rightarrow c=\pm5\sqrt{2}a$$

بنابراین خط‌های راست مورد نظر $ax+ay+5\sqrt{2}a=0$ و $ax+ay-5\sqrt{2}a=0$ هستند که می‌توان آن‌ها را به صورت $x+y+5\sqrt{2}=0$ و $x+y-5\sqrt{2}=0$ نوشت.

فصل دوم

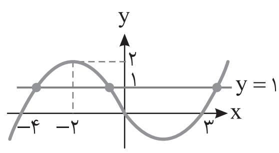
پاسخ آزمون‌ها

۱- گزینهٔ ۲ چون f فقط یک زوج مرتب دارد، پس تساوی‌های $2a-b=1$، $2b+c=2$ و $2a=2$ برقرار است که نتیجه می‌شود $a=1$، $b=1$ و $c=0$، پس $a+b+c=2$.

۲- گزینهٔ ۴ از عدد ۲ دو پیکان خارج شده است، پس دو عدد a^2 و $a+2$ باید یکسان باشند. پس $a^2=a+2$ که نتیجه می‌شود $a=-1$ یا $a=2$.
اگر $a=2$، باید داشته باشیم $b=a^2=4$، پس $a+b=6$. اگر $a=-1$، باید داشته باشیم $b=2b+1$، پس $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-2$. پس حاصل $a+b$ برابر ۶ یا ۲− است.

۳- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\{1,3,5\}$ است که ۳ عضو دارد. برد تابع مجموعهٔ $\{3,5,a^2\}$ است که باید تعداد اعضای آن کمتر از ۳ باشد. یعنی یا باید $a^2=3$ یا باید $a^2=5$. بنابراین $a=\pm\sqrt{5}$ یا $a=\pm\sqrt{3}$ پس ۴ مقدار مختلف برای a وجود دارد.

۴- گزینهٔ ۴ تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x)=1$ برابر با تعداد نقطه‌های برخورد خط $y=1$ با نمودار تابع f است. از روی شکل روبه‌رو معلوم است که تعداد این نقطه‌ها سه تا است.



۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که
$$f(x^2-4x)=8x-2x^2+12=-2(x^2-4x)+12$$
بنابراین، اگر x عددی حقیقی باشد که $x^2-4x=3$ (چنین xای وجود دارد، زیرا دلتای معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-4x-3=0$ مثبت است)، آن‌گاه
$$f(3)=-2(3)+12=6$$

۶- گزینهٔ ۴ در ضابطهٔ تابع به جای x، مقدار $x-1$ را قرار می‌دهیم:
$$f(x-1)=(x-1)^2-2(x-1)=x^2-4x+3$$
در ضابطهٔ تابع به جای x مقدار $x+1$ را قرار می‌دهیم:
$$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)=x^2-1$$
بنابراین $f(x-1)+f(x+1)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x)+2=2f(x)+2$.

۷- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $\frac{x+1}{x-2}=t$ و در نتیجه
$$tx-2t=x+1\Rightarrow tx-x=2t+1\Rightarrow (t-1)x=2t+1\Rightarrow x=\frac{2t+1}{t-1},\ t\neq1$$
در رابطهٔ داده شده به جای x قرار می‌دهیم $\frac{2t+1}{t-1}$:
$$f(t)=2\left(\frac{2t+1}{t-1}\right)-1=\frac{4t+2-t+1}{t-1}=\frac{3t+3}{t-1}$$
در نتیجه اگر $x\neq1$، آن‌گاه $f(x)=\frac{3x+3}{x-1}$.

راه‌حل دوم اگر در رابطهٔ داده شده قرار دهیم $x=-1$، به‌دست می‌آید
$$f(0)=-3$$
اکنون در توابع داده شده در گزینه‌ها به جای x مقدار صفر را قرار می‌دهیم. تنها تابعی که در آن $f(0)=-3$ تابع گزینهٔ (۱) است.

۸- گزینهٔ ۳ برای $x=2$ از ضابطهٔ اول به‌دست می‌آید
$$f(2)=4m-2$$
و از ضابطهٔ دوم $f(2)=8-m$. برای اینکه رابطه، تابع باشد، باید فقط یک مقدار برای $f(2)$ وجود داشته باشد. یعنی $4m-2=8-m$، پس $m=2$. بنابراین باید $f(2)$ را محاسبه کنیم که برابر است با $f(2)=8-2=6$.

۹- گزینهٔ ۳ اگر $n\in\mathbb{N}$ آن‌گاه عدد $\sqrt[4]{n}$ وقتی که n توان چهارم عددی طبیعی باشد، گویا خواهد بود. پس $\sqrt[4]{16}$ و $\sqrt[4]{81}$، اعدادی گویا هستند و بقیهٔ اعداد داده شده گنگ هستند. بنابراین
$$f(\sqrt[4]{2})+f(\sqrt[4]{3})+\cdots+f(\sqrt[4]{100})=2\times1+97\times0=2$$

۱۰- گزینهٔ ۲ رابطهٔ $(y-1)^3=|x-1|$ را می‌توان به‌صورت $y=\sqrt[3]{|x-1|}+1$ نوشت. برای هر x دقیقاً یک مقدار y وجود دارد که در تساوی فوق صدق می‌کند. بنابراین در این رابطه y تابعی از x است. بقیهٔ گزینه‌ها را می‌توان با مثال نقض رد کرد:
$$|y|=|x|,\ x=1\Rightarrow y=\pm1$$
$$|y|=x^2+1,\ x=2\Rightarrow y=\pm\sqrt{5}$$
$$|y^3|=x-1,\ x=2\Rightarrow y=\pm1$$

۱۱- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج‌های مرتب $(2,0)$ و $(2,m^3-m)$ نتیجه می‌شود:
$$m^3-m=0\Rightarrow m=0,1,-1$$
اگر $m=0$، $f=\{(2,0),(0,1),(0,2)\}$ و f تابع نیست.
اگر $m=1$، $f=\{(2,0),(1,1),(0,2),(2,1)\}$ و f تابع نیست.
اگر $m=-1$، $f=\{(2,0),(-1,1),(0,2),(-2,1)\}$ و f تابع است.
پس m فقط می‌تواند برابر ۱− باشد.

۱۲- گزینهٔ ۳ چون $f(1)=2$ و $f(4)=2$، پس $f(a)=1$ یا $f(a)=4$. از $f(a)=1$ نتیجه می‌شود $a=3$ و از $f(a)=4$ نتیجه می‌شود $a=5$. بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۸ است.

۱۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، جواب نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت $[-5,-2]\cup[4,5]$ است. بنابراین ۶ عدد صحیح (۵−، ۴−، ۳−، ۲−، ۴ و ۵) در این نامعادله صدق می‌کنند.

۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا $x=2$ را در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:
$$f(2)-2f(2)=4-6+4\Rightarrow f(2)=-2$$
پس $f(x)=x^2-3x$، در نتیجه $f(-2)=10$.

۱۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=x^2+1$، آن‌گاه $x^2=t-1$ و $t\geq1$ بنابراین
$$f(x^2+1)=(x^2)^2-x^2\Rightarrow f(t)=(t-1)^2-(t-1)=t^2-3t+2$$
بنابراین اگر $x\geq1$، آن‌گاه $f(x)=x^2-3x+2$.

۱۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^3+6x^2+12x=(x+2)^3-8$$

$$x^3+6x^2+12x+10=(x+2)^3+2$$

بنابراین $f(x+2)=\frac{(x+2)^3-8}{(x+2)^3+2}$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $x-2$، به‌دست می‌آید $f(x)=\frac{x^3-8}{x^3+2}$.

۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $0<-x\le 1$، آن‌گاه $-1\le x<0$، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{1+x}}{-x}=-f(x)$$

و اگر $-1\le -x<0$، آن‌گاه $0<x\le 1$، پس

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1+(-x)}}{-x}=\frac{\sqrt{1-x}}{-x}=-f(x)$$

بنابراین همواره $f(-x)=-f(x)$.

۱۸- گزینهٔ ۲ چون

$$f(-1)=a\times(-1)+b=b-a,\quad f(6)=a\times(6)+4b=6a+4b$$

پس

$$f(-1)+f(6)=-10\Rightarrow b-a+6a+4b=-10$$

$$5(a+b)=-10\Rightarrow a+b=-2$$

در نتیجه $f(1)=a+4b=(a+b)+3b=3b-2$.

۱۹- گزینهٔ ۴ اگر ضابطهٔ داده شده، متعلق به یک تابع باشد باید در $x=2$ مقدار $f(x)$ منحصربه‌فرد باشد. یعنی مقدار $f(2)$ در ضابطهٔ اول با مقدار آن در ضابطهٔ دوم برابر باشد. اگر $f(x)=2x^2+a$، آن‌گاه $f(2)=8+a$. اگر $f(x)=ax^3-2$، آن‌گاه $f(2)=8a-2$. بنابراین

$$8+a=8a-2\Rightarrow 7a=10\Rightarrow a=\frac{10}{7}$$

و در نتیجه

$$7f(7a)=7f(10)=7(2\times10^2+\frac{10}{7})=1410$$

۲۰- گزینهٔ ۱ رابطهٔ $y^3+3y^2+3y-x^3=0$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(y+1)^3-1-x^3=0\Rightarrow(y+1)^3=1+x^3$$

$$y+1=\sqrt[3]{1+x^3}\Rightarrow y=-1+\sqrt[3]{1+x^3}$$

واضح است که در این رابطه به‌ازای هر مقدار x دقیقاً یک مقدار y وجود دارد، پس y تابعی از x است. برای رابطه‌های دیگر می‌توان مثال‌های نقض زیر را در نظر گرفت:

$$y^2-2y+x^2=0,\ x=0\Rightarrow y=0,\ y=2$$

$$y^3-xy+x^3=4,\ x=\sqrt[3]{4}\Rightarrow y=0,\ y=\pm\sqrt[3]{2}$$

$$y^2+xy+x^2=9,\ x=3\Rightarrow y=0,\ y=-3$$

۲۱- گزینهٔ ۲ برد تابع ثابت، یک عضو دارد. بنابراین

$$m-2=4\Rightarrow m=6$$

$$m+2n=4\xrightarrow{m=6}6+2n=4\Rightarrow n=-1$$

$$mn+k=4\xrightarrow{m=6,\,n=-1}-6+k=4\Rightarrow k=10$$

۲۲- گزینهٔ ۲ اگر f تابعی ثابت باشد، باید ضرایب x^2 و x برابر با صفر باشند:

$$4-a=0\Rightarrow a=4,\ 3+b=0\Rightarrow b=-3$$

در این صورت $f(x)=ab+19=4\times(-3)+19=7$.

بنابراین

$$f(a+b)=f(1)=7$$

۲۳- گزینهٔ ۳ در تابع همانی، ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=x$ است.

بنابراین

$$f(-4)=m-2n=-4,\quad f(6)=m+n=6$$

$$\begin{cases}m-2n=-4\\ m+n=6\end{cases}\Rightarrow m=\frac{8}{3},\quad n=\frac{10}{3}$$

از طرف دیگر $f(\frac{m}{n})=k=\frac{m}{n}$، بنابراین $k=\frac{m}{n}=\frac{4}{5}$.

۲۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x^2-4)+2ax+4a}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)+2a(x+2)}{x+2}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2+2a)}{x+2}=x-2+2a,\quad x\ne-2$$

ضابطهٔ تابع همانی $f(x)=x$ است. بنابراین باید $2a-2=0$ و در نتیجه $a=1$، پس $f(-a)=f(-1)=-1$.

راه‌حل دوم چون تابع f همانی است، پس $f(0)=0$، بنابراین

$$\frac{4a-4}{2}=0\Rightarrow a=1$$

در نتیجه $f(-a)=f(-1)=-1$.

۲۵- گزینهٔ ۱ چون f تابعی خطی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ است، بنابراین

$$f(2)-3f(-2)=2a+b-3(-2a+b)=8a-2b=46$$

$$f(3)-3f(1)=3a+b-3(a+b)=-2b=22$$

در نتیجه $a=3$، $b=-11$ و $f(x)=3x-11$. بنابراین $f(-2)=-17$.

۲۶- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول فرض کنید $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f(x-1)=a(x-1)+b=ax-a+b$$

$$2f(x+2)=2(a(x+2)+b)=2(ax+2a+b)=2ax+4a+2b$$

پس $f(x-1)+2f(x+2)=3ax+3a+3b=-9x+21$. بنابراین

$$\begin{cases}3a=-9\\ 3a+3b=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=10\end{cases}\Rightarrow f(x)=-3x+10$$

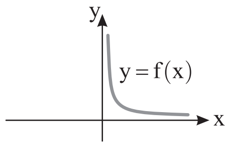
راه‌حل دوم تساوی داده شده به‌ازای هر x برقرار است، پس $x=1$ را در این تساوی قرار می‌دهیم: $f(0)+2f(3)=12$. فقط در تابع گزینه (۳) این شرط برقرار است.

۲۷- گزینهٔ ۱ ابتدا $f(-1)$ و $f(2)$ را حساب می‌کنیم تا مقادیر a و b به‌دست آید:

$$\begin{cases}f(-1)=a+b=3\\ f(2)=4a-2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$$

بنابراین $f(x)=x^2-2x$ و در نتیجه $f(1)=-1$.

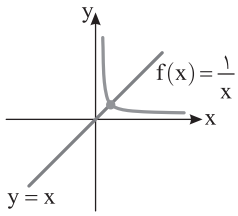
۲۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x>0$، آن‌گاه $|x|=x$، پس $f(x)=\frac{1}{x}$. همچنین اگر $x\le 0$، آن‌گاه $|x|=-x$ و $x+|x|=0$. در نتیجه تابع به‌ازای $x\le 0$ تعریف نمی‌شود، بنابراین $D_f=(0,+\infty)$. بنابراین نمودار این تابع به‌صورت مقابل خواهد بود:



۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$ و

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x}$$

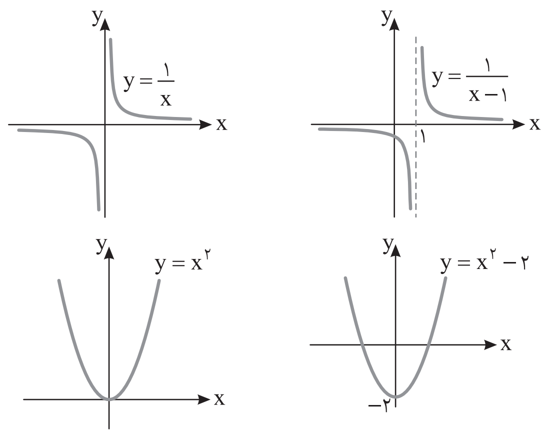
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است و خط $y=x$ را در یک نقطه قطع می‌کند.



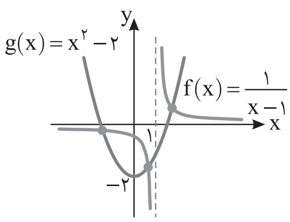
۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x-1}$$

بنابراین اگر نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم نمودار تابع f به‌دست می‌آید. همچنین اگر نمودار تابع $y=x^2$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع g به‌دست می‌آید.



مطابق شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}$ در سه نقطه نمودار تابع $g(x)=x^2-2$ را قطع می‌کند.



۳۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ این تابع $f(x)=x$ است. پس $f(2)=2$. در نتیجه

$$14-2k=2\Rightarrow 2k=12\Rightarrow k=6$$

بنابراین باید $f(14-3\times 6)$ را حساب کنیم: $f(14-3\times 6)=f(-4)=-4$.

۳۲- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=kmx-kx^2-2m+2x+2x^2=(2-k)x^2+(2+km)x-2m$$

در تابع ثابت، مقدار تابع به x بستگی ندارد. پس در ضابطه نباید x وجود داشته باشد. یعنی ضرایب x و x^2 باید صفر باشند. پس

$$2-k=0\Rightarrow k=2$$

$$2+km=0\xrightarrow{k=2}2+2m=0\Rightarrow m=-1$$

بنابراین $k+m=1$.

۳۳- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است. بنابراین

$$a-2=0,\quad b-3=1,\quad a+b-c=0$$

در نتیجه $a=2$، $b=4$ و $c=a+b=2+4=6$.

۳۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=k$ است. بنابراین

$$\frac{2x+1}{ax-3}=k\Rightarrow 2x+1=kax-3k$$

تساوی فوق یک اتحاد است. پس باید تساوی‌های $ka=2$ و $-3k=1$ برقرار باشند. بنابراین $k=-\frac{1}{3}$ و $a=-6$.

راه‌حل دوم با توجه به اینکه $f(0)=-\frac{1}{3}$ و تابع ثابت است، پس $f(1)=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه

$$f(1)=\frac{2+1}{a-3}=-\frac{1}{3}\Rightarrow 9=-a+3\Rightarrow a=-6$$

۳۵- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=2mx-mx^2+x^2-4x-m=(1-m)x^2+(2m-4)x-m$$

ضابطهٔ توابع خطی به شکل $f(x)=ax+b$ است. یعنی یک چندجمله‌ای درجهٔ اول است. بنابراین باید $m=1$ تا ضابطهٔ تابع یک چندجمله‌ای درجهٔ اول شود، یعنی

$$m=1\Rightarrow f(x)=-2x-1$$

بنابراین $f(m)=f(1)=-3$.

۳۶- گزینهٔ ۴ چون تابع خطی است، باید ضابطهٔ آن یک چندجمله‌ای درجهٔ اول باشد. پس باید صورت و مخرج کسر در ضابطهٔ داده شده ساده شوند. یعنی صورت باید به شکل ضرب دو عبارت باشد که یکی از آن‌ها $x+1$ است. یعنی

$$x^2+mx+2=(x+1)(x+a)\Rightarrow x^2+mx+2=x^2+(a+1)x+a$$

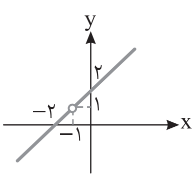
برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید داشته باشیم

$$a=2,\quad m=a+1\xrightarrow{a=2}m=3$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}=x+2,\quad x\neq -1$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۳۷- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$f(۱)=a+b \Rightarrow f(f(۱))=f(a+b)=a(a+b)+b=a^۲+ab+b=۱$$

$$f(-۱)=-a+b \Rightarrow f(f(-۱))=f(-a+b)=a(-a+b)+b$$

$$=-a^۲+ab+b=-۷$$

اگر طرفین تساوی‌های اخیر را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$a^۲+ab+b-(-a^۲+ab+b)=۱-(-۷) \Rightarrow ۲a^۲=۸ \Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=\pm۲$$

$$a^۲+ab+b=۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \Rightarrow ۴+۲b+b=۱ \Rightarrow b=-۱ \Rightarrow f(x)=۲x-۱ \\ a=-۲ \Rightarrow ۴-۲b+b=۱ \Rightarrow b=۳ \Rightarrow f(x)=-۲x+۳ \end{cases}$$

بنابراین $f(۰)=-۱$ یا $f(۰)=۳$.

۳۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** در ضابطهٔ تابع به‌جای x مقدار $x-۱$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x-۱)=a(x-۱)^۲-b(x-۱)+۲=ax^۲-۲ax-bx+a+b+۲$$

بنابراین از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$f(x-۱)-f(x)=ax^۲-۲ax-bx+a+b+۲-ax^۲+bx-۲=۶x+۲$$

بنابراین $-۲ax+a+b=۶x+۲$. چون این رابطه به ازای هر x برقرار است، پس

$$\begin{cases} -۲a=۶ \\ a+b=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۳ \\ b=۵ \end{cases} \Rightarrow a-b=-۸$$

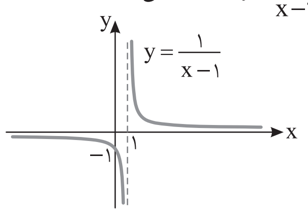
راه‌حل دوم چون رابطهٔ $f(x-۱)-f(x)=۶x+۲$ به ازای هر مقدار x برقرار است، پس به ازای $x=۱$ هم برقرار است:

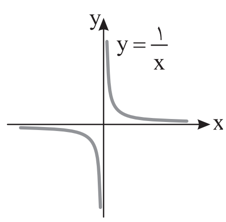
$$f(۰)-f(۱)=۸ \Rightarrow ۲-(a-b+۲)=۸ \Rightarrow ۲-a+b-۲=۸ \Rightarrow a-b=-۸$$

۳۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

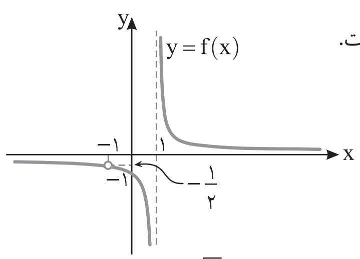
$$f(x)=\frac{x+۱}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{۱}{x-۱}, \quad D_f=\mathbb{R}-\{\pm۱\}$$

اگر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم نمودار تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ به‌دست می‌آید.

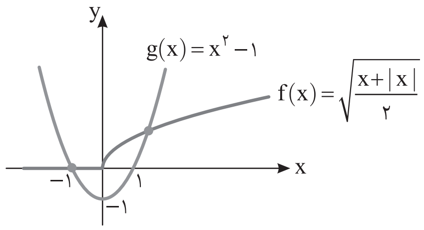




بنابراین نمودار تابع f به‌صورت شکل رسم شده است که خطوط $y=۰$ و $y=-\frac{۱}{۲}$ را قطع نمی‌کند. پس k فقط می‌تواند مقادیر ۰ و $-\frac{۱}{۲}$ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.



۴۰- گزینهٔ ۲ برای $x\geq۰$، $|x|=x$ و $f(x)=\sqrt{x}$ و برای $x<۰$، $|x|=-x$ و $f(x)=۰$. نمودار تابع‌های f و g را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی این شکل معلوم می‌شود که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

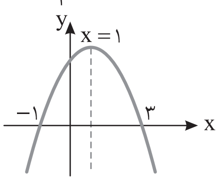


۴۱- گزینهٔ ۴ چون سهمی ماکزیمم دارد، باید ضریب $x^۲$ منفی باشد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) نادرست هستند. با توجه به شکل داده شده طول رأس سهمی عددی منفی است. در گزینهٔ (۳) طول رأس سهمی $x=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲$ و در گزینهٔ (۴) طول رأس سهمی $x=-\frac{-۴}{۲(-۱)}=-۲$ است. پس گزینهٔ (۴) درست است.

۴۲- گزینهٔ ۳ طول رأس سهمی $x=-\frac{-۲}{۲k}=\frac{۱}{k}$ است. عرض رأس سهمی را پیدا می‌کنیم: $y=k(\frac{۱}{k})^۲-۲(\frac{۱}{k})+۲=\frac{۱}{k}-۲+۲=\frac{۱}{k}$. چون رأس سهمی روی خط $y=-۲x$ است، پس $\frac{۱}{k}=-۲(\frac{۱}{k})-۲$ در نتیجه $k=\frac{-۱}{۲}$.

۴۳- گزینهٔ ۲ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=mx^۲+۲m^۲x+۳m$ خط $x=-\frac{۲m^۲}{۲m}=-m$ است. بنابراین $-m=۲$، یعنی $m=-۲$. به این ترتیب، معادلهٔ سهمی می‌شود $y=-۲x^۲+۸x-۶$، که عرض رأس آن برابر است با $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴\times(-۲)(-۶)-۸^۲}{۴(-۲)}=۲$.

۴۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با توجه به شکل محور تقارن سهمی داده شده از وسط نقاط $(۳,۰)$ و $(-۱,۰)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن $x=\frac{۳-۱}{۲}=۱$ است. از طرف دیگر با توجه به معادلهٔ داده شده، طول رأس سهمی $x=\frac{b}{۲a}$ است.



بنابراین $\frac{b}{۲a}=۱$. در نتیجه $\frac{b}{a}=۲$.

راه‌حل دوم سهمی از نقطهٔ $(-۱,۰)$ عبور کرده است، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$۰=a(-۱)^۲-b(-۱)+c \Rightarrow a+b+c=۰ \quad (۱)$$

همچنین سهمی از نقطهٔ $(۳,۰)$ عبور کرده است، پس

$$۹a-۳b+c=۰ \quad (۲)$$

دو طرف معادلهٔ (۱) را از دو طرف معادلهٔ (۲) کم می‌کنیم:

$$۹a-۳b+c-a-b-c=۰ \Rightarrow ۸a-۴b=۰ \Rightarrow ۸a=۴b \Rightarrow \frac{b}{a}=۲$$

راه‌حل سوم مجموع جواب‌های معادلهٔ $ax^۲-bx+c=۰$ برابر $\frac{b}{a}$ است. از طرف دیگر با توجه به شکل، جواب‌های این معادله $x=-۱$ و $x=۳$ هستند. بنابراین $\frac{b}{a}=۳+(-۱)=۲$.

۴۵- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول با توجه به نمودار داده شده، c و $-۲c$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ هستند. بنابراین

$$\begin{cases} c-۲c=-\dfrac{b}{a} \\ c(-۲c)=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{b}{a} \Rightarrow b=ac \\ -۲c=\dfrac{۱}{a} \Rightarrow ac=-\dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow ac+b=-۱$$

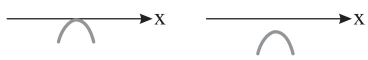
راه‌حل دوم با توجه به نمودار داده شده، c یکی از جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ است. بنابراین

$$ac^۲+bc+c=۰ \xrightarrow{c\neq ۰} ac+b+۱=۰ \Rightarrow ac+b=-۱$$

۴۶- گزینهٔ ۱ برای آنکه نمودار یک سهمی، محور x را در دو طرف مبدأ مختصات قطع کند، باید حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $y=۰$ منفی باشد. پس

$$\frac{m-۲}{m}<۰ \Rightarrow ۰<m<۲$$

۴۷- گزینهٔ ۲ در حالت‌های زیر نمودار تابع درجهٔ دوم از ناحیه‌های اول و دوم صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند.



بنابراین معادلهٔ $f(x)=۰$ حداکثر یک جواب دارد و ضریب $x^۲$ در این معادله منفی است.

$$a=m-۱<۰ \Rightarrow m<۱ \quad (۱)$$

$$\Delta\leq ۰ \Rightarrow ۱-۴(m-۱)^۲\leq ۰ \Rightarrow (m-۱)^۲\geq \frac{۱}{۴}$$

$$\begin{cases} m-۱\geq \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow m\geq \dfrac{۳}{۲} \\ \text{یا} \\ m-۱\leq -\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow m\leq \dfrac{۱}{۲} \end{cases} \quad (۲)$$

از اشتراک ناحیه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $m\leq \frac{۱}{۲}$.

۴۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$-\frac{\Delta}{۴a}=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=۵ \Rightarrow \frac{۴(۲m)-۳۶}{۴}=۵ \Rightarrow ۲m-۹=۵ \Rightarrow m=۷$$

۴۹- گزینهٔ ۳ مجموع طول نرده‌های استفاده شده برابر با $۳y+۴x=۲۰۰$ است. پس $۴x=۲۰۰-۳y$. همچنین مساحت کل زمین برابر است با $A=۲xy$. در نتیجه

$$A=۲xy=\frac{۱}{۲}\times ۴xy=\frac{۱}{۲}(۲۰۰-۳y)y=\frac{۱}{۲}(۲۰۰y-۳y^۲)$$

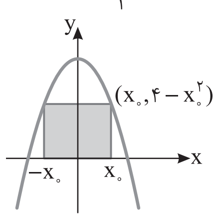
بنابراین

$$۲A=۲۰۰y-۳y^۲=-۳(y^۲-\frac{۲۰۰y}{۳})=-۳((y-\frac{۱۰۰}{۳})^۲-\frac{۱۰۰۰۰}{۹})$$

$$=\frac{۱۰۰۰۰}{۳}-۳(y-\frac{۱۰۰}{۳})^۲\leq \frac{۱۰۰۰۰}{۳}$$

بنابراین $A\leq \frac{۵۰۰۰}{۳}$، یعنی حداکثر مساحت اصطبل برابر $\frac{۵۰۰۰}{۳}$ است.

۵۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر می‌توان نتیجه گرفت محیط مستطیل برابر است با



$$۲(۲x_۰+۴-x_۰^۲)=-۲x_۰^۲+۴x_۰+۸$$
$$=-۲(x_۰^۲-۲x_۰+۱)+۱۰$$
$$=-۲(x_۰-۱)^۲+۱۰\leq ۱۰$$

در نتیجه بیشترین محیط مستطیل برابر است با ۱۰.

۵۱- گزینهٔ ۴ مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$x=-\frac{-۲}{۲\times ۳}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow y=۳(\frac{۱}{۳})^۲-۲(\frac{۱}{۳})+۱=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ است و چون ضریب $x^۲$ عددی مثبت است، پس سهمی دارای پایین‌ترین نقطه است، یعنی گزینهٔ (۴) درست است.

۵۲- گزینهٔ ۳ رأس سهمی $y=ax^۲-۲ax+۲$ نقطهٔ $(۱,۲-a)$ است که روی سهمی $y=bx^۲+۲bx+۱$ قرار دارد. پس

$$۲-a=b+۲b+۱ \Rightarrow a+۳b-۱=۰ \quad (۱)$$

رأس سهمی $y=bx^۲+۲bx+۱$ نقطهٔ $(-۱,۱-b)$ است که روی سهمی $y=ax^۲-۲ax+۲$ قرار دارد. پس

$$۱-b=a+۲a+۲ \Rightarrow b=-۳a-۱ \quad (۲)$$

اگر در معادلهٔ (۱) مقدار b را از معادلهٔ (۲) قرار دهیم، آن‌گاه $a+۳(-۳a-۱)-۱=۰$

در نتیجه $a=-\frac{۱}{۲}$. بنابراین $b=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $a+b=۰$.

۵۳- گزینهٔ ۱ معادلهٔ محور تقارن سهمی $y=ax^۲+bx+c$ به‌صورت $x=-\frac{b}{۲a}$ است. در نتیجه

$$-\frac{m-۲}{۲(۳m-۴)}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۳m-۴=-m+۲ \Rightarrow ۴m=۶ \Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

۵۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که چون $OA<OB$، پس محور تقارن سهمی پاره‌خط OB را قطع می‌کند. در نتیجه، $-\frac{b}{۲a}>۰$، یعنی علامت a و b فرق می‌کند. از طرف دیگر، چون سهمی پایین‌ترین نقطه دارد، پس $a>۰$، در نتیجه $b<۰$. از طرف دیگر، عرض نقطهٔ تلاقی سهمی و محور y منفی است، پس $c<۰$. به این ترتیب، $bc>۰$.

۵۵- گزینهٔ ۲ سهمی از نقطهٔ $(۰,۰)$ عبور می‌کند، پس $c=۰$. طول رأس سهمی برابر $x=۱$ است. پس $-\frac{b}{۲a}=۱$ در نتیجه $b=-۲a$. عرض رأس سهمی برابر است با $y=-۱$، بنابراین

$$a\times ۱^۲+b\times ۱=-۱ \xrightarrow{b=-۲a} a-۲a=-۱ \Rightarrow a=۱$$

بنابراین $b=-۲$.

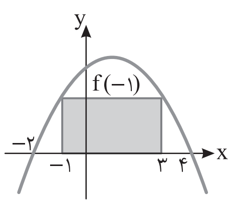
۵۶- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه سهمی محور طول‌ها را در $x=۴$ و $x=-۲$ قطع کرده است، معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=k(x+۲)(x-۴)$ است. از طرف دیگر مساحت مستطیل برابر $۴f(-۱)$ است. بنابراین

$$۴f(-۱)=۸ \Rightarrow f(-۱)=۲$$

پس

$$k(-۱+۲)(-۱-۴)=۲ \Rightarrow k=-\frac{۲}{۵}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=-\frac{۲}{۵}(x+۲)(x-۴)$ یا $f(x)=-\frac{۲}{۵}x^۲+\frac{۴}{۵}x+\frac{۱۶}{۵}$ است و در نتیجه $c=\frac{۱۶}{۵}$.

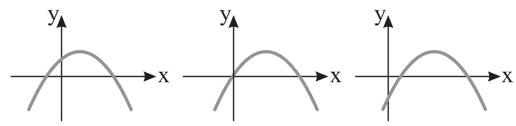


۵۷- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود ضریب x^2 و عرض نقطهٔ تقاطع سهمی با محور y مثبت است. در نتیجه

$$m+2>0\,,\quad m>0 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، چون مجموع ضرایب صفر است، بنابراین، جواب‌های معادلهٔ $y=0$ اعداد $\frac{m}{m+2}$ و ۱ هستند، که با توجه به شرط (۱) هر دو مثبت هستند. بنابراین حدود m بازهٔ $(0,+\infty)$ است.

۵۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع f یک سهمی است که ماکزیمم دارد. بنابراین در حالت کلی باید به‌صورت‌های زیر باشد تا از ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات عبور کند.



بنابراین باید معادلهٔ $f(x)=0$ دو جواب داشته باشد که هر دو منفی نباشند یا اینکه یکی صفر و دیگری منفی نباشد. اگر یکی از جواب‌ها $x=0$ باشد، آن‌گاه $m=0$ و معادله به صورت $f(x)=-x^2$ در می‌آید که از ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات عبور نمی‌کند. پس شرط داشتن دو جواب منفی $(\Delta>0\,,-\frac{b}{a}<0,\frac{c}{a}>0)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta>0\Rightarrow m^2+8m>0\Rightarrow\begin{cases}m>0\\ \text{یا}\\ m<-8\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}\frac{c}{a}>0\Rightarrow -2m>0\Rightarrow m<0\\ -\frac{b}{a}<0\Rightarrow m<0\end{cases}$$

پس $m<0$، نباید برقرار باشد و در نتیجه $m>0$.

۵۹- گزینهٔ ۱ جواب‌های معادله را با α و β نشان می‌دهیم. در این صورت طبق فرض مسئله، $\alpha+\beta=2\alpha\beta$، چون $\alpha+\beta=-(k-2)$ و $\alpha\beta=-k$، بنابراین $-k+2=-2k$ پس $k=-2$. بنابراین

$$f(x)=-2x^2-4x+1=-2(x^2+2x)+1=-2(x+1)^2+3\le 3$$

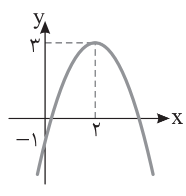
پس بیشترین مقدار $f(x)$ برابر ۳ است.

۶۰- گزینهٔ ۲ طول اضلاع قائمه را با b و c نشان می‌دهیم. در این صورت $b+c=8$. از طرف دیگر،

$$S=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}b(8-b)=\frac{1}{2}(8b-b^2)$$

بیشترین مقدار عبارت $8b-b^2$ به ازای $b=\frac{-8}{2(-1)}=4$ به‌دست می‌آید. در نتیجه، بیشترین مقدار S برابر است با $\frac{1}{2}(8\times4-4^2)=\frac{16}{2}=8$.

۶۱- گزینهٔ ۲ سهمی از نقطهٔ $(0,-1)$ عبور می‌کند، طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(-1)}=2$ و عرض آن $y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(-1)(-1)-16}{4(-1)}=3$ است، در نتیجه رأس سهمی نقطهٔ $(2,3)$ و نمودار آن به شکل زیر است. بنابراین این سهمی از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.



۶۲- گزینهٔ ۱ سهمی به معادلهٔ $y=x^2-2x$ دارای پایین‌ترین نقطه به مختصات $x=1$ و $y=-1$ است. پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ از نقطهٔ $(0,-2)$ عبور می‌کند و رأس آن $(1,-1)$ است. بنابراین

$$-2=0+0+c\Rightarrow c=-2$$

$$\text{طول رأس سهمی}: x=-\frac{b}{2a}=1\Rightarrow b=-2a$$

$$\text{عرض رأس سهمی}: y=a(1)^2+b(1)-2=-1\Rightarrow a+b=1$$

$$\xrightarrow{b=-2a} a-2a=1\Rightarrow a=-1,\ b=2$$

بنابراین $abc=(-1)(2)(-2)=4$.

۶۳- گزینهٔ ۲ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=x^2-4x+1$ خط $x=2$ است و محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y=ax^2-a^3x$ خط $x=\frac{a^2}{2}$ است. پس

$$\frac{a^2}{2}=2\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm2$$

۶۴- گزینهٔ ۴ ابتدا نابرابری $\frac{b^2}{4a}>c$ را به‌صورت $\frac{b^2-4ac}{4a}>0$ می‌نویسیم. می‌دانیم عرض رأس سهمی مورد نظر برابر $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ است، که منفی است. در نتیجه باید عرض رأس سهمی مورد نظر منفی باشد، بنابراین در بین گزینه‌های داده شده گزینهٔ (۴) می‌تواند درست باشد.

۶۵- گزینهٔ ۴ معادلهٔ سهمی $y=ax^2+bx+c$ است. مختصات نقاط داده شده را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$$x=-1\,,\ y=0\Rightarrow 0=a-b+c \qquad (1)$$

$$x=1\,,\ y=4\Rightarrow 4=a+b+c \qquad (2)$$

$$x=2\,,\ y=9\Rightarrow 9=4a+2b+c \qquad (3)$$

اگر دو طرف معادلهٔ (۱) را از دو طرف معادلهٔ (۲) کم کنیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$4-0=a+b+c-(a-b+c)\Rightarrow 4=2b\Rightarrow b=2$$

در معادله‌های (۱) و (۳) به جای b مقدار ۲ را قرار می‌دهیم و دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}a-2+c=0\\ 4a+4+c=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=2\\ 4a+c=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ c=1\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی $y=x^2+2x+1$ است. این سهمی از نقطهٔ $(-2,1)$ عبور می‌کند.

۶۶- گزینهٔ ۱ چون سهمی ماکزیمم دارد، پس

$$m+1<0\Rightarrow m<-1$$

همچنین، سهمی محور x را قطع نمی‌کند، در نتیجه دلتای معادلهٔ آن منفی است:

$$\Delta=(m+1)^2+16(m+1)<0$$

بنابراین به نامعادلهٔ $(m+1)(m+17)<0$ می‌رسیم. می‌دانیم $m+1<0$، در نتیجه $m+17>0$، پس $m>-17$. بنابراین $m\in(-17,-1)$.

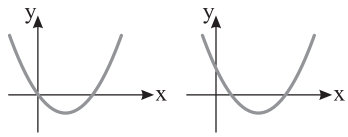
۶۷- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع f فقط از ناحیهٔ سوم عبور نکند، آن‌گاه از ناحیه‌های اول، دوم و چهارم عبور می‌کند. (توجه کنید که ضریب x^2 مثبت است و سهمی کمترین مقدار دارد.) پس باید معادلهٔ $f(x)=0$ دو جواب داشته باشد که یا هر دو مثبت باشند یا یکی مثبت و دیگری صفر باشد. بنابراین

$\Delta>0\Rightarrow m^2+4m>0\Rightarrow m\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$ (۱)

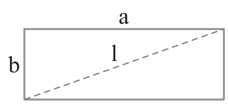
$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow -m>0\Rightarrow m\in(-\infty,0)$ (۲)

$\frac{c}{a}\ge0\Rightarrow -m\ge0\Rightarrow m\in(-\infty,0]$ (۳)

از اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $m\in(-\infty,-4)$.



۶۸- گزینهٔ ۳ از شکل روبه‌رو و فرض مسئله نتیجه می‌شود



$$2(a+b)=24\Rightarrow a+b=12\Rightarrow b=12-a$$

اکنون توجه کنید که $l^2=a^2+b^2=a^2+(12-a)^2=2a^2-24a+144$.

کمترین مقدار l^2 برابر است با $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(-24)^2-4\times2\times144}{4\times2}=72$.

بنابراین

$$l^2\ge72\Rightarrow l\ge6\sqrt2$$

۶۹- گزینهٔ ۳ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(0,-2)$ گذشته است، پس

$$f(0)=-2\Rightarrow c=-2$$

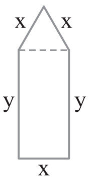
از طرف دیگر، x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $-x^2+bx+c=0$ هستند، در نتیجه $x_1+x_2=b$ و $x_1x_2=-c=2$. بنابراین

$$x_1^2+x_2^2-\frac{3}{2}x_1x_2=42\Rightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-\frac{3}{2}x_1x_2=42$$

$$b^2-\frac{7}{2}\times2=42\Rightarrow b^2=49$$

عرض رأس سهمی برابر است با $\frac{4ac-b^2}{4a}$. در نتیجه بیشترین مقدار تابع f برابر است با $\frac{4(-1)(-2)-49}{4(-1)}=\frac{41}{4}$.

۷۰- گزینهٔ ۲ از فرض مسئله، معلوم می‌شود که



$$3x+2y=4=\text{محیط شکل}$$

باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن شود. در نتیجه مساحت پنجره را حساب می‌کنیم:

$$S=\frac{\sqrt3}{4}x^2+xy\Rightarrow4S=\sqrt3x^2+4xy$$

چون $2y=4-3x$، پس

$$4S=\sqrt3x^2+2x\times2y=\sqrt3x^2+2x(4-3x)=(\sqrt3-6)x^2+8x$$

چون $\sqrt3-6<0$، بیشترین مقدار عبارت فوق به ازای $x=\frac{-8}{2(\sqrt3-6)}=\frac{4}{6-\sqrt3}$ به‌دست می‌آید.

۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+1=0\Rightarrow x=-1,\quad 1-\frac{1}{x+1}=0\Rightarrow\frac{x}{x+1}=0\Rightarrow x=0$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{0,-1\}$.

۷۲- گزینهٔ ۳ ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم:

$$x^4-3x^2+2=0\Rightarrow(x^2-1)(x^2-2)=0$$

$$x^2=1\Rightarrow x=\pm1,\quad x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt2$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{\pm1,\pm\sqrt2\}$. پس چهار عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۷۳- گزینهٔ ۲ مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم: $2|x|-|x-1|=0\Rightarrow2|x|=|x-1|$

$$2x=x-1\Rightarrow x=-1,\quad 2x=-x+1\Rightarrow x=\frac13$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{-1,\frac13\}$. بنابراین دو عدد -1 و $\frac13$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac23$ است.

۷۴- گزینهٔ ۱ برای اینکه $\mathbb{R}$ دامنهٔ تابع باشد، باید مخرج کسر ضابطهٔ تابع ریشه نداشته باشد. بنابراین

$$\Delta=m^2-16<0\Rightarrow m^2<16\Rightarrow-4<m<4$$

۷۵- گزینهٔ ۲ باید نامعادلهٔ $\frac{9-x}{x+2}\ge0$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به‌صورت $-2<x\le9$ است.

x	$-\infty$		-2		9		$+\infty$
$\frac{9-x}{x+2}$		$-$	ت ن	$+$	0	$-$	

پس $D_f=(-2,9]$. در نتیجه $a=-2$، $b=9$ و $a-b=-11$.

۷۶- گزینهٔ ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنه وجود دارد:

$$x-1\ge0\Rightarrow x\ge1,\quad 7-x\ge0\Rightarrow x\le7$$

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}\ne0\Rightarrow\sqrt{x-1}\ne\sqrt{7-x}\Rightarrow x-1\ne7-x\Rightarrow x\ne4$$

بنابراین $D_f=[1,7]-\{4\}$. پس عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، ۵، ۶ و ۷ در دامنهٔ تابع قرار دارند.

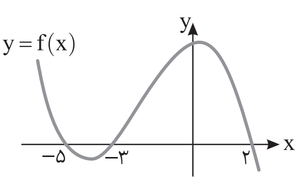
۷۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=\{x|x^2+2x+2-m^2\ge0\}$.

برای اینکه همواره $x^2+2x+2-m^2\ge0$، باید $\Delta\le0$،

$$\Delta=2^2-4(2-m^2)\le0\Rightarrow4-8+4m^2\le0\Rightarrow m^2\le1\Rightarrow-1\le m\le1$$

بنابراین کمترین مقدار ممکن m برابر -1 و بیشترین مقدار آن برابر ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۲ است.

۷۸- گزینهٔ ۲ برای اینکه از نمودار تابع $y=f(x-2)$ به نمودار تابع $y=f(x)$ برسیم، کافی است آن را دو واحد به چپ منتقل کنیم.



برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$، عبارت $\frac{x}{f(x)}$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-5		-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x}{f(x)}$		$-$	ت ن	$+$	ت ن	$-$	0	$+$	ت ن	$-$	

بنابراین $D_g=(-5,-3)\cup[0,2)$، پس دامنهٔ تابع g شامل سه عدد صحیح است.

۷۹- گزینهٔ ۲ تساوی‌های زیر باید برقرار باشند:

$$(۱,۲a)=(۱,۸)\Rightarrow a=۴$$

$$(۲,۲a+b)=(۲,۵)\Rightarrow ۲a+b=۵\xrightarrow{a=۴}۸+b=۵\Rightarrow b=-۳$$

$$(a+c,۳)=(۵,۳)\Rightarrow a+c=۵\xrightarrow{a=۴}۴+c=۵\Rightarrow c=۱$$

بنابراین $a+b+c=۲$.

۸۰- گزینهٔ ۲ تابع‌های $f(x)=\sqrt{۶x-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{۶-x}$ برابرند، زیرا

$$D_f=D_g=[۰,۶],\ f(x)=\sqrt{۶x-x^۲}=\sqrt{x(۶-x)}=\sqrt{x}\sqrt{۶-x}=g(x)$$

تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲-۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۳}$ و همین‌طور تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲+۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+۳}$ دامنهٔ یکسان ندارند، پس برابر نیستند. تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ و $g(x)=x-۳$ دامنهٔ یکسان دارند، اما ضابطهٔ برابر ندارند، زیرا

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\sqrt{(x-۳)^۲}=|x-۳|\neq g(x)$$

۸۱- گزینهٔ ۴ سه کسر در ضابطهٔ تابع وجود دارد. مخرج هر یک را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱,\quad x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$

$$۱-\frac{۴}{x+۱}=۰\Rightarrow x+۱-۴=۰\Rightarrow x=۳$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۲,۳\}$. پس حاصل‌ضرب عددهایی که در دامنهٔ تابع قرار ندارند برابر -۶ است.

۸۲- گزینهٔ ۳ مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$x^۳-۲x^۲-x+۲=۰\Rightarrow x^۳-x-۲x^۲+۲=۰$$

$$x(x^۲-۱)-۲(x^۲-۱)=۰\Rightarrow (x^۲-۱)(x-۲)=۰$$

$$(x-۱)(x+۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱,x=-۱,x=۲$$

بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{۱,-۱,۲\}$. پس سه عدد در دامنهٔ تابع قرار ندارند.

۸۳- گزینهٔ ۳ چون $x=۴$ در دامنهٔ تابع نیست، پس مخرج حداقل یکی از کسرهای ضابطهٔ تابع را صفر می‌کند. بنابراین

$$x-a=۰\xrightarrow{x=۴}۴-a=۰\Rightarrow a=۴$$

$$x-\frac{a+۱}{x-a}=۰\xrightarrow{x=۴}۴-\frac{a+۱}{۴-a}=۰\Rightarrow a=۳$$

پس حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای a برابر ۷ است.

۸۴- گزینهٔ ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس معادلهٔ $m^۲x^۲+x+۱=۰$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=۱-۴m^۲=۰\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

در این حالت $x=-۲$ ریشهٔ مخرج است، در نتیجه $n=-۲$.

حالت دوم مخرج عبارت درجهٔ اول باشد، یعنی ضریب $x^۲$ برابر صفر باشد. در این حالت $m=۰$ و $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-۱$.

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای n، ۲ است.

۸۵- گزینهٔ ۱ باید $x=-۱$ و $x=۲$ جواب‌های معادلهٔ $a|x|-bx+۱=۰$ باشند، بنابراین

$$a|x|-bx+۱=۰\xrightarrow{x=-۱}a+b+۱=۰$$

$$a|x|-bx+۱=۰\xrightarrow{x=۲}۲a-۲b+۱=۰$$

بنابراین $a=-\frac{۳}{۴}$ و $b=-\frac{۱}{۴}$ و در نتیجه $ab=\frac{۳}{۱۶}$.

۸۶- گزینهٔ ۳ شرط‌های زیر برای تعیین دامنهٔ تابع وجود دارند:

$$۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳,\quad x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲$$

$$\sqrt{x+۲}-۲\neq ۰\Rightarrow \sqrt{x+۲}\neq ۲\Rightarrow x+۲\neq ۴\Rightarrow x\neq ۲$$

بنابراین $D_f=[-۲,۳]-\{۲\}$ و عددهای صحیح -۲، -۱، ۰، ۱ و ۳ در دامنهٔ تابع قرار دارند.

۸۷- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-۳,۲]$ است. بنابراین عبارت $ax^۲+bx+۲a^۲$ باید روی این بازه نامنفی باشد و روی بازهٔ $\mathbb{R}-(-۳,۲)$ منفی باشد. پس $x=۲$ و $x=-۳$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+۲a^۲=۰$ هستند. یعنی اگر به جای x یک بار ۲ و بار دیگر -۳ قرار دهیم مقدار عبارت برابر صفر خواهد شد:

$$\begin{matrix}۳\times\\ ۲\times\end{matrix}\begin{cases}۴a+۲b+۲a^۲=۰ & (I)\\ ۹a-۳b+۲a^۲=۰\end{cases}\Rightarrow +\begin{cases}۱۲a+۶b+۶a^۲=۰\\ ۱۸a-۶b+۴a^۲=۰\end{cases}$$

$$۳۰a+۱۰a^۲=۰$$

$$۱۰a(۳+a)=۰\Rightarrow a=۰,a=-۳$$

اگر $a=۰$ از معادلهٔ (I) نتیجه می‌شود $b=۰$ و اگر $a=-۳$ از معادلهٔ (I) نتیجه می‌شود $-۱۲+۲b+۱۸=۰\Rightarrow b=-۳$

اگر $a=b=۰$ آن‌گاه $f(x)=۰$ و $D_f=\mathbb{R}$. پس فقط $a=b=-۳$ قابل قبول است و در نتیجه $a+b=-۶$.

۸۸- گزینهٔ ۴ باید نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{x^۲-x}\geq ۰$ را حل کنیم. مطابق جدول تعیین علامت زیر جواب نامعادله به‌صورت $۱<x\leq ۲$ یا $۰<x<۱$ یا $x=-۱$ است.

بنابراین $D_g=\{-۱\}\cup(۰,۱)\cup(۱,۲]$.

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
$f(x)$				$-$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$			
$x^۲-x$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$	
$\frac{f(x)}{x^۲-x}$				$-$	۰	$-$	ت ن	$+$	ت ن	$+$			

۸۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض کنید $g(x)=ax+b$ و تابع f با تابع g برابر باشد. در این صورت به ازای هر $x\neq ۳$ تساوی $\frac{x^۲-mx+۳}{۳-x}=ax+b$ برقرار است. پس

$$x^۲-mx+۳=۳ax+۳b-ax^۲-bx=-ax^۲+(۳a-b)x+۳b$$

تساوی بالا به ازای هر $x\neq ۳$ برقرار است. بنابراین

$$a=-۱,\quad ۳=۳b\Rightarrow b=۱,\quad -m=۳a-b\xrightarrow[b=۱]{a=-۱}m=۴$$

بنابراین $g(x)=-x+۱$. همچنین باید تساوی $f(۳)=g(۳)$ درست باشد. پس

$$f(۳)=n,\quad g(۳)=-۳+۱=-۲\Rightarrow n=-۲$$

در نتیجه $m+n=۲$.

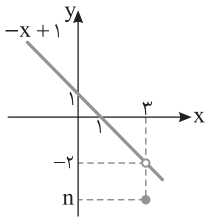
راه‌حل دوم برای اینکه تابع f خطی باشد، باید کسر $\frac{x^2-mx+3}{3-x}$ ساده شود. یعنی باید صورت کسر عامل $x-3$ داشته باشد. پس صورت کسر به ازای $x=3$ صفر می‌شود.

$$9-3m+3=0 \Rightarrow m=4$$

$$\frac{x^2-mx+3}{3-x}=\frac{x^2-4x+3}{3-x}=\frac{(x-1)(x-3)}{-(x-3)}=-x+1$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & x\neq 3\\ n & x=3\end{cases}$$



واضح است که اگر $n\neq -2$ آن‌گاه تابع f خطی نیست. پس $n=-2$، بنابراین

$$m+n=2$$

۹۰- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ دو تابع را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{bx+2}{8x+b}=c \Rightarrow 8cx+bc=bx+2$$

$$\begin{cases}8c=b\\ bc=2\end{cases}\Rightarrow c\times 8c=2 \Rightarrow \begin{cases}c=\frac{1}{2}, b=4\\ c=-\frac{1}{2}, b=-4\end{cases}$$

اگر $b=4$، آن‌گاه $f(x)=\frac{4x+2}{8x+4}$. بنابراین $x=-\frac{1}{2}$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد و در دامنهٔ تابع g نیز نباید قرار داشته باشد. پس $a=-\frac{1}{2}$ و در نتیجه $\frac{ab}{c}=-4$. در حالت $b=-4$، $f(x)=\frac{-4x+2}{8x-4}$ که نتیجه می‌شود $a=\frac{1}{2}$ و $\frac{ab}{c}=4$.

۹۱- گزینهٔ ۱ عددهایی که مخرج ضابطهٔ تابع را صفر می‌کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس $x=2$ جواب معادلهٔ $x^3-(a+1)x+a=0$ است. پس

$$8-2(a+1)+a=0\Rightarrow a=6$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{1}{x^3-7x+6}$ است. دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$x^3-7x+6=0\Rightarrow (x-2)(x^2+2x-3)=0\Rightarrow x=2, x=1, x=-3$$

در نتیجه $D_f=\mathbb{R}-\{1,2,-3\}$.

۹۲- گزینهٔ ۳ شرایط زیر برای تعیین دامنهٔ تابع وجود دارد:

$$2x-1\ge 0\Rightarrow x\ge \frac{1}{2}$$

$$4-\sqrt{2x-1}\ge 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1}\le 4\Rightarrow 2x-1\le 16\Rightarrow x\le\frac{17}{2}$$

بنابراین $D_f=[\frac{1}{2},\frac{17}{2}]$. پس $a=\frac{1}{2}$، $b=\frac{17}{2}$ و $a+b=9$.

۹۳- گزینهٔ ۳ هر دو عبارت رادیکالی باید بامعنی باشند. در نتیجه $\frac{16-x^2}{x}\ge 0$ و $\frac{-x}{x+5}\ge 0$. با توجه به جدول‌های تعیین علامت زیر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اول $(-\infty,-4]\cup(0,4]$ و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ دوم $(-5,0]$ است. بنابراین دامنهٔ تابع f برابر است با

$$((-\infty,-4]\cup(0,4])\cap(-5,0]=(-5,-4]$$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$16-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{16-x^2}{x}$		$+$	0	$-$	ت ن	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		-5		0		$+\infty$
$\frac{-x}{x+5}$		$-$	ت ن	$+$	0	$-$	

بنابراین $a=-5$، $b=-4$ و $a+b=-9$.

۹۴- گزینهٔ ۳ شرط تعیین دامنه به‌صورت زیر است

$$(a+2)x^2+ax+b\ge 0$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق نمی‌تواند به‌صورت $(-\infty,3]$ باشد، مگر اینکه عبارت $(a+2)x^2+ax+b$ درجهٔ اول باشد، یعنی $a+2=0$. در نتیجه $a=-2$. پس نامعادله به‌صورت $-2x+b\ge 0$ درمی‌آید:

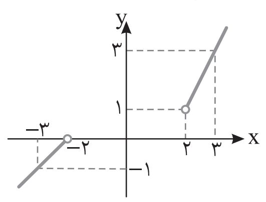
$$-2x+b\ge 0\Rightarrow x\le\frac{b}{2}\Rightarrow D_f=(-\infty,\frac{b}{2}]$$

بنابراین $\frac{b}{2}=3$ و در نتیجه $b=6$.

۹۵- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ $-x^3f(x)\ge 0$ به‌دست می‌آید. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعهٔ جواب‌های این نامعادله $\{-1,0\}\cup[1,2]$ است که شامل چهار عدد صحیح است.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$				$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$			
$-x^3f(x)$				$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$			

۹۶- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که برد تابع $\mathbb{R}-[0,1]$ است. پس $a=0$ و $b=1$. در نتیجه $a+b=1$.



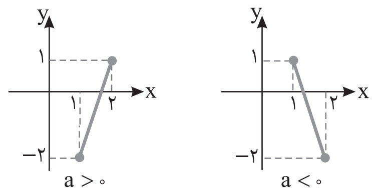
راه‌حل دوم اگر $x>2$، آن‌گاه $2x>4\Rightarrow 2x-3>1\Rightarrow f(x)>1$

اگر $x<-2$، آن‌گاه $x+2<0\Rightarrow f(x)<0$

پس $R_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)=\mathbb{R}-[0,1]$. پس $a=0$ و $b=1$. در نتیجه

$$a+b=1$$

۹۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $f(x)=ax+b$. نمودار تابع f در دو حالت $a>۰$ و $a<۰$ را در شکل‌های زیر رسم کرده‌ایم.



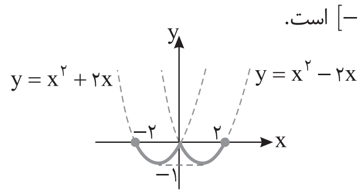
اگر $a>۰$، آن‌گاه $f(۱)=-۲$ و $f(۲)=۱$. پس

$$\begin{cases}a+b=-۲\\ ۲a+b=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۳\\ b=-۵\end{cases}\Rightarrow f(x)=۳x-۵\Rightarrow f(\frac{۴}{۳})=-۱$$

اگر $a<۰$، آن‌گاه $f(۱)=۱$ و $f(۲)=-۲$، پس

$$\begin{cases}a+b=۱\\ ۲a+b=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\ b=۴\end{cases}\Rightarrow f(x)=-۳x+۴\Rightarrow f(\frac{۴}{۳})=۰$$

۹۸- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که برد تابع f بازهٔ $[-۱,۰]$ است.

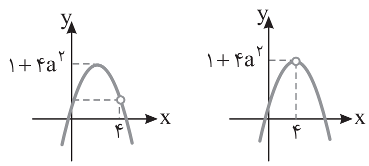


۹۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر دامنهٔ تابع $f(x)=-x^۲-۴ax+۱$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، برد آن بازهٔ $(-\infty,۱+۴a^۲]$ است. در این حالت نمودار تابع f یک سهمی است و با حذف یک عدد از دامنه مطابق شکل زیر، عددی از برد حذف نمی‌شود، مگر اینکه طول رأس سهمی را حذف کنیم. بنابراین طول رأس سهمی برابر ۴ و عرض آن برابر $۱+۴a^۲$ است:

$$\text{طول رأس سهمی}=x=-\frac{-۴a}{۲(-۱)}=۴\Rightarrow a=-۲$$

$$\text{عرض رأس سهمی}=y=۱+۴a^۲=۱+۱۶\Rightarrow b=۱۷$$

بنابراین $a+b=۱۵$.



۱۰۰- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x\neq۱\Rightarrow g(x)=\frac{x^۴-۱}{x-۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)}{x-۱}=x^۳+x^۲+x+۱$$

$$g(x)=f(x)\Rightarrow a=۱$$

از طرف دیگر،

$$x=۱\Rightarrow g(x)=g(۱)=b\ ,\quad f(۱)=۴\ ,\quad g(۱)=f(۱)\Rightarrow b=۴$$

بنابراین $a+b=۵$.

راه‌حل دوم با استفاده از نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ مقادیر a و b به راحتی به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}f(۰)=g(۰)\Rightarrow a=۱\\ f(۱)=g(۱)\Rightarrow ۳+a=b\xrightarrow{a=۱}۴=b\end{cases}\Rightarrow a+b=۵$$

۱۰۱- گزینهٔ ۴ طول مستطیل را x و عرض آن را $x-۲$ در نظر می‌گیریم، پس محیط آن برابر است با $P(x)=۲(x+x-۲)=۴x-۴$.

۱۰۲- گزینهٔ ۴ اگر r شعاع دایره باشد، $P=۲\pi r$ و در نتیجه $r=\frac{P}{۲\pi}$.

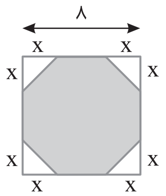
از طرف دیگر $S=\pi r^۲$. بنابراین $S=\pi(\frac{P}{۲\pi})^۲=\frac{\pi P^۲}{۴\pi^۲}\Rightarrow S(P)=\frac{۱}{۴\pi}P^۲$

۱۰۳- گزینهٔ ۲ ابعاد مستطیل x و $۲-\frac{x}{۲}$ هستند، پس محیط آن به‌صورت $P(x)=۲(x+۲-\frac{x}{۲})=x+۴$ به‌دست می‌آید.

۱۰۴- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل درمی‌یابیم که اندازهٔ شعاع ربع دایره و ضلع مربع برابر r است. از طرف دیگر، اگر مساحت ربع دایره را از مساحت مربع کم کنیم، مساحت قسمت رنگی به‌دست می‌آید، بنابراین

$$S(r)=r^۲-\frac{۱}{۴}\pi r^۲=(\frac{۴-\pi}{۴})r^۲$$

۱۰۵- گزینهٔ ۳ مقدار x باید مثبت باشد و مقدار بریده شده یعنی $۲x$ باید از ۸ کمتر باشد. پس $۰<۲x<۸$ در نتیجه $۰<x<۴$. بنابراین دامنهٔ این تابع بازهٔ $(۰,۴)$ است.



۱۰۶- گزینهٔ ۴ از روی شکل معلوم است که نقطهٔ A از یک طرف تا محل برخورد خط با محور x، یعنی نقطهٔ $(۶,۰)$، و از طرف دیگر تا مبدأ مختصات می‌تواند حرکت کند. بنابراین، دامنهٔ این تابع بازهٔ $(۰,۶)$ است.

۱۰۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حجم مخزن برابر است با

$$V=\text{حجم استوانه}+۲\times\text{حجم نیم کره}$$

$$=\pi(r^۲)(۲۰)+۲\times\frac{۲}{۳}\pi(r^۳)=\frac{۴\pi}{۳}r^۳+۲۰\pi r^۲$$

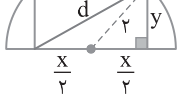
۱۰۸- گزینهٔ ۲ مطابق شکل زیر، با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس،

$$(\frac{x}{۲})^۲+y^۲=۲^۲\Rightarrow y^۲=۴-\frac{x^۲}{۴}$$

همچنین طول قطر مستطیل از رابطهٔ فیثاغورس قابل محاسبه است:

$$d=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+۴-\frac{x^۲}{۴}}$$

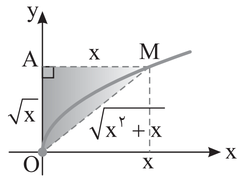
بنابراین $d(x)=\sqrt{\frac{۳}{۴}x^۲+۴}$ ضابطهٔ تابع مورد نظر است.



۱۰۹- گزینهٔ ۳ شیب خطی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(x,۰)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{۳-۰}{۲-x}$ است. شیب خطی که از نقطه‌های $(۲,۳)$ و $(۰,y)$ عبور می‌کند، برابر $\frac{y-۳}{۰-۲}$ است. چون نقطه‌های $(۲,۳)$، $(x,۰)$ و $(۰,y)$ روی یک خط واقع‌اند، پس برابری $\frac{y-۳}{۰-۲}=\frac{۳-۰}{۲-x}$ برقرار است. بنابراین

$$y-۳=\frac{-۶}{۲-x}\Rightarrow y=۳-\frac{۶}{۲-x}\Rightarrow y=\frac{۳x}{x-۲}$$

۱۱۰- گزینهٔ ۴ مطابق شکل زیر طول ضلع OM به کمک قضیهٔ فیثاغورس برابر است با $\sqrt{AM^2+OA^2}=\sqrt{x^2+(\sqrt{x})^2}=\sqrt{x^2+x}$.



پس محیط مثلث OAM برابر است با

$$P(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt{x^2+x}$$

۱۱۱- گزینهٔ ۲ اشتراک دامنه‌های f و g مجموعهٔ $\{2,3,4\}$ است که دامنهٔ تابع $f+g$ است. پس این تابع به شکل زیر است.

$$f+g=\{(2,2),(3,11),(4,-1)\}$$

بنابراین $R_{f+g}=\{2,11,-1\}$ و مجموع اعضای برد $f+g$ برابر ۱۲ است.

۱۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=\{1,3,5,-1\},\quad D_g=\{1,2,5,4\}$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{1,5\}$$

راه‌حل اول بنابراین a یکی از مقادیر ۱ یا ۵ است. از طرف دیگر،

$$(f+g)(1)=f(1)+g(1)=2+4=6$$

$$(f-g)(1)=f(1)-g(1)=2-4=-2$$

$$(f+g)(5)=f(5)+g(5)=6+2=8$$

$$(f-g)(5)=f(5)-g(5)=6-2=4$$

پس $(f+g)(5)=2(f-g)(5)$ و در نتیجه $a=5$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$(f+g)(a)=2(f-g)(a)\Rightarrow f(a)+g(a)=2f(a)-2g(a)\Rightarrow f(a)=3g(a)$$

$$f(1)=2,\ g(1)=4\Rightarrow f(1)\neq 3g(1)$$

$$f(5)=6,\ g(5)=2\Rightarrow f(5)=3g(5)\Rightarrow a=5$$

۱۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$ و $D_g=\{-1,1,0,2,4\}$. بنابراین $D_{2g-f}=D_g\cap D_f=\{-1,0,4\}$.

بنابراین a باید یکی از مقدارهای ۱- یا ۰ یا ۴ باشد:

$$(2g-f)(-1)=2g(-1)-f(-1)=4-2=2$$

$$(2g-f)(0)=2g(0)-f(0)=2-0=2$$

$$(2g-f)(4)=2g(4)-f(4)=6-2=4$$

پس $(2g-f)(4)=4$. بنابراین $a=4$ و در نتیجه $f(-a)=f(-4)=\sqrt{28}$.

۱۱۴- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{x^4-x^2}{x^2+1}=\frac{x^2-1+x^4-x^2}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}=x^2-1$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0)=-1$ و $g(0)=0$. پس $(f+g)(0)=-1$. با توجه به گزینه‌ها فقط در گزینهٔ (۳) به ازای $x=0$ حاصل ۱- است.

۱۱۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow f(x)+g(x)=x^2-1$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow f(x)-g(x)=x-3$$

طرفین تساوی‌های بالا را جمع می‌کنیم

$$f(x)+g(x)+f(x)-g(x)=x^2-1+x-3\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+x-4}{2}$$

پس باید حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $\frac{x^2+x-4}{2}=2$ را به‌دست آوریم

$$x^2+x-4=4\Rightarrow x^2+x-8=0$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ بالا برابر $\frac{c}{a}=-8$ است.

۱۱۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_g=\mathbb{R}-\{3\}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$.

از طرف دیگر،

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x|f(x)=0\}=(\mathbb{R}-\{2,3\})-\{x|\frac{x+4}{x-2}=0\}$$

$$=\mathbb{R}-\{2,3,-4\}$$

پس مجموع اعدادی که در دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ قرار ندارند برابر ۱ است.

۱۱۷- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x)+g(x)=x^2-4x,\quad f(x)-g(x)=x^2-6x-12$$

با جمع طرفین دو تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$2f(x)=2x^2-10x-12\Rightarrow f(x)=x^2-5x-6$$

بنابراین

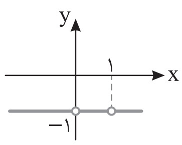
$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x|f(x)=0\}$$

$$=(\mathbb{R}\cap\mathbb{R})-\{x|x^2-5x-6=0\}=\mathbb{R}-\{-1,6\}$$

۱۱۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{0,1\}$، پس $D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{0,1\}$. از طرف دیگر،

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x^2+1}{x^2-x}=\frac{x-x^2}{x^2-x}=-1$$

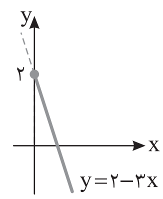
بنابراین باید نمودار تابع $y=-1$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0,1\}$ رسم کنیم که به‌صورت زیر است.



۱۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=D_g=[0,+\infty)$، پس $D_{g-f}=D_f\cap D_g=[0,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$(g-f)(x)=g(x)-f(x)=2-\sqrt{x}-(3x-\sqrt{x})=2-3x$$

پس نمودار تابع $g-f$ به‌صورت روبه‌رو است و برد آن بازهٔ $(-\infty,2]$ است.



۱۲۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

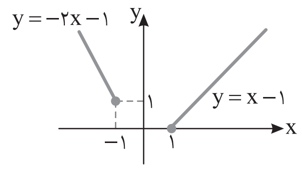
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}2x-(x+1) & x\ge 1\\ x-1-3x & x\le -1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x-1 & x\ge 1\\ -2x-1 & x\le -1\end{cases}$$

اکنون برد تابع $f-g$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}x\ge 1\Rightarrow x-1\ge 0\Rightarrow y\ge 0\\ x\le -1\Rightarrow -2x\ge 2\Rightarrow -2x-1\ge 1\Rightarrow y\ge 1\end{cases}$$

بنابراین برد تابع $f-g$ بازهٔ $[0,+\infty)$ است. از روی نمودار تابع $f-g$ هم می‌توان برد آن را به‌دست آورد.



۱۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_{f-2g}=D_f\cap D_g=\{0,1,2\}$. بنابراین

$$(f-2g)(0)=f(0)-2g(0)=1-2(-1)=3$$

$$(f-2g)(1)=f(1)-2g(1)=4-2(-2)=8$$

$$(f-2g)(2)=f(2)-2g(2)=-6-2(3)=-12$$

بنابراین مجموع مقدارهای تابع $f-2g$ برابر -1 است.

۱۲۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=2x+1\Rightarrow (f+g)(2)=2\times 2+1=5\Rightarrow f(2)+g(2)=5 \quad (1)$$

$$(f-g)(x)=1-x\Rightarrow (f-g)(2)=1-2=-1\Rightarrow f(2)-g(2)=-1 \quad (2)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دست می‌آید $f(2)=2$ و $g(2)=3$. بنابراین $(f\times g)(2)=f(2)\times g(2)=2\times 3=6$.

۱۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$D_f=(-\infty,4]-\{0\},\quad D_g=\{-2,-1,0,3,4,5\}$$

بنابراین

$$D_{\frac{f}{g}}=(D_f\cap D_g)-\{x|g(x)=0\}=\{-2,-1,3,4\}-\{-1\}=\{-2,3,4\}$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ سه زوج مرتب دارد.

۱۲۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=|x-1|+|x|=\begin{cases}-2x+1 & x\le 0\\ 1 & 0\le x\le 1\\ 2x-1 & x\ge 1\end{cases}$$

در بازهٔ $[0,1]$ تابع $f+g$ ثابت است. در این بازه،

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=|\underbrace{x-1}_{-}|-|\underbrace{x}_{+}|=-x+1-x=-2x+1$$

۱۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(f+2g)(x)=f(x)+2g(x)\Rightarrow f(x)+2g(x)=1-x$$

$$f(x)=1-x-2g(x)$$

$$(2f-g)(x)=2f(x)-g(x)\Rightarrow 2f(x)-g(x)=x^2$$

بنابراین $2(1-x-2g(x))-g(x)=x^2\Rightarrow -5g(x)+2-2x=x^2$

$$g(x)=\frac{1}{5}(-x^2-2x+2)$$

۱۲۶- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{5-x}{x-1}\ge 0\Rightarrow 1<x\le 5\Rightarrow D_f=(1,5]$$

$$\frac{x-1}{4-x}\ge 0\Rightarrow 1\le x<4\Rightarrow D_g=[1,4)$$

بنابراین

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=(1,5]\cap[1,4)=(1,4)$$

۱۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{x}{(x+1)^2}\quad (1)$$

$$(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=x\Rightarrow g(x)=xf(x)\quad (2)$$

اگر به جای $g(x)$ در تساوی (۱) معادل آن یعنی $xf(x)$ را از تساوی (۲) قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$f(x)\times xf(x)=\frac{x}{(x+1)^2}\Rightarrow f^2(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

بنابراین $g^2(x)=x^2f^2(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}$، در نتیجه

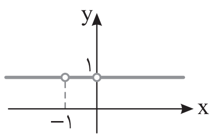
$$(f^2-g^2)(x)=f^2(x)-g^2(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{1-x}{1+x}$$

۱۲۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{-1,0\}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}=1$$

پس اگر $x\neq -1$ و $x\neq 0$، آن‌گاه $(f+g)(x)=1$. بنابراین نمودار تابع $f+g$ به‌صورت زیر است.



۱۲۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=D_g=[4,+\infty)$$

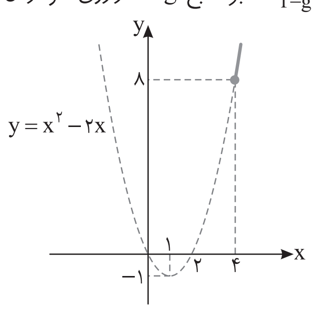
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2+\sqrt{x-4}-2x-\sqrt{x-4}$$

$$=x^2-2x=(x-1)^2-1$$

برای تعیین برد تابع $f-g$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$x\ge 4\Rightarrow x-1\ge 3\Rightarrow (x-1)^2\ge 9\Rightarrow (x-1)^2-1\ge 8\Rightarrow (f-g)(x)\ge 8$$

پس $R_{f-g}=[8,+\infty)$. برد تابع $f-g$ از روی نمودار آن هم مشخص است.



۱۳۰- گزینهٔ ۴ اگر $x>1$، آن‌گاه

$$f(x)=1\,,\ g(x)=-2\Rightarrow(f-g)(x)=1-(-2)=3$$

اگر $0<x\le 1$، آن‌گاه

$$f(x)=1\,,\ g(x)=2\Rightarrow(f-g)(x)=1-2=-1$$

اگر $-1\le x\le 0$، آن‌گاه

$$f(x)=-1\,,\ g(x)=2\Rightarrow(f-g)(x)=-1-2=-3$$

اگر $x<-1$، آن‌گاه

$$f(x)=-1\,,\ g(x)=-2\Rightarrow(f-g)(x)=-1-(-2)=1$$

بنابراین $R_{f-g}=\{3,-1,-3,1\}$.

۱۳۱- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g به شکل زیر است:

$$D_g=D_f-\{x|f(x)=2\}=\{1,4,3,5\}-\{4,3\}=\{1,5\}$$

از طرف دیگر،

$$g(1)=\frac{f(1)}{2-f(1)}=\frac{-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}\ ,\quad g(5)=\frac{f(5)}{2-f(5)}=\frac{1}{2-1}=1$$

بنابراین $g=\{(1,-\frac{1}{3}),(5,1)\}$.

۱۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $f(a)$ و $g(a)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-g)(a)=2\Rightarrow f(a)-g(a)=2\Rightarrow f(a)=g(a)+2\quad(1)$$

$$(f\times g)(a)=8\Rightarrow f(a)g(a)=8\xrightarrow{(1)}(g(a)+2)g(a)=8$$

$$g^2(a)+2g(a)-8=0\Rightarrow(g(a)+4)(g(a)-2)=0$$

$$\begin{cases}g(a)=-4\xrightarrow{(1)}f(a)=-2\\ g(a)=2\xrightarrow{(1)}f(a)=4\end{cases}$$

بنابراین

$$(\frac{f}{g})(a)=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{4}{2}=2,\quad(\frac{f}{g})(a)=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

۱۳۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$D_f=[-3,3]\,,\quad D_g=\{1,-1,3,-3,-4\}$$

$$f(x)=0\Rightarrow\sqrt{9-x^2}=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm3$$

بنابراین

$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=0\}=\{1,-1,3,-3\}-\{3,-3\}=\{1,-1\}$$

از طرف دیگر،

$$(\frac{g}{f})(1)=\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\quad(\frac{g}{f})(-1)=\frac{g(-1)}{f(-1)}=\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین $\frac{g}{f}=\{(1,\frac{\sqrt{2}}{2}),(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})\}$ و در نتیجه برد تابع $\frac{g}{f}$ فقط یک عضو دارد.

۱۳۴- گزینهٔ ۴ دامنهٔ تابع‌های f و g مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{0,1\}$ است. پس

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{0,1\}$$

اکنون ضابطهٔ تابع $f-g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2-x}$$

$$=\frac{x+x-1-1}{x^2-x}=\frac{2(x-1)}{x(x-1)}=\frac{2}{x}$$

۱۳۵- گزینهٔ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}4-x^2\ge0\Rightarrow-2\le x\le2\\ x+4\ge0\Rightarrow x\ge-4\end{cases}\Rightarrow D_f=[-2,2]$$

$$\begin{cases}4-x^2\ge0\Rightarrow-2\le x\le2\\ 1-x\ge0\Rightarrow x\le1\end{cases}\Rightarrow D_g=[-2,1]$$

بنابراین $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-2,1]$. پس $a=-2$، $b=1$ و در نتیجه

$$a+b=-1$$

۱۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{1}{(ax+2)^2}\,,\quad g(x)=\frac{1}{(x+1)(x+b)}$$

چون فقط $x=-1$ در دامنهٔ تابع $f+g$ قرار ندارد، پس تنها $x=-1$ می‌تواند ریشهٔ مخرج در تابع‌های f و g باشد. بنابراین باید $b=1$. برای a دو حالت وجود دارد:

حالت اول اگر $x=-1$ ریشهٔ مخرج $f(x)$ باشد، آن‌گاه $a=2$.

حالت دوم اگر مخرج $f(x)$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه $a=0$.

بنابراین $a+b$ می‌تواند ۱ یا ۳ باشد.

۱۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$ax-a+1\ge0\Rightarrow ax\ge a-1$$

اگر $a>0$، آن‌گاه $x\ge\frac{a-1}{a}$. اگر $a<0$، آن‌گاه $x\le\frac{a-1}{a}$. اگر $a=0$، آن‌گاه $x\in\mathbb{R}$. با توجه به این موضوع و اینکه $D_{f\times g}=[2,5]$ و $D_g=[2,+\infty)$ باید $D_f=(-\infty,\frac{a-1}{a}]$، در نتیجه

$$\frac{a-1}{a}=5\Rightarrow a-1=5a\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

پس $f(x)=\sqrt{-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}$ و در نتیجه $f(3)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

۱۳۸- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع $(f+g)^2$ را به‌دست می‌آوریم (توجه کنید که $x\ge1$):

$$(f+g)^2(x)=f^2(x)+g^2(x)+2f(x)g(x)$$

$$=x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+2\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}=2x+2\sqrt{x^2-x}$$

با توجه به اینکه $f(x)$ و $g(x)$ عبارت‌هایی مثبت هستند، پس $(f+g)(x)$ هم مثبت است. بنابراین $(f+g)(x)=\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-x}}$. پس $a=2$، $b=1$ و در نتیجه $a+b=3$.

۱۳۹- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به‌صورت زیر است:

$$x-2\ge0\Rightarrow x\ge2\Rightarrow D_f=[2,+\infty)$$

$$a-x\ge0\Rightarrow x\le a\Rightarrow D_g=(-\infty,a]$$

چون $D_{f-g}=D_f\cap D_g=[2,4]$. پس $a=4$. از طرف دیگر،

$$(f+g)(3)=5\Rightarrow f(3)+g(3)=\sqrt{3-2}+\sqrt{4-3}+b=5$$

$$2+b=5\Rightarrow b=3$$

در نتیجه $a+b=7$.

۱۴۰- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}2-x & x\le 0\\ x+2 & 0<x<1\\ x+2 & x\ge 1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}2x+3 & x\le 0\\ 2x+3 & 0<x<1\\ 3x+2 & x\ge 1\end{cases}$$

بنابراین

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}-3x-1 & x\le 0\\ -x-1 & 0<x<1\\ -2x & x\ge 1\end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(2)=4$ و $g(2)=8$، پس

$$(f-g)(2)=4-8=-4$$

همچنین $f(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$ و $g(\frac{1}{2})=4$، پس $(f-g)(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}$.

همچنین $f(-1)=3$ و $g(-1)=1$، پس $(f-g)(-1)=3-1=2$.

همهٔ این شرایط فقط در تابع گزینهٔ (۲) وجود دارد.

۱۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-2)=f(g(-2))=f(2)=3$$

$$(gof)(-1)=g(f(-1))=g(-3)=-2$$

بنابراین $(fog)(-2)-(gof)(-1)=3-(-2)=5$.

۱۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $(fog)(-2)=f(g(-2))$. از طرف دیگر، $g(-2)=-2+6=4$ و $f(g(-2))=f(4)=4^2+2=18$.

۱۴۳- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=3g(x)-2=3(4x+3)-2=12x+7$$

بنابراین $(fog)(x-1)=12(x-1)+7=12x-5$.

راه‌حل دوم دقت کنید که

$$(fog)(x-1)=f(g(x-1))=f(4(x-1)+3)$$

$$=f(4x-1)=3(4x-1)-2=12x-5$$

۱۴۴- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))$.

بنابراین

$$(gof)(x)=g(\frac{2x+1}{x-1})=\frac{2(\frac{2x+1}{x-1})-2}{\frac{2x+1}{x-1}+2}=\frac{4x+2-2x+2}{2x+1+2x-2}=\frac{2x+4}{4x-1}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(gof)(0)=g(f(0))=g(-1)=-4$. فقط در گزینهٔ (۴)، تساوی بالا برقرار است.

۱۴۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2-6x+15)=5x^2-3x+2$$

بنابراین $f((x-3)^2+6)=5x^2-3x+2$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$، به‌دست می‌آید $f(6)=38$.

۱۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$D_{fof}=\{x|x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_f\}=\{1\le x\le 2\ ,\ 1\le 4-2x\le 2\}$$

از نامعادلهٔ $1\le 4-2x\le 2$ نتیجه می‌شود $-3\le -2x\le -2$، پس $1\le x\le \frac{3}{2}$.

بنابراین $D_{fof}=\{1\le x\le 2, 1\le x\le \frac{3}{2}\}=[1,\frac{3}{2}]$.

۱۴۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $g(x)=x^2$. تابع $f(x^2)$، تابع fog است. بنابراین می‌توان نوشت

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ ,1\le x^2\le 4\}$$

از نامعادله‌های $1\le x^2\le 4$ نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}x^2\le 4\Rightarrow -2\le x\le 2\\ 1\le x^2\Rightarrow x\le -1\ ,\ x\ge 1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}-2\le x\le -1\ ,1\le x\le 2$$

بنابراین $D_{f(x^2)}=[-2,-1]\cup[1,2]$.

۱۴۸- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع gof را با توجه به $D_f=[-2,2]$ و $D_g=\mathbb{R}$ به‌دست می‌آوریم

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{-2\le x\le 2\ ,\ \sqrt{4-x^2}\in\mathbb{R}\}=[-2,2]$$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{4-x^2})=(\sqrt{4-x^2})^2+1=5-x^2$$

برای محاسبهٔ برد از دامنهٔ تابع کمک می‌گیریم

$$-2\le x\le 2\Rightarrow 0\le x^2\le 4\Rightarrow -4\le -x^2\le 0$$

$$1\le 5-x^2\le 5\Rightarrow 1\le (gof)(x)\le 5$$

بنابراین $R_{gof}=[1,5]$.

۱۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\ge a\ ,0\le |x-1|\le 3\}$$

$$=\{x|x\ge a\ ,-3\le x-1\le 3\}=\{x|x\ge a\ ,-2\le x\le 4\}$$

بنابراین $D_{fog}=[a,+\infty)\cap[-2,4]=[-2,4]$. برای اینکه این تساوی برقرار باشد، باید $a\le -2$. یعنی حداکثر مقدار a برابر -2 است.

۱۵۰- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}2g(x)-1 & g(x)<0\\ g(x)+4 & g(x)\ge 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(3x-6)-1 & 3x-6<0\\ 3x-6+4 & 3x-6\ge 0\end{cases}=\begin{cases}6x-13 & x<2\\ 3x-2 & x\ge 2\end{cases}$$

۱۵۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(-1)=f(g(-1))=f(3)=7\ ,\quad (fog)(1)=f(g(1))=f(2)=5$$

$$(fog)(3)=f(g(3))=f(0)=-1\ ,\quad (fog)(5)=f(g(5))=f(1)=0$$

بنابراین $fog=\{(-1,7),(1,5),(3,-1),(5,0)\}$.

۱۵۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(2)=3$. در نتیجه

$$(gof)(2)=g(f(2))=g(3)=3m+2=8\Rightarrow m=2$$

۱۵۳- گزینهٔ ۴ ابتدا $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x+1)=\frac{1}{2x+1-1}=\frac{1}{2x}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{1}{x-1})=\frac{2}{x-1}+1=\frac{x+1}{x-1}$$

بنابراین

$$(fog)(x)+(gof)(x)=\frac{1}{2x}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2x^2+2x}{2x(x-1)}=\frac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x}$$

۱۵۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(fof)(x)=f(f(x))=f^{۲}(x)+۳f(x)+۲$$

بنابراین

$$(fof)(x)=۶\Rightarrow f^{۲}(x)+۳f(x)+۲=۶$$

$$f^{۲}(x)+۳f(x)-۴=۰\Rightarrow (f(x)-۱)(f(x)+۴)=۰$$

$$\begin{cases} f(x)=۱\Rightarrow x^{۲}+۳x+۲=۱\Rightarrow x^{۲}+۳x+۱=۰ & (۱)\\ f(x)=-۴\Rightarrow x^{۲}+۳x+۲=-۴\Rightarrow x^{۲}+۳x+۶=۰ & (۲)\end{cases}$$

معادلهٔ (۲) جواب ندارد ($\Delta<۰$). در معادلهٔ (۱) حاصل‌جمع جواب‌ها برابر ۳- است. پس حاصل‌جمع جواب‌های معادلهٔ $(fof)(x)=۶$ برابر ۳- است.

۱۵۵- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$g(x-۱)=\frac{x+۲}{۳}\xrightarrow{x\to x+۱} g(x)=\frac{(x+۱)+۲}{۳}=\frac{x+۳}{۳}$$

بنابراین $(fog)(x)=۶x+۵\Rightarrow f(g(x))=۶x+۵\Rightarrow f(\frac{x+۳}{۳})=۶x+۵$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۰$، به‌دست می‌آید $f(۱)=۵$.

۱۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا دامنهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$$
$$=\{-\sqrt{۳}\le x\le \sqrt{۳}, \sqrt{۳-x^{۲}}\in\{-۳,۰,۱,۲\}\}$$

$\sqrt{۳-x^{۲}}=-۳$ (غ.ق.ق.)

$\sqrt{۳-x^{۲}}=۰\Rightarrow ۳-x^{۲}=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$

$\sqrt{۳-x^{۲}}=۱\Rightarrow ۳-x^{۲}=۱\Rightarrow x^{۲}=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$

$\sqrt{۳-x^{۲}}=۲\Rightarrow ۳-x^{۲}=۴\Rightarrow x^{۲}=-۱$ (غ.ق.ق.)

بنابراین

$$D_{gof}=\{-\sqrt{۳}\le x\le\sqrt{۳}, x\in\{\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}\}=\{\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}$$

پس حاصل‌ضرب اعضای دامنهٔ تابع gof برابر ۶ است.

۱۵۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $g(x)=۲^{x}$، تابع $y=f(۲^{x})$، تابع $y=(fog)(x)$ است. دامنهٔ تابع g، $\mathbb{R}$ است، پس

$$D_{fog}=\{x|\ x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|\ x\in\mathbb{R},\ ۱\le ۲^{x}\le ۴\}$$

از نامعادله‌های $۱\le ۲^{x}\le ۴$ نتیجه می‌شود $۰\le x\le ۲$، پس $D_{f(۲^{x})}=[۰,۲]$.

۱۵۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$ و

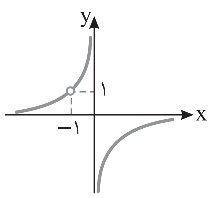
$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}=\{x\neq -۱\ ,\ \frac{x-۱}{x+۱}\neq -۱\}$$

$$\frac{x-۱}{x+۱}=-۱\Rightarrow x-۱=-x-۱\Rightarrow x=۰$$

بنابراین $D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-۱,۰\}$. اکنون ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)-۱}{f(x)+۱}=\frac{\frac{x-۱}{x+۱}-۱}{\frac{x-۱}{x+۱}+۱}=\frac{x-۱-x-۱}{x-۱+x+۱}=\frac{-۱}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل مقابل است.



۱۵۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\{x|-۲\le x\le ۳, ۱\le x^{۲}-۳\le ۱۳\}$$

از حل نامعادلهٔ $۱\le x^{۲}-۳\le ۱۳$ نتیجه می‌شود $۲\le x\le ۴$ یا $-۴\le x\le -۲$.
بنابراین $D_{gof}=[۲,۳]\cup\{-۲\}$.

۱۶۰- گزینهٔ ۴ تابع gof به شکل زیر است

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases} ۳-f(x) & f(x)>۰\\ ۲-f(x) & f(x)<۰\end{cases}$$

کافی است نامعادله‌های $f(x)>۰$ و $f(x)<۰$ را حل کنیم.

حل $f(x)>۰$: اگر $x\ge ۰$، آن‌گاه

$$f(x)=x+۱>۰\Rightarrow x>-۱\Rightarrow x\ge ۰$$

اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$f(x)=x-۱>۰\Rightarrow x>۱\Rightarrow x\in\varnothing$$

حل $f(x)<۰$: اگر $x\ge ۰$، آن‌گاه

$$f(x)=x+۱<۰\Rightarrow x<-۱\Rightarrow x\in\varnothing$$

اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$f(x)=x-۱<۰\Rightarrow x<۱\Rightarrow x<۰$$

بنابراین $(gof)(x)=\begin{cases} ۳-(x+۱) & x\ge ۰\\ ۲-(x-۱) & x<۰\end{cases}=\begin{cases} ۲-x & x\ge ۰\\ ۳-x & x<۰\end{cases}$.

۱۶۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(۴)=۱\Rightarrow a=۱$$
$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=۲\Rightarrow b=۲$$
$$(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۳)=۴\Rightarrow c=۴$$
$$(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۲)=۳\Rightarrow d=۳$$

بنابراین $a-b+c-d=۰$.

۱۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا مقادیر $(fog)(۲)$ و $(gof)(a)$ را به‌دست می‌آوریم

$$(fog)(۲)=f(g(۲))=f(۲)=۴+a$$
$$(gof)(a)=g(f(a))=g(۳a)=۶-۶a$$

بنابراین باید معادلهٔ زیر را حل کنیم

$$۴+a-(۶-۶a)=۳\Rightarrow ۷a=۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۷}$$

۱۶۳- گزینهٔ ۴ باید $(fof)(x)$ را به‌دست آوریم

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{f(x)+۲}{f(x)-۲}=\frac{\frac{x+۲}{x-۲}+۲}{\frac{x+۲}{x-۲}-۲}=\frac{x+۲+۲x-۴}{x+۲-۲x+۴}$$
$$=\frac{۳x-۲}{-x+۶}$$

۱۶۴- گزینهٔ ۴ با توجه به ضابطهٔ تابع f،

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-۱}$$

بنابراین

$$\frac{g(x)}{g(x)-۱}=\frac{x}{۲x+۱}\Rightarrow ۲xg(x)+g(x)=xg(x)-x$$

$$(x+۱)g(x)=-x\Rightarrow g(x)=\frac{-x}{x+۱}$$

۱۶۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{۴f(x)-۱۹}$

بنابراین $\sqrt{۴f(x)-۱۹}=\sqrt{۴g(x)+x}\Rightarrow ۴f(x)-۱۹=۴g(x)+x$

$f(x)-g(x)=\frac{x+۱۹}{۴}\Rightarrow (f-g)(x)=\frac{x+۱۹}{۴}$

در نتیجه $(f-g)(۵)=\frac{۵+۱۹}{۴}=۶$.

۱۶۶- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع‌های f و g به شکل زیر است:

$D_f=[۱,+\infty)\,,\quad D_g=[۰,۳]$

بنابراین $D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\ge ۱\,|\,۰\le\sqrt{x-۱}\le ۳\}$.

از نامعادله‌های $۰\le\sqrt{x-۱}\le ۳$ نتیجه می‌شود $x-۱\le ۹\Rightarrow x\le ۱۰$

بنابراین $D_{gof}=\{x\,|\,x\ge ۱, x\le ۱۰\}=[۱,۱۰]$.

۱۶۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $g(x)=\frac{۱}{x}+۳$، آن‌گاه $D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$ و $h(x)=f(g(x))=(fog)(x)$. بنابراین

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\,|\,۲\le\frac{۱}{x}+۳\le ۴\}$$

باید نامعادله‌های $۲\le\frac{۱}{x}+۳\le ۴$ را حل کنیم:

$$-۱\le\frac{۱}{x}\le ۱\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{x}-۱\le ۰\Rightarrow\frac{۱-x}{x}\le ۰ & (۱)\\ \frac{۱}{x}+۱\ge ۰\Rightarrow\frac{۱+x}{x}\ge ۰ & (۲)\end{cases}$$

از حل نامعادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$ و از حل نامعادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود $x\in(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$. از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده دامنهٔ تابع h مشخص می‌شود: $D_h=\mathbb{R}-(-۱,۱)$.

۱۶۸- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا دامنهٔ تابع gof را مشخص می‌کنیم:

$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}=\{x\ge ۱, \sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\}=[۱,+\infty)$

اکنون ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-۱})=(\sqrt{x-۱})^۲+۶=x-۱+۶=x+۵$

اکنون با توجه به دامنهٔ تابع gof که شرط $x\ge ۱$ را دارد، برد آن را پیدا می‌کنیم:

$x\ge ۱\Rightarrow x+۵\ge ۶\Rightarrow (gof)(x)\ge ۶\Rightarrow R_{gof}=[۶,+\infty)$

راه‌حل دوم چون $f(x)=\sqrt{x-۱}$، پس $f(x)\ge ۰$. از طرف دیگر،

$(gof)(x)=g(f(x))=f^۲(x)+۶\ge ۶$

بنابراین $R_{gof}=[۶,+\infty)$.

۱۶۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{-۲\}$ و

$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{x\ne -۲, \frac{۲x-۴}{x+۲}\ne -۲\}$

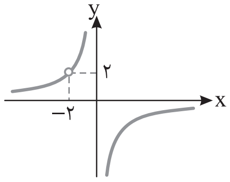
$\frac{۲x-۴}{x+۲}\ne -۲\Rightarrow ۲x-۴\ne -۲x-۴\Rightarrow x\ne ۰$

بنابراین $D_g=D_{fof}=\mathbb{R}-\{-۲,۰\}$. اکنون ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=(fof)(x)=f(f(x))=\frac{۲f(x)-۴}{f(x)+۲}$$

$$=\frac{۲(\frac{۲x-۴}{x+۲})-۴}{\frac{۲x-۴}{x+۲}+۲}=\frac{۴x-۸-۴x-۸}{۲x-۴+۲x+۴}=-\frac{۴}{x}$$

بنابراین نمودار تابع g به شکل زیر است و برد تابع g برابر است با $\mathbb{R}-\{۰,۲\}$.



۱۷۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=۳f(x)+۲=\begin{cases}۶x-۱ & x<۰\\ ۳x-۴ & x\ge ۰\end{cases}$$

۱۷۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$f(۱)=۴\,,\quad f(۲)=۳\,,\quad f(۳)=۲\,,\quad f(۴)=۱\,,\quad f(۵)=۵$

$f(g(۱))=۲\,,\ f(g(۲))=۵\,,\ f(g(۳))=۱\,,\ f(g(۴))=۴\,,\ f(g(۵))=۳$

اکنون توجه کنید که

$f(g(۱))=f(۳)\Rightarrow g(۱)=۳\,,\quad f(g(۲))=f(۵)\Rightarrow g(۲)=۵$

$f(g(۳))=f(۴)\Rightarrow g(۳)=۴\,,\quad f(g(۴))=f(۱)\Rightarrow g(۴)=۱$

$f(g(۵))=f(۲)\Rightarrow g(۵)=۲$

بنابراین $g=\{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۱),(۵,۲)\}$.

۱۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$۵=(gof)(a)=g(f(a))=g(a+\sqrt{a})$

از طرف دیگر $g(۶)=۵$، پس

$a+\sqrt{a}=۶\Rightarrow a=۴\Rightarrow g(a)=g(۴)=۱$

۱۷۳- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$(fog)(x)=f(g(x))=f(-۵x+۲a)$

$=۲(-۵x+۲a)-a+۱=-۱۰x+۳a+۱$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x-a+۱)$

$=-۵(۲x-a+۱)+۲a=-۱۰x+۷a-۵$

چون $(fog)(x)=(gof)(x)$ همواره برقرار است، پس

$۷a-۵=۳a+۱\Rightarrow ۴a=۶\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$

راه‌حل دوم تساوی داده شده به‌ازای $x=۰$ برقرار است. پس

$(fog)(۰)=(gof)(۰)\Rightarrow f(g(۰))=g(f(۰))\Rightarrow f(۲a)=g(-a+۱)$

$۴a-a+۱=-۵(-a+۱)+۲a\Rightarrow ۳a+۱=۷a-۵\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$

۱۷۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{x+۱}{x-۲})$.

بنابراین $g(\frac{x+۱}{x-۲})=\frac{۱}{x+۲}\quad (*)$

اگر فرض کنیم $t=\frac{x+۱}{x-۲}$، آن‌گاه

$tx-۲t=x+۱\Rightarrow (t-۱)x=۲t+۱\Rightarrow x=\frac{۲t+۱}{t-۱}$

در تساوی $(*)$ به جای x قرار می‌دهیم $\frac{۲t+۱}{t-۱}$ و نتیجه می‌شود

$$g(t)=\frac{۱}{\frac{۲t+۱}{t-۱}+۲}=\frac{t-۱}{۲t+۱+۲t-۲}=\frac{t-۱}{۴t-۱}\Rightarrow g(x)=\frac{x-۱}{۴x-۱}$$

۱۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(gof)(x)=x^{۲}+f(x)\Rightarrow g(f(x))=x^{۲}+f(x)$$

$$f^{۲}(x)-۳f(x)+۴=x^{۲}+f(x)$$

$$f^{۲}(x)-۴f(x)-x^{۲}+۴=۰\Rightarrow(f(x)-۲)^{۲}=x^{۲}$$

چون f تابعی چندجمله‌ای است، پس $f(x)-۲=-x$ یا $f(x)-۲=x$. پس

$$f(x)=-x+۲ \text{ یا } f(x)=x+۲$$

۱۷۶- گزینهٔ ۲ چون f خطی است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ است. پس

$$(fof)(x)=f(f(x))=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^{۲}x+ab+b$$

$$a^{۲}x+ab+b=۴x-۳\Rightarrow\begin{cases}a^{۲}=۴\\ ab+b=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲,b=۳\\ a=۲,b=-۱\end{cases}$$

بنابراین $f(x)=-۲x+۳$ یا $f(x)=۲x-۱$ که نتیجه می‌شود $f(۰)=۳$ یا $f(۰)=-۱$.

۱۷۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $((fof)og)(x)=f(f(g(x)))$.
از طرف دیگر، می‌توان نوشت $f(g(x))=f(|x|)=||x|+۲|-۴$. چون $|x|+۲>۰$، پس $f(g(x))=|x|+۲-۴=|x|-۲$ و

$$f(f(g(x)))=f(|x|-۲)=||x|-۲+۲|-۴=||x||-۴=|x|-۴$$

۱۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$۴x-x^{۲}\geq۰\Rightarrow x(۴-x)\geq۰\Rightarrow۰\leq x\leq۴\Rightarrow D_f=[۰,۴]$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq۴|۰\leq\sqrt{۴x-x^{۲}}-۱\leq۴\}$$

پس

$$۱\leq\sqrt{۴x-x^{۲}}\leq۵\Rightarrow۱\leq۴x-x^{۲}\leq۲۵\Rightarrow-۳\leq۴x-x^{۲}-۴\leq۲۱$$

$$-۳\leq-(x-۲)^{۲}\leq۲۱\Rightarrow-۲۱\leq(x-۲)^{۲}\leq۳\Rightarrow|x-۲|\leq\sqrt{۳}$$

$$-\sqrt{۳}\leq x-۲\leq\sqrt{۳}\Rightarrow۲-\sqrt{۳}\leq x\leq۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین $D_{fof}=\{۰\leq x\leq۴,۲-\sqrt{۳}\leq x\leq۲+\sqrt{۳}\}=[۲-\sqrt{۳},۲+\sqrt{۳}]$.

۱۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[k,+\infty)$ و $D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$.

بنابراین

$$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\neq۰|\frac{۱}{x}+۳\geq k\}$$

نامعادلهٔ $\frac{۱}{x}+۳\geq k$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x}+۳-k\geq۰\Rightarrow\frac{۱+(۳-k)x}{x}\geq۰$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق یا به‌صورت $(۰,\frac{۱}{k-۳}]$ یا به‌صورت $(-\infty,\frac{۱}{k-۳}]\cup(۰,+\infty)$ است. باتوجه به فرض مسئله

$$D_{fog}=(-\infty,-۱]\cup(۰,+\infty)$$

بنابراین

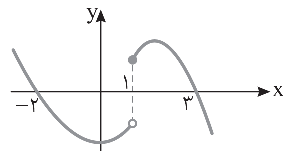
$$\frac{۱}{k-۳}=-۱\Rightarrow k-۳=-۱\Rightarrow k=۲$$

۱۸۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

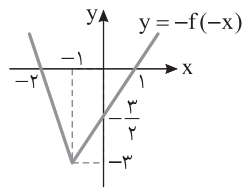
$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}g^{۲}(x)-۱ & g(x)<۰\\ ۳g(x)+۴ & ۰\leq g(x)<۲\\ ۵ & g(x)\geq۲\end{cases}$$

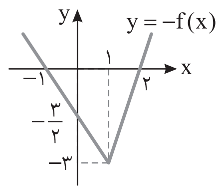
$$=\begin{cases}(x+۱)^{۲}-۱ & x+۱<۰\\ ۳(x+۱)+۴ & ۰\leq x+۱<۲\\ ۵ & x+۱\geq۲\end{cases}=\begin{cases}x^{۲}+۲x & x<-۱\\ ۳x+۷ & -۱\leq x<۱\\ ۵ & x\geq۱\end{cases}$$

۱۸۱- گزینهٔ ۱ برای رسم کردن نمودار تابع $-f$ باید قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم کنیم.

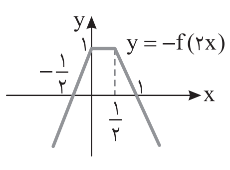


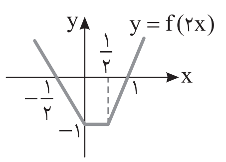
۱۸۲- گزینهٔ ۳ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(x)$ به‌دست بیاید. سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور y رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست بیاید.



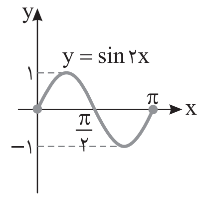


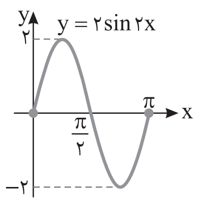
۱۸۳- گزینهٔ ۲ ابتدا طول نقاط روی نمودار f را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ به‌دست بیاید. اکنون قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۲x)$ به‌دست بیاید.

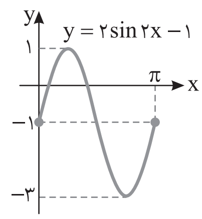


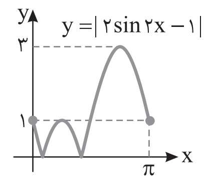


۱۸۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\sin ۲x$ را روی بازهٔ $[۰,\pi]$ رسم می‌کنیم. برای این کار، طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم. سپس عرض هر نقطه روی نمودار به‌دست آمده را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲\sin ۲x$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست بیاید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=۲\sin ۲x-۱$ روی بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌دست می‌آید. در آخر قرینهٔ قسمت‌هایی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.









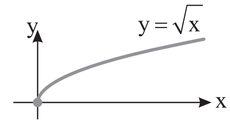
۱۸۵- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را a واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به‌دست می‌آید. چون نمودار اخیر از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس $g(0)=0$. در نتیجه

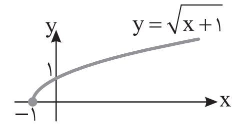
$$g(0)=f(-a)+a=0\Rightarrow a^2-7a+9+a=0$$

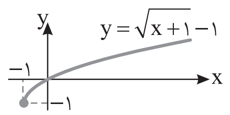
$$a^2-6a+9=0\Rightarrow (a-3)^2=0\Rightarrow a=3$$

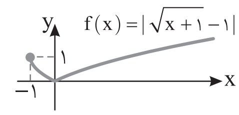
۱۸۶- گزینهٔ ۲ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x-1}{2})$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$ به‌دست می‌آید.

۱۸۷- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+1}$ به‌دست آید، سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+1}-1$ به‌دست آید. اکنون قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f رسم شود.

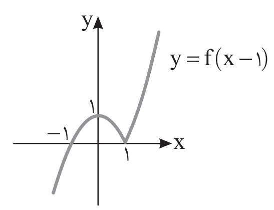


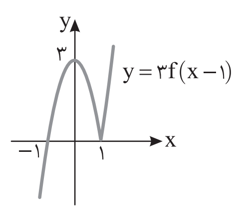






۱۸۸- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=3f(x-1)$ به‌دست بیاید.

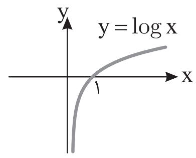


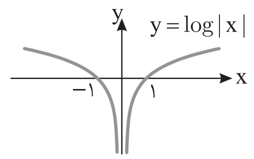


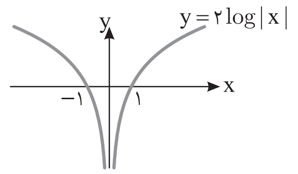
۱۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log x^2=\log|x|^2=2\log|x|$$

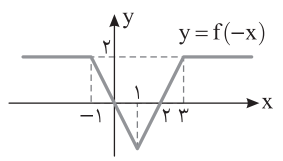
پس ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و قرینهٔ آن نسبت به محور عرض‌ها را به نمودار اضافه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log|x|$ به‌دست آید. اکنون عرض نقاط این نمودار را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2\log|x|$ به‌دست آید.

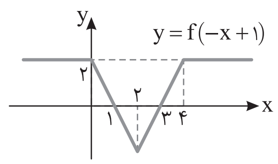




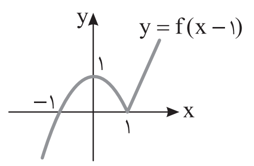


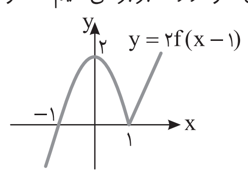
۱۹۰- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(-(x-1))=f(-x+1)$ به‌دست می‌آید.



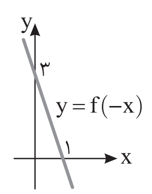


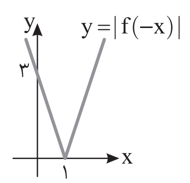
۱۹۱- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-1)$ به‌دست بیاید. سپس عرض هر نقطه روی این نمودار را ۲ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2f(x-1)$ به‌دست بیاید.

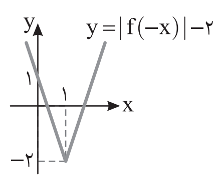




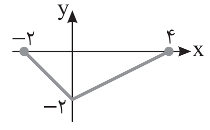
۱۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به محور y رسم می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، قرینهٔ قسمتی از نمودار تابع $y=f(-x)$ را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم. در آخر، نمودار تابع $y=|f(-x)|$ را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(-x)|-2$ به‌دست بیاید.



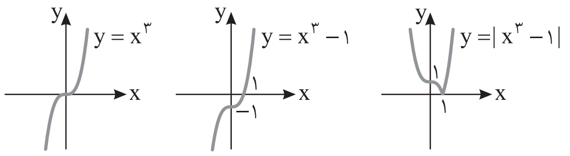




۱۹۳- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{2})$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم. همچنین باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم.



۱۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=x^۳$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=x^۳-۱$ به‌دست آید. اکنون قسمتی از این نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم، سپس قسمتی را که پایین محور طول‌ها است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x^۳-۱|$ به‌دست آید.



۱۹۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۱)+۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین باید جواب‌های معادلهٔ $f(x-۱)+۲=۰$ را به‌دست آوریم:

$$-(x-۱)^۲+(x-۱)-۲+۲=۰\Rightarrow -x^۲+۲x-۱+x-۱=۰$$

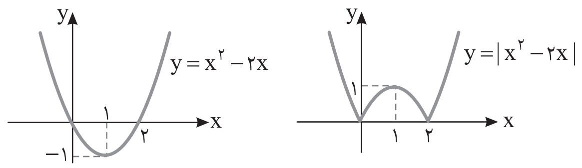
$$x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱, x=۲$$

۱۹۶- گزینهٔ ۱ اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را سه برابر کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲x)$ رسم می‌شود. اگر نمودار اخیر را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=۳f(۲(x+۲))$ رسم می‌شود. پس اکنون نمودار تابع $y=۳f(۲x+۴)$ به‌دست آمده است که اگر آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=۳f(-۲x+۴)$ به‌دست می‌آید.

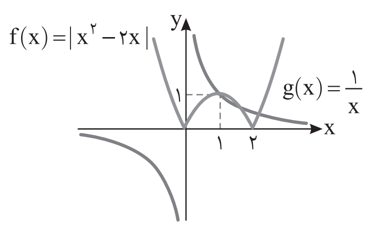
۱۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=|x||x-۲|=|x(x-۲)|=|x^۲-۲x|$$

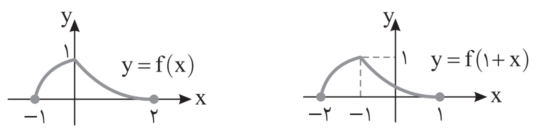
بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^۲-۲x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.

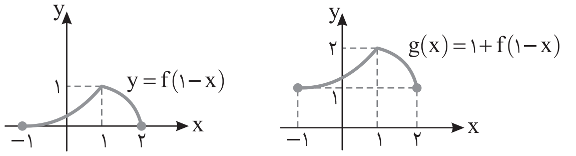


مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در سه نقطه متقاطع‌اند.

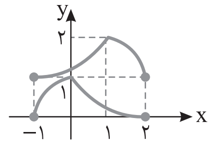


۱۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱+x)$ رسم شود. سپس نمودار این تابع را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(۱-x)$ رسم شود. در آخر نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $g(x)=۱+f(۱-x)$ رسم شود.

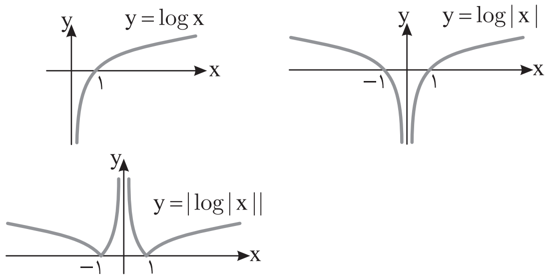




نمودار تابع‌های f و g را در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید که نقطهٔ مشترکی ندارند.



۱۹۹- گزینهٔ ۳ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم

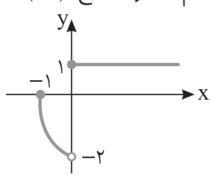


۲۰۰- گزینهٔ ۱ فرض کنید $h(x)=x-|x|$. در این صورت دامنهٔ تابع g با دامنهٔ تابع foh برابر است:

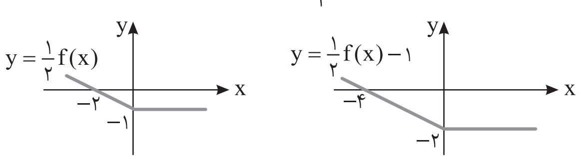
$$D_{foh}=\{x\in D_h \mid h(x)\in D_f\}=\{x \mid -۲\le x-|x|\le ۲\}=[-۱,+\infty)$$

اکنون توجه کنید که $x\ge ۰\Rightarrow g(x)=-f(۰)$, $x<۰\Rightarrow g(x)=-f(۲x)$

پس $g(x)=\begin{cases}۱ & x\ge ۰\\ -f(۲x) & -۱\le x<۰\end{cases}$. پس در بازهٔ $[۰,+\infty)$ باید نمودار تابع $y=۱$ را رسم کنیم و در بازهٔ $[-۱,۰)$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم تا نمودار تابع $y=-f(۲x)$ رسم شود.



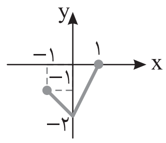
۲۰۱- گزینهٔ ۳ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $\frac{۱}{۲}f$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ به‌دست بیاید.



توجه کنید که اگر $x<۰$، نمودار f خطی است که از نقطه‌های $(۰,-۲)$ و $(-۲,۰)$ می‌گذرد، بنابراین اگر $x<۰$، ضابطهٔ f به صورت $f(x)=-x-۲$ است. در نتیجه اگر $x<۰$ و $\frac{۱}{۲}f(x)-۱=۰$، آن‌گاه $\frac{۱}{۲}(-x-۲)-۱=۰$، پس $x=-۴$. یعنی نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)-۱$ محور x را در نقطه‌ای به طول ۴- قطع می‌کند.

۲۰۲- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(-(x-۱))$ به‌دست می‌آید. پس نمودار نهایی نمودار تابع $y=f(-x+۱)$ است.

۲۰۳- گزینهٔ ۴ برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}f(۲x)$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم و عرض نقاط را در $-\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم.



بنابراین نمودار در راستای محور طول‌ها منقبض می‌شود و در راستای محور عرض‌ها علاوه‌بر اینکه منقبض می‌شود، نسبت به محور طول‌ها قرینه هم می‌شود.

۲۰۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر نمودار تابع f را a واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-a)$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را a واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=f(x-a)+a$ به‌دست می‌آید. این نمودار باید از مبدأ مختصات عبور کند، پس $g(۰)=۰$ و در نتیجه $f(-a)+a=۰$. اگر $f(x)=-x^۲+۳x-۲$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow -a^۲-۳a-۲+a=۰\Rightarrow a^۲+۲a+۲=۰$$

اگر $f(x)=x^۲+۱$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow a^۲+۱+a=۰\Rightarrow a^۲+a+۱=۰$$

اگر $f(x)=-x^۲-۱$، آن‌گاه

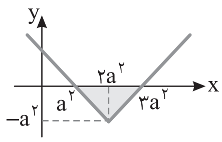
$$f(-a)+a=۰\Rightarrow -a^۲-۱+a=۰\Rightarrow a^۲-a+۱=۰$$

معادله‌های بالا جواب ندارند، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) جواب نیستند.
اگر $f(x)=x^۲+۵x+۴$، آن‌گاه

$$f(-a)+a=۰\Rightarrow a^۲-۵a+۴+a=۰\Rightarrow a^۲-۴a+۴=۰$$

$$(a-۲)^۲=۰\Rightarrow a=۲$$

۲۰۵- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را $۲a^۲$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-۲a^۲|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را $a^۲$ واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=|x-۲a^۲|-a^۲$ به‌دست می‌آید. با توجه به نمودار این تابع مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با $S=\frac{۱}{۲}a^۲(۲a^۲)=a^۴$. بنابراین $a^۴=۴$، پس $a=\pm\sqrt{۲}$.

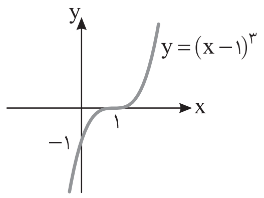


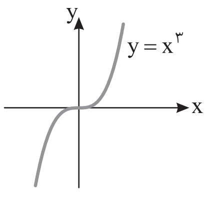
۲۰۶- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۱-۲)=f(x-۳)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(x-۳)-۱$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(x-۳)+۱$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x-۳)+۱$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر طول نقاط روی نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=-f(-۲x-۳)+۱$ به‌دست می‌آید.

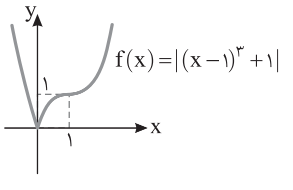
۲۰۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

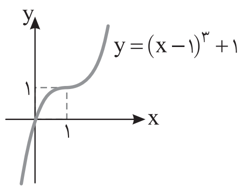
$$f(x)=|x^۳-۳x^۲+۳x|=|(x-۱)^۳+۱|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که زیر محور x است نسبت به این محور قرینه کنیم و در آخر قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.







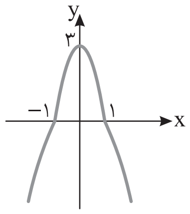


۲۰۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

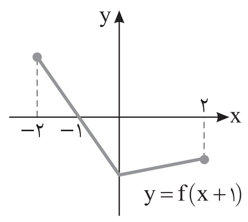
$$g(x)=-۲f(x)+|f(x)|=\begin{cases}-۲f(x)+f(x) & f(x)\geq ۰\\ -۲f(x)+(-f(x)) & f(x)<۰\end{cases}$$

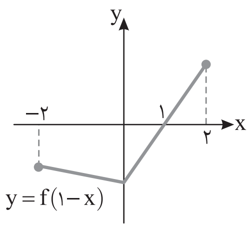
$$=\begin{cases}-f(x) & f(x)\geq ۰\\ -۳f(x) & f(x)<۰\end{cases}$$

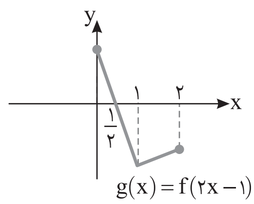
بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f منفی است، یعنی در بازهٔ $(-۱,۱)$، عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، در بقیهٔ جاها نمودار g قرینهٔ نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

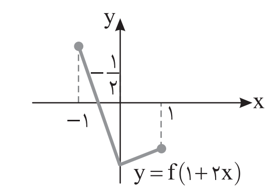


۲۰۹- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=f(۱-x)$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(۱+x)$ به‌دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=f(۱+۲x)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(۱+۲(x-۱))=f(۲x-۱)$ به‌دست می‌آید.

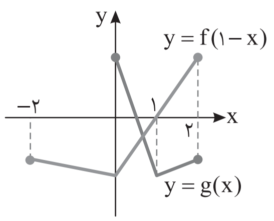








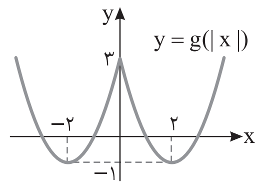
با توجه به شکل مقابل نمودار توابع $y=f(۱-x)$ و $y=g(x)$ یک نقطهٔ برخورد دارند.

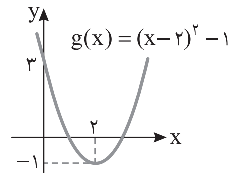


۲۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۴|x|+۳=|x|^۲-۴|x|+۳$$

پس اگر فرض کنیم $g(x)=x^۲-۴x+۳$، آن‌گاه $f(x)=g(|x|)$. به این ترتیب، کافی است نمودار $y=g(|x|)$ را رسم کنیم. برای این کار، ابتدا نمودار تابع g را رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از این نمودار را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

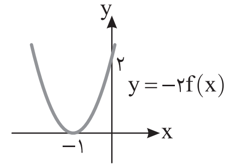


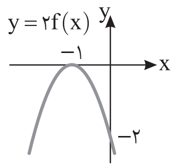


۲۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که همواره $f(x)\le ۰$. بنابراین

$$y=|f(x)|-f(x)=-f(x)-f(x)=-۲f(x)$$

برای رسم کردن نمودار $y=-۲f(x)$، ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۲f(x)$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-۲f(x)$ به‌دست بیاید.

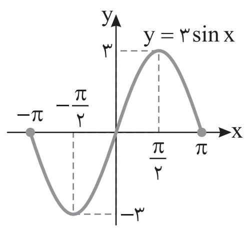


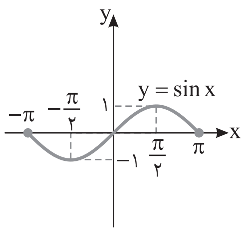


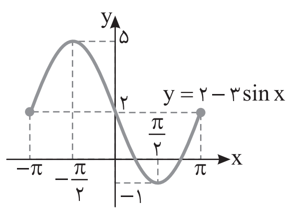
۲۱۲- گزینهٔ ۴ اگر طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f(\frac{x+۱}{۲})$ به‌دست می‌آید. پس نمودار مورد نظر متعلق به تابع $y=f(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲})$ است.

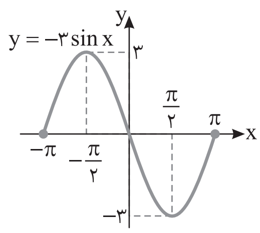
۲۱۳- گزینهٔ ۴ ابتدا عرض هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازه $[-\pi,\pi]$ را ۳ برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۳\sin x$ به‌دست بیاید.

سپس، قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور x رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-۳\sin x$ به‌دست بیاید. در آخر، نمودار تابع $y=-۳\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=۲-۳\sin x$ به‌دست بیاید.

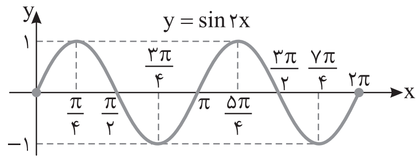


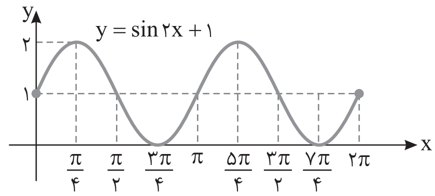






۲۱۴- گزینهٔ ۱ ابتدا طول هر نقطه روی نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۴\pi]$ را ضرب در $\frac{۱}{۲}$ می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\sin ۲x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌دست بیاید. سپس، این نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.





۲۱۵- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که a عددی مثبت است.

از طرف دیگر،

$$f(۰)=|a|-۲=a-۲,\quad f(a)=-۲$$

$$f(x)=۰\Rightarrow |x-a|-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x-a=۲\Rightarrow x=a+۲\\ x-a=-۲\Rightarrow x=a-۲\end{cases}$$

بنابراین با توجه به شکل زیر

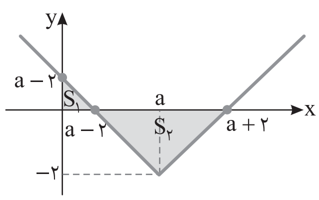
$$S_۱=\frac{(a-۲)^۲}{۲},\quad S_۲=\frac{۲(a+۲-(a-۲))}{۲}=۴$$

$$S_۱+S_۲=\frac{۹}{۲}\Rightarrow\frac{(a-۲)^۲}{۲}+۴=\frac{۹}{۲}\Rightarrow a^۲-۴a+۴+۸=۹$$

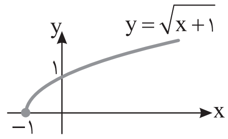
$$a^۲-۴a+۳=۰\Rightarrow(a-۳)(a-۱)=۰\Rightarrow a=۳,\ a=۱\ (\text{غ.ق.ق.})$$

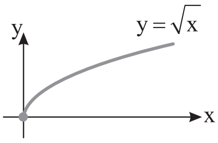
اگر $a=۱$، آن‌گاه $f(x)=|x-۱|-۲$ و در نتیجه $f(۰)=-۱$ ولی در نمودار رسم شده مقدار $f(۰)$ عددی مثبت است. پس $a=۱$ قابل قبول نیست. در نتیجه

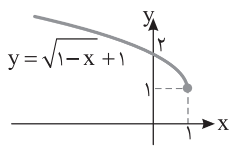
$$f(x)=|x-۳|-۲\Rightarrow f(\frac{۱}{a})=f(\frac{۱}{۳})=|\frac{۱}{۳}-۳|-۲=\frac{۲}{۳}$$

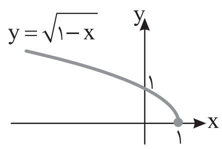


۲۱۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را به شکل زیر رسم می‌کنیم. بنابراین اگر نمودار نهایی را دو واحد به پایین ببریم، هر دو محور مختصات را قطع می‌کند.

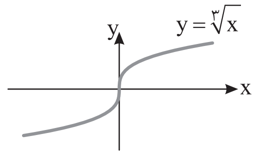


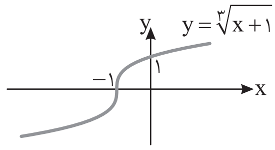


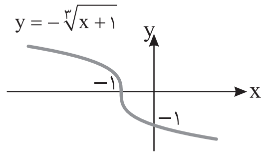




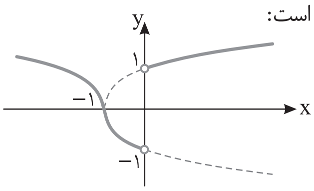
۲۱۷- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x+۱} & x>۰\\ -\sqrt[۳]{x+۱} & x<۰\end{cases}$ است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y=\sqrt[۳]{x+۱}$ و $y=-\sqrt[۳]{x+۱}$ به‌صورت زیر است:







بنابراین نمودار تابع f به شکل زیر است:



۲۱۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید $h(x)=x+|x|$. در این صورت دامنهٔ تابع g با دامنهٔ تابع foh برابر است:

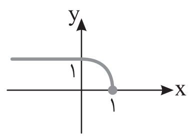
$$D_{foh}=\{x\in D_h\,|\,h(x)\in D_f\}=\{x|-۲\le x+|x|\le ۲\}=(-\infty,۱]$$

اکنون توجه کنید که

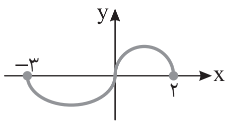
$$x\le ۰\Rightarrow g(x)=-f(x-x)=-f(۰)=۱$$

$$۰<x\le ۱\Rightarrow g(x)=-f(x+x)=-f(۲x)$$

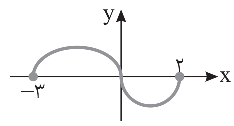
پس $g(x)=\begin{cases}۱ & x\le ۰\\ -f(۲x) & ۰<x\le ۱\end{cases}$. پس در بازهٔ $(-\infty,۰]$ باید نمودار تابع $y=۱$ را رسم کنیم و در بازهٔ $[۰,۱)$ باید ابتدا طول نقاط نمودار تابع f واقع در بازهٔ $[۰,۲)$ را نصف کنیم تا نمودار تابع $y=f(۲x)$ رسم شود و سپس نمودار این قسمت را نسبت به محور x قرینه کنیم.



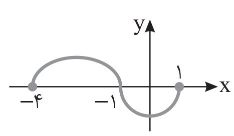
۲۱۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f(-x)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=-f(-(x+۱))$ به‌دست می‌آید، که همان نمودار شکل (۲) است.



$y=f(-x)$



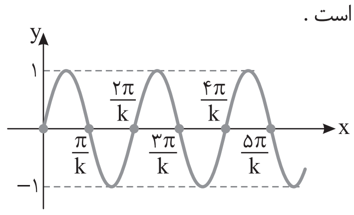
$y=-f(-x)$



$y=-f(-x-۱)$

راه‌حل دوم در شکل (۲)، نقطهٔ $(-۴,۰)$ روی نمودار تابع است. در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) به‌ازای $x=-۴$ مقادیر $f(۵)$ و $f(-۵)$ ظاهر می‌شوند اما با توجه به شکل (۱)، عددهای ۵ و ۵− در دامنهٔ تابع f نیستند، پس این سه گزینه رد می‌شوند.

۲۲۰- گزینهٔ ۳ مطابق شکل باید $\frac{۴\pi}{k}\le\frac{\pi}{۲}<\frac{۵\pi}{k}$ تا نمودار تابع پنج بار محور طول‌ها را روی بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ قطع کند. بنابراین $۸\le k<۱۰$، پس حداقل مقدار k برابر ۸ است.



۲۲۱- گزینهٔ ۳ چون مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(۹,۱)$ و $(a^۲,۱)$ مساوی هستند، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم مساوی باشند:

$$a^۲=۹\Rightarrow a=\pm ۳$$

به همین ترتیب باید مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های $(۶,۲)$ و $(۳a+b,۲)$ نیز مساوی باشند، پس $۳a+b=۶$، بنابراین $b=۶-۳a$.

اگر $a=۳$، آن‌گاه $b=-۳$ و تابع به‌صورت زیر است:

$$f=\{(۹,۱),(۶,۲),(۳,۹)\}$$

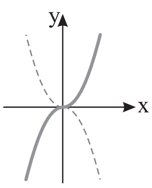
اگر $a=-۳$، آن‌گاه $b=۱۵$ و تابع به‌صورت زیر است:

$$f=\{(۹,۱),(۶,۲),(-۳,-۴۵)\}$$

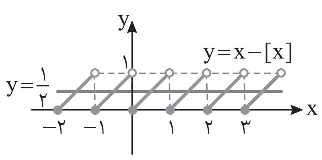
پس $a-b=۶$ یا $a-b=-۱۸$.

۲۲۲- گزینهٔ ۳ توابع $y=x^۲$، $y=|x|$ و $y=[x]$ یک‌به‌یک نیستند، چون خطی موازی محور طول‌ها وجود دارد که نمودار آن‌ها را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. ولی نمودار تابع $y=x|x|$ به‌صورت زیر است و هر خط موازی محور طول‌ها آن را در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است.

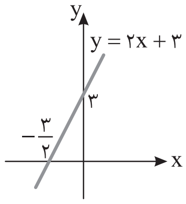
$$y=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x\le ۰\end{cases}$$

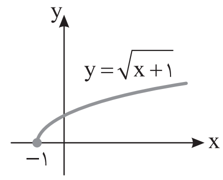


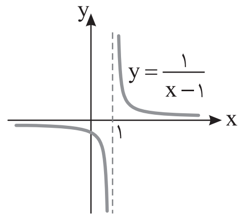
۲۲۳- گزینهٔ ۴ توابع $y=\sqrt{x+۱}$، $y=۲x+۳$ و $y=\frac{۱}{x-۱}$ یک‌به‌یک هستند چون هر خط موازی محور طول‌ها نمودار آن‌ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. تابع $y=x-[x]$ یک‌به‌یک نیست. چون مثلاً خط $y=\frac{۱}{۲}$ نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



نمودار سایر توابع به‌صورت زیر است:





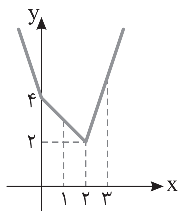


۲۲۴- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=x^{۳}-\sqrt{x}$ یک‌به‌یک نیست. زیرا

$$f(۰)=f(۱)=۰$$

۲۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۴ & x\geq ۲ \\ -x+۴ & ۰\leq x\leq ۲ \\ -۳x+۴ & x\leq ۰ \end{cases}$$

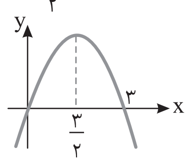


بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. این تابع روی بازه‌های $(-\infty,۲]$ و $[۲,+\infty)$ و $[۰,۲]$ یک‌به‌یک است ولی روی بازهٔ $[۱,۳]$ یک‌به‌یک نیست.

۲۲۶- گزینهٔ ۱ شرط یک‌به‌یک نبودن این تابع $-۲a-۳=۰$ است. پس $a=-\frac{۳}{۲}$. توجه کنید که در این صورت تابع f با یک تابع ثابت برابر است

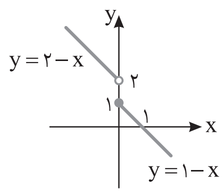
$$f(x)=\frac{ax+۳}{x-۲}=\frac{-\frac{۳}{۲}x+۳}{x-۲}=\frac{-۳x+۶}{۲x-۴}=\frac{-۳(x-۲)}{۲(x-۲)}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(۳)=-\frac{۳}{۲}$$

۲۲۷- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. از روی شکل معلوم است که تابع روی بازهٔ $(-\infty,\frac{۳}{۲}]$ یک‌به‌یک است. اما اگر $a>\frac{۳}{۲}$، خطی موازی با محور طول‌ها وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

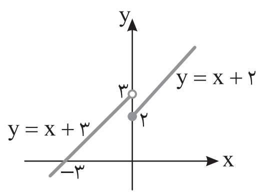


بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

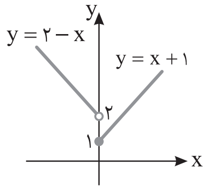
۲۲۸- گزینهٔ ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به‌صورت روبه‌رو است. هر خط موازی محور طول‌ها نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. پس این تابع یک‌به‌یک است. نمودار تابع‌های سایر گزینه‌ها به‌صورت زیر است:



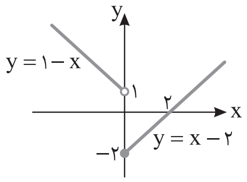
گزینهٔ (۱)



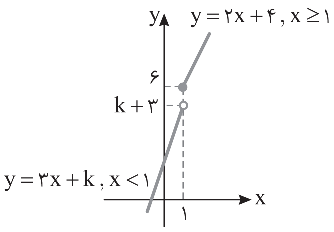
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



۲۲۹- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول نمودار تابع f به‌صورت زیر است. مطابق شکل واضح است که با شرط $k+۳\leq ۶$ تابع f یک‌به‌یک است. پس $k\leq ۳$.



راه‌حل دوم اگر $x\geq ۱$، آن‌گاه تابع $g(x)=۲x+۴$ یک‌به‌یک است. همچنین اگر $x<۱$، تابع $h(x)=۳x+k$ یک‌به‌یک است. از طرف دیگر

$$x\geq ۱\Rightarrow ۲x\geq ۲\Rightarrow ۲x+۴\geq ۶\Rightarrow g(x)\geq ۶\Rightarrow R_g=[۶,+\infty)$$

$$x<۱\Rightarrow ۳x<۳\Rightarrow ۳x+k<k+۳\Rightarrow h(x)<k+۳\Rightarrow R_h=(-\infty,k+۳)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک باشد، باید

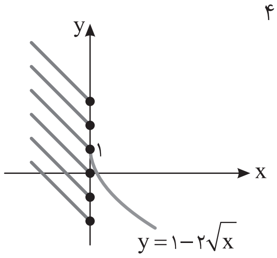
$$R_g\cap R_h=\varnothing\Rightarrow [۶,+\infty)\cap(-\infty,k+۳)=\varnothing\Rightarrow k+۳\leq ۶\Rightarrow k\leq ۳$$

پس حداکثر مقدار ممکن k برابر ۳ است.

۲۳۰- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول نمودار تابع f به‌ازای مقدارهای مختلف k به شکل زیر است. برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، باید کمترین مقدار عبارت $۴k-x$ به‌ازای $x\leq ۰$ از ۱ کمتر نباشد:

$$x\leq ۰\Rightarrow -x\geq ۰\Rightarrow ۴k-x\geq ۴k$$

یعنی $۴k\geq ۱$، پس $k\geq\frac{۱}{۴}$.



راه‌حل دوم اگر $x>۰$، آن‌گاه تابع $g(x)=۱-۲\sqrt{x}$ یک‌به‌یک است و اگر $x\leq ۰$، آن‌گاه تابع $h(x)=۴k-x$ یک‌به‌یک است و

$$x>۰\Rightarrow\sqrt{x}>۰\Rightarrow -۲\sqrt{x}<۰\Rightarrow ۱-۲\sqrt{x}<۱\Rightarrow R_g=(-\infty,۱)$$

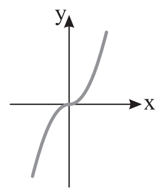
$$x\leq ۰\Rightarrow -x\geq ۰\Rightarrow ۴k-x\geq ۴k\Rightarrow R_h=[۴k,+\infty)$$

برای اینکه تابع f یک‌به‌یک شود، باید $R_g\cap R_h=\varnothing$. پس

$$۴k\geq ۱\Rightarrow k\geq\frac{۱}{۴}$$

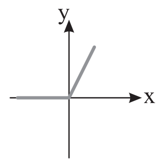
۲۳۱- گزینهٔ ۳ در گزینـهٔ (۱)، $f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$. پـس تابـع یک‌به‌یـک نیسـت. در گزینهٔ (۲)، $x\neq ۰$ ، $f(x)=|x|$. پـس تابع یک‌به‌یک نیسـت. در گزینـهٔ (۴) مثـلاً $f(۱)=f(-۱)$ پـس تابع یک‌به‌یک نیسـت. در گزینهٔ (۳) نمودار تابع به‌صورت زیر است و تابع یک‌به‌یک است.

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$$

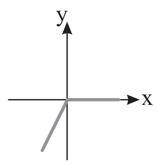


۲۳۲- گزینهٔ ۳ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

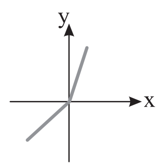
گزینهٔ (۱): $f(x)=x+|x|=\begin{cases} ۰ & x<۰ \\ ۲x & x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



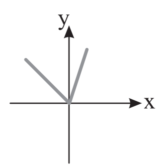
گزینهٔ (۲): $f(x)=x-|x|=\begin{cases} ۲x & x<۰ \\ ۰ & x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



گزینهٔ (۳): $f(x)=۲x+|x|=\begin{cases} x & x<۰ \\ ۳x & x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک است



گزینهٔ (۴): $f(x)=x+۲|x|=\begin{cases} -x & x<۰ \\ ۳x & x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست



۲۳۳- گزینهٔ ۱ در تابع گزینهٔ (۲)، $f(۰)=f(۱)=f(-۱)=۰$.

در تابع گزینهٔ (۳)، اگر $x\leq ۰$، آن‌گاه $f(x)=۰$.

در تابع گزینهٔ (۴)، $f(۰)=f(۲)=۰$.

بنابرایـن گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) رد می‌شـوند. توجه کنید که می‌توانید ثابت کنید تابع گزینهٔ (۱) یـک‌به‌یک است. اگر $(x_۱,f(x_۱))$ و $(x_۲,f(x_۲))$ دو زوج مرتب از تابع f باشند که $f(x_۱)=f(x_۲)$، آن‌گاه

$$x_۱^۳+x_۱+۱=x_۲^۳+x_۲+۱\Rightarrow x_۱^۳-x_۲^۳+x_۱-x_۲=۰$$

$$(x_۱-x_۲)(x_۱^۲+x_۱x_۲+x_۲^۲)+(x_۱-x_۲)=۰$$

$$(x_۱-x_۲)(\underbrace{x_۱^۲+x_۱x_۲+x_۲^۲+۱}_{A})=۰ \qquad (۱)$$

اکنون توجه کنید که $A=(x_۱+\frac{۱}{۲}x_۲)^۲+\frac{۳}{۴}x_۲^۲+۱>۰$

بنابرایـن از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شـود $x_۱-x_۲=۰$، پـس $x_۱=x_۲$ و تابع f یک‌به‌یک است.

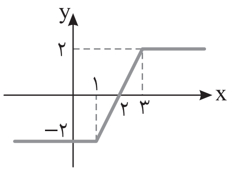
۲۳۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x\geq ۳\Rightarrow f(x)=x-۱-x+۳=۲$$

$$۱\leq x\leq ۳\Rightarrow f(x)=x-۱+x-۳=۲x-۴$$

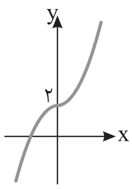
$$x\leq ۱\Rightarrow f(x)=-x+۱+x-۳=-۲$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر اسـت و این تابع روی بازهٔ $[۱,۳]$ یک‌به‌یک اسـت. توجه کنیـد کـه تابـع f روی هـر بـازهٔ $[c,d]$ کـه $c\geq ۱$ و $d\leq ۳$ نیز یک‌به‌یک است. پس حداکثر مقدار ممکن برای b برابر ۳ و حداقل مقدار ممکن برای a برابر ۱ است و در نتیجه حداکثر مقدار ممکن برای $b-a$ برابر ۲ است.



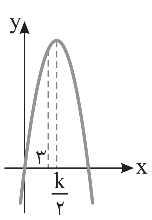
۲۳۵- گزینهٔ ۳ تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شـرط $ad-bc\neq ۰$ یک‌به‌یک اسـت و اگر $ad-bc=۰$، آن‌گاه تابع f برابر یک تابع ثابت است که یک‌به‌یک نیسـت. پس اگر $k^۳-۴k=۰$، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک نیست. از معادلهٔ اخیر به‌دسـت می‌آیـد $k=۰$ و $k=\pm ۲$. پـس به‌ازای سـه مقدار مختلـف k تابع f یک‌به‌یک نیست.

۲۳۶- گزینهٔ ۲ نمـودار تابـع $f(x)=\begin{cases} ۲-x^۲ & x<۰ \\ x^۲+۲ & x\geq ۰ \end{cases}$ بـه شـکل زیر اسـت. واضح اسـت که تابـع یک‌به‌یک اسـت. بقیهٔ گزینه‌هـا را می‌توانیـد با رسـم نمودار یـا آوردن مثال نقض، رد کنید.



۲۳۷- گزینهٔ ۳ نمـودار تابـع $y=-x^۲+kx$ به شـکل مقابل اسـت. اگر $x=۳$ قبـل از طول رأس سـهمی قـرار گیرد یا بر آن منطبق شـود، تابـع در بازهٔ $(-\infty,۳]$ یک‌به‌یک است. بنابراین

$$۳\leq \frac{k}{۲}\Rightarrow k\geq ۶$$



۲۳۸- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که اگر $f(x_1)=f(x_2)$، آن‌گاه

$$x_1-k\sqrt{x_1}=x_2-k\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1-x_2-k(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})=0$$

$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})-k(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})=0$$

$$(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-k)=0$$

اگر $k<0$، آن‌گاه $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-k\neq 0$ و در نتیجه

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0\Rightarrow x_1=x_2$$

پس تابع یک‌به‌یک است.

به‌ازای $k=0$ هم تابع به‌صورت $f(x)=x$ است و یک‌به‌یک است. اما اگر $k>0$، آن‌گاه از $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-k=0$ می‌توان مقدار x_1 را برحسب x_2 به‌دست آورد و از $f(x_1)=f(x_2)$ لزوماً $x_1=x_2$ نتیجه نمی‌شود. پس در این حالت تابع یک‌به‌یک نیست.

راه‌حل دوم (این راه‌حل پس از مطالعهٔ فصل کاربرد مشتق قابل استفاده است.) تابع f روی بازهٔ $[0,+\infty)$ پیوسته است. پس در صورتی که یک‌به‌یک باشد، اکیداً یکنواست. اکنون توجه کنید که $f'(x)=1-\frac{k}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-k}{2\sqrt{x}}$.

اگر $k\le 0$، آن‌گاه $f'(x)>0$ و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است و یک‌به‌یک است. اگر $k>0$، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $[0,\frac{k^2}{4}]$ اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[\frac{k^2}{4},+\infty)$ اکیداً صعودی است، پس روی بازهٔ $[0,+\infty)$ غیریکنواست.

۲۳۹- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $f(x^3+3)=f(x^2+1)$ می‌نویسیم. چون f تابعی یک‌به‌یک است، پس

$$x^3+3=x^2+1\Rightarrow x^3-x^2+2=0$$

واضح است که $x=-1$ یکی از جواب‌های معادله است، به کمک تقسیم عبارت x^3-x^2+2 را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-x^2+2=(x+1)(x^2-2x+2)=0$$

معادلهٔ $x^2-2x+2=0$ جواب ندارد. پس $x=-1$ تنها جواب معادله است.

۲۴۰- گزینهٔ ۲ تابع $g(x)=f(|x|)$ قطعاً یک‌به‌یک نیست، زیرا

$$x=a\Rightarrow g(a)=f(|a|),\quad x=-a\Rightarrow g(-a)=f(|-a|)=f(|a|)$$

بنابراین $g(-a)=g(a)$ و در نتیجه این تابع یک‌به‌یک نیست.

۲۴۱- گزینهٔ ۲ تابع گزینهٔ (۱) صعودی نیست، زیرا $1<2$، اما $f(1)>f(2)$.

تابع گزینهٔ (۲) صعودی است، زیرا $2<4<5$ و $f(2)=f(4)<f(5)$.

تابع گزینهٔ (۳) صعودی نیست، زیرا $2<3$، اما $f(2)>f(3)$.

تابع گزینهٔ (۴) هم صعودی نیست، زیرا $-3<-2$، اما $f(-3)>f(-2)$.

۲۴۲- گزینهٔ ۲ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$1<2<3\Rightarrow f(1)<f(2)<f(3)\Rightarrow a^2-1<a+1<3a-1$$

$$a^2-1<a+1\Rightarrow (a+1)(a-2)<0\Rightarrow -1<a<2\qquad (1)$$

$$a+1<3a-1\Rightarrow a>1\qquad (2)$$

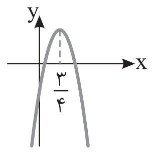
اشتراک جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) می‌شود $1<a<2$.

۲۴۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل سؤال تابع f روی بازهٔ $[-2,3]$ و هر بازهٔ $[a,b]$ که $-2\le a<b\le 3$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۵ است.

۲۴۴- گزینهٔ ۱ در تابع نمایی $y=a^x$ اگر $a>1$، آن‌گاه تابع صعودی است. بنابراین

$$k^2-3>1\Rightarrow k^2>4\Rightarrow |k|>2$$

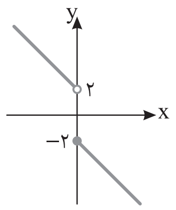
۲۴۵- گزینهٔ ۱ طول رأس سهمی به معادلهٔ $f(x)=-4x^2+6x-1$ برابر است با $-\frac{b}{2a}=\frac{3}{4}$.



از روی نمودار این سهمی معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(\frac{3}{4},+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۲۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع گزینهٔ (۴) به‌صورت زیر است و این تابع نزولی است.

$$f(x)=\begin{cases}-x-2 & x\ge 0\\ -x+2 & x<0\end{cases}$$



با رسم نمودار توابع گزینه‌های دیگر می‌توانید نزولی بودن آن‌ها را رد کنید.

۲۴۷- گزینهٔ ۱ شرط صعودی بودن تابع f آن است که همهٔ مقادیر تابع $y_2=2x+1$ کوچک‌تر از یا مساوی با کمترین مقدار تابع $y_1=x+a$ باشد:

$$\begin{cases}x\ge 1\Rightarrow x+a\ge 1+a\Rightarrow y_1\ge 1+a\\ x<1\Rightarrow 2x+1<3\Rightarrow y_2<3\end{cases}$$

بنابراین $3\le 1+a$. پس $a\ge 2$.

۲۴۸- گزینهٔ ۲ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود

$$2m-1\ge m+1\Rightarrow m\ge 2$$

۲۴۹- گزینهٔ ۲ برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $f(x)\ge 0$ را حل کنیم. چون $f(0)=0$ و اگر $x<0$، آن‌گاه $f(x)<f(0)$، پس باید نامعادلهٔ $f(x)\ge f(0)$ را حل کنیم که با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می‌شود $x\ge 0$. پس $D_g=[0,+\infty)$.

۲۵۰- گزینهٔ ۱ مجموع دو تابع صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$، تابعی صعودی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. بنابراین مجموع دو تابع $f+g$ و $f-g$، یعنی تابع $2f$ صعودی است، پس تابع f نیز صعودی است.

۲۵۱- گزینهٔ ۴ تابع f اکیداً صعودی، تابع g اکیداً نزولی، تابع h ثابت (هم صعودی و هم نزولی) و تابع k غیریکنواست.

۲۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$-2<0<1\Rightarrow 4x\le x^2+3\le 7x-x^2$$

$$4x\le x^2+3\Rightarrow x^2-4x+3\ge 0\Rightarrow x\le 1 \text{ یا } x\ge 3\qquad (1)$$

$$x^2+3\le 7x-x^2\Rightarrow 2x^2-7x+3\le 0$$

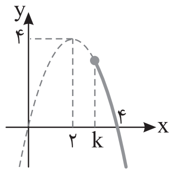
$$(2x-1)(x-3)\le 0\Rightarrow \frac{1}{2}\le x\le 3\qquad (2)$$

با توجه به شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود اگر $x=3$ یا $\frac{1}{2}\le x\le 1$، آن‌گاه تابع f صعودی است. پس به‌ازای مقادیر صحیح ۳ و ۱ تابع f صعودی است.

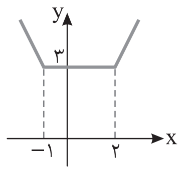
۲۵۳- گزینهٔ ۳ تابع $-f$ روی بازه‌هایی اکیداً صعودی است که تابع f روی آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع f روی بازهٔ $[-3,1]$ اکیداً نزولی است، بنابراین تابع $-f$ روی این بازه اکیداً صعودی است.

۲۵۴- گزینهٔ ۳ باید مبنای لگاریتم بین صفر و ۱ باشد. پس
$$0<k-1<1 \Rightarrow 1<k<2$$

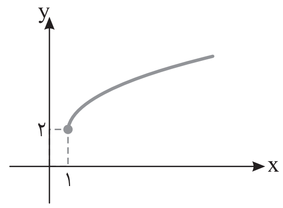
۲۵۵- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به شکل مقابل است. برای اینکه تابع نزولی باشد، باید دامنهٔ آن زیرمجموعهٔ بازهٔ $[2,+\infty)$ باشد، بنابراین $k\geq 2$.



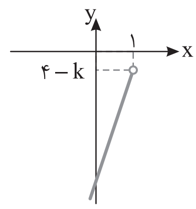
۲۵۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. چون تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ هم صعودی است هم نزولی، پس روی این بازه تابعی ثابت است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[-1,2]$ تابعی ثابت است، همین‌طور روی هر بازه‌ای مانند $[a,b]$ که $-1\leq a<b\leq 2$. بنابراین بیشترین مقدار ممکن $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=-1$ و $b=2$، که در این صورت $b-a=3$.



۲۵۷- گزینهٔ ۳ توابع $y=\sqrt{x-1}+2$ و $y=4x-k$ صعودی هستند.



$y=\sqrt{x-1}+2$



$y=4x-k, x<1$

مطابق شکل‌های بالا کافی است $4-k$ بیشتر از ۲ نباشد تا تابع f صعودی باشد. پس $4-k\leq 2$، در نتیجه $k\geq 2$.

۲۵۸- گزینهٔ ۳ با توجه به تعریف تابع اکیداً نزولی،
$$a^2-3<2a \Rightarrow a^2-2a-3<0 \Rightarrow (a+1)(a-3)<0 \Rightarrow -1<a<3$$

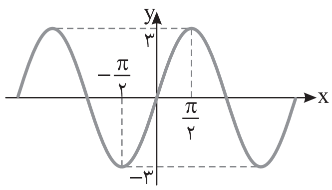
۲۵۹- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g از حل نامعادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:
$$f(x-2)-2\geq 0 \Rightarrow f(x-2)\geq 2 \Rightarrow f(x-2)\geq f(1)$$
با توجه به اکیداً نزولی بودن تابع f نتیجه می‌شود
$$x-2\leq 1 \Rightarrow x\leq 3$$
بنابراین $D_g=(-\infty,3]$.

۲۶۰- گزینهٔ ۲ توابع $y=x$ و $y=f(x)$ صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها صعودی است. یعنی تابع $y=x+f(x)$ صعودی است.

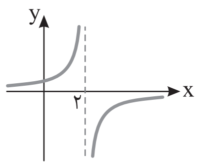
۲۶۱- گزینهٔ ۳ از تعریف تابع صعودی نتیجه می‌شود
$$1<2<3 \Rightarrow f(1)\leq f(2)\leq f(3) \Rightarrow m-1\leq 2m\leq m+3$$
$$m-1\leq 2m \Rightarrow m\geq -1,\quad 2m\leq m+3 \Rightarrow m\leq 3$$
بنابراین $-1\leq m\leq 3$ و در نتیجه m می‌تواند پنج مقدار صحیح ۳، ۲، ۱، ۰ و ۱− را داشته باشد.

۲۶۲- گزینهٔ ۴ تابعی که هم صعودی است و هم نزولی، تابعی ثابت است. پس f تابع ثابت است. بنابراین
$$f(1)=f(2)=f(3),\quad a-2=3a+6=4a-b,\quad a=-4,\quad b=-10$$
در نتیجه $a+b=-14$.

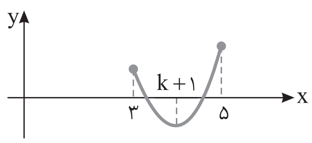
۲۶۳- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم و عرض هر نقطهٔ آن را سه برابر کنیم، نمودار تابع $f(x)=3\sin x$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است. واضح است که تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ و هر بازهٔ دیگر به‌صورت $[-\frac{\pi}{2},a]$ که $-\frac{\pi}{2}\leq a\leq\frac{\pi}{2}$ صعودی است. پس حداکثر مقدار a برابر $\frac{\pi}{2}$ است.



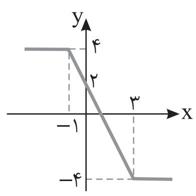
۲۶۴- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\frac{1}{-x}$ را دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\frac{1}{-(x-2)}=\frac{1}{-x+2}$ به‌دست بیاید. اکنون از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,2)$ و هر بازهٔ دیگری مانند $(-\infty,a)$ که $a\leq 2$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۲ است.



۲۶۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع باید به شکل زیر باشد، یعنی اگر طول رأس سهمی که $x=k+1$ است، در بازهٔ $(3,5)$ باشد، آن‌گاه تابع غیریکنوا می‌شود. پس
$$3<k+1<5 \Rightarrow 2<k<4$$



۲۶۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به صورت زیر است. از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $[-1,3]$ و هر بازه‌ای به صورت $[a,b]$ که $-1\leq a<b\leq 3$ اکیداً نزولی است. بنابراین، بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به دست می‌آید که $a=-1$ و $b=3$، که در این صورت $b-a=4$.



۲۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که
$$f(x)=kx+|x-1|=\begin{cases}(k+1)x-1 & x\geq 1\\ (k-1)x+1 & x<1\end{cases}$$
برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید هر دو خط موجود در ضابطهٔ تابع صعودی باشند، یعنی شیب نامنفی داشته باشند. پس
$$\begin{cases}k+1\geq 0\\ k-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow k\geq 1$$

۲۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f اکیداً صعودی است، پس

$x>۶\Rightarrow f(x)>f(۶)\Rightarrow f(x)>۰$

$x<۶\Rightarrow f(x)<f(۶)\Rightarrow f(x)<۰$

برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $\frac{۴-x^۲}{f(x)}\ge۰$ را حل کنیم. با توجه به جدول تعیین علامت زیر، جواب نامعادله به‌صورت زیر است:

$x\in(-\infty,-۲]\cup[۲,۶)$

بنابراین در دامنهٔ تابع g چهار عدد طبیعی قرار دارد.

x	$-\infty$		-۲		۲		۶		$+\infty$
$۴-x^۲$		$-$	۰	$+$	۰	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
$\frac{۴-x^۲}{f(x)}$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	ت ن	$-$	

۲۶۹- گزینهٔ ۲ تابع $y=\sqrt{x}$ صعودی است، پس تابع $y=\sqrt{x}+۱$ نیز صعودی است. همچنین مقادیر تابع $y=\sqrt{x}+۱$ همواره مثبت هستند. بنابراین تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}$ نزولی است.

۲۷۰- گزینهٔ ۳ تابع‌های $y=x$ و $y=x^۳$ صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها یعنی $y=x^۳+x$ صعودی است. توابع سه گزینهٔ دیگر غیریکنوا هستند.

۲۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا از تساوی $(f^{-۱}og^{-۱})(a)=-۱$ مقدار a را پیدا می‌کنیم:

$f^{-۱}(g^{-۱}(a))=-۱\Rightarrow f(-۱)=g^{-۱}(a)$

$۴=g^{-۱}(a)\Rightarrow g(۴)=a\Rightarrow a=-۲$

بنابراین مقدار $f^{-۱}(-۲)$ را می‌خواهیم که با توجه به تساوی $f(۳)=-۲$ نتیجه می‌گیریم $f^{-۱}(-۲)=۳$.

۲۷۲- گزینهٔ ۴ تابع $f^{-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$f^{-۱}=\{(۲,-۱),(۵,۳),(۳,-۲),(-۱,۵)\}$

در نتیجه $gof^{-۱}=\{(۲,۴),(۵,۰)\}$.

۲۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $g(۳)=۲$، پس $g^{-۱}(۲)=۳$. بنابراین

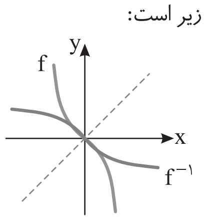
$f^{-۱}(a)+g^{-۱}(۲)=۶\Rightarrow f^{-۱}(a)+۳=۶$

$f^{-۱}(a)=۳\Rightarrow f(۳)=a\Rightarrow a=۲$

در نتیجه $g(a)=g(۲)=۴$.

۲۷۴- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۹,۱۱)$ عبور می‌کند، نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۱۱,۹)$ عبور می‌کند.

۲۷۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f^{-۱}$ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که به شکل زیر است:



۲۷۶- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ همان برد تابع f است. پس برد تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$f(x)=(x+۱)^۲-۱$

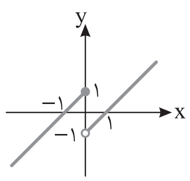
$-۱\le x\le۲\Rightarrow۰\le x+۱\le۳$

$۰\le(x+۱)^۲\le۹\Rightarrow-۱\le(x+۱)^۲-۱\le۸\Rightarrow-۱\le f(x)\le۸$

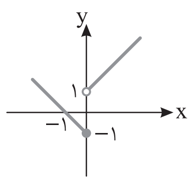
بنابراین $D_{f^{-۱}}=R_f=[-۱,۸]$.

۲۷۷- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌ها به شکل زیر است:

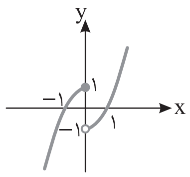
گزینهٔ (۱)



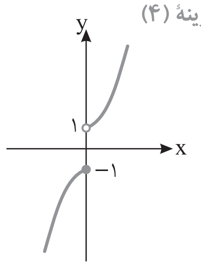
گزینهٔ (۲)



گزینهٔ (۳)



گزینهٔ (۴)



با توجه به نمودارها واضح است که تابع گزینهٔ (۴) وارون‌پذیر است.

۲۷۸- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم نمودار تابع $f^{-۱}$ به‌دست می‌آید. بنابراین باید تابع وارون تابع $f(x)=۳x-۴$ را به‌دست آوریم.

$$y=۳x-۴\Rightarrow y+۴=۳x\Rightarrow x=\frac{y+۴}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ خط جدید $y=\frac{x+۴}{۳}$ است.

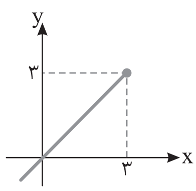
۲۷۹- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول از تساوی $y=\sqrt{x-۱}+۲$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$y-۲=\sqrt{x-۱}\Rightarrow(y-۲)^۲=x-۱\Rightarrow x=(y-۲)^۲+۱\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵$

بنابراین $f^{-۱}(x)=x^۲-۴x+۵$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۱)=۲$، پس $f^{-۱}(۲)=۱$ که فقط در تابع گزینهٔ (۳) صدق می‌کند.

۲۸۰- گزینهٔ ۲ برای هر $x\in D_f$ تساوی $(f^{-۱}of)(x)=x$ برقرار است. پس تابع g به‌صورت $g(x)=x\,,\,x\le۳$ است و نمودار آن به شکل روبه‌رو است.



۲۸۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=\{۱,۲,۳,۵\}$ و

$f^{-۱}=\{(۳,۱),(۴,۲),(۲,۳),(۱,۵)\}\Rightarrow D_{f^{-۱}}=\{۳,۴,۲,۱\}$

بنابراین

$$D_{f\times f^{-1}}=D_f\cap D_{f^{-1}}=\{۱,۲,۳\}$$

$$(f\times f^{-1})(۱)=f(۱)\times f^{-۱}(۱)=۳\times ۵=۱۵$$

$$(f\times f^{-1})(۲)=f(۲)\times f^{-۱}(۲)=۴\times ۳=۱۲$$

$$(f\times f^{-1})(۳)=f(۳)\times f^{-۱}(۳)=۲\times ۱=۲$$

بنابراین تابع $f\times f^{-1}$ به‌صورت زیر است

$$f\times f^{-۱}=\{(۱,۱۵),(۲,۱۲),(۳,۲)\}$$

۲۸۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید $f^{-۱}(۳)=a$. پس $f(a)=۳$ و در نتیجه

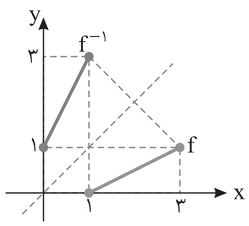
$$\frac{a}{a-۱}=۳\Rightarrow a=۳a-۳\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

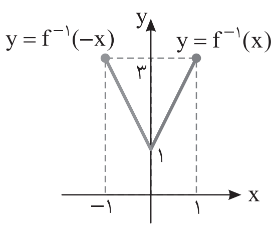
یعنی $f^{-۱}(۳)=\frac{۳}{۲}$.

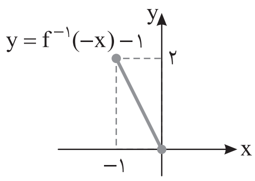
۲۸۳- گزینهٔ ۴ چـون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۸,۹)$ عبور می‌کند، نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۹,۸)$ عبور می‌کند:

$$f(۸)=۸+\sqrt[۳]{۸}-۱=۹\Rightarrow f^{-۱}(۹)=۸$$

۲۸۴- گزینهٔ ۴ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسـم می‌کنیم تا نمودار تابع $f^{-۱}$ به‌دسـت بیاید. سـپس قرینـهٔ نمودار تابع $f^{-۱}$ را نسـبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-۱}(-x)$ به‌دسـت بیاید. در آخـر نمـودار تابع $y=f^{-۱}(-x)$ را یک واحـد به پایین منتقـل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-۱}(-x)-۱$ به‌دست بیاید.







۲۸۵- گزینهٔ ۳ برد تابع $f^{-۱}$ برابر دامنهٔ تابع f است. پس دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

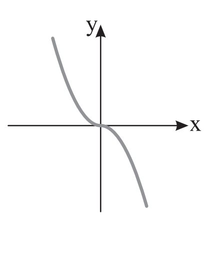
$$۴x-x^{۲}\geq ۰\Rightarrow x(۴-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۴\ ,\quad x-۱\neq ۰\Rightarrow x\neq ۱$$

پـس $R_{f^{-۱}}=D_f=[۰,۱)\cup(۱,۴]$. بنابراین اعداد صحیح صفر، ۲، ۳ و ۴ در برد تابع $f^{-۱}$ قرار دارند.

۲۸۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع‌های چهار گزینه به‌صورت زیر است:

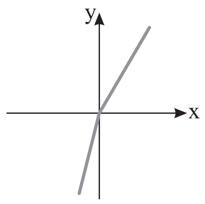
گزینهٔ (۱)

$$f(x)=-x|x|=\begin{cases} x^{۲} & x<۰ \\ -x^{۲} & x\geq ۰\end{cases}$$



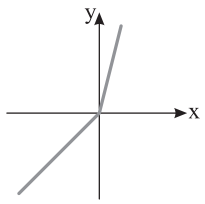
گزینهٔ (۲)

$$f(x)=۳x-|x|=\begin{cases} ۴x & x<۰ \\ ۲x & x\geq ۰\end{cases}$$



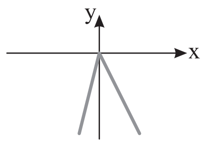
گزینهٔ (۳)

$$f(x)=۲x+|x|=\begin{cases} x & x<۰ \\ ۳x & x\geq ۰\end{cases}$$



گزینهٔ (۴)

$$f(x)=x-۳|x|=\begin{cases} ۴x & x<۰ \\ -۲x & x\geq ۰\end{cases}$$



با توجه به نمودارها، تابع $f(x)=x-۳|x|$ وارون‌پذیر نیست.

۲۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم

$$y=a-۳x\Rightarrow ۳x=a-y\Rightarrow x=\frac{a-y}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{a-x}{۳}$$

بنابراین باید معادلهٔ $x^{۲}=\frac{a-x}{۳}$ فقط یک جواب داشته باشد

$$۳x^{۲}+x-a=۰\ ,\quad \Delta=۱+۱۲a=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۱۲}$$

۲۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=x^{۲}-۴x+۲=(x-۲)^{۲}-۲\ ,\ D_f=[۲,+\infty)$$

بنابراین f تابعی یک‌به‌یک است. توجه کنید که

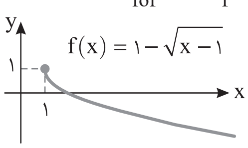
$$y=(x-۲)^{۲}-۲\Rightarrow (x-۲)^{۲}=y+۲\Rightarrow |x-۲|=\sqrt{y+۲}$$

$$\xrightarrow{x\geq ۲} x-۲=\sqrt{y+۲}\Rightarrow x=\sqrt{y+۲}+۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۲}+۲$.

۲۸۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_{fof^{-۱}}=D_{f^{-۱}}=R_f$.

از طـرف دیگر با توجه به نمودار تابع f، $R_f=(-\infty,۱]$، بنابرایـن دامنـهٔ تابـع $fof^{-۱}$ برابر $(-\infty,۱]$ است.



۲۹۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$(f^{-۱}og)^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{۲}\Rightarrow (g^{-۱}of)(x)=\frac{x-۲}{۲}\Rightarrow g^{-۱}(f(x))=\frac{x-۲}{۲}$$

$$g^{-۱}(x-۱)=\frac{x-۲}{۲}\xrightarrow{(x\to x+۱)} g^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}\Rightarrow g(x)=۲x+۱$$

راه‌حل دوم اگر تابع‌های وارون دو طرف تساوی $(f^{-۱}og)^{-۱}(x)=\frac{x-۲}{۲}$ را پیدا کنیم به‌دست می‌آید

$$(f^{-۱}og)(x)=۲x+۲\qquad (۱)$$

از طرف دیگر، $f^{-۱}(x)=x+۱$، پس از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f^{-۱}(g(x))=۲x+۲\Rightarrow g(x)+۱=۲x+۲\Rightarrow g(x)=۲x+۱$$

۲۹۱- گزینهٔ ۱ ابتدا f^{-1} و g^{-1} را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,-۲),(۱,۴)\}$$

$$g^{-1}=\{(۲,۲),(۱,۳),(-۱,۴),(-۲,۱)\}$$

اکنون $g^{-1}of^{-1}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۲ \xrightarrow{f^{-1}} ۱ \xrightarrow{g^{-1}} ۳$$
$$۳ \longrightarrow ۲ \longrightarrow ۲$$
$$۴ \longrightarrow -۲ \longrightarrow ۱$$
$$۱ \longrightarrow ۴ \longrightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$g^{-1}of^{-1}=\{(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

توجه کنید که می‌توان ابتدا fog را حساب کرد، سپس با استفاده از تساوی $g^{-1}of^{-1}=(fog)^{-1}$ مسئله را حل کرد.

۲۹۲- گزینهٔ ۱ اگر نقطه‌های $(۷,a)$ و $(-۱,b)$ روی نمودار تابع وارون تابع f باشند، نقطه‌های $(a,۷)$ و $(b,-۱)$ روی تابع f هستند. اما از طرف دیگر نمی‌دانیم a و b بزرگ‌تر از یک هستند یا کوچک‌تر از آن. پس با فرض $x<۱$ به‌دست می‌آید:

$$x+۳=۷\Rightarrow x=۴ \ (\text{غ.ق.ق.})\ ,\quad x+۳=-۱\Rightarrow x=-۴\ (\text{ق.ق.})$$

همچنین با فرض $x\geq ۱$ ،

$$۳x+۱=۷\Rightarrow x=۲\ (\text{ق.ق.})\ ,\quad ۳x+۱=-۱\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$f(-۴)=-۱\Rightarrow f^{-1}(-۱)=-۴,\quad f(۲)=۷\Rightarrow f^{-1}(۷)=۲$$

بنابراین $f^{-1}(۷)+f^{-1}(-۱)=۲-۴=-۲$.

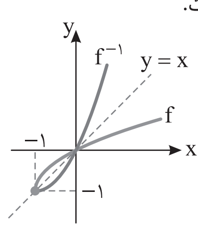
۲۹۳- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f^{-1} از نقطهٔ $(۳,۲)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع f از نقطهٔ $(۲,۳)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(۲)=۳\Rightarrow ۸+۲+a=۳\Rightarrow a=-۷$$

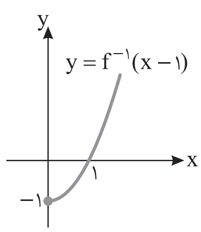
در نتیجه

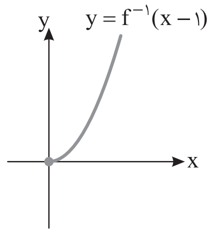
$$f(x)=x^{۳}+x-۷\Rightarrow f(۳)=۲۷+۳-۷=۲۳$$

۲۹۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به خط $y=x$ است.



اگر نمودار $y=f^{-1}(x)$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-1}(x-۱)+۱$ رسم می‌شود.





۲۹۵- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع‌های f و f^{-1} در نقطهٔ $(۱,۲)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(۱,۲)\in f\Rightarrow f(۱)=۲\Rightarrow \sqrt{a+b}=۲$$

$$(۱,۲)\in f^{-1}\Rightarrow (۲,۱)\in f\Rightarrow f(۲)=۱\Rightarrow \sqrt{۲a+b}=۱$$

در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=۴ \\ ۲a+b=۱ \end{cases}\Rightarrow a=-۳\,,\ b=۷$$

بنابراین $ab=-۲۱$.

۲۹۶- گزینهٔ ۲ چون f تابعی خطی است، فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f(۱)=۳\Rightarrow a+b=۳ \qquad (۱)$$

$$f^{-1}(۱۱)=۳\Rightarrow f(۳)=۱۱\Rightarrow ۳a+b=۱۱ \qquad (۲)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، به‌دست می‌آید $a=۴$ و $b=-۱$. بنابراین $f(x)=۴x-۱$ و در نتیجه $f(-۳)=-۱۳$.

۲۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم که وارون تابع $f^{-1}(x)$ است:

$$y=۲x+k\Rightarrow ۲x=y-k\Rightarrow x=\frac{y-k}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{x-k}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ $x^{۲}=\frac{x-k}{۲}$ نباید جواب داشته باشد

$$۲x^{۲}=x-k\Rightarrow ۲x^{۲}-x+k=۰,\quad \Delta<۰\Rightarrow ۱-۸k<۰\Rightarrow k>\frac{۱}{۸}$$

۲۹۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x+۱)^{۳}-۱$. بنابراین تابع f یک‌به‌یک است. از طرف دیگر،

$$y=(x+۱)^{۳}-۱\Rightarrow (x+۱)^{۳}=y+۱\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{y+۱}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y+۱}-۱$$

در نتیجه $f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$.

۲۹۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f^{-1}(x)=\frac{x+a}{x-۲}$. بنابراین $f^{-1}(۳)=\frac{۳+a}{۳-۲}=a+۳$. پس

$$(f^{-1}of^{-1})(۳)=\frac{۹}{۴}\Rightarrow f^{-1}(f^{-1}(۳))=\frac{۹}{۴}$$

$$f^{-1}(a+۳)=\frac{۹}{۴}\Rightarrow \frac{(a+۳)+a}{a+۳-۲}=\frac{۹}{۴}$$

$$\frac{۲a+۳}{a+۱}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow ۸a+۱۲=۹a+۹\Rightarrow a=۳$$

۳۰۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_{f^{-1}of}=D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$.

۳۰۱- گزینهٔ ۲ ابتدا به تابع‌های f^{-1} و g^{-1} توجه کنید:

$$f^{-1}=\{(۲,۱),(۳,-۱),(-۲,۲),(۱,۴)\}$$

$$g^{-1}=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۲),(۱,۱)\}$$

$$D_{f^{-1}-g^{-1}}=D_{f^{-1}}\cap D_{g^{-1}}=\{۲,۳,-۲,۱\}\cap\{۲,۳,۴,۱\}=\{۲,۳,۱\}$$

اکنون می‌توانیم تابع $f^{-1}-g^{-1}$ را به‌دست آوریم:

$$f^{-1}-g^{-1}=\{(۲,۱-۳),(۳,-۱-۴),(۱,۴-۱)\}$$
$$=\{(۲,-۲),(۳,-۵),(۱,۳)\}$$

مجموع عضوهای دامنه و برد تابع $f^{-1}-g^{-1}$ برابر است با

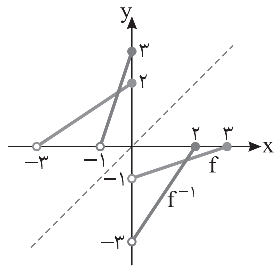
$$۲+(-۲)+۳+(-۵)+۱+۳=۲$$

۳۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۹)=\sqrt[۳]{۹-۱}+۲=۲+۲=۴$. پس $f^{-۱}(۴)=۹$ و در نتیجه $f(۹)+f^{-۱}(۴)=۱۳$.

۳۰۳- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع f از نقطهٔ $(۸,۱۳)$ عبور می‌کند، نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۱۳,۸)$ می‌گذرد:

$$f(۸)=۲\times۸+\sqrt[۳]{۸}-۵=۱۳\Rightarrow f^{-۱}(۱۳)=۸$$

۳۰۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f^{-۱}$ رسم شود. بنابر شکل زیر، نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ در دو نقطه متقاطع‌اند.



۳۰۵- گزینهٔ ۳ چون $(۱,۲)$ نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ است، پس $(۱,۲)\in f$ و $(۱,۲)\in f^{-۱}$، یعنی $(۲,۱)\in f$. بنابراین

$$\begin{cases}f(۱)=۲\Rightarrow a\sqrt{b-۳}=۲\\ f(۲)=۱\Rightarrow a\sqrt{b-۶}=۱\end{cases}\Rightarrow\sqrt{b-۳}=۲\sqrt{b-۶}\Rightarrow b-۳=۴b-۲۴\Rightarrow b=۷$$

پس $a=۱$ و در نتیجه $a+b=۸$.

۳۰۶- گزینهٔ ۳ در تساوی $f(۲x-۱)=g(۳x)-۱$ قرار می‌دهیم $x=۲$:

$$f(۳)=g(۶)-۱\Rightarrow g(۶)=f(۳)+۱$$

از طرف دیگر، $f^{-۱}(۲)=۳$ پس $f(۳)=۲$. در نتیجه $g(۶)=۲+۱=۳$.

۳۰۷- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $y=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱$ می‌نویسیم. حالا x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y+۱=(\sqrt{x}+۱)^۲\Rightarrow\sqrt{y+۱}=\sqrt{x}+۱$$
$$\sqrt{x}=\sqrt{y+۱}-۱\Rightarrow x=(\sqrt{y+۱}-۱)^۲$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲=x+۱+۱-۲\sqrt{x+۱}=x+۲-۲\sqrt{x+۱}$.

راه‌حل دوم $f(۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۱$

در بین گزینه‌های داده شده فقط اگر در عبارت داده شده در گزینهٔ (۲)، به جای x قرار دهیم ۳، حاصل ۱ می‌شود.

۳۰۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases}x\ge۱\Rightarrow f(x)=x+۲-x+۱-۲x=-۲x+۳\\ -۲\le x\le۱\Rightarrow f(x)=x+۲+x-۱-۲x=۱\\ x\le-۲\Rightarrow f(x)=-x-۲+x-۱-۲x=-۲x-۳\end{cases}$$

بنابراین تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}-[-۲,۱]$ وارون‌پذیر است. توجه کنید که تابع f روی $\mathbb{R}-[a,b]$ که در آن $a\le-۲$ و $b\ge۱$ هم وارون‌پذیر است ولی برای اینکه $b-a$ کمترین مقدار باشد دامنه را $\mathbb{R}-[-۲,۱]$ در نظر می‌گیریم.

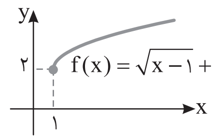
$$x>۱\Rightarrow y=-۲x+۳\Rightarrow x=\frac{۳-y}{۲}\Rightarrow\begin{cases}f^{-۱}(x)=\frac{۳-x}{۲}\\ \frac{۳-y}{۲}>۱\Rightarrow y<۱\end{cases}$$

$$x<-۲\Rightarrow y=-۲x-۳\Rightarrow x=\frac{-y-۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases}f^{-۱}(x)=\frac{-x-۳}{۲}\\ \frac{-y-۳}{۲}<-۲\Rightarrow y>۱\end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\begin{cases}\frac{۳-x}{۲} & x<۱\\ \frac{-x-۳}{۲} & x>۱\end{cases}$.

۳۰۹- گزینهٔ ۲ برای هر $x\in R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. با توجه به نمودار تابع f، $R_f=[۲,+\infty)$. پس برای هر $x\ge۲$، $g(x)=x+۳$. بنابراین

$$x\ge۲\Rightarrow x+۳\ge۵\Rightarrow g(x)\ge۵\Rightarrow R_g=[۵,+\infty)$$



۳۱۰- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ضابطهٔ تابع وارون تابع‌های f و g را پیدا می‌کنیم که به‌صورت زیر هستند:

$$f^{-۱}(x)=(x-۱)^۳+۲,\quad g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}+۱$$

بنابراین $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=f^{-۱}(g^{-۱}(x))=f^{-۱}(\sqrt[۳]{x}+۱)$

$$=(\sqrt[۳]{x}+۱-۱)^۳+۲=x+۲$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=(gof)^{-۱}(x)$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(۱+\sqrt[۳]{x-۲})=(۱+\sqrt[۳]{x-۲}-۱)^۳=x-۲$$

و $(gof)^{-۱}(x)=x+۲$. بنابراین $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=x+۲$.

۳۱۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(fog^{-۱})(a)=a$.

بنابراین $f(g^{-۱}(a))=a$. چون $f(c)=a$، پس $g^{-۱}(a)=c$ و در نتیجه $g(c)=a$. به همین ترتیب

$$(fog^{-۱})(b)=c\Rightarrow f(g^{-۱}(b))=c\xrightarrow{f(b)=c}$$
$$g^{-۱}(b)=b\Rightarrow g(b)=b$$
$$(fog^{-۱})(c)=d\Rightarrow f(g^{-۱}(c))=d\xrightarrow{f(d)=d}$$
$$g^{-۱}(c)=d\Rightarrow g(d)=c$$
$$(fog^{-۱})(d)=b\Rightarrow f(g^{-۱}(d))=b\xrightarrow{f(a)=b}$$
$$g^{-۱}(d)=a\Rightarrow g(a)=d$$

پس $g=\{(a,d),(b,b),(c,a),(d,c)\}$.

۳۱۲- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۱)=a$، در این صورت

$$f(a)=۱\Rightarrow\sqrt{a+\sqrt{a+۲}+۲}=۱\Rightarrow a+\sqrt{a+۲}+۲=۱$$
$$\sqrt{a+۲}=-a-۱\quad(*)\Rightarrow a+۲=a^۲+۲a+۱$$
$$a^۲+a-۱=۰\Rightarrow a=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲},\ a=\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

از تساوی $(*)$ واضح است که $-a-۱\ge۰$، پس $a\le-۱$. بنابراین $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول نیست.

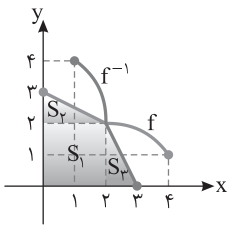
۳۱۳- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم طول نقطهٔ برخورد a باشد. در این صورت عرض آن $a+1$ است. پس نقطهٔ $(a,a+1)$ روی نمودار تابع f^{-1} است. در نتیجه نقطهٔ $(a+1,a)$ روی نمودار تابع f است. پس

$$f(a+1)=a \Rightarrow (a+1)^3+2(a+1)+9=a$$

$$a^3+3a^2+4a+12=0 \Rightarrow (a+3)(a^2+4)=0 \Rightarrow a=-3$$

پس عرض نقطهٔ برخورد $a+1=-2$ است.

۳۱۴- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f^{-1} قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ است که در شکل رسم شده است. بنابراین مساحت قسمت رنگی مورد نظر است که از دو مثلث و یک مربع تشکیل شده است:



$$S=S_1+S_2+S_3 \Rightarrow S=2\times2+\frac{1\times2}{2}+\frac{1\times2}{2}=6$$

۳۱۵- گزینهٔ ۲ اگر (m,n) نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} باشد، نتیجه می‌شود $f(m)=n$ و $f(n)=m$. بنابراین

$$f(-1)=\frac{1}{3} \Rightarrow 1-a+b=\frac{1}{3},\quad f(\frac{1}{3})=-1 \Rightarrow -\frac{1}{27}+\frac{a}{3}+b=-1$$

در نتیجه

$$\begin{cases}-a+b=-\frac{2}{3}\\ a+3b=-\frac{26}{9}\end{cases} \Rightarrow a=-\frac{2}{9}\ ,\ b=-\frac{8}{9}$$

پس $a+b=-\frac{10}{9}$.

۳۱۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(g^{-1}of)(-1)=g^{-1}(f(-1))=g^{-1}(3)$$

اکنون فرض کنید $g^{-1}(3)=s$. در این صورت $g(s)=3$ و اگر در تساوی $g(x)=1-f(x+1)$ قرار دهیم $x=s$، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases}g(s)=1-f(s+1)\\ g(s)=3\end{cases} \Rightarrow f(s+1)=-2$$

بنابراین، چون تابع f یک‌به‌یک است، $s+1=4$، پس $s=3$. یعنی $g^{-1}(3)=3$.

۳۱۷- گزینهٔ ۳ از تساوی $y=\frac{2x+a}{x+b}$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$yx+by=2x+a \Rightarrow (y-2)x=a-by \Rightarrow x=\frac{a-by}{y-2}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{a-bx}{x-2}$ و در نتیجه $a=-4$، $b=-3$ و $ab=12$.

۳۱۸- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}3x+(-(x-1)) & x<1\\ 3x+(x-1) & x\ge1\end{cases}=\begin{cases}2x+1 & x<1\\ 4x-1 & x\ge1\end{cases}$$

فرض کنید برای $x<1$، $g(x)=2x+1$ و برای $x\ge1$، $h(x)=4x-1$، بنابراین

$$x<1 \Rightarrow 2x+1<3 \Rightarrow g(x)<3$$

$$g(x)=2x+1 \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

$$x\ge1 \Rightarrow 4x-1\ge3 \Rightarrow h(x)\ge3$$

$$h(x)=4x-1 \Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{x+1}{4}$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & x<3\\ \frac{x+1}{4} & x\ge3\end{cases}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0)=1$ و $f(2)=7$، پس $f^{-1}(1)=0$ و $f^{-1}(7)=2$. این شرایط فقط در تابع گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۳۱۹- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول چون f و f^{-1} تابع‌هایی برابرند، پس دامنهٔ آن‌ها برابر است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(a+1)x+4}{3x-1} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3x-(a+1)} \Rightarrow D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{\frac{a+1}{3}\}$$

بنابراین $\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}=\mathbb{R}-\{\frac{a+1}{3}\}$. پس $\frac{a+1}{3}=\frac{1}{3}$، در نتیجه $a=0$.

توجه کنید که اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=f^{-1}(x)=\frac{x+4}{3x-1}$.

راه‌حل دوم در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $f=f^{-1}$، آن‌گاه $a=-d$. بنابراین در اینجا $a+1=-(-1)$، در نتیجه $a=0$.

۳۲۰- گزینهٔ ۳ برای هر $x\in D_{f^{-1}}=R_f$ تساوی $(fof^{-1})(x)=x$ برقرار است. برد تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x-1}\ge0 \Rightarrow \sqrt{x-1}+2\ge2 \Rightarrow f(x)\ge2 \Rightarrow R_f=[2,+\infty)$$

پس برای هر $x\ge2$، $g(x)=2x$. بنابراین

$$x\ge2 \Rightarrow 2x\ge4 \Rightarrow g(x)\ge4 \Rightarrow R_g=[4,+\infty)$$

۳۲۱- گزینهٔ ۱ با توجه به زوج مرتب‌های $(1,0)$ و $(1,4m^3-m)$ باید تساوی $4m^3-m=0$ برقرار باشد. پس

$$m(4m^2-1)=0 \Rightarrow m=0,\ m=\pm\frac{1}{2}$$

به‌ازای $m=0$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f=\{(1,0),(0,2),(0,4)\}$$

به‌ازای $m=\frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع نیست.

$$f=\{(1,0),(1,2),(0,4),(2,2)\}$$

به‌ازای $m=-\frac{1}{2}$ رابطه به شکل زیر درمی‌آید که تابع است.

$$f=\{(1,0),(-1,2),(0,4),(-2,2)\}$$

پس فقط به‌ازای $m=-\frac{1}{2}$ رابطه تابع است.

۳۲۲- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول اگر f تابع ثابت c باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{(a+2)x+3}{2x-3}=c$$

بنابراین $(a+2)x+3=2cx-3c$. در نتیجه $a+2=2c$ و $3=-3c$. به این ترتیب $c=-1$ و $a=2c-2=-4$.

راه‌حل دوم f تابعی ثابت است، پس $f(1)=f(2)$. بنابراین

$$\frac{a+2+3}{2-3}=\frac{2(a+2)+3}{4-3}\Rightarrow\frac{a+5}{-1}=2a+7\Rightarrow a=-4$$

راه‌حل سوم مشتق تابع ثابت برابر صفر است. پس

$$f'(x)=\frac{(a+2)(2x-3)-2((a+2)x+3)}{(2x-3)^2}=\frac{-3(a+2)-6}{(2x-3)^2}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0}-3(a+2)-6=0\Rightarrow a=-4$$

۳۲۳- گزینهٔ ۱ اولاً توجه کنید که شرط $x\geq 0$ برای دامنهٔ تابع وجود دارد. عددهای داده شده در گزینه‌ها بزرگ‌تر از صفر هستند. پس ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$x-1-\sqrt{x}=0\Rightarrow x-1=\sqrt{x}\xrightarrow{(x-1\geq 0)}x^2-2x+1=x$$

$$x^2-3x+1=0\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt5}{2}\ ,\ x=\frac{3-\sqrt5}{2}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

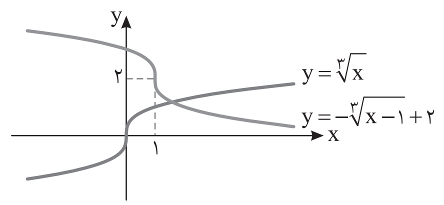
بنابراین دامنهٔ تابع $[0,+\infty)-\{\frac{3+\sqrt5}{2}\}$ است.

۳۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=\{x|16-|x^2-9|\geq 0\}$، یعنی $D_f=\{x||x^2-9|\leq 16\}$. در نتیجه

$$-16\leq x^2-9\leq 16\Rightarrow -7\leq x^2\leq 25\Rightarrow 0\leq x^2\leq 25\Rightarrow -5\leq x\leq 5$$

پس $D_f=[-5,5]$ و در نتیجه $a=-5$، $b=5$ و $b-a=10$.

۳۲۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-1}-2$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-\sqrt[3]{x-1}+2$ به‌دست می‌آید. دو نمودار مطابق شکل زیر در یک نقطه متقاطع‌اند.



۳۲۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=\{x|x^2-4x\geq 0\}$، یعنی $D_f=(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$ و $D_g=\{-1,0,1,3,4\}$. بنابراین

$$D_{2g+f}=D_g\cap D_f=\{-1,0,4\}$$

بنابراین a باید ۱− یا صفر یا ۴ باشد:

$$(2g+f)(-1)=2g(-1)+f(-1)=2\sqrt5+\sqrt5=3\sqrt5$$

$$(2g+f)(0)=2g(0)+f(0)=2+0=2$$

$$(2g+f)(4)=2g(4)+f(4)=6+0=6$$

بنابراین $a=4$ و در نتیجه $f(-4)=\sqrt{32}=4\sqrt2$.

۳۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا $(fof)(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(fof)(x)=f(f(x))=a(ax^2+b)^2+b$$

$$=a(a^2x^4+2abx^2+b^2)+b=a^3x^4+2a^2bx^2+ab^2+b$$

بنابراین تساوی زیر به‌ازای هر مقدار x برقرار است:

$$a^3x^4+2a^2bx^2+ab^2+b=27x^4-18x^2+2$$

پس باید تساوی‌های زیر درست باشند:

$$a^3=27,\quad 2a^2b=-18,\quad ab^2+b=2$$

از $a^3=27$ نتیجه می‌شود $a=3$، در نتیجه از $2a^2b=-18$، $18b=-18$ به‌دست می‌آید که یعنی $b=-1$. مقادیر $a=3$ و $b=-1$ در تساوی $ab^2+b=2$ هم صدق می‌کنند. پس $a+b=2$.

۳۲۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=3x+|k||x|=\begin{cases}(3+|k|)x & x\geq 0\\ (3-|k|)x & x<0\end{cases}$$

برای اینکه تابع f صعودی باشد، باید خطوط $y=(3+|k|)x$ و $y=(3-|k|)x$ شیب نامنفی داشته باشند. شیب خط $y=(3+|k|)x$ همواره مثبت است، پس باید شیب خط $y=(3-|k|)x$ همواره نامنفی باشد. یعنی

$$3-|k|\geq 0\Rightarrow |k|\leq 3\Rightarrow -3\leq k\leq 3$$

۳۲۹- گزینهٔ ۳ اگر (m,n) نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} باشد، نتیجه می‌شود $f(m)=n$ و $f(n)=m$. بنابراین

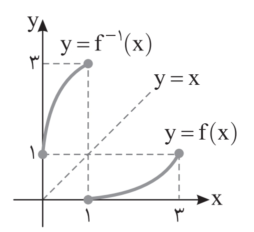
$$f(-1)=\frac13\Rightarrow -a+\frac29+b=\frac13,\quad f(\frac13)=-1\Rightarrow\frac{a}{27}-\frac{2}{27}+b=-1$$

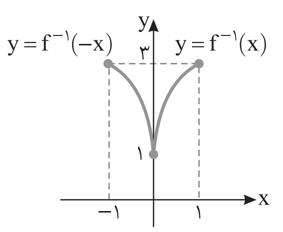
در نتیجه

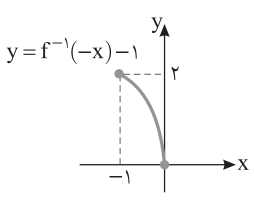
$$\begin{cases}-a+b=\frac19\\ a+27b=-25\end{cases}\Rightarrow a=-1,\ b=-\frac89$$

پس $a+b=-\frac{17}{9}$.

۳۳۰- گزینهٔ ۴ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ نمودار تابع f^{-1} را نسبت به محور y پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ به‌دست بیاید. در آخر نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f^{-1}(-x)-1$ به‌دست بیاید.







۳۳۱- گزینهٔ ۲ اگر ضابطهٔ داده شده متعلق به یک تابع باشد، باید در $x=2$ مقدار $f(x)$ منحصربه‌فرد باشد، یعنی مقدار $f(2)$ در ضابطهٔ اول با مقدار آن در ضابطهٔ دوم برابر باشد. اگر $f(x)=\sqrt{x+2}+a$، آن‌گاه $f(2)=2+a$. اگر $f(x)=ax^3+16$، آن‌گاه $f(2)=8a+16$.

بنابراین $2+a=8a+16 \Rightarrow a=-2$

و در نتیجه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}-2 & x\ge 2\\ -2x^3+16 & x\le 2\end{cases}$. پس

$$f(a)=f(-2)=-2(-2)^3+16=32$$

۳۳۲- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=2mx-mx^2+x^2+4x+m=(1-m)x^2+(2m+4)x+m$$

ضابطهٔ توابع خطی به شکل $y=ax+b$ است، یعنی یک چندجمله‌ای درجهٔ اول است. بنابراین باید $m=1$ تا ضابطهٔ تابع یک چندجمله‌ای درجهٔ اول شود، یعنی

$$m=1\Rightarrow f(x)=6x+1$$

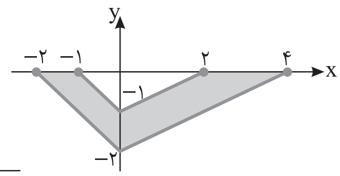
بنابراین $f(m)=f(1)=7$.

۳۳۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

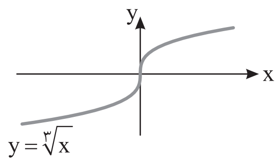
$$f(x)=[\frac{x+1}{x}]+[-\frac{1}{x}]=[1+\frac{1}{x}]+[-\frac{1}{x}]=1+[\frac{1}{x}]+[-\frac{1}{x}]$$

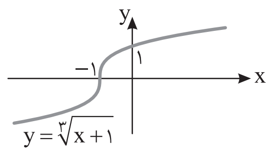
بنابراین $f(-x)=1+[-\frac{1}{x}]+[\frac{-1}{-x}]=1+[-\frac{1}{x}]+[\frac{1}{x}]=f(x)$.

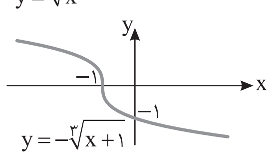
۳۳۴- گزینهٔ ۱ برای رسم نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{2})$ باید در نمودار تابع f طول نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ به‌دست آید. همچنین در نمودار به‌دست آمده باید عرض نقاط را در ۲ ضرب کنیم تا نمودار تابع $y=2f(\frac{x}{2})$ به‌دست آید. بنابراین مساحت قسمت رنگی در شکل زیر مورد سؤال است که برابر است با $\frac{1}{2}\times6\times2-\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{9}{2}$.



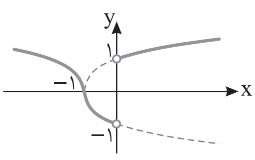
۳۳۵- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1} & x>0\\ -\sqrt[3]{x+1} & x<0\end{cases}$ است. اکنون توجه کنید که نمودار توابع $y=\sqrt[3]{x+1}$ و $y=-\sqrt[3]{x+1}$ به‌صورت زیر است:







بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است:

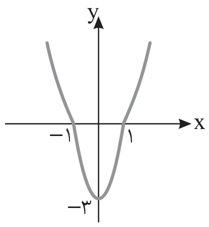


۳۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$g(x)=-2f(x)-|f(x)|=\begin{cases}-2f(x)-f(x) & f(x)\ge 0\\ -2f(x)-(-f(x)) & f(x)<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-3f(x) & f(x)\ge 0\\ -f(x) & f(x)<0\end{cases}$$

بنابراین کافی است در جاهایی که مقدار f نامنفی است،

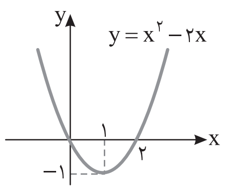


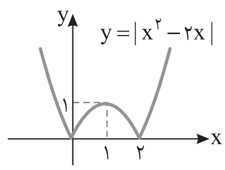
در بازهٔ $[-1,1]$، عرض نقاط روی نمودار f را ۳ برابر کنیم و نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، در بقیهٔ جاها نمودار g قرینهٔ نمودار f نسبت به محور طول‌ها است.

۳۳۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

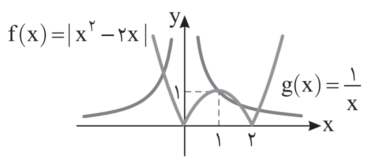
$$f(x)=|x||x-2|=|x(x-2)|=|x^2-2x|$$

بنابراین، ابتدا نمودار تابع $y=x^2-2x$ را رسم می‌کنیم. سپس، قرینهٔ قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم.





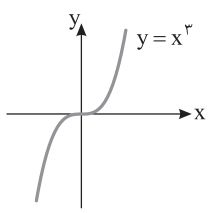
مطابق شکل زیر، نمودار توابع f و g در چهار نقطه متقاطع‌اند.

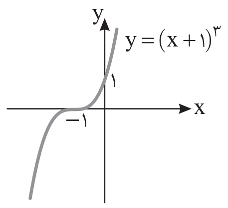


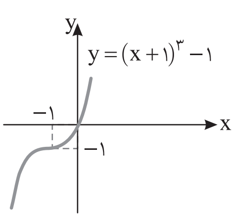
۳۳۸- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

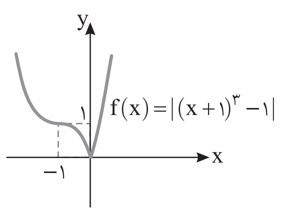
$$f(x)=|x^3+3x^2+3x|=|(x+1)^3-1|$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم، سپس قرینهٔ قسمتی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف کنیم.









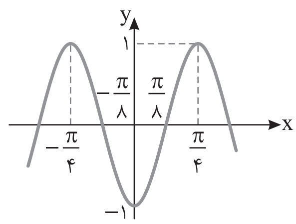
۳۳۹- گزینهٔ ۲ از تساوی $y=\sqrt[۳]{۲-۳x}$ مقدار x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y^۳=۲-۳x\Rightarrow x=\frac{۲-y^۳}{۳}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{-x^۳+۲}{۳}$ و در نتیجه $a=-۱$، $b=۲$ و $ab=-۲$.

۳۴۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(x)=-\cos ۴x$. اگر نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم کنیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-\cos x$ به‌دست می‌آید. اگر طول هر نقطه از این نمودار را یک چهارم کنیم، نمودار تابع $y=-\cos ۴x$ به‌دست می‌آید.

با توجه به شکل، تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۴},۰]$ اکیداً نزولی است، پس حداقل مقدار a برابر $-\frac{\pi}{۴}$ است.



۳۴۱- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است. بنابراین

$$a=۰,\quad b=-۱,\quad b+c=۰\Rightarrow c=۱$$

پس $g(x)=۲^۰-x+۱=-x+۲$ و در نتیجه g یک تابع خطی است.

۳۴۲- گزینهٔ ۱ کافی است در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم $\frac{۱}{x}$:

$$f(\frac{۱}{x})=\frac{\frac{۱}{x}+۲}{\frac{۲}{x^۲}+۱}=\frac{\frac{۱+۲x}{x}}{\frac{۲+x^۲}{x^۲}}=\frac{x(۱+۲x)}{۲+x^۲}\Rightarrow f(x)=\frac{x+۲x^۲}{۲+x^۲}$$

۳۴۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\{x|x-۳\neq۰,\frac{x-۷}{۲-x}\geq۰\}$. از طرف دیگر، $\frac{x-۷}{۲-x}\geq۰\Rightarrow x\in(۲,۷]$. اگر $x-۳=۰$، آن‌گاه $x=۳$. بنابراین

$$D_f=(۲,۳)\cup(۳,۷]=(۲,۷]-\{۳\}$$

پس $a=۲$، $b=۷$، $c=۳$ و در نتیجه $a+b+c=۱۲$.

۳۴۴- گزینهٔ ۲ چون فقط یک عدد حقیقی در دامنهٔ تابع قرار ندارد، پس معادلهٔ $m^۲x^۲+۳x+۱=۰$ باید فقط یک جواب داشته باشد. در دو حالت این اتفاق می‌افتد.

حالت اول این معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\Delta=۹-۴m^۲=۰\Rightarrow m=\pm\frac{۳}{۲}$$

در این حالت $x=-\frac{۲}{۳}$ ریشهٔ مخرج است، در نتیجه $n=-\frac{۲}{۳}$.

حالت دوم این معادله یک معادلهٔ درجهٔ اول باشد، یعنی ضریب $x^۲$ برابر صفر باشد: $m=۰$. در این حالت $x=-\frac{۱}{۳}$ ریشهٔ مخرج است. در نتیجه $n=-\frac{۱}{۳}$. پس دو مقدار مختلف برای n وجود دارد.

۳۴۵- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع f به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{-۲\}$ است، پس باید دامنهٔ g هم به همین صورت باشد، یعنی $x=-۲$ ریشهٔ مضاعف مخرج $g(x)$ باشد:

$$x^۲+cx+۴=(x+۲)^۲\Rightarrow x^۲+cx+۴=x^۲+۴x+۴\Rightarrow c=۴$$

از طرف دیگر ضابطهٔ f و g باید برابر باشند، پس باید صورت $g(x)$ یک عامل ۵ و یک عامل $x+۲$ داشته باشد:

$$g(x)=f(x)\Rightarrow\frac{ax+b}{(x+۲)^۲}=\frac{۵}{x+۲}\Rightarrow ax+b=۵(x+۲)\Rightarrow a=۵,b=۱۰$$

بنابراین $abc=۵(۱۰)(۴)=۲۰۰$.

۳۴۶- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع g به‌صورت زیر است:

$$D_g=D_f-\{x|f(x)=۲\}=\{۱,۴,۳,۵\}-\{۴,۳\}=\{۱,۵\}$$

از طرف دیگر،

$$g(۱)=\frac{۳f(۱)}{۲-f(۱)}=\frac{-۳}{۲-(-۱)}=-۱,\quad g(۵)=\frac{۳f(۵)}{۲-f(۵)}=\frac{۳}{۲-۱}=۳$$

بنابراین $g=\{(۱,-۱),(۵,۳)\}$ و $R_g=\{-۱,۳\}$. پس مجموع اعضای برد تابع g برابر ۲ است.

۳۴۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|-۵\leq x\leq۴, ۱\leq|x-۱|\leq۴\}$$

بنابراین

$$۱\leq|x-۱|\leq۴\Rightarrow\begin{cases}۱\leq x-۱\leq۴\Rightarrow۲\leq x\leq۵\\ \text{یا}\\ -۴\leq x-۱\leq-۱\Rightarrow-۳\leq x\leq۰\end{cases}$$

بنابراین $D_{fog}=[-۵,۴]\cap([-۳,۰]\cup[۲,۵])=[-۳,۰]\cup[۲,۴]$.

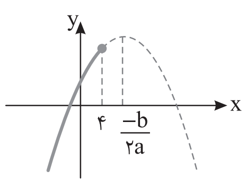
پس اعداد صحیح ۳−، ۲−، ۱−، ۰، ۲، ۳ و ۴ در دامنهٔ تابع fog قرار دارند که تعداد آن‌ها هفت‌تاست.

۳۴۸- گزینهٔ ۳ تابع $y=ax^۲+bx+c$ با شرط $a<۰$ روی بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{۲a}]$ صعودی و روی بازهٔ $[-\frac{b}{۲a},+\infty)$ نزولی است. بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشند تا تابع f صعودی باشد:

$$k+۲<۰\Rightarrow k<-۲$$

$$۴\leq\frac{-۲}{۲(k+۲)}\Rightarrow۴+\frac{۲}{۲(k+۲)}\leq۰\Rightarrow\frac{۴k+۹}{k+۲}\leq۰\Rightarrow-\frac{۹}{۴}\leq k<-۲$$

بنابراین اگر $-\frac{۹}{۴}\leq k<-۲$، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۴]$ صعودی است.



۳۴۹- گزینهٔ ۴ نمودار تابع $f^{-۱}$ از نقطهٔ $(۴,۸)$ عبور می‌کند، پس نمودار تابع f از نقطهٔ $(۸,۴)$ عبور می‌کند. بنابراین

$$f(۸)=۴\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}\times۸^۳+\sqrt[۳]{۸}+۲a=۴\Rightarrow۲a=-۳۰\Rightarrow a=-۱۵$$

در نتیجه

$$f(x)=\frac{۱}{۱۶}x^۳+\sqrt[۳]{x}-۳۰\Rightarrow f(۰)=-۳۰$$

۳۵۰- گزینهٔ ۳ در تساوی $f(۲x+۱)=۲g(۳x)-۱$ قرار می‌دهیم $x=۲$:

$$f(۵)=۲g(۶)-۱ \Rightarrow g(۶)=\frac{f(۵)+۱}{۲}$$

از طرف دیگر، $f^{-۱}(۲)=۵ \Rightarrow f(۵)=۲$

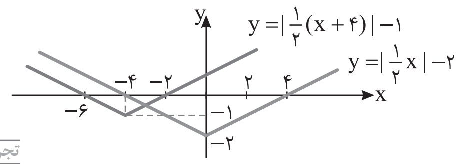
در نتیجه $g(۶)=\frac{۲+۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$.

۳۵۱- گزینهٔ ۲ نمودار اولیه و نمودار انتقال یافته را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقطهٔ برخورد نمودارها جواب معادلهٔ زیر است:

$$|\frac{۱}{۲}(x+۴)|-۱=|\frac{۱}{۲}x|-۲ \qquad (۱)$$

توجه کنید که x منفی و $x+۴$ مثبت است. بنابراین معادلهٔ (۱) می‌شود

$$\frac{۱}{۲}(x+۴)-۱=-\frac{۱}{۲}x-۲ \Rightarrow x=-۳$$



تجربی - ۹۳

۳۵۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $(gof)(a)=g(f(a))=g(a+\sqrt{a})$.

از طرف دیگر $g(۶)=۵$، پس $a+\sqrt{a}=۶ \Rightarrow a=۴$

تجربی - ۹۱

۳۵۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{۲x-۱}{x+۱})=\frac{۲(\frac{۲x-۱}{x+۱})+۲}{۲-\frac{۲x-۱}{x+۱}}=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}}=۲x$$

تجربی - ۹۶

۳۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع g را پیدا می‌کنیم:

$$g(f(x))=g(۲x+۳)=۸x^۲+۲۲x+۲۰$$

فرض می‌کنیم $۲x+۳=t$. در این صورت $x=\frac{t-۳}{۲}$ و

$$g(t)=۸(\frac{t-۳}{۲})^۲+۲۲(\frac{t-۳}{۲})+۲۰$$

$$=۲t^۲-۱۲t+۱۸+۱۱t-۳۳+۲۰=۲t^۲-t+۵$$

بنابراین $g(x)=۲x^۲-x+۵$ و

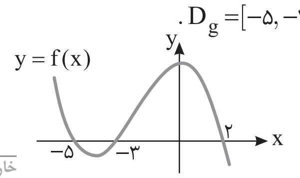
$$(fog)(x)=f(g(x))=۲g(x)+۳=۲(۲x^۲-x+۵)+۳=۴x^۲-۲x+۱۳$$

ریاضی - ۹۲

۳۵۵- گزینهٔ ۴ برای اینکه از نمودار $y=f(x-۲)$ به نمودار $y=f(x)$ برسیم، کافی است آن را مطابق شکل زیر دو واحد به چپ منتقل کنیم. برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$، عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

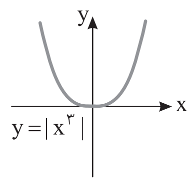
x	$-\infty$		-۵		-۳		۰		۲		$+\infty$
f(x)		+	۰	−	۰	+		+	۰	−	
x		−		−		−	۰	+		+	
xf(x)		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−	

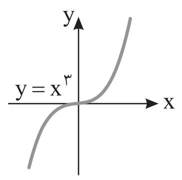
بنابراین $D_g=[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$.



خارج از کشور تجربی - ۹۴

۳۵۶- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با توجه به نمودار تابع $y=|x^۳|$ معلوم می‌شود که این تابع یک‌به‌یک نیست، بنابراین وارون‌ناپذیر است.





راه‌حل دوم سه نقطهٔ $(۱,۱)$، $(-۱,۱)$ و $(۰,۰)$ روی نمودار این تابع هستند، پس این تابع صعودی، نزولی، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۳۵۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(f^{-۱}og)(a)=f^{-۱}(g(a))=۶$. بنابراین $g(a)=f(۶)=۱۲-۵=۷$. باتوجه به اینکه $g(۴)=۷$ نتیجه می‌شود

$$a=۴$$

ریاضی - ۹۳

۳۵۸- گزینهٔ ۳ اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$y=-\sqrt{-x} \Rightarrow -x=y^۲ \Rightarrow x=-y^۲ \xrightarrow{y<۰} x=y|y|$$

و اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $y=\sqrt{x}\Rightarrow x=y^۲ \xrightarrow{y\geq ۰} x=y|y|$

بنابراین در هر حالتی $x=y|y|$ و ضابطهٔ تابع وارون تابع f به‌صورت $f^{-۱}(x)=x|x|$ است.

تجربی - ۹۶

۳۵۹- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$y=\frac{x+۴}{x-۲}\Rightarrow xy-۲y=x+۴\Rightarrow x(y-۱)=۲y+۴\Rightarrow x=\frac{۲y+۴}{y-۱}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۴}{x-۱}$. اکنون با حل معادلهٔ $f(x)=f^{-۱}(x)$ نقطه‌های برخورد دو تابع را می‌یابیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{۲x+۴}{x-۱}\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۲x^۲-۸$$

$$x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow (x+۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x=-۱, x=۴$$

راه‌حل دوم کافی است طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع f و خط $y=x$ را بیابیم:

$$\frac{x+۴}{x-۲}=x\Rightarrow x^۲-۲x=x+۴\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow x=-۱, x=۴$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$ax+by=۸\Rightarrow y=\frac{۸-ax}{b}, \quad ۲x-۳y=b\Rightarrow y=\frac{۲x-b}{۳}$$

چون خط‌های داده شده نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم قرینهٔ یکدیگر هستند، پس تابع‌های $y=\frac{۸-ax}{b}$ و $y=\frac{۲x-b}{۳}$ وارون یکدیگرند. از طرف دیگر، وارون تابع $y=\frac{۲x-b}{۳}$ می‌شود $y=\frac{۳x+b}{۲}$. بنابراین $\frac{۸}{b}=\frac{b}{۲}$ و $\frac{-a}{b}=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه $b^۲=۱۶$، یعنی $b=\pm ۴$. در نتیجه

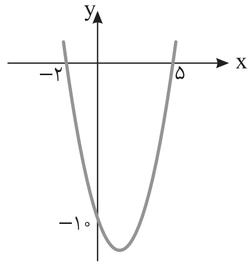
$$b=-۴\Rightarrow \frac{-a}{-۴}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=۶\Rightarrow a+b=۲$$

$$b=۴\Rightarrow \frac{-a}{۴}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=-۶\Rightarrow a+b=-۲$$

بنابراین $a+b=\pm ۲$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۳۶۱- گزینهٔ ۳ طول نقاط تلاقی نمودار تابع مورد نظر با محور x جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x-10=0$ هستند. جواب‌های این معادله $x=-2$ و $x=5$ هستند. بنابراین نمودار تابع مورد نظر به‌صورت مقابل است. از روی این شکل معلوم است که باید نمودار تابع را حداقل دو واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x غیرمنفی باشد.



خارج از کشور تجربی - ۹۳

۳۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دقت کنید که

$$f(2x-3)=2x-3-[2x-3]=2x-3-[2x]+3=2x-[2x]$$

پس $g(x)=f(2x-3)-2f(x)=2x-[2x]-2x+2[x]=2[x]-[2x]$.
اکنون فرض می‌کنیم k عدد صحیح دلخواهی باشد. در این صورت اگر $k\le x<k+\frac{1}{2}$، آن‌گاه $[x]=k$ و $2k\le 2x<2k+1\Rightarrow [2x]=2k$

بنابراین $g(x)=2k-2k=0$. اگر $k+\frac{1}{2}\le x<k+1$، آن‌گاه $[x]=k$ و

$$2k+1\le 2x<2k+2\Rightarrow [2x]=2k+1$$

بنابراین $g(x)=2k-2k-1=-1$. در نتیجه $R_g=\{-1,0\}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۶۳- گزینهٔ ۲ ابتدا $(fog)(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+2)=(2x+4-3)^2=(2x+1)^2$$

اکنون معادلهٔ $(fog)(x)=f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$(2x+1)^2=(2x-3)^2\Rightarrow 4x^2+4x+1=4x^2-12x+9$$

$$16x=8\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

تجربی - ۹۲

۳۶۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)=\frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

$$=\frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}}=\frac{-7x-7}{7}=-x-1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۶۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}$.
از طرف دیگر، $D_f=\mathbb{R}-\{\pm1\}$ و $D_g=[0,1]$. در نتیجه

$$D_{gof}=\{x|x\neq\pm1,\ 0\le\frac{1+x^2}{1-x^2}\le1\}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\le1\Rightarrow\frac{1+x^2}{1-x^2}-1=\frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2}\le0$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2}\le0\Rightarrow x<-1 \text{ یا } x=0 \text{ یا } x>1$$

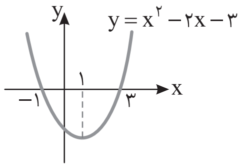
$$\frac{1+x^2}{1-x^2}\ge0\Rightarrow1-x^2>0\Rightarrow-1<x<1$$

از اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده دامنهٔ تابع gof به‌دست می‌آید، بنابراین

$$D_{gof}=\{0\}$$

ریاضی - ۹۶

۳۶۶- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع از نامساوی $-2<x-1<2$ به‌دست می‌آید، پس $D_f=(-1,3)$. با توجه به نمودار تابع $y=x^2-2x-3$، در بازهٔ $(-1,3)$ مقدار تابع f همواره منفی است و این تابع نه صعودی است و نه نزولی.



ریاضی - ۹۱

۳۶۷- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول از تساوی $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$ نتیجه می‌شود

$$g^{-1}(f^{-1}(a))=8\Rightarrow g(8)=f^{-1}(a)$$

بنابراین

$$\sqrt{5\times8+9}=f^{-1}(a)\Rightarrow f^{-1}(a)=7$$

پس $a=f(7)$، یعنی $a=3$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $(g^{-1}of^{-1})(x)=(fog)^{-1}(x)$. چون $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$، بنابراین $(fog)^{-1}(a)=8$. یعنی $(fog)(8)=a$.
در نتیجه

$$f(g(8))=a\Rightarrow f(7)=a\Rightarrow a=3$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۳۶۸- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x)=\begin{cases}4x-4 & x\le2\\ 4 & x>2\end{cases}$ می‌نویسیم. تابع f در بازهٔ $(-\infty,2]$ وارون‌پذیر است. فرض می‌کنیم $y=4x-4$، در این صورت $x=\frac{y+4}{4}$. از طرف دیگر،

$$x\le2\Rightarrow4x-4\le4\Rightarrow y\le4$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+1,\ x\le4$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۳۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا برای $0<x<1$ ضابطهٔ تابع وارون تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{|x|}{x}\sqrt{1-x^2}=\frac{x}{x}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}$$

$$y^2=1-x^2\Rightarrow x^2=1-y^2\Rightarrow x=\sqrt{1-y^2}$$

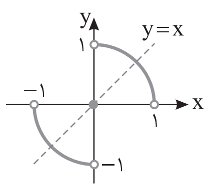
$$f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

به همین ترتیب برای $-1<x<0$:

$$y=\frac{|x|}{x}\sqrt{1-x^2}=\frac{-x}{x}\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y^2=1-x^2$$

$$x^2=1-y^2\Rightarrow x=-\sqrt{1-y^2}\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

همچنین $f(0)=0$، در نتیجه $f^{-1}(0)=0$. پس در هر صورت می‌توان نوشت $f^{-1}(x)=f(x)$. توجه کنید که نمودار تابع به شکل مقابل است که از دو ربع دایره و یک نقطه تشکیل شده و نسبت به خط $y=x$ متقارن است، بنابراین وارون آن با خودش برابر است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۳۷۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا ضابطهٔ تابع f^{-1} را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(x+1)^2 \Rightarrow x+1=\sqrt{y} \Rightarrow x=\sqrt{y}-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$$

اکنون محل برخورد نمودار تابع‌های f و f^{-1} را پیدا می‌کنیم:

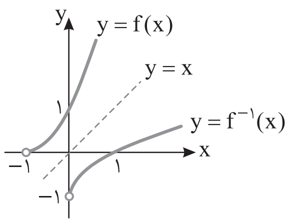
$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow (x+1)^2+1=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{x\geq 0} (x+1)^4+2(x+1)^2+1=x$$

$$(x+1)^4+2x^2+3x+3=0$$

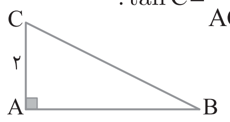
معادلهٔ بالا با توجه به اینکه مجموع چند مقدار نامنفی است، جواب ندارد.

راه‌حل دوم نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y=x$ ، نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم. واضح است که دو نمودار نقطهٔ برخوردی ندارند.

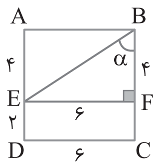


ریاضی - ۹۲

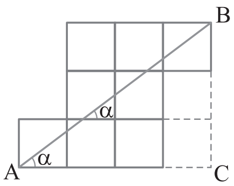
۳۷۱- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل زیر،
$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{۲}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BC=۶$$
اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس
$$BC^۲=AC^۲+AB^۲\Rightarrow ۶^۲=۲^۲+AB^۲\Rightarrow AB^۲=۳۲$$
یعنی $AB=۴\sqrt{۲}$. بنابراین $\tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$.



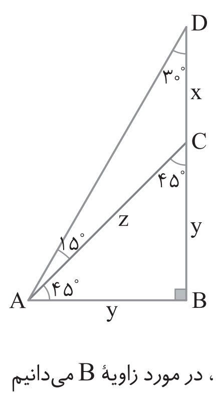
۳۷۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که طول ضلع مربع ABCD برابر ۶ است. مطابق شکل زیر، پاره‌خط EF را موازی DC رسم می‌کنیم. در این صورت، $EF=DC=۶$ و $BF=AE=۴$. در نتیجه،
$$\triangle BFE:\ \tan\alpha=\frac{EF}{BF}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$



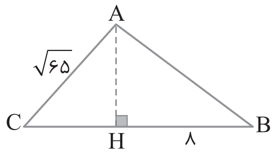
۳۷۳- گزینهٔ ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=B\hat{A}C$، در نتیجه
$$\tan\alpha=\tan B\hat{A}C=\frac{BC}{AC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{۴}{۳}$$
پس $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۳}=\frac{۲۵}{۱۲}$.



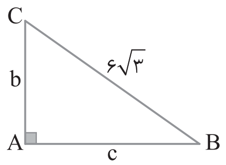
۳۷۴- گزینهٔ ۱ مطابق شکل داده شده، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، چون $C\hat{A}B=۴۵^\circ$ پس این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $B\hat{A}D=۶۰^\circ$. پس
$$\tan ۶۰^\circ=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{x+y}{y}=\frac{x}{y}+۱\Rightarrow\frac{x}{y}=\sqrt{۳}-۱$$
اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC،
$$AC^۲=AB^۲+BC^۲$$
$$z^۲=y^۲+y^۲\Rightarrow z=y\sqrt{۲}$$
بنابراین
$$\frac{DC}{AC}=\frac{x}{\sqrt{۲}y}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$$



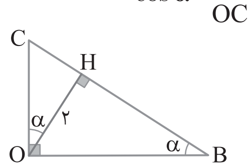
۳۷۵- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB، در مورد زاویهٔ B می‌دانیم
$$\tan\hat{B}=\frac{AH}{HB}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{AH}{۸}\Rightarrow AH=۶$$
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع CH را حساب کنیم:
$$AC^۲=CH^۲+AH^۲$$
$$۶۵=CH^۲+۳۶\Rightarrow CH=\sqrt{۲۹}$$



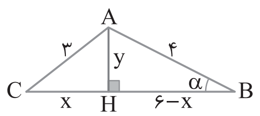
۳۷۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل $\cot\hat{B}=\frac{c}{b}=\sqrt{۲}$. بنابراین $c=b\sqrt{۲}$. از طرف دیگر طبق قضیهٔ فیثاغورس،
$$b^۲+c^۲=(۶\sqrt{۳})^۲\Rightarrow b^۲+(b\sqrt{۲})^۲=(۶\sqrt{۳})^۲$$
$$b^۲+۲b^۲=۳۶\times۳\Rightarrow b^۲=۳۶\Rightarrow b=۶$$
بنابراین $c=۶\sqrt{۲}$ و در نتیجه
$$S=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}\times۶\times۶\sqrt{۲}=۱۸\sqrt{۲}$$



۳۷۷- گزینهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC، $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$. همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH، $H\hat{O}C+\hat{C}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{B}=H\hat{O}C=\alpha$.
اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB،
$$\sin\alpha=\sin\hat{B}=\frac{OH}{OB}=\frac{۲}{OB}\Rightarrow OB=\frac{۲}{\sin\alpha}$$
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCH،
$$\cos\alpha=\frac{OH}{OC}=\frac{۲}{OC}\Rightarrow OC=\frac{۲}{\cos\alpha}$$
بنابراین
$$OB+OC=\frac{۲}{\sin\alpha}+\frac{۲}{\cos\alpha}$$



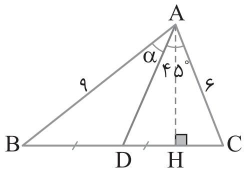
۳۷۸- گزینهٔ ۲ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، $\sin\alpha=\frac{y}{۴}$. بنابراین باید مقدار y را به‌دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH، $x^۲+y^۲=۹$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،
$$y^۲+(۶-x)^۲=۱۶\Rightarrow y^۲+x^۲-۱۲x+۳۶=۱۶$$
با جای‌گذاری $x^۲+y^۲=۹$ به‌دست می‌آید
$$۹-۱۲x+۳۶=۱۶\Rightarrow ۱۲x=۲۹\Rightarrow x=\frac{۲۹}{۱۲}$$
$$\xrightarrow{x^۲+y^۲=۹}(\frac{۲۹}{۱۲})^۲+y^۲=۹\Rightarrow y^۲=\frac{۴۵۵}{۱۴۴}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۱۲}$$
و در نتیجه
$$\sin\alpha=\frac{\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۱۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۴۵۵}}{۴۸}$$



۳۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که چون مثلث‌های ABD و ACD در ارتفاع وارد از رأس A مشترک‌اند، پس $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BD}{\frac{۱}{۲}AH\times CD}=\frac{BD}{CD}=۱$. بنابراین

$$S_{ABD}=S_{ACD}\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times AD\times\sin\alpha=\frac{۱}{۲}AC\times AD\times \sin ۴۵^\circ$$

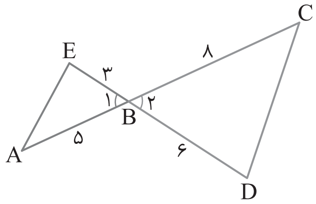
$$AB\times\sin\alpha=AC\times\sin۴۵^\circ\Rightarrow ۹\times\sin\alpha=۶\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$



۳۸۰- گزینهٔ ۱ دقت کنید که در شکل زیر $\hat B_۱=\hat B_۲$، از طرف دیگر،

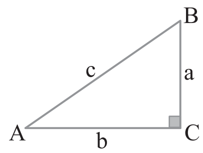
$$S_{ABE}=\frac{۱}{۲}\times۳\times۵\times\sin\hat B_۱,\quad S_{BCD}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۸\times\sin\hat B_۲$$

بنابراین



$$\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}=\frac{۵}{۱۶}$$

۳۸۱- گزینهٔ ۲ مطابق شکل،



$$\sin\hat B=\frac{b}{c}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow c=\frac{۵}{۴}b$$

از طرف دیگر $b+c=۷$. بنابراین

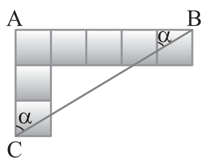
$$b+\frac{۵}{۴}b=۷\Rightarrow\frac{۹b}{۴}=۷\Rightarrow b=\frac{۲۸}{۹},\ c=\frac{۵}{۴}\times\frac{۲۸}{۹}=\frac{۳۵}{۹}$$

اکنون طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$c^۲=a^۲+b^۲\Rightarrow\left(\frac{۳۵}{۹}\right)^۲=a^۲+\left(\frac{۲۸}{۹}\right)^۲$$

$$a^۲=\frac{۳۵^۲-۲۸^۲}{۹^۲}=\frac{(۳۵-۲۸)(۳۵+۲۸)}{۹^۲}=\frac{۷\times۶۳}{۹^۲}=\frac{۷\times۷}{۹}=\frac{۴۹}{۹}\Rightarrow a=\frac{۷}{۳}$$

۳۸۲- گزینهٔ ۴ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. توجه کنید که بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب، $\alpha=A\hat CB$. در نتیجه

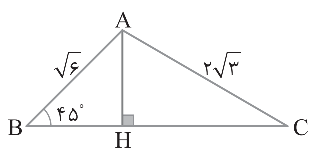


$$\tan\alpha=\tan A\hat CB=\frac{AB}{AC}=\frac{۵}{۳}$$

۳۸۳- گزینهٔ ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

$$\sin\hat B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin۴۵^\circ=\frac{AH}{\sqrt{۶}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AH}{\sqrt{۶}}\Rightarrow AH=\sqrt{۳}$$

از طرف دیگر چون $\tan\hat B=\tan۴۵^\circ=\frac{AH}{BH}$، پس $\frac{\sqrt{۳}}{BH}=۱$، بنابراین $BH=\sqrt{۳}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC، طبق قضیهٔ فیثاغورس،



$$AH^۲+HC^۲=AC^۲$$

$$(\sqrt{۳})^۲+HC^۲=(۲\sqrt{۳})^۲$$

$$HC^۲=۹\Rightarrow HC=۳$$

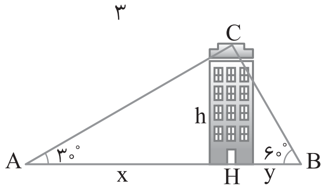
بنابراین $\frac{HC}{BH}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$.

۳۸۴- گزینهٔ ۲ ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH،

$$\tan۳۰^\circ=\frac{h}{x}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow x=\sqrt{۳}h,\quad \tan۶۰^\circ=\frac{h}{y}=\sqrt{۳}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}h$$

بنابراین $x+y=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}h$. از طرف دیگر $x+y=۲۴$، بنابراین

$$۲۴=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}h\Rightarrow h=۶\sqrt{۳}$$

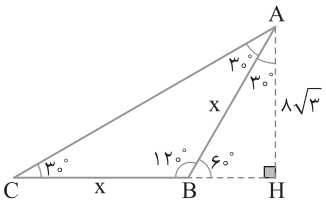


۳۸۵- گزینهٔ ۲ ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

$$\tan۶۰^\circ=\frac{AH}{BH}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{۸\sqrt{۳}}{BH}\Rightarrow BH=۸$$

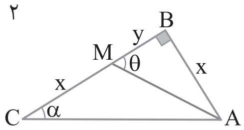
از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH،

$$\sin A\hat BH=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\sin۶۰^\circ=\frac{۸\sqrt{۳}}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۸\sqrt{۳}}{x}\Rightarrow x=۱۶$$



۳۸۶- گزینهٔ ۱ فرض کنید $CM=AB=x$ و $MB=y$. طبق فرض $\tan\theta=۳\tan\alpha$، بنابراین $\frac{x}{y}=\frac{۳x}{x+y}$. پس $x+y=۳y$، در نتیجه $x=۲y$. از این‌رو $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ و $\tan\theta=۲$. بنابراین $\cot\alpha=\frac{۳}{۲}$ و $\cot\theta=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه

$$\cot\alpha+\cot\theta=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲$$



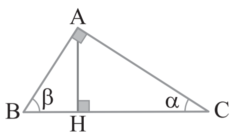
۳۸۷- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول در مثلث‌های قائم الزاویهٔ ABH و ACH،

$$\begin{cases}\cos\beta=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=\cos\beta\times AB\\ \cos\alpha=\frac{CH}{AC}\Rightarrow CH=\cos\alpha\times AC\end{cases}\Rightarrow\frac{BH}{HC}=\frac{AB\cos\beta}{AC\cos\alpha}$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویهٔ ABC،

$$\cos\beta=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{۴},\quad\cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{۴}$$

بنابراین $\frac{BH}{HC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^۲=\tan^۲\alpha$.



راه‌حل دوم در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$\sin\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{4}\Rightarrow AB=4\sin\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{4}\Rightarrow AC=4\cos\alpha$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC ،

$$\cos\alpha=\frac{HC}{AC}\Rightarrow HC=AC\cos\alpha=4\cos^2\alpha$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ،

$$\cos\beta=\frac{BH}{AB}\Rightarrow BH=AB\cos\beta=4\sin\alpha\cos\beta$$

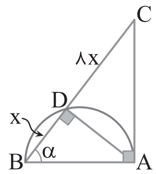
چون α و β متمم هستند، پس $\cos\beta=\sin\alpha$ و در نتیجه $BH=4\sin^2\alpha$. بنابراین $\frac{BH}{HC}=\frac{4\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha$.

۳۸۸- گزینهٔ ۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD ، $\cos\alpha=\frac{BD}{AB}=\frac{x}{AB}$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\cos\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{x+8x}=\frac{AB}{9x}$. بنابراین

$$\frac{x}{AB}=\frac{AB}{9x}\Rightarrow AB^2=9x^2\Rightarrow AB=3x$$

در نتیجه $\cos\alpha=\frac{x}{AB}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$.



۳۸۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\times BC\times\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times 8\times BC\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}BC \qquad (1)$$

همین‌طور،

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2}AB\times BC\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}AB\times BC \qquad (2)$$

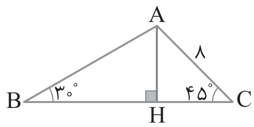
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$2\sqrt{2}BC=\frac{1}{4}AB\times BC\Rightarrow AB=8\sqrt{2}$$

راه‌حل دوم ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر در مثلث AHC،

$$\sin\hat{C}=\sin 45^\circ=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AH}{8}\Rightarrow AH=4\sqrt{2}$$

در مثلث ABH، $\sin\hat{B}=\sin 30^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{AB}\Rightarrow AB=8\sqrt{2}$



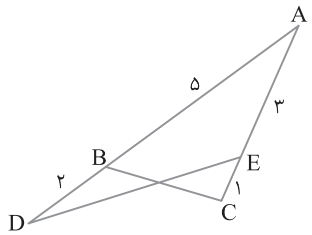
۳۹۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$S_{ADE}=\frac{1}{2}AD\times AE\times\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\sin\hat{A}=\frac{21}{2}\sin\hat{A}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\times 5\times 4\times\sin\hat{A}=10\sin\hat{A}$$

بنابراین $S_{ADE}+S_{ABC}=(\frac{21}{2}+10)\sin\hat{A}=\frac{41}{2}\sin\hat{A}$. پس

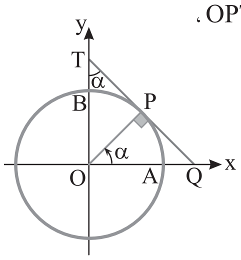
$$\frac{41}{2}\sin\hat{A}=\frac{41}{4}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{حاده است.}\ \alpha}\hat{A}=30^\circ$$



۳۹۱- گزینهٔ ۴ انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ 230° در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin 230^\circ$ و $\cos 230^\circ$ اعدادی منفی هستند. انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ 310° در ربع چهارم قرار دارد، پس $\sin 310^\circ$ عددی منفی و $\cos 310^\circ$ عددی مثبت است.

۳۹۲- گزینهٔ ۴ از تساوی $\cos x\sqrt{1+\tan^2 x}=1$ واضح است که باید $\cos x>0$. بنابراین از تساوی $\tan x=-\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$، نتیجه می‌شود که $\tan x<0$. بنابراین انتهای کمان زاویهٔ x در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

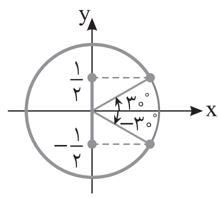
۳۹۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ POQ و OTQ در زاویهٔ حادهٔ رأس Q مشترک‌اند، پس زاویهٔ حادهٔ دیگر آن‌ها نیز برابر است، یعنی $O\hat{T}Q=P\hat{O}Q=\alpha$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPT ،



$$\sin\alpha=\frac{OP}{OT}=\frac{1}{OB+BT}=\frac{1}{1+BT}$$

$$1+BT=\frac{1}{\sin\alpha}\Rightarrow BT=\frac{1}{\sin\alpha}-1$$

۳۹۴- گزینهٔ ۴ از $-15^\circ\le\alpha\le 15^\circ$ نتیجه می‌گیریم $-30^\circ\le 2\alpha\le 30^\circ$. با توجه به شکل مقابل $-\frac{1}{2}\le\sin 2\alpha\le\frac{1}{2}$ و در نتیجه $-\frac{1}{2}\le\frac{m}{4}\le\frac{1}{2}$، یعنی $-2\le m\le 2$. بنابراین m می‌تواند مقادیر صحیح ± 2، ± 1 و صفر باشد.



۳۹۵- گزینهٔ ۱ می‌دانیم حداکثر مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\beta$ برابر ۱ است. بنابراین از تساوی $2\sin\alpha+5\cos\beta=7$ نتیجه می‌شود $\sin\alpha=1$ و $\cos\beta=1$. بنابراین $3\sin\alpha-4\cos\beta=3-4=-1$.

۳۹۶- گزینهٔ ۳ از $0^\circ\le\alpha\le 180^\circ$ نتیجه می‌شود $0\le\sin\alpha\le 1$. بنابراین

$$0\le 2\sin\alpha\le 2\Rightarrow 1\le 2\sin\alpha+1\le 3$$

$$\frac{1}{3}\le\frac{2\sin\alpha+1}{3}\le 1\Rightarrow 1\le\frac{3}{2\sin\alpha+1}\le 3$$

پس حداکثر مقدار عبارت برابر ۳ است.

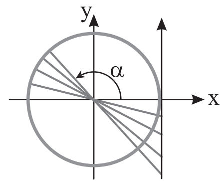
۳۹۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید زاویهٔ بین این دو ضلع α باشد. چون $\sin\alpha\le 1$، پس

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{6}\sin\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha\le\sqrt{3}$$

اگر زاویهٔ بین این دو ضلع 90° باشد، مساحت مثلث برابر $\sqrt{3}$ می‌شود. بنابراین بیشترین مقدار ممکن مساحت مثلث مورد نظر برابر $\sqrt{3}$ است.

۳۹۸- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $۹۰^\circ<\alpha\le۱۸۰^\circ$، آن‌گاه $\tan\alpha\le۰$. بنابراین

$$۲m+۱\le۰\Rightarrow m\le-\frac{۱}{۲}$$



۳۹۹- گزینهٔ ۳ چون خط از نقطهٔ $(۰,۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:

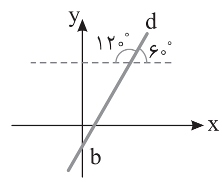
$$۳\times۰-a\times۲+۲\sqrt{۳}=۰\Rightarrow a=\sqrt{۳}$$

بنابراین معادلهٔ خط به‌صورت $۳x-\sqrt{۳}y+۲\sqrt{۳}=۰$ یا همان $y=\sqrt{۳}x+۲$ است که شیب آن $\sqrt{۳}$ است. پس $\tan\alpha=\sqrt{۳}$. بنابراین

$$\alpha=۶۰^\circ\Rightarrow\sin\alpha=\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴۰۰- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل رسم شده شیب خط برابر $\tan۶۰^\circ$ است و عرض از مبدأ آن برابر b است. از طرف دیگر در خط به معادلهٔ $y=ax-۲a+\sqrt{۳}$ شیب خط برابر a و عرض از مبدأ آن برابر $-۲a+\sqrt{۳}$ است.
بنابراین

$$a=\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳}\ ,\quad b=-۲a+\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=-\sqrt{۳}$$



۴۰۱- گزینهٔ ۱ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌های ۷۰°، ۱۷۰°، ۱۹۰° و ۲۶۰° به‌ترتیب در ناحیه‌های اول، دوم، سوم و سوم مثلثاتی است. پس $\tan۱۷۰^\circ$ عددی منفی است و $\tan۱۹۰^\circ$، $\cot۷۰^\circ$ و $\cot۲۶۰^\circ$ اعدادی مثبت هستند.

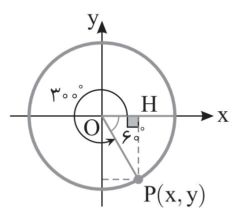
۴۰۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در مثلث OPH،

$$\sin۶۰^\circ=\frac{PH}{OP}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{PH}{۱}\Rightarrow PH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos۶۰^\circ=\frac{OH}{OP}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{OH}{۱}\Rightarrow OH=\frac{۱}{۲}$$

از طرف دیگر $x=OH$ و $y=-PH$. بنابراین

$$x=\frac{۱}{۲}\ ,\ y=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{y}{x-۱}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}-۱}=\sqrt{۳}$$

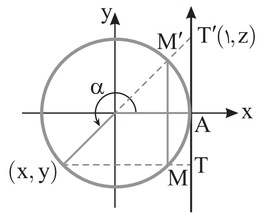


۴۰۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر واضح است که $\sin\alpha=y$ و $\tan\alpha=z$. بنابراین طول پاره‌خط TT' برابر است با

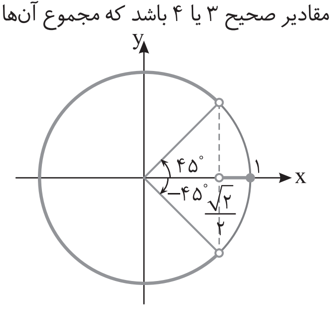
$$TT'=AT+AT'=|y|+|z|=-y+z=-\sin\alpha+\tan\alpha$$

از طرف دیگر، $MM'=۲|y|=-۲y=-۲\sin\alpha$. بنابراین

$$TT'-MM'=\tan\alpha-\sin\alpha-(-۲\sin\alpha)=\tan\alpha+\sin\alpha$$



۴۰۴- گزینهٔ ۳ وقتی $-۹۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$، $-۴۵^\circ<\frac{\alpha}{۲}<۴۵^\circ$ و مطابق شکل زیر، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos\frac{\alpha}{۲}\le۱$. در نتیجه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\frac{m}{۴}\le۱$، یعنی $۲\sqrt{۲}<m\le۴$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۳ یا ۴ باشد که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.



۴۰۵- گزینهٔ ۳ به جای $\cos^۲x$ قرار می‌دهیم $۱-\sin^۲x$. پس عبارت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A=۴(۱-\sin^۲x)-۲\sin x=-۴\sin^۲x-۲\sin x+۴$$

$$=-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱۷}{۴}$$

اکنون دو راه‌حل ارائه می‌کنیم.

راه‌حل اول چون $-۱\le\sin x\le۱$، پس

$$-۲\le۲\sin x\le۲\Rightarrow-\frac{۳}{۲}\le۲\sin x+\frac{۱}{۲}\le\frac{۵}{۲}$$

$$۰\le(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^۲\le\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow-\frac{۲۵}{۴}\le-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^۲\le۰$$

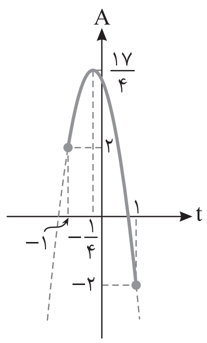
$$-۲\le\frac{۱۷}{۴}-(۲\sin x+\frac{۱}{۲})^۲\le\frac{۱۷}{۴}\Rightarrow-۲\le A\le\frac{۱۷}{۴}$$

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر $\frac{۱۷}{۴}-(-۲)=\frac{۲۵}{۴}$ است.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $t=\sin x$، آن‌گاه

$$A=-(۲t+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۱۷}{۴},\quad -۱\le t\le۱$$

نمودار A برحسب t به‌صورت مقابل است.



واضح است که $-۲\le A\le\frac{۱۷}{۴}$.

پس اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر $\frac{۱۷}{۴}-(-۲)=\frac{۲۵}{۴}$ است.

۴۰۶- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{3\cos\alpha+1}{\cos\alpha+3}=\frac{3\cos\alpha+9}{\cos\alpha+3}-\frac{8}{\cos\alpha+3}=3-\frac{8}{\cos\alpha+3}$$

از $-1\le\cos\alpha\le1$ نتیجه می‌شود

$$2\le\cos\alpha+3\le4\Rightarrow\frac{1}{4}\le\frac{1}{\cos\alpha+3}\le\frac{1}{2}\Rightarrow-4\le\frac{-8}{\cos\alpha+3}\le-2$$

$$-1\le3-\frac{8}{\cos\alpha+3}\le1\Rightarrow-1\le A\le1$$

بنابراین A نمی‌تواند برابر $\frac{9}{8}$ شود.

راه‌حل دوم اگر قرار دهیم $A=\frac{9}{8}$، آن‌گاه

$$\frac{3\cos\alpha+1}{\cos\alpha+3}=\frac{9}{8}\Rightarrow24\cos\alpha+8=9\cos\alpha+27$$

$$15\cos\alpha=19\Rightarrow\cos\alpha=\frac{19}{15}$$

چون مقدار $\cos\alpha$ نمی‌تواند برابر $\frac{19}{15}$ باشد، پس مقدار A هم نمی‌تواند برابر $\frac{9}{8}$ باشد.

۴۰۷- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر $0^\circ<\alpha<45^\circ$ آن‌گاه $\sin\alpha<\cos\alpha$ و اگر $45^\circ<\alpha<90^\circ$، آن‌گاه $\sin\alpha>\cos\alpha$. بنابراین $\sin20^\circ<\cos20^\circ$ و $\sin70^\circ>\cos70^\circ$. در نتیجه

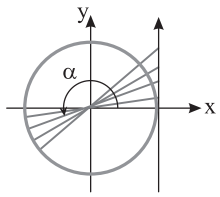
$$A=|\underbrace{\sin20^\circ-\cos20^\circ}_{-}|-|\underbrace{\sin70^\circ-\cos70^\circ}_{+}|$$

$$=-\sin20^\circ+\cos20^\circ-(\sin70^\circ-\cos70^\circ)$$

$$=-\sin20^\circ+\cos20^\circ-\sin70^\circ+\cos70^\circ$$

چون زاویه‌های 20° و 70° متمم یکدیگرند، پس $\sin20^\circ=\cos70^\circ$ و $\cos20^\circ=\sin70^\circ$ و در نتیجه $A=0$.

۴۰۸- گزینهٔ ۳ از $180^\circ\le\alpha<270^\circ$ نتیجه می‌شود $\tan\alpha\ge0$ و در نتیجه $m^3+m^2\ge0$، یعنی $m^2(m+1)\ge0$. چون $m^2\ge0$ همواره درست است، پس کافی است $m+1\ge0$ که در نتیجه $m\ge-1$.

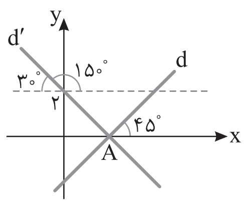


۴۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که شیب خط d' برابر $\tan150^\circ$ و عرض از مبدأ آن برابر ۲ است. پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+2$ است. بنابراین طول نقطهٔ A که محل برخورد خط d' با محور x است، به‌صورت روبه‌رو به‌دست می‌آید: $0=-\frac{1}{\sqrt{3}}x_A+2\Rightarrow x_A=2\sqrt{3}$

از طرف دیگر شیب خط d برابر $\tan45^\circ$ است و این خط از نقطهٔ A می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت $y=x+b$ است و اگر مختصات نقطهٔ A را در معادلهٔ این خط قرار دهیم، نتیجه می‌شود

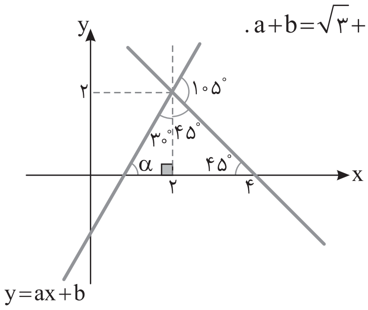
$$0=2\sqrt{3}+b\Rightarrow b=-2\sqrt{3}$$

پس معادلهٔ خط d به‌صورت $y=x-2\sqrt{3}$ است.



۴۱۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر، واضح است که $\alpha=60^\circ$ و در نتیجه $a=\tan\alpha=\tan60^\circ=\sqrt{3}$، یعنی معادلهٔ خط $y=\sqrt{3}x+b$ است و چون نقطهٔ $(2,2)$ روی خط قرار دارد، پس $2=\sqrt{3}\times2+b\Rightarrow b=2-2\sqrt{3}$

بنابراین $a+b=\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$.



۴۱۱- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5\Rightarrow\tan^2\alpha=4\Rightarrow\tan\alpha=\pm2$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم است، پس $\tan\alpha<0$، در نتیجه $\tan\alpha=-2$. بنابراین $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$، پس

$$\tan\alpha-\cot\alpha=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

۴۱۲- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\tan\alpha\cot\alpha=1$ مقدار m را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2m}(m+3)=1\Rightarrow m+3=2m\Rightarrow m=3$$

بنابراین $\cot\alpha=6$ و به کمک اتحاد $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ مقدار $\sin^2\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$1+6^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{1}{37}$$

۴۱۳- گزینهٔ ۴ مخرج مشترک می‌گیریم و عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{1+\sin10^\circ}+\frac{1}{1-\sin10^\circ}=\frac{1-\sin10^\circ+1+\sin10^\circ}{(1+\sin10^\circ)(1-\sin10^\circ)}$$

$$=\frac{2}{1-\sin^2 10^\circ}=\frac{2}{\cos^2 10^\circ}$$

۴۱۴- گزینهٔ ۳ در صورت کسر از $\sin15^\circ$ و در مخرج کسر از $\cos15^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{\sin15^\circ(1-\sin^2 15^\circ)}{\cos15^\circ(1-\cos^2 15^\circ)}=\frac{\sin15^\circ\times\cos^2 15^\circ}{\cos15^\circ\times\sin^2 15^\circ}=\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ}=\cot15^\circ$$

۴۱۵- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول در تساوی $3\sin^2x=1+4\cos^2x$ به جای $\sin^2x$ مقدار $1-\cos^2x$ قرار می‌دهیم و مقدار $\cos^2x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$3(1-\cos^2x)=1+4\cos^2x\Rightarrow3-3\cos^2x=1+4\cos^2x$$

$$7\cos^2x=2\Rightarrow\cos^2x=\frac{2}{7}$$

اکنون به کمک اتحاد $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ مقدار $\tan^2x$ را حساب می‌کنیم:

$$1+\tan^2x=\frac{1}{\frac{2}{7}}\Rightarrow\tan^2x=\frac{5}{2}$$

راه‌حل دوم ابتدا دو طرف معادلهٔ داده شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$3\sin^2 x=1+4\cos^2 x\Rightarrow 3\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}+4$$

چون $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$، پس

$$3\tan^2 x=1+\tan^2 x+4\Rightarrow 2\tan^2 x=5\Rightarrow \tan^2 x=\frac{5}{2}$$

۴۱۶- گزینهٔ ۴ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}=\frac{\sin\alpha(1+\frac{1}{\cos\alpha})}{\cos\alpha(1+\frac{1}{\sin\alpha})}=\tan\alpha\left(\frac{\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}}\right)$$
$$=\tan^2\alpha\left(\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\right)$$

واضح است که عبارت‌های $1+\cos\alpha$، $1+\sin\alpha$ و $\tan^2\alpha$ همگی همواره نامنفی هستند. پس در هر چهار ناحیه، عبارت فوق نامنفی است.

۴۱۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}$$
$$=\frac{1-\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$$

۴۱۸- گزینهٔ ۲ عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A=\cot^2 x+\underbrace{\cot^2 x\tan^2 x}_{1}+\tan^2 x+\underbrace{\tan^2 x\cot^2 x}_{1}$$
$$=\tan^2 x+\cot^2 x+2=(\tan x+\cot x)^2$$

بنابراین $\sqrt{A}=\sqrt{(\tan x+\cot x)^2}=|\tan x+\cot x|$. چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\tan x<0$ و $\cot x<0$. در نتیجه $\tan x+\cot x<0$. بنابراین $\sqrt{A}=-\tan x-\cot x$

۴۱۹- گزینهٔ ۳ طرفین تساوی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$$
$$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$$

بنابراین

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-2(\frac{3}{8})^2=\frac{23}{32}$$

۴۲۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

پس

$$\frac{2}{3}=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Rightarrow\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{1}{6}$$
$$(\sin\alpha\cos\alpha)^2=\frac{1}{6}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع دوم است، پس $\sin\alpha>0$ و $\cos\alpha<0$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<0$. پس $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{-\sqrt{6}}{6}$.

۴۲۱- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$ مقدار $\sin x$ را حساب می‌کنیم:

$$1+(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow\sin^2 x=\frac{9}{13}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{3}{\sqrt{13}}$$

چون انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ سوم است، پس $\sin x<0$، بنابراین $\sin x=-\frac{3}{\sqrt{13}}$. اکنون با استفاده از اتحاد $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ مقدار $\cos x$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{2}{3}=\frac{\cos x}{-\frac{3}{\sqrt{13}}}\Rightarrow\cos x=-\frac{2}{\sqrt{13}}$$

بنابراین $2\cos x-\sin x=-\frac{4}{\sqrt{13}}-(-\frac{3}{\sqrt{13}})=-\frac{1}{\sqrt{13}}$.

۴۲۲- گزینهٔ ۱ از اتحاد $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sqrt{k-1})^2+(\sqrt{2k-3})^2=1\Rightarrow k-1+2k-3=1\Rightarrow 3k=5\Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

بنابراین $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$، $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$ و در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\sqrt{2}$$

۴۲۳- گزینهٔ ۴

$$\frac{(1+\tan20^\circ)(1-\cot20^\circ)}{(1+\cot20^\circ)(1-\tan20^\circ)}=\frac{1-\cot20^\circ+\tan20^\circ-\tan20^\circ\cot20^\circ}{1-\tan20^\circ+\cot20^\circ-\tan20\cot20^\circ}$$
$$=\frac{1-\cot20^\circ+\tan20^\circ-1}{1-\tan20^\circ+\cot20^\circ-1}=\frac{\tan20^\circ-\cot20^\circ}{\cot20^\circ-\tan20^\circ}=-1$$

۴۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cot x=\frac{1}{\tan x}$. بنابراین

$$\frac{1+\cot^2 x}{\cot x}=\frac{1+\frac{1}{\tan^2 x}}{\frac{1}{\tan x}}=\frac{\tan^2 x+1}{\tan x}$$

در نتیجه $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\times\frac{1+\cot^2 x}{\cot x}=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\times\frac{\tan^2 x+1}{\tan x}=1$.

۴۲۵- گزینهٔ ۱ تساوی داده شده را به‌صورت $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sin\alpha$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\cos\alpha=\sin^2\alpha\quad(*)$$

با استفاده از اتحاد $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ تساوی داده شده به‌صورت $\cos\alpha=1-\cos^2\alpha$ درمی‌آید. پس

$$\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

از تساوی $(*)$ مشخص است که $\cos\alpha$ عددی مثبت است، پس

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

۴۲۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر دو طرف تساوی فرض مسئله را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{9}=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{4}{9}$. اکنون توجه کنید که

$$\tan x+\cot x=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $\frac{9}{4}$ است.

۴۲۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

درنتیجه $2=(\frac{3}{4})^2+(\sin x+\cos x)^2$. بنابراین $(\sin x+\cos x)^2=\frac{23}{16}$.

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x>0$ و $\sin x>0$. بنابراین

$$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{23}}{4}$$

۴۲۸- گزینهٔ ۳ دوطرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x+\cot x)^2=(\sqrt{5})^2\Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x+2\underbrace{\tan x\cot x}_{1}=5$$

$$\tan^2 x+\cot^2 x+2=5$$

پس $\tan^2 x+\cot^2 x=3$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan^2 x+\cot^2 x)^2=3^2\Rightarrow \tan^4 x+\cot^4 x+2\underbrace{\tan^2 x\cot^2 x}_{1}=9$$

$$\tan^4 x+\cot^4 x+2=9$$

پس $\tan^4 x+\cot^4 x=7$.

۴۲۹- گزینهٔ ۳ عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\cos\alpha-\sqrt{\tan^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}$$

$$=\cos\alpha-\sqrt{\tan^2\alpha\sin^2\alpha}=\cos\alpha-|\tan\alpha\sin\alpha|$$

چون $180^\circ<\alpha<270^\circ$، پس $\sin\alpha<0$ و $\tan\alpha>0$، در نتیجه $\sin\alpha\tan\alpha<0$. بنابراین

$$A=\cos\alpha+\tan\alpha\sin\alpha=\cos\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

۴۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}}=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}}$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}}=\sqrt{1+2|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون $315^\circ<\alpha<360^\circ$، پس $\sin\alpha<0$ و $\cos\alpha>0$. بنابراین $\sin\alpha\cos\alpha<0$، پس

$$A=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|$$

چون $\sin\alpha<0$ و $\cos\alpha>0$، پس $\sin\alpha-\cos\alpha<0$ و در نتیجه

$$A=-\sin\alpha+\cos\alpha$$

۴۳۱- گزینهٔ ۳ از تساوی $\frac{5\sin x}{2\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود $10\sin x=2\sin x+\cos x$. بنابراین $8\sin x=\cos x$ و در نتیجه $\frac{\cos x}{\sin x}=8$، پس $\cot x=8$.

۴۳۲- گزینهٔ ۱ از اتحاد $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ نتیجه می‌شود

$$1+\left(\sqrt{\frac{m+2}{2m+5}}\right)^2=\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{m+2}{3m+7}}\right)^2}$$

$$1+\frac{m+2}{2m+5}=\frac{3m+7}{m+2}\Rightarrow\frac{2m+5+m+2}{2m+5}=\frac{3m+7}{m+2}$$

$$\frac{3m+7}{2m+5}=\frac{3m+7}{m+2}\Rightarrow 2m+5=m+2\Rightarrow m=-3$$

(توجه کنید که $3m+7$ نمی‌تواند صفر باشد). بنابراین

$$\tan x=\sqrt{\frac{-3+2}{2(-3)+5}}=1$$

۴۳۳- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ و مخرج مشترک گیری به‌دست می‌آید

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}$$

۴۳۴- گزینهٔ ۴ چون $\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ=1$، می‌توان نوشت

$$\frac{\sin^2 15^\circ}{1+\cos 15^\circ}-\frac{\cos^2 15^\circ}{1+\sin 15^\circ}+\cos 15^\circ=\frac{1-\cos^2 15^\circ}{1+\cos 15^\circ}-\frac{1-\sin^2 15^\circ}{1+\sin 15^\circ}+\cos 15^\circ$$

$$=\frac{(1-\cos 15^\circ)(1+\cos 15^\circ)}{1+\cos 15^\circ}-\frac{(1-\sin 15^\circ)(1+\sin 15^\circ)}{1+\sin 15^\circ}+\cos 15^\circ$$

$$=1-\cos 15^\circ-(1-\sin 15^\circ)+\cos 15^\circ=\sin 15^\circ$$

۴۳۵- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر A را بر $\cos^3 x$ تقسیم می‌کنیم و از اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-\frac{2\cos x}{\cos^3 x}}{\frac{4\sin x}{\cos^3 x}-\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}}=\frac{\tan^3 x-\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{4\tan x}{\cos^2 x}-1}$$

$$=\frac{\tan^3 x-2(1+\tan^2 x)}{4\tan x(1+\tan^2 x)-1}=\frac{3^3-2(1+3^2)}{4\times 3(1+3^2)-1}=\frac{7}{119}=\frac{1}{17}$$

۴۳۶- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\sin^3 x-\cos^3 x=(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)$$

$$=(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)$$

بنابراین باید حاصل $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{4}{9}$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{5}{18}$. در این صورت حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $\sin^3 x-\cos^3 x=(\frac{2}{3})(1+\frac{5}{18})=\frac{2}{3}\times\frac{23}{18}=\frac{23}{27}$.

راه‌حل دوم طرفین تساوی $\sin x-\cos x=\frac{2}{3}$ را به توان سه می‌رسانیم

$$(\sin x-\cos x)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x+3\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=\frac{8}{27}$$

$$\sin^3 x-\cos^3 x-3\sin x\cos x(\sin x-\cos)=\frac{8}{27}$$

بنابراین باید حاصل $\sin x\cos x$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{4}{9}$$

بنابراین $\sin x\cos x=\frac{5}{18}$، در نتیجه

$$\sin^3 x-\cos^3 x-3\times\frac{5}{18}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}\Rightarrow \sin^3 x-\cos^3 x=\frac{23}{27}$$

۴۳۷- گزینهٔ ۴ از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^3 x-\cot^3 x=(\tan x-\cot x)^3$$
$$+3\tan x\cot x(\tan x-\cot x)$$

چون $\tan x\cot x=1$ و $\tan x-\cot x=3$، پس

$$\tan^3 x-\cot^3 x=3^3+3\times1\times3=36$$

۴۳۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\tan\alpha$، آن‌گاه $\cot\alpha=\frac{1}{t}$ و معادلهٔ داده شده به‌صورت $t-\frac{2}{t}=\sqrt{2}$ درمی‌آید. دو طرف این معادله را در t ضرب کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$t^2-2=\sqrt{2}t\Rightarrow t^2-\sqrt{2}t-2=0\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{2}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع اول است، پس $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}<0$ قابل قبول نیست، در نتیجه $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$.

بنابراین $\tan\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$، در نتیجه

$$\tan^2\alpha=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{2}=3+\sqrt{5}$$

۴۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر دوم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$1-2\sin^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\cos^2 x(1-\tan^2 x)=\cos^2 x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

در نتیجه دومین کسر برابر با ۱ است. بنابراین حاصل عبارت برابر است با

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}+1=\frac{2\sin x}{\sin x-\cos x}$$

با تقسیم صورت و مخرج این کسر بر $\cos x$ معلوم می‌شود که کسر برابر است با $\frac{2\tan x}{\tan x-1}$.

۴۴۰- گزینهٔ ۳ به جای $\cos^2 x$ قرار می‌دهیم $1-\sin^2 x$. عبارت به شکل زیر است:

$$A=1-\sin^2 x-2\sin x=1-(\sin^2 x+2\sin x+1-1)$$
$$=1-(\sin x+1)^2+1=2-(\sin x+1)^2$$

چون $-1\le\sin x\le1$، پس

$$0\le\sin x+1\le2\Rightarrow 0\le(\sin x+1)^2\le4\Rightarrow -4\le-(\sin x+1)^2\le0$$

$$-2\le2-(\sin x+1)^2\le2\Rightarrow -2\le A\le2$$

بنابراین اختلاف حداکثر و حداقل مقدار A برابر ۴ واحد است.

۴۴۱- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** از تساوی $\tan x=\frac{1}{3}$ نتیجه می‌شود $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{3}$، یعنی $\cos x=3\sin x$. در عبارت A به جای $\cos x$ قرار می‌دهیم $3\sin x$. در این صورت $A=\frac{2\sin x+3\sin x}{\sin x+9\sin x}=\frac{5\sin x}{10\sin x}=\frac{1}{2}$.

راه‌حل دوم صورت و مخرج عبارت A را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم تا A برحسب $\tan x$ نوشته شود:

$$A=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{3\cos x}{\cos x}}=\frac{2\tan x+1}{\tan x+3}$$

اکنون با قرار دادن $\frac{1}{3}$ به جای $\tan x$ در عبارت فوق، مقدار A به‌دست می‌آید $A=\frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}+3}=\frac{1}{2}$.

۴۴۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که $\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$ و $\cot 15^\circ=\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$. بنابراین

$$A=\frac{\cot^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}=\frac{\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}-\cos^2 15^\circ}{\frac{\sin^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}-\sin^2 15^\circ}$$

$$=\frac{\frac{\cos^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ\sin^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\cos^2 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}}=\frac{\frac{\cos^2 15^\circ(1-\sin^2 15^\circ)}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^2 15^\circ(1-\cos^2 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ}}$$

$$=\frac{\frac{\cos^4 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}}{\frac{\sin^4 15^\circ}{\cos^2 15^\circ}}=\frac{\cos^6 15^\circ}{\sin^6 15^\circ}=\cot^6 15^\circ$$

راه‌حل دوم کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=\frac{\cot^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ}{\tan^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}=\frac{\cot^2 15^\circ(1-\sin^2 15^\circ)}{\tan^2 15^\circ(1-\cos^2 15^\circ)}$$

$$=\frac{\cot^2 15^\circ\cos^2 15^\circ}{\frac{1}{\cot^2 15^\circ}(\sin^2 15^\circ)}=\cot^4 15^\circ\left(\frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ}\right)$$

$$=\cot^4 15^\circ\cot^2 15^\circ=\cot^6 15^\circ$$

۴۴۳- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$(\frac{1}{\cos 20^\circ}+\tan 20^\circ)(1-\sin 20^\circ)=(\frac{1}{\cos 20^\circ}+\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ})(1-\sin 20^\circ)$$

$$=\frac{1}{\cos 20^\circ}(1+\sin 20^\circ)(1-\sin 20^\circ)=\frac{1}{\cos 20^\circ}(1-\sin^2 20^\circ)$$

$$=\frac{1}{\cos 20^\circ}(\cos^2 20^\circ)=\cos 20^\circ$$

۴۴۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول فرض کنید

$$B=\sqrt{1+\cos 36^\circ}+\sqrt{1-\cos 36^\circ}$$

در نتیجه

$$B^2=1+\cos 36^\circ+1-\cos 36^\circ+2\sqrt{(1-\cos 36^\circ)(1+\cos 36^\circ)}$$

$$=2+2\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}=2+2\sqrt{\sin^2 36^\circ}=2+2\sin 36^\circ$$

چون $B>0$، پس $B=\sqrt{2(1+\sin 36^\circ)}$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر با $\sqrt{2}$ است.

راه‌حل دوم می‌دانیم (درس هفتم این فصل را ببینید)

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x\,,\quad 1-\cos 2x=2\sin^2 x$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

بنابراین

$$\frac{\sqrt{1+\cos 36^\circ}+\sqrt{1-\cos 36^\circ}}{\sqrt{1+\sin 36^\circ}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\cos^2 18^\circ}+\sqrt{2\sin^2 18^\circ}}{\sqrt{\sin^2 18^\circ+\cos^2 18^\circ+2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\cos 18^\circ+\sin 18^\circ)}{\sqrt{(\sin 18^\circ+\cos 18^\circ)^2}}=\frac{\sqrt{2}(\cos 18^\circ+\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ+\cos 18^\circ}=\sqrt{2}$$

۴۴۵- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$3(1-\cos^2\alpha)-5\cos\alpha+5=0\Rightarrow 3\cos^2\alpha+5\cos\alpha-8=0$$

اگر فرض کنیم $t=\cos\alpha$، می‌توانیم معادله را به شکل $3t^2+5t-8=0$ بنویسیم که چون مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یکی از جواب‌های آن $t=1$ و دیگری $t=\frac{-8}{3}$ است. چون $\cos\alpha=-\frac{8}{3}$ قابل قبول نیست، پس $\cos\alpha=1$ و در نتیجه $\cos^6\alpha=1$.

راه‌حل دوم $\alpha=0$ در معادله صدق می‌کند، پس کافی است مقدار $\cos^6\alpha$ را به ازای $\alpha=0$ حساب کنیم، که برابر ۱ می‌شود.

۴۴۶- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\tan x+\cot x)^2=(\sqrt{5})^2\Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x+2\underbrace{\tan x\cot x}_{1}=5$$

$$\tan^2 x+\cot^2 x+2=5$$

پس $\tan^2 x+\cot^2 x=3$. اکنون دو طرف این تساوی را به توان سه می‌رسانیم:

$$(\tan^2 x+\cot^2 x)^3=3^3$$

$$\tan^6 x+3\tan^4 x\cot^2 x+3\tan^2 x\cot^4 x+\cot^6 x=27$$

$$\tan^6 x+\cot^6 x+3\tan^2 x\cot^2 x(\tan^2 x+\cot^2 x)=27$$

با توجه به اینکه $\tan^2 x\cot^2 x=1$ و $\tan^2 x+\cot^2 x=3$ نتیجه می‌شود

$$\tan^6 x+\cot^6 x+9=27\Rightarrow \tan^6 x+\cot^6 x=18$$

۴۴۷- گزینهٔ ۲ دو طرف تساوی داده شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2}{\cos^2 x}$$

با توجه به اتحادهای $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$، تساوی قبلی را طوری می‌نویسیم که در آن فقط $\tan x$ وجود داشته باشد:

$$\tan^2 x+3-2\tan x=2(1+\tan^2 x)\Rightarrow \tan^2 x+2\tan x-1=0$$

بنابراین $\tan x=-1\pm\sqrt{2}$.

۴۴۸- گزینهٔ ۲ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=\sqrt{1-2\sqrt{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}}=\sqrt{1-2\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}$$

$$=\sqrt{1-2\sqrt{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}}=\sqrt{1-2|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

چون $\alpha=200^\circ$، پس $\sin\alpha<0$، $\cos\alpha<0$ و در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha>0$.

بنابراین عبارت A به شکل زیر درمی‌آید:

$$A=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=|\sin 200^\circ-\cos 200^\circ|$$

توجه کنید که $\sin 200^\circ-\cos 200^\circ>0$. بنابراین $A=\sin 200^\circ-\cos 200^\circ$.

۴۴۹- گزینهٔ ۳ ابتدا صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

صورت کسر

$$\sin^3 40^\circ-\cos^3 40^\circ$$

$$=(\sin 40^\circ-\cos 40^\circ)(\sin^2 40^\circ+\sin 40^\circ\cos 40^\circ+\cos^2 40^\circ)$$

$$=(\sin 40^\circ-\cos 40^\circ)(1+\sin 40^\circ\cos 40^\circ)$$

مخرج کسر

$$\cos 40^\circ+\cos^2 40^\circ\sin 40^\circ=\cos 40^\circ(1+\cos 40^\circ\sin 40^\circ)$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با

$$\frac{\sin 40^\circ-\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}-1=\tan 40^\circ-1$$

در نتیجه حاصل عبارت مورد نظر برابر $\tan 40^\circ$ است.

۴۵۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{\tan^3 x-\cot^3 x}{\tan x-\cot x}$$

$$=\frac{(\tan x-\cot x)(\tan^2 x+\tan x\cot x+\cot^2 x)}{\tan x-\cot x}$$

$$=\tan^2 x+1+\cot^2 x=7$$

بنابراین $\tan^2 x+\cot^2 x=6$. در نتیجه

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=1+\cot^2 x+1+\tan^2 x$$

$$=2+\tan^2 x+\cot^2 x=2+6=8$$

۴۵۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که 36° برابر با $\frac{36^\circ}{180^\circ}\pi=\frac{\pi}{5}$ رادیان است. بنابراین اندازهٔ زاویهٔ سوم مثلث برابر است با $\pi-(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10})=\frac{\pi}{2}$ که این زاویه از بقیه بزرگ‌تر است.

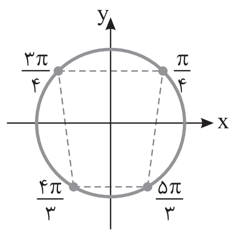
۴۵۲- گزینهٔ ۴ اگر اندازهٔ زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه $D\times R=\frac{۵\pi}{۴}$، بنابراین $R=\frac{۵\pi}{۴D}$.

از طرف دیگر، $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$. بنابراین

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۵\pi}{۴D}}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{۵}{۴D}\Rightarrow D^۲=\frac{۹۰۰^\circ}{۴}\Rightarrow D=۱۵^\circ$$

بنابراین اندازهٔ این زاویه برابر ۱۵° است.

۴۵۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل زیر، چهارضلعی حاصل ذوزنقه است.



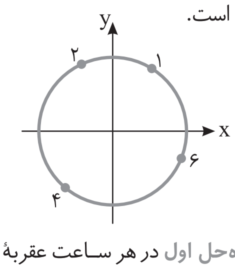
۴۵۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر به زاویه‌ای مضرب‌های زوج π را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویهٔ جدید، با زاویهٔ اولیه هم‌انتها است. اکنون توجه کنید که

$$-۵۶۰^\circ+۴\pi=-۵۶۰^\circ+۷۲۰^\circ=۱۶۰^\circ$$

از طرف دیگر، چون اختلاف -۵۶۰° با هیچ‌یک از زاویه‌های داده شدهٔ دیگر مضربی زوج از π نیست، پس با هیچ‌یک از آن‌ها هم‌انتها نیست.

۴۵۵- گزینهٔ ۴ زاویهٔ بین هر دو کابین متوالی $\frac{۲\pi}{۲۰}=\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان است. از طرف دیگر، $\frac{۴۸\pi}{۵}=۸\pi+\frac{۸\pi}{۵}=۸\pi+۱۶\times\frac{\pi}{۱۰}$. وقتی چرخ‌وفلک ۴ دور کامل می‌زند، یعنی ۸π رادیان می‌چرخد، هر کابین در جای اولیهٔ خود قرار می‌گیرد. سپس چرخ‌وفلک به اندازهٔ $۱۶\times\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان دیگر دوران می‌کند که کابین شمارهٔ یک به مکان فعلی ۱۶ کابین جلوتر، یعنی کابین هفدهم منتقل می‌شود.

۴۵۶- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، واضح است که عرض نقطه‌ای که انتهای کمان نظیر زاویهٔ ۴ رادیان است، کوچک‌تر از عرض بقیهٔ نقاط است، پس $\sin ۴$ از بقیه کوچک‌تر است.



۴۵۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** در هر ساعت عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{۱}{۱۲}$ دور می‌چرخد که معادل $\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. بنابراین

$$\frac{۶۰}{x}=\frac{\frac{\pi}{۶}}{\frac{۵\pi}{۸}}\Rightarrow x=۲۲۵\ \text{دقیقه}$$

راه‌حل دوم می‌دانیم در هر دقیقه، عقربهٔ ساعت‌شمار $(۰/۵)^\circ$ یا $\frac{\pi}{۳۶۰}$ رادیان طی می‌کند، پس $\frac{۱}{x}=\frac{\frac{\pi}{۳۶۰}}{\frac{۵\pi}{۸}}$، بنابراین $x=\frac{\frac{۵\pi}{۸}}{\frac{\pi}{۳۶۰}}=۲۲۵$ دقیقه.

۴۵۸- گزینهٔ ۲ طول کمان AB برابر است با $۴\pi\alpha$. از طرف دیگر طول کمان ACB برابر است با محیط دایره منهای طول کمان AB یعنی $۸\pi^۲-۴\pi\alpha$. بنابراین

$$۸\pi^۲-۴\pi\alpha=۴\pi\alpha+\pi\Rightarrow ۸\alpha=۸\pi-۱\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{۱}{۸}$$

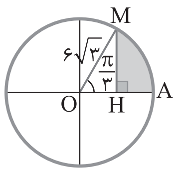
۴۵۹- گزینهٔ ۱ ۱۶ کابین در این چرخ‌و فلک وجود دارد. پس زاویهٔ بین دو کابین متوالی برابر $\frac{۲\pi}{۱۶}=\frac{\pi}{۸}$ است. بنابراین زاویهٔ متناظر به کمان $P_۰P_۱$ برابر $\frac{۷\pi}{۸}$ است. بنابراین

$$\widehat{P_۰P_۱}=r\theta=۴۰\times\frac{۷\pi}{۸}=۳۵\pi\ \text{متر}$$

۴۶۰- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر،

$$\widehat{AM}=۶\sqrt{۳}\times\frac{\pi}{۳}=۲\sqrt{۳}\pi\ ,\qquad MH=۶\sqrt{۳}\sin\frac{\pi}{۳}=۹$$

$$OH=۶\sqrt{۳}\cos\frac{\pi}{۳}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow AH=۶\sqrt{۳}-۳\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$$



بنابراین اندازهٔ محیط قسمت رنگی برابر است با

$$۹+۳\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}\pi=۹+\sqrt{۳}(۳+۲\pi)$$

۴۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا ۴۰۰° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۴۰۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۲۰\pi}{۹}$$

بنابراین اگر اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر برحسب رادیان برابر x و اندازهٔ زاویهٔ کوچک‌تر برحسب رادیان برابر y باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}x+y=\frac{۲۰\pi}{۹}\\ x-y=\frac{۴\pi}{۹}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۴\pi}{۳}\\ y=\frac{۸\pi}{۹}\end{cases}$$

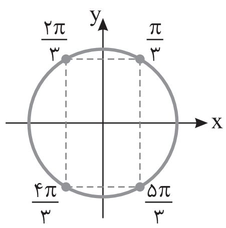
پس اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر برحسب رادیان $\frac{۴\pi}{۳}$ است.

۴۶۲- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم اندازهٔ زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $R=\frac{\pi}{۸۰}D-\frac{۵\pi}{۳۶}$. از طرف دیگر، $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$، بنابراین

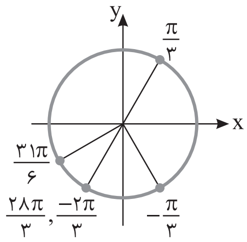
$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{\pi}{۸۰}D-\frac{۵\pi}{۳۶}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۱۸۰^\circ}{۸۰}D-\frac{۵\times۱۸۰^\circ}{۳۶}$$

$$\frac{۵}{۴}D=۲۵^\circ\Rightarrow D=۲۰^\circ$$

۴۶۳- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل مقابل، چهارضلعی حاصل مستطیل است.



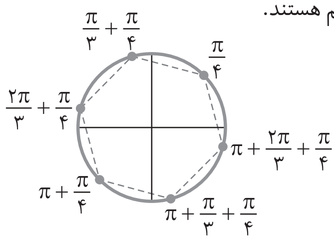
۴۶۴- گزینهٔ ۳ اگر به زاویه‌ای مضربی زوج از π را اضافه یا از آن کم کنیم، زاویهٔ جدید با زاویهٔ اولیه هم‌انتها است. اکنون توجه کنید که $\frac{28\pi}{3}=9\pi+\frac{\pi}{3}$ و $\frac{31\pi}{6}=5\pi+\frac{\pi}{6}$. بنابراین انتهای کمان‌های نظیر زاویه‌های داده شده مانند شکل روبه‌رو است. از روی شکل معلوم است که انتهای کمان نظیر زاویه‌های $\frac{28\pi}{3}$ و $\frac{-2\pi}{3}$ یکسان است.



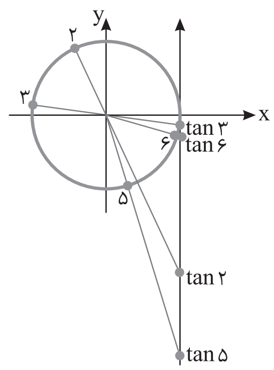
۴۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$k=3s \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{3s\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=s\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$k=3s+1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{(3s+1)\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=s\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$$
$$k=3s+2 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\frac{(3s+2)\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=s\pi+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$$

بنابراین انتهای کمان نظیر زاویه‌های مورد نظر مطابق شکل زیر رأس‌های یک شش‌ضلعی منتظم هستند.



۴۶۶- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $\tan 3$ بزرگ‌تر از اعداد دیگر است.



۴۶۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** چون عقربهٔ ساعت‌شمار در هر ساعت $\frac{1}{12}$ دایره را طی می‌کند، پس در هر ساعت $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$ رادیان را طی می‌کند. بنابراین در هر ۲۰ دقیقه، $\frac{20}{60}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{18}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی از ساعت ۹ تا ساعت $10:20'$ که یک ساعت و ۲۰ دقیقه زمان گذشته است، عقربهٔ ساعت‌شمار زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{18}$ رادیان را طی می‌کند، یعنی زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{2\pi}{9}$ رادیان.

راه‌حل دوم می‌دانیم عقربهٔ ساعت‌شمار در هر دقیقه $(0/5)^\circ$ یا $\frac{\pi}{360}$ رادیان طی می‌کند. از طرف دیگر از ساعت ۹ تا ساعت $10:20'$ برابر ۸۰ دقیقه است، پس

$$\frac{1}{80}=\frac{\frac{\pi}{360}}{x}\Rightarrow x=80\times\frac{\pi}{360}=\frac{2\pi}{9}\,\text{rad}$$

۴۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{25^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{5\pi}{36}\,\text{rad}$$

بنابراین $\widehat{AB}=6\times\frac{5\pi}{36}$ و $\widehat{CD}=9\times\frac{5\pi}{36}$. پس

$$\widehat{CD}-\widehat{AB}=\frac{45\pi}{36}-\frac{30\pi}{36}=\frac{15\pi}{36}=\frac{5\pi}{12}$$

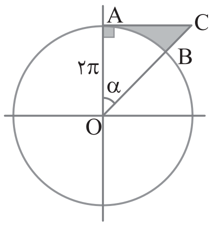
۴۶۹- گزینهٔ ۴ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان AB را α فرض می‌کنیم. مساحت قسمت رنگی از تفاضل مساحت مثلث OAC و قطاع OAB به‌دست می‌آید:

$$\triangle OAC: \tan\alpha=\frac{AC}{2\pi}\Rightarrow AC=2\pi\tan\alpha$$
$$S_{OAC}=\frac{OA\times AC}{2}=\frac{2\pi\times 2\pi\tan\alpha}{2}=2\pi^2\tan\alpha$$
$$S_{\text{قطاع}}=\frac{1}{2}r^2\alpha=\frac{1}{2}(2\pi)^2\alpha=2\pi^2\alpha$$

بنابراین $S_{\text{رنگی}}=2\pi^2\tan\alpha-2\pi^2\alpha=2\pi^2(\tan\alpha-\alpha)$، پس

$$2\pi^2(\tan\alpha-\alpha)=2\pi^2(1-\frac{\pi}{4})\Rightarrow\tan\alpha-\alpha=1-\frac{\pi}{4}$$

پس $\alpha=\frac{\pi}{4}$، در نتیجه طول کمان AB برابر است با $L=r\alpha=2\pi\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{2}$.



۴۷۰- گزینهٔ ۴ با جابه‌جایی نقطهٔ A به اندازهٔ 20° یا $\frac{\pi}{9}$ رادیان، ریسمان به اندازهٔ $l=r\theta=8\times\frac{\pi}{9}=\frac{8\pi}{9}$ سانتی‌متر جابه‌جا می‌شود. در نتیجه اگر فرض کنیم چرخ کوچک به اندازهٔ α رادیان جابه‌جا شده است، معلوم می‌شود

$$\frac{8\pi}{9}=6\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{4\pi}{27}$$

بنابراین اندازه‌ای که چرخ کوچک‌تر جابه‌جا شده است برحسب درجه برابر است با

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow D=180^\circ\times\frac{R}{\pi}=180^\circ\times\frac{4}{27}=\frac{80^\circ}{3}$$

۴۷۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

بنابراین

$$A=-\tan\alpha\cot\alpha+(-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha$$
$$=-\tan\alpha\cot\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=-1+1=0$$

۴۷۲- گزینهٔ ۲ چون $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، پس

$$\cos(x-90^\circ)=\cos(90^\circ-x)=\sin x$$

همچنین، $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$، پس

$$\cot(-x-180^\circ)=-\cot(180^\circ+x)=-\cot x$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sin x(-\cot x)=-\cos x$$

۴۷۳- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$A=\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)+\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)+\sin(3\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cot\theta$$

بنابراین $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tan\theta}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 0/4}=-\frac{3}{4}$.

۴۷۴- گزینهٔ ۲ چون $x+3y=\frac{\pi}{2}$، در نتیجه $2x+3y=\frac{\pi}{2}+x$. پس

$$\tan(2x+3y)=\tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x$$

۴۷۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\cos(\frac{3\pi}{2}-x)=-\sin x$ و $\sin(\frac{5\pi}{2}+x)=\cos x$. در نتیجه

$$-\sin x=2\cos x\Rightarrow\tan x=-2$$

۴۷۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\cos 510^\circ=\cos(360^\circ+150^\circ)=\cos 150^\circ$$

$$=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۷۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos\frac{43\pi}{6}=\cos(7\pi+\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۷۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{23\pi}{6}=\sin(4\pi-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{16\pi}{3}=\cos(5\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{35\pi}{4}=\tan(9\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\cot(-\frac{43\pi}{4})=-\cot\frac{43\pi}{4}=-\cot(11\pi-\frac{\pi}{4})=-(-\cot\frac{\pi}{4})=1$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-1)(1)=-\frac{1}{4}$.

۴۷۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$، آن‌گاه $\sin\alpha=\sin\beta$.

بنابراین

$$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi\Rightarrow\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}\ ,\quad \frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\pi\Rightarrow\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}$$

در نتیجه $A=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}}=-1$.

۴۸۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\pi$، آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$، در نتیجه $\cos\alpha+\cos\beta=0$. اکنون توجه کنید که

$$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi\Rightarrow\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$$

$$\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\pi\Rightarrow\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=0$$

پس $A=0$.

۴۸۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(3\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \sin(4\pi+\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \sin(5\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

بنابراین $A=3\sin\alpha+4\sin\alpha-5\sin\alpha=2\sin\alpha$.

۴۸۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha\ ,\qquad \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha\ ,\qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$

بنابراین $A=\frac{3\cot\alpha-\cot\alpha}{2\tan\alpha-\tan\alpha}=\frac{2\cot\alpha}{\tan\alpha}=2\cot^2\alpha$.

۴۸۳- گزینهٔ ۴ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)+2\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)-2\cos(3\pi+\alpha)}=3\Rightarrow\frac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{-\sin\alpha+2\cos\alpha}=3$$

$$\cos\alpha-2\sin\alpha=-3\sin\alpha+6\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha=5\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=5$$

بنابراین $\tan(\alpha-\frac{5\pi}{2})=-\tan(\frac{5\pi}{2}-\alpha)=-\cot\alpha=-\frac{1}{5}$.

۴۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\alpha=\frac{3\pi}{2}+\beta\Rightarrow\cot\alpha=\cot(\frac{3\pi}{2}+\beta)=-\tan\beta$$

بنابراین

$$\frac{1}{1-\cot\alpha}+\frac{1}{1+\cot\beta}=\frac{1}{1+\tan\beta}+\frac{1}{1+\cot\beta}=\frac{1+\cot\beta+1+\tan\beta}{(1+\tan\beta)(1+\cot\beta)}$$

$$=\frac{2+\tan\beta+\cot\beta}{1+\cot\beta+\tan\beta+\tan\beta\cot\beta}=\frac{2+\tan\beta+\cot\beta}{2+\tan\beta+\cot\beta}=1$$

۴۸۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$. در نتیجه از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$. اکنون توجه کنید که

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{169}{144}\Rightarrow\tan^2\alpha=\frac{25}{144}$$

چون α در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\tan\alpha<0$. بنابراین $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$.

۴۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos(-600^\circ)=\cos 600^\circ=\cos(2\times 360^\circ-120^\circ)$$

$$=\cos 120^\circ=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cot 675^\circ=\cot(2\times 360^\circ-45^\circ)=-\cot 45^\circ=-1$$

$$\tan 945^\circ=\tan(3\times 360^\circ-135^\circ)=-\tan 135^\circ=\tan 45^\circ=1$$

$$\sin(-330^\circ)=-\sin 330^\circ=-\sin(360^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

بنابراین حاصل کسر مورد نظر برابر است با $\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{1-\frac{1}{2}}=-3$.

۴۸۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan ۷۵^\circ=\tan(۹۰^\circ-۱۵^\circ)=\cot ۱۵^\circ=\frac{۱}{a}$$

$$\tan ۱۰۵^\circ=\tan(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=-\cot ۱۵^\circ=-\frac{۱}{a}$$

$$\tan ۱۶۵^\circ=\tan(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ)=-\tan ۱۵^\circ=-a$$

$$\tan ۲۵۵^\circ=\tan(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)=\cot ۱۵^\circ=\frac{۱}{a}$$

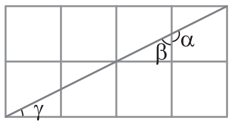
بنابراین $A=\dfrac{۲(\frac{۱}{a})-\frac{۱}{a}}{۳(-a)-\frac{۱}{a}}=\dfrac{\frac{۱}{a}}{\frac{-۳a^۲-۱}{a}}=\dfrac{۱}{-۳a^۲-۱}=\dfrac{-۱}{۳a^۲+۱}$.

۴۸۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin\frac{۱۰۱\pi}{۳}=\sin(\frac{۱۰۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})=\sin(۳۴\pi-\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۹۸\pi}{۳}=\cos(\frac{۹۹\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})=\cos(۳۳\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $A=۴(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲-۲(-\frac{۱}{۲})=۳+۱=۴$.



۴۸۹- گزینهٔ ۳ از نماد گذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\tan\alpha=\tan(۱۸۰^\circ-\beta)=-\tan\beta$$

از طرف دیگر $\beta+\gamma=۹۰^\circ$، پس $\tan\beta=\cot\gamma$. اکنون توجه کنید که $\cot\gamma=\frac{۴}{۲}=۲$. بنابراین $\tan\alpha=-۲$.

۴۹۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\tan\beta=\cot\alpha$ و در نتیجه $\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha\times\cot\alpha=۱$.

بنابراین

$$\frac{\pi}{۱۴}+\frac{۶\pi}{۱۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{۱۴}\tan\frac{۶\pi}{۱۴}=۱$$

$$\frac{۲\pi}{۱۴}+\frac{۵\pi}{۱۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan\frac{۲\pi}{۱۴}\tan\frac{۵\pi}{۱۴}=۱$$

$$\frac{۳\pi}{۱۴}+\frac{۴\pi}{۱۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan\frac{۳\pi}{۱۴}\tan\frac{۴\pi}{۱۴}=۱$$

پس $A=۱$.

۴۹۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\tan(۲\pi-\alpha)=-\tan\alpha,\quad \tan(۲\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

بنابراین $A=\dfrac{-\tan\alpha+۳\tan\alpha}{-\tan\alpha-\tan\alpha}=\dfrac{۲\tan\alpha}{-۲\tan\alpha}=-۱$.

۴۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲},\qquad \tan(\frac{۵\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳})=\cot\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲},\quad \cot(\frac{۷\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین $A=\dfrac{۴(\frac{۱}{۲})-۲(\frac{۱}{۲})}{۳(\frac{\sqrt{۳}}{۳})-۶(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})}=\dfrac{۱}{۳\sqrt{۳}}$.

۴۹۳- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ یکی از زوایا ۹۰° است. مثلاً فرض کنید $\hat{A}=۹۰^\circ$. پس $\sin\hat{A}=۱$ و $\cos\hat{A}=۰$. در این صورت زاویه‌های B و C متمم یکدیگرند، پس $\sin^۲\hat{C}=\cos^۲\hat{B}$، بنابراین ساده شدهٔ عبارت به شکل زیر است:

$$\frac{\cos^۲\hat{A}+\cos^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{C}}{\sin^۲\hat{A}+\sin^۲\hat{B}+\sin^۲\hat{C}}=\frac{۰+\sin^۲\hat{C}+\cos^۲\hat{C}}{۱+\sin^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{B}}=\frac{۰+۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم مثلث ABC را با زاویه‌های زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{A}=۹۰^\circ,\quad \hat{B}=۴۵^\circ,\quad \hat{C}=۴۵^\circ$$

در این صورت $\dfrac{\cos^۲\hat{A}+\cos^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{C}}{\sin^۲\hat{A}+\sin^۲\hat{B}+\sin^۲\hat{C}}=\dfrac{۰+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=\dfrac{۱}{۲}$.

۴۹۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin a=\sin(\frac{۵\pi}{۲}-b)=\cos b,\qquad \tan a=\tan(\frac{۵\pi}{۲}-b)=\cot b$$

بنابراین

$$\frac{\sin a+\tan a\tan b-۱}{\sin b-\cos^۲ a-\cos^۲ b+۱}=\frac{\cos b+\cot b\tan b-۱}{\sin b-\cos^۲ a-\sin^۲ a+۱}$$
$$=\frac{\cos b+۱-۱}{\sin b-۱+۱}=\frac{\cos b}{\sin b}=\cot b$$

۴۹۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$۳a+۲b=\pi\Rightarrow a+۲(a+b)=\pi\Rightarrow\frac{a}{۲}+(a+b)=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{a}{۲}=\frac{\pi}{۲}-(a+b)$$

بنابراین $\sin\frac{a}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۲}-(a+b))=\cos(a+b)=\frac{۳}{۵}$.

۴۹۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin ۴۱۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۵۰^\circ)=\sin ۵۰^\circ=\sin(۹۰^\circ-۴۰^\circ)=\cos ۴۰^\circ$$

$$\sin ۴۰۰^\circ=\sin(۳۶۰^\circ+۴۰^\circ)=\sin ۴۰^\circ$$

بنابراین

$$\sin^۲ ۴۱۰^\circ+\sin^۲ ۴۰۰^\circ=\cos^۲ ۴۰^\circ+\sin^۲ ۴۰^\circ=۱$$

همچنین $\tan ۷۳۱^\circ=\tan(۲\times۳۶۰^\circ+۱۱^\circ)=\tan ۱۱^\circ$. بنابراین

$$\tan ۷۳۱^\circ\times\cot ۱۱^\circ=\tan ۱۱^\circ\times\cot ۱۱^\circ=۱$$

بنابراین مقدار کسر مورد نظر برابر است با ۱.

۴۹۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\cos ۱۱۵^\circ=\cos(۹۰^\circ+۲۵^\circ)=-\sin ۲۵^\circ$$

$$\cos ۱۵۵^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۲۵^\circ)=-\cos ۲۵^\circ$$

$$\cos ۲۹۵^\circ=\cos(۲۷۰^\circ+۲۵^\circ)=\sin ۲۵^\circ$$

$$\cos ۳۳۵^\circ=\cos(۳۶۰^\circ-۲۵^\circ)=\cos ۲۵^\circ$$

بنابراین $A=\dfrac{-\sin ۲۵^\circ+۳\cos ۲۵^\circ}{۳\sin ۲۵^\circ+\cos ۲۵^\circ}$. صورت و مخرج کسر A را بر $\sin ۲۵^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{-\frac{\sin ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}+\frac{۳\cos ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}}{\frac{۳\sin ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}+\frac{\cos ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}}=\frac{-۱+۳\cot ۲۵^\circ}{۳+\cot ۲۵^\circ}=\frac{-۱+۳a}{۳+a}=\frac{۳a-۱}{a+۳}$$

۴۹۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan(\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\cot\frac{9\pi}{4}=\cot(2\pi+\frac{\pi}{4})=\cot\frac{\pi}{4}=1$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

بنابراین $A=-\frac{1}{2}\times 1-1\times\frac{1}{2}=-1$.

۴۹۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\sin\beta=\cos\alpha$. بنابراین

$$\frac{\pi}{16}+\frac{7\pi}{16}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{7\pi}{16}=\sin\frac{\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{16}+\frac{5\pi}{16}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{5\pi}{16}=\sin\frac{3\pi}{16}$$

پس

$$A=\cos^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}+\sin^2\frac{3\pi}{16}+\sin^2\frac{\pi}{16}$$

$$=(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16})+(\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16})=1+1=2$$

۵۰۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $\alpha+\beta=180^\circ$، آن‌گاه $\cos\beta=-\cos\alpha$. بنابراین

$$\cos 179^\circ=-\cos 1^\circ\ ,\quad \cos 178^\circ=-\cos 2^\circ,\ \dots\ ,$$

$$\cos 92^\circ=-\cos 88^\circ\ ,\quad \cos 91^\circ=-\cos 89^\circ$$

پس $A=\dfrac{\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cdots+\cos 89^\circ}{-\cos 1^\circ-\cos 2^\circ-\cdots-\cos 89^\circ}=-1$.

۵۰۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$. در نتیجه

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

۵۰۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\cos\hat{A}>0$ و $\sin\hat{B}<0$. اما از طرف دیگر،

$$\cos\hat{A}=\sqrt{1-\sin^2\hat{A}}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$$

$$\sin\hat{B}=-\sqrt{1-\cos^2\hat{B}}=-\sqrt{1-(-\frac{5}{13})^2}=-\frac{12}{13}$$

بنابراین

$$\cos(\hat{A}+\hat{B})=\cos\hat{A}\cos\hat{B}-\sin\hat{A}\sin\hat{B}$$

$$=\frac{4}{5}\times(-\frac{5}{13})-\frac{3}{5}\times(-\frac{12}{13})=\frac{16}{5\times 13}=\frac{16}{65}$$

۵۰۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\frac{3}{10}=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\frac{1}{2}=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

اگر این تساوی‌ها را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{2}=2\sin\alpha\cos\beta\Rightarrow\sin\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$$

۵۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

بنابراین

$$\sin 75^\circ+\cos 75^\circ=\sqrt{2}\sin(75^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 120^\circ$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

۵۰۵- گزینهٔ ۳ از فرض مسئله نتیجه می‌شود $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$، در نتیجه $\sin(\alpha-\beta)>0$، همچنین $\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$، بنابراین $\cos(\alpha+\beta)<0$، درنتیجه

$$\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$\sin 2\alpha=\sin((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=(-\frac{3}{5})(\frac{12}{13})+(-\frac{4}{5})(\frac{5}{13})=\frac{-36-20}{65}=-\frac{56}{65}$$

۵۰۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$61^\circ+29^\circ=90^\circ\Rightarrow\sin 29^\circ=\cos 61^\circ$$

$$31^\circ+59^\circ=90^\circ\Rightarrow\sin 59^\circ=\cos 31^\circ$$

بنابراین صورت کسر مورد نظر برابر است با

$$\sin 61^\circ\sin 31^\circ+\cos 61^\circ\cos 31^\circ=\cos(61^\circ-31^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

از طرف دیگر، مخرج کسر مورد نظر برابر است با

$$\sin 12^\circ\cos 18^\circ+\sin 18^\circ\cos 12^\circ=\sin(12^\circ+18^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

بنابراین، کسر مورد نظر برابر است با $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

۵۰۷- گزینهٔ ۲ ابتدا عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$A=2(\frac{1}{2}\sin 15^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15^\circ)$$

و در نتیجه

$$A=2(\cos 60^\circ\sin 15^\circ-\sin 60^\circ\cos 15^\circ)$$

$$=2\sin(15^\circ-60^\circ)=-2\sin 45^\circ=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

۵۰۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \cos(\pi+x)=-\cos x$$

همچنین

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$$

بنابراین عبارت موردنظر برابر است با

$$\frac{\sin x-(-\cos x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)}=\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)}=\sqrt{2}$$

۵۰۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\triangle ADE: DE=\sqrt{AE^{۲}-AD^{۲}}=\sqrt{۵^{۲}-۴^{۲}}=۳$$

$$\triangle ABC: AC=\sqrt{AB^{۲}+BC^{۲}}=\sqrt{۱۲^{۲}+۵^{۲}}=۱۳$$

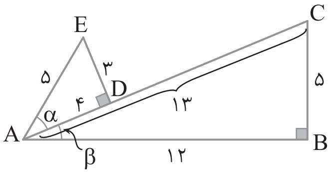
اکنون توجه کنید که

$$\cos\alpha=\frac{۴}{۵},\quad \sin\alpha=\frac{۳}{۵},\quad \cos\beta=\frac{۱۲}{۱۳},\quad \sin\beta=\frac{۵}{۱۳}$$

بنابراین

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{۴}{۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}-\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۱۳}$$

$$=\frac{۳۳}{۵\times۱۳}=\frac{۳۳}{۶۵}$$



۵۱۰- گزینهٔ ۳ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. در این صورت بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

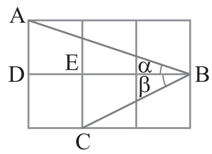
$$\triangle ABD: AB^{۲}=AD^{۲}+DB^{۲}\Rightarrow AB=\sqrt{۱۰}$$

$$\triangle BCE: BC^{۲}=BE^{۲}+CE^{۲}\Rightarrow BC=\sqrt{۵}$$

با توجه به شکل زیر $A\hat{B}C=\alpha+\beta$. بنابراین

$$\cos(A\hat{B}C)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{۲}{\sqrt{۵}}-\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



۵۱۱- گزینهٔ ۴ به کمک اتحادهای نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه، به‌دست می‌آید

$$\sin(x+\frac{\pi}{۳})-\cos(x+\frac{\pi}{۶})$$

$$=\sin x\cos\frac{\pi}{۳}+\sin\frac{\pi}{۳}\cos x-\cos x\cos\frac{\pi}{۶}+\sin x\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}\sin x=\sin x$$

۵۱۲- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $\cos\alpha$ و $\sin\beta$ را حساب می‌کنیم:

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\frac{۱}{۵}+\cos^{۲}\alpha=۱\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=\frac{۴}{۵}$$

$$\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi}\cos\alpha=-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\sin^{۲}\beta+\cos^{۲}\beta=۱\Rightarrow\sin^{۲}\beta+\frac{۹}{۲۵}=۱\Rightarrow\sin^{۲}\beta=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\xrightarrow{\frac{۳\pi}{۲}<\beta<۲\pi}\sin\beta=-\frac{۴}{۵}$$

بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\times\frac{۳}{۵}+(-\frac{۴}{۵})(-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})=\frac{۱۱\sqrt{۵}}{۲۵}$$

۵۱۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\frac{۱}{۳}=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$-\frac{۱}{۴}=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

اگر دو طرف تساوی‌های بالا را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}=۲\cos\alpha\cos\beta$$

بنابراین $\cos\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲۴}$.

۵۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\cos۶۵^\circ=\cos(۹۰^\circ-۲۵^\circ)=\sin۲۵^\circ$$

$$\sin۵۵^\circ=\sin(۹۰^\circ-۳۵^\circ)=\cos۳۵^\circ$$

در نتیجه

$$\sin۳۵^\circ\cos۲۵^\circ+\cos۶۵^\circ\sin۵۵^\circ$$

$$=\sin۳۵^\circ\cos۲۵^\circ+\sin۲۵^\circ\cos۳۵^\circ$$

$$=\sin(۳۵^\circ+۲۵^\circ)=\sin۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۵۱۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x+\cos x)$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x)$$

در نتیجه فرض مسئله به تساوی زیر تبدیل می‌شود

$$\sin x+\cos x=۳(\cos x-\sin x)$$

بنابراین

$$۴\sin x=۲\cos x\Rightarrow\tan x=\frac{۱}{۲}$$

۵۱۶- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را بر $۲\sqrt{۳}$ تقسیم می‌کنیم

$$۳\cos x+\sqrt{۳}\sin x=۳\Rightarrow\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}\cos x+\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}\sin x=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۶}\cos x+\sin\frac{\pi}{۶}\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۵۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sqrt{۳}=\tan۶۰^\circ=\frac{\sin۶۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}$.

بنابراین

$$\cos۱۰^\circ+\sqrt{۳}\sin۱۰^\circ=\cos۱۰^\circ+\frac{\sin۶۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}\sin۱۰^\circ$$

$$=\frac{\cos۶۰^\circ\cos۱۰^\circ+\sin۶۰^\circ\sin۱۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}=\frac{\cos(۶۰^\circ-۱۰^\circ)}{\frac{۱}{۲}}=۲\cos۵۰^\circ$$

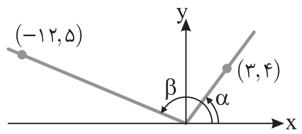
بنابراین $\frac{\cos۱۰^\circ+\sqrt{۳}\sin۱۰^\circ}{\cos۵۰^\circ}=\frac{۲\cos۵۰^\circ}{\cos۵۰^\circ}=۲$.

۵۱۸- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل معلوم می‌شود که

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \sin\beta=\frac{5}{13},\quad \cos\beta=-\frac{12}{13}$$

بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times(-\frac{12}{13})+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=-\frac{33}{65}$$



۵۱۹- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل، از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود

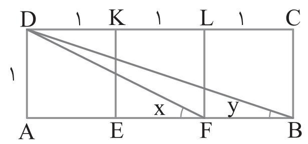
$$DF=\sqrt{AF^2+AD^2}=\sqrt{5}\,,\quad DB=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{10}$$

بنابراین

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos x=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin y=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \cos y=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

در نتیجه

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{50}}$$



۵۲۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر معلوم می‌شود که $\theta+\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$. در نتیجه $\theta=\frac{3\pi}{2}-(\alpha+\beta)$. بنابراین

$$\cos\theta=\cos(\frac{3\pi}{2}-(\alpha+\beta))=-\sin(\alpha+\beta)$$

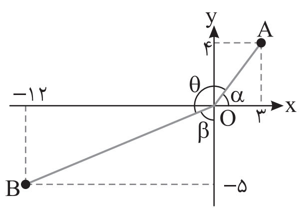
از طرف دیگر، $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$ و $OB=\sqrt{5^2+12^2}=13$. پس

$$\sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \sin\beta=\frac{12}{13},\quad \cos\beta=\frac{5}{13}$$

بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{56}{65}$$

در نتیجه $\cos\theta=-\frac{56}{65}$.



۵۲۱- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول صورت کسر A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=2\cos\alpha\cos\beta$$

مخرج کسر A به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=2\cos\alpha\sin\beta$$

بنابراین $A=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{2\cos\alpha\sin\beta}=\cot\beta$.

راه‌حل دوم فرض کنید $\alpha=0$. در این صورت

$$A=\frac{\cos(-\beta)+\cos\beta}{\sin\beta-\sin(-\beta)}=\frac{2\cos\beta}{2\sin\beta}=\cot\beta$$

راه‌حل سوم اگر $\beta=0$، عبارت A تعریف نمی‌شود و تنها گزینه‌ای که به ازای $\beta=0$ تعریف نشده، گزینهٔ (۴) است.

۵۲۲- گزینهٔ ۴ چون $\theta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$، پس $\sin\theta<0$. بنابراین

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(\frac{-12}{13})^2=\frac{25}{169}$$

پس $\sin\theta=-\frac{5}{13}$. اکنون می‌توان نوشت

$$\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{12}{13}+\frac{5}{13})=-\frac{7\sqrt{2}}{26}$$

۵۲۳- گزینهٔ ۲ از تساوی‌های داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=4\Rightarrow\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4}=\frac{\frac{3}{8}}{4}=\frac{3}{32}$$

بنابراین $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{32}-\frac{3}{8}=-\frac{9}{32}$.

۵۲۴- گزینهٔ ۱

$$(\sin x+\cos y)^2+(\cos x+\sin y)^2$$
$$=\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}+\underbrace{\sin^2y+\cos^2y}_{1}+2(\sin x\cos y+\cos x\sin y)$$
$$=1+1+2\sin(x+y)=2(1+\sin(x+y))=2(1+\sin\frac{5\pi}{6})=2(1+\frac{1}{2})=3$$

۵۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{1}{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

در نتیجه $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$. از طرف دیگر، $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

در نتیجه $\sin^2\alpha=\frac{3}{8}$ و $\cos^2\alpha=\frac{5}{8}$. بنابراین

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\frac{3}{8})^2+(\frac{5}{8})^2=\frac{9+25}{64}=\frac{17}{32}$$

۵۲۶- گزینهٔ ۳ چون α و β حاده هستند، پس $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$.

بنابراین $0<\alpha+\beta<\pi$. در نتیجه $\sin(\alpha+\beta)>0$. اکنون توجه کنید که

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5},\quad \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{4}{5}$$

بنابراین

$$\sin\beta=\sin((\alpha+\beta)-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$$
$$=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{25}$$

۵۲۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون $\cos\hat{A}>۰$ و $\cos\hat{B}>۰$، بنابراین زاویه‌های A و B حاده هستند پس $\sin\hat{A}$ و $\sin\hat{B}$ اعدادی مثبت هستند، پس

$$\sin^۲\hat{A}+\cos^۲\hat{A}=۱\Rightarrow\sin^۲\hat{A}+\frac{۹}{۲۵}=۱\Rightarrow\sin^۲\hat{A}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{B}=۱\Rightarrow\sin^۲\hat{B}+\frac{۱}{۹}=۱\Rightarrow\sin^۲\hat{B}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow\sin\hat{B}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

از طرف دیگر،

$$\cos\hat{C}=\cos(\pi-(\hat{A}+\hat{B}))=-\cos(\hat{A}+\hat{B})$$
$$=-\cos\hat{A}\cos\hat{B}+\sin\hat{A}\sin\hat{B}$$

بنابراین $\cos\hat{C}=-\frac{۳}{۵}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۵}\times\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}=\frac{۸\sqrt{۲}-۳}{۱۵}$.

پس $۱۵\cos\hat{C}=۸\sqrt{۲}-۳$.

۵۲۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sin a-\cos a=۴\sin b\sin(a+b)+۴\cos b\cos(a+b)$$
$$=۴(\cos((a+b)-b))=۴\cos a$$

بنابراین $\sin a=۵\cos a\Rightarrow\tan a=۵$

۵۲۹- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل معلوم می‌شود که

$$\gamma=\alpha+\beta\Rightarrow\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$$

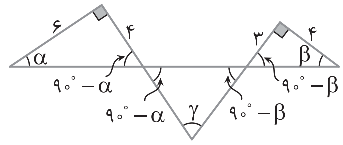
توجه کنید که

$$\sin\alpha=\frac{۴}{\sqrt{۱۶+۳۶}}=\frac{۴}{\sqrt{۵۲}},\quad\cos\alpha=\frac{۶}{\sqrt{۵۲}}$$

$$\sin\beta=\frac{۳}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۳}{۵},\quad\cos\beta=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین

$$\sin\gamma=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{۴}{\sqrt{۵۲}}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۶}{\sqrt{۵۲}}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۳۴}{۵\sqrt{۵۲}}=\frac{۱۷}{۵\sqrt{۱۳}}$$



۵۳۰- گزینهٔ ۴ با نمادگذاری شکل زیر $\alpha+\beta+\gamma=۹۰^\circ$.

بنابراین $\alpha=۹۰^\circ-(\beta+\gamma)$، توجه کنید که

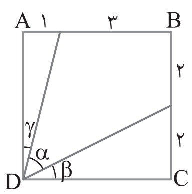
$$\sin\beta=\frac{۲}{\sqrt{۱۶+۴}}=\frac{۲}{\sqrt{۲۰}},\quad\cos\beta=\frac{۴}{\sqrt{۲۰}}$$

$$\sin\gamma=\frac{۱}{\sqrt{۱۶+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۷}},\quad\cos\gamma=\frac{۴}{\sqrt{۱۶+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}$$

و در نتیجه

$$\cos\alpha=\cos(۹۰^\circ-(\beta+\gamma))=\sin(\beta+\gamma)=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{۲۰}}\times\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}+\frac{۴}{\sqrt{۲۰}}\times\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۲۰}\sqrt{۱۷}}=\frac{۶}{\sqrt{۸۵}}$$



۵۳۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$۲\cos(a+b)=۳\cos(a-b)$$
$$۲(\cos a\cos b-\sin a\sin b)=۳(\cos a\cos b+\sin a\sin b)$$

در نتیجه $\cos a\cos b=-۵\sin a\sin b$. بنابراین

$$\frac{\cos b}{\sin b}=-۵\frac{\sin a}{\cos a}\Rightarrow\cot b=-۵\tan a=-۱$$

۵۳۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})$.

بنابراین $۲۴\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})=\frac{۲۴}{\sqrt{۲}}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{۲۴}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{۴}=۳\sqrt{۲}$.

۵۳۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sin a-\cos b=\frac{۲}{۳}\Rightarrow(\sin a-\cos b)^۲=\frac{۴}{۹}$$

$$\sin^۲a+\cos^۲b-۲\sin a\cos b=\frac{۴}{۹}\quad(۱)$$

همین‌طور،

$$\cos a-\sin b=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\Rightarrow(\cos a-\sin b)^۲=\frac{۵}{۹}$$

$$\cos^۲a+\sin^۲b-۲\cos a\sin b=\frac{۵}{۹}\quad(۲)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$(\sin^۲a+\cos^۲a)+(\sin^۲b+\cos^۲b)$$
$$-۲(\sin a\cos b+\cos a\sin b)=۱$$

بنابراین $۱+۱-۲\sin(a+b)=۱$. پس $\sin(a+b)=\frac{۱}{۲}$.

۵۳۴- گزینهٔ ۲ ابتدا دو طرف هر تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم تا رابطه‌های زیر به‌دست آید

$$\begin{cases}\cos^۲x+\cos^۲y+۲\cos x\cos y=\frac{۱}{۴}\\ \sin^۲x+\sin^۲y+۲\sin x\sin y=\frac{۱}{۱۶}\end{cases}$$

با جمع کردن طرفین این دو تساوی معلوم می‌شود

$$\sin^۲x+\cos^۲x+\sin^۲y+\cos^۲y+۲\underbrace{(\sin x\sin y+\cos x\cos y)}_{\cos(x-y)}$$

$$=\frac{۵}{۱۶}\Rightarrow۲+۲\cos(x-y)=\frac{۵}{۱۶}\Rightarrow\cos(x-y)=-\frac{۲۷}{۳۲}$$

۵۳۵- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos۱۷^\circ=\cos(۴۵^\circ-۲۸^\circ)=\cos۴۵^\circ\cos۲۸^\circ+\sin۴۵^\circ\sin۲۸^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos۲۸^\circ+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin۲۸^\circ=\frac{\cos۲۸^\circ+\sin۲۸^\circ}{\sqrt{۲}}=\frac{k^۳}{\sqrt{۲}}$$

۵۳۶- گزینهٔ ۱ از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\cos(\hat{A}+\hat{B})=-\frac{۱}{۲}$.

در نتیجه $\cos\hat{C}=\cos(۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B}))=-\cos(\hat{A}+\hat{B})=\frac{۱}{۲}$.

۵۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos(\hat{A}+\hat{B})=\cos\hat{A}\cos\hat{B}-\sin\hat{A}\sin\hat{B}=۰$$

بنابراین $\hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{C}=۹۰^\circ$. به این ترتیب $\cos\hat{B}=\sin\hat{A}$ و $\sin\hat{C}=۱$ و در نتیجه مقدار عبارت مورد نظر برابر است با ۲.

۵۳۸- گزینهٔ ۱ با توجه به شکل زیر

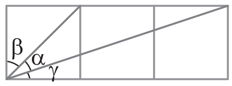
$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{9+1}}=\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

با نمادگذاری شکل زیر، $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$. بنابراین $\alpha=90^\circ-(\beta+\gamma)$ و در نتیجه

$$\sin\alpha=\sin(90^\circ-(\beta+\gamma))=\cos(\beta+\gamma)=\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$



۵۳۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که عبارت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$A=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

بنابراین $-1\le\sin(x-\frac{\pi}{6})\le 1$، در نتیجه $-2\le 2\sin(x-\frac{\pi}{6})\le 2$. پس حداقل مقدار عبارت برابر -2 و حداکثر مقدار آن برابر ۲ است.

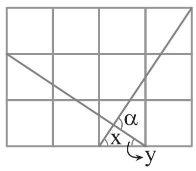
۵۴۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\alpha=x+y$. همچنین با توجه به شکل زیر $\cos x=\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$ و $\sin x=\frac{3}{\sqrt{13}}$. همچنین

$$\sin y=\frac{2}{\sqrt{13}},\quad \cos y=\frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

راه‌حل اول می‌توان نوشت

$$\sin\alpha=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$$

$$=\frac{3}{\sqrt{13}}\times\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{2}{\sqrt{13}}\times\frac{2}{\sqrt{13}}=1$$



راه‌حل دوم با توجه به اینکه $\sin x=\cos y$ و $\sin y=\cos x$، پس زاویه‌های x و y متمم‌اند، بنابراین $\alpha=90^\circ$.

۵۴۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. بنابراین

$$\frac{\cos 2x}{1-\tan^2 x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\cos^2 x$$

۵۴۲- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\cos^4\frac{\pi}{8}-\sin^4\frac{\pi}{8}=\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=1\times\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵۴۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $15^\circ+75^\circ=90^\circ$، بنابراین

$$\cos 15^\circ=\sin 75^\circ$$

در نتیجه

$$\cos 15^\circ\sin 75^\circ=\cos 15^\circ\cos 15^\circ=\cos^2 15^\circ$$

از طرف دیگر، $\cos 2x=2\cos^2 x-1$، پس

$$\cos 30^\circ=2\cos^2 15^\circ-1\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos^2 15^\circ-1$$

پس $\cos^2 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$. در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$.

۵۴۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\frac{16}{25}+\cos^2\theta=1$$

$$\cos^2\theta=\frac{9}{25}\xrightarrow{\frac{\pi}{2}<\theta<\pi}\cos\theta=-\frac{3}{5}$$

بنابراین

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$

۵۴۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از اتحادهای $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ نتیجه می‌شود

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}=8$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\frac{1}{4}}=8$$

۵۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و $1+\cos 2x=2\cos^2 x$، پس

$$A=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=\frac{1}{\cot x}=\frac{1}{3}$$

۵۴۷- گزینهٔ ۳ از اتحاد $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\frac{1-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{2\sin^2 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\tan 20^\circ$$

۵۴۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$، بنابراین

$$\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ-\sin 40^\circ}-\sin 40^\circ=\frac{\cos(2\times 40^\circ)}{\cos 40^\circ-\sin 40^\circ}-\sin 40^\circ$$

$$=\frac{\cos^2 40^\circ-\sin^2 40^\circ}{\cos 40^\circ-\sin 40^\circ}-\sin 40^\circ=(\cos 40^\circ+\sin 40^\circ)-\sin 40^\circ$$

$$=\cos 40^\circ$$

۵۴۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

بنابراین

$$A=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$$

۵۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\sin 2x=2\sin x\cos x$، بنابراین

$$\frac{\sin^3 x}{2\sin x-\sin 2x}=\frac{\sin^3 x}{2\sin x-2\sin x\cos x}=\frac{\sin^2 x}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{1-\cos^2 x}{2(1-\cos x)}=\frac{1+\cos x}{2}$$

بنابراین $\frac{1+\cos x}{2}=\frac{2}{3}$ پس $\cos x=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$. در نتیجه

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=\frac{2}{9}-1=-\frac{7}{9}$$

۵۵۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم $\sin 86^\circ=\cos 4^\circ$ و $\sin 78^\circ=\cos 12^\circ$.

بنابراین

$$\frac{\sin 78^\circ}{\sin 86^\circ}-\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}=\frac{\cos 12^\circ}{\cos 4^\circ}-\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}$$

$$=\frac{\sin 4^\circ\cos 12^\circ-\sin 12^\circ\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{\sin(4-12)^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}$$

$$=\frac{-\sin 8^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{-2\sin 4^\circ\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=-2$$

۵۵۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $2\cos^2 x-1=\cos 2x$ و $2\sin x\cos x=\sin 2x$. بنابراین

$$\sin\frac{\pi}{12}\left(2\cos^2\frac{\pi}{24}-1\right)=\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{2\pi}{24}$$

$$=\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

۵۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin\frac{3\pi}{8}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})=\cos\frac{\pi}{8}$.

بنابراین $\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}$.

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. پس

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos(2\times\frac{\pi}{8})}{2}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

۵۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x},\quad \cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

بنابراین $\sin 2x+\cos 2x=\frac{2\tan x+1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{2(\frac{1}{3})+1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{7}{5}$.

۵۵۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$9\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta}=10\Rightarrow 9\cos^2\theta+1=10\cos\theta$$

$9\cos^2\theta-10\cos\theta+1=0\Rightarrow\cos\theta=1$ (غ.ق.ق.) یا $\cos\theta=\frac{1}{9}$

بنابراین $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{1}{9})^2-1=-\frac{79}{81}$.

۵۵۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ و

$$\sin 84^\circ=\sin(90^\circ-6^\circ)=\cos 6^\circ=\cos(2\times 3^\circ)=2\cos^2 3^\circ-1=2a^2-1$$

۵۵۷- گزینهٔ ۱ تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{2}{3}$$

$$\sin^2 2\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\sin 2\alpha=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

با توجه به اینکه $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع چهارم است، پس $\sin\alpha<0$ و $\cos\alpha>0$، در نتیجه $\sin\alpha\cos\alpha<0$. یعنی $\sin 2\alpha<0$. پس $\sin 2\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

۵۵۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sin 50^\circ=\sin(90^\circ-40^\circ)=\cos 40^\circ$ و $2\sin x\cos x=\sin 2x$. بنابراین

$$\frac{\sin 50^\circ\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\cos 40^\circ\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(90^\circ-10^\circ)}{\cos 10^\circ}=\frac{1}{2}\times\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{1}{2}$$

۵۵۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $x=\frac{\pi}{24}$، آن‌گاه

$$10x+2x=12x=\frac{\pi}{2}$$

پس $\cos 10x=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\sin 2x$، در نتیجه

$$\cos 10x\cos 2x=\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 4x$$

$$=\frac{1}{2}\sin(4\times\frac{\pi}{24})=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$$

۵۶۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\tan 50^\circ=\tan(90^\circ-40^\circ)=\cot 40^\circ$$

بنابراین

$$\tan 50^\circ-\tan 40^\circ=\cot 40^\circ-\tan 40^\circ=\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}-\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}$$

$$=\frac{\cos^2 40^\circ-\sin^2 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\cos(2\times 40^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(2\times 40^\circ)}=\frac{2\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$=2\cot 80^\circ=2\cot(90^\circ-10^\circ)=2\tan 10^\circ$$

بنابراین $\frac{\tan 50^\circ-\tan 40^\circ}{2}=\tan 10^\circ$.

راه‌حل دوم از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\tan 50^\circ-\tan 40^\circ}{2}=\frac{\cot 40^\circ-\tan 40^\circ}{2}=\frac{2\cot 80^\circ}{2}=\tan 10^\circ$$

۵۶۱- گزینهٔ ۱ از عبارت $\sin x\cos x$ فاکتور می‌گیریم

$$A=\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$$

۵۶۲- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$$

$$1+\sin 2x=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin 2x=-\frac{3}{4}$$

۵۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5} \quad (\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$$

به این ترتیب

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\times\frac{9}{25}-1 = -\frac{7}{25}$$

بنابراین $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{24}{7}$.

۵۶۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول بنابر فرض $\sin x = \frac{5}{2}\cos x$. دو طرف این تساوی را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin^2 x = \frac{5}{2}\cos x\sin x \quad (1)$$

همچنین، بنابر فرض، $\cos x = \frac{2}{5}\sin x$. دو طرف این تساوی را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$\cos^2 x = \frac{2}{5}\sin x\cos x \quad (2)$$

اگر دو طرف تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$1 = \frac{5}{2}\sin x\cos x + \frac{2}{5}\sin x\cos x \Rightarrow 1 = \frac{29}{10}\sin x\cos x$$

بنابراین $\sin x\cos x = \frac{10}{29}$ و در نتیجه $\sin 2x = \frac{20}{29}$.

راه‌حل دوم دو طرف تساوی $2\sin x = 5\cos x$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$4\sin^2 x = 25\cos^2 x$$

با توجه به $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ نتیجه می‌شود

$$4\sin^2 x = 25(1-\sin^2 x) \Rightarrow 29\sin^2 x = 25 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{25}{29}$$

$$\cos^2 x = 1-\frac{25}{29} = \frac{4}{29} \Rightarrow \sin^2 x\cos^2 x = \frac{100}{29^2}$$

$$\sin x\cos x = \frac{10}{29} \Rightarrow \sin 2x = \frac{20}{29}$$

توجه کنید که با توجه به فرض مسئله $\sin x$ و $\cos x$ هم‌علامت هستند و $\sin x\cos x$ مقداری مثبت دارد.

راه‌حل سوم از $2\sin x = 5\cos x$ نتیجه می‌شود $\tan x = \frac{5}{2}$، پس

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2\times\frac{5}{2}}{1+\frac{25}{4}} = \frac{20}{29}$$

۵۶۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{\sin 2x}{\sin 2y} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sin y\cos y} = \frac{\sin x}{\sin y}\times\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{4\sin y}{\sin y}\times\frac{\cos x}{3\cos x} = \frac{4}{3}$$

۵۶۶- گزینهٔ ۲ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = \frac{16}{9}$$

$$-2\sin x\cos x = \frac{7}{9} \Rightarrow \sin x\cos x = -\frac{7}{18}$$

اکنون می‌توان نوشت

$$A = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x\cos x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$= \frac{1-\sin x\cos x}{\cos x-\sin x} = \frac{1+\frac{7}{18}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{25}{24}$$

۵۶۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin 110^\circ = \sin(90^\circ+20^\circ) = \cos 20^\circ$ و $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$، بنابراین

$$\frac{\sin^2 110^\circ - \sin^2 20^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{\cos(2\times 20^\circ)}{\sin 50^\circ} = \frac{\cos 40^\circ}{\sin 50^\circ}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\cos 40^\circ = \cos(90^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$. بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۱ است.

۵۶۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$، بنابراین $1+\cos 40^\circ = 2\cos^2 20^\circ$. از طرف دیگر، $55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$، پس $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$. به این ترتیب

$$\frac{1+\cos 40^\circ}{\cos 55^\circ\cos 35^\circ} = \frac{2\cos^2 20^\circ}{\sin 35^\circ\cos 35^\circ} = \frac{2\cos^2 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin(2\times 35^\circ)} = \frac{4\cos^2 20^\circ}{\sin 70^\circ}$$

اکنون توجه کنید که $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$، پس $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$. در نتیجه کسر مورد نظر برابر است با $\frac{4\cos^2 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 4\cos 20^\circ$.

۵۶۹- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos a\cos 2a = \frac{1}{16\sin a} \Rightarrow 2\sin a\cos a\cos 2a = \frac{1}{8}$$

$$\sin 2a\cos 2a = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 4a = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin 4a = \frac{1}{4}$$

در نتیجه $\cos 8a = 1-2\sin^2 4a = 1-2(\frac{1}{4})^2 = \frac{7}{8}$.

۵۷۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\frac{4}{5} = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{4}{15}$$

بنابراین $\cos^2 2x = 1-\sin^2 2x = 1-\frac{4}{15} = \frac{11}{15}$.

۵۷۱- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول عبارت را به شکل زیر ساده می‌کنیم

$$\tan 75^\circ - \tan 15^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin 75^\circ\cos 15^\circ - \sin 15^\circ\cos 75^\circ}{\cos 75^\circ\cos 15^\circ} = \frac{\sin(75^\circ - 15^\circ)}{\sin 15^\circ\times\cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\tan 75^\circ-\tan 15^\circ=\cot 15^\circ-\tan 15^\circ=2\cot 30^\circ=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

۵۷۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ و $1+\cos 2x=2\cos^2 x$. بنابراین

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=2\Rightarrow\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=2\Rightarrow\tan^2 x=2\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{2}$$

چون $\frac{\pi}{2}<x<\pi$، مقدار $\sqrt{2}$ قابل قبول نیست. پس

$$\tan x=-\sqrt{2}\Rightarrow\cot x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه $\tan x+2\cot x=-\sqrt{2}-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$.

۵۷۳- گزینهٔ ۲ اگر در اتحاد $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$ قرار دهیم $\alpha=\frac{x}{2}$، اتحاد $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ به‌دست می‌آید. پس

$$A=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{8}}}=\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{8})}}=\sqrt{2+\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\frac{\pi}{8}}{2}}}$$

$$=\sqrt{2+2|\cos\frac{\pi}{16}|}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{16}}=\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{16})}$$

$$=\sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\pi}{32}}=2|\cos\frac{\pi}{32}|=2\cos\frac{\pi}{32}$$

۵۷۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sin^4\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{2\pi}{12}$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

۵۷۵- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\tan^2 x+\cot^2 x=(\tan x+\cot x)^2-2\tan x\cot x$$

$$=(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^2-2=(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x})^2-2$$

$$=(\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x})^2-2=\frac{4}{\sin^2 2x}-2$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=\frac{\pi}{8}$، به‌دست می‌آید

$$\tan^2\frac{\pi}{8}+\cot^2\frac{\pi}{8}=\frac{4}{\sin^2\frac{\pi}{4}}-2=\frac{4}{\frac{1}{2}}-2=6$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^2\frac{\pi}{8}+\cot^2\frac{\pi}{8}=(\tan\frac{\pi}{8}+\cot\frac{\pi}{8})^2-2=(\frac{2}{\sin\frac{2\pi}{8}})^2-2$$

$$=\frac{4}{\frac{1}{2}}-2=8-2=6$$

۵۷۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha,\quad \cot\alpha+\tan\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین، اگر اتحادهای فوق را برای $\alpha=\frac{x}{2}$ استفاده کنیم، می‌توان نوشت

$$A=\tan^2\frac{x}{2}-\cot^2\frac{x}{2}=(\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2})(\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2})$$

$$=\frac{2}{\sin x}\times(-2\cot x)=-\frac{4\cot x}{\sin x}$$

از طرف دیگر،

$$1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}\xrightarrow{\cot x=\frac{1}{\tan x}=\frac{3}{4}}1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x=\frac{16}{25}\xrightarrow{0<x<\frac{\pi}{2}}\sin x=\frac{4}{5}$$

بنابراین $A=\frac{-4\times\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}}=-\frac{15}{4}$.

۵۷۷- گزینهٔ ۳ از اتحاد $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos 20^\circ}{\sqrt{2}\cos 10^\circ+1}+1=\frac{2\cos^2 10^\circ-1}{\sqrt{2}\cos 10^\circ+1}+1$$

$$=\frac{(\sqrt{2}\cos 10^\circ+1)(\sqrt{2}\cos 10^\circ-1)}{\sqrt{2}\cos 10^\circ+1}+1=\sqrt{2}\cos 10^\circ-1+1$$

$$=\sqrt{2}\cos 10^\circ=\sqrt{2}\cos(90^\circ-80^\circ)=\sqrt{2}\sin 80^\circ$$

۵۷۸- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $2m-1$ است. بنابراین

$$\tan\alpha\cot\alpha=2m-1\Rightarrow 1=2m-1\Rightarrow m=1$$

اکنون توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $m+3$ است. پس

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m+3=4\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=4$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=4\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=4\Rightarrow\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم برای تعیین $\sin 2\alpha$ می‌توانیم از اتحاد زیر استفاده کنیم:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$$

بنابراین

$$\tan\alpha+\cot\alpha=m+3=4\Rightarrow\frac{2}{\sin 2\alpha}=4\Rightarrow\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$$

۵۷۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** تساوی داده شده را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^2 x+\cot^2 x=5\Rightarrow(\tan x+\cot x)^2-2\tan x\cot x=5$$

$$(\tan x+\cot x)^2=7\Rightarrow(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^2=7$$

$$(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x})^2=7\Rightarrow(\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x})^2=7$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x}=7\Rightarrow\sin^2 2x=\frac{4}{7}$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan^2 x+\cot^2 x=5\Rightarrow(\tan x+\cot x)^2-2=5$$

$$(\frac{2}{\sin 2x})^2-2=5\Rightarrow\frac{4}{\sin^2 2x}=7\Rightarrow\sin^2 2x=\frac{4}{7}$$

۵۸۰- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای

$$\begin{cases}\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\\ \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{1+\sin 40^\circ-\cos 40^\circ}{1+\sin 40^\circ+\cos 40^\circ}=\frac{1+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ-(1-2\sin^2 20^\circ)}{1+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+2\cos^2 20^\circ-1}$$

$$=\frac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+2\sin^2 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+2\cos^2 20^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ(\cos 20^\circ+\sin 20^\circ)}{2\cos 20^\circ(\sin 20^\circ+\cos 20^\circ)}$$

$$=\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\tan 20^\circ$$

۵۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$. بنابراین

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{3^2-3}=\frac{9+3-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$$

۵۸۲- گزینهٔ ۲ با توجه به رابطهٔ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{6}{7}$$

۵۸۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مقدار m را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow 3-\frac{2}{m}=\frac{m+\frac{2}{m}}{1-m(\frac{2}{m})}$$

$$3-\frac{2}{m}=-m-\frac{2}{m}\Rightarrow m=-3$$

بنابراین $\tan\alpha=-3$، $\tan\beta=-\frac{2}{3}$ و در نتیجه

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3+\frac{2}{3}}{1-3(-\frac{2}{3})}=-\frac{7}{9}$$

۵۸۴- گزینهٔ ۳ از روابط مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-5x-2=0$ نتیجه می‌شود $\tan\alpha+\tan\beta=5$ و $\tan\alpha\tan\beta=-2$.

بنابراین $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{1+2}=\frac{5}{3}$.

۵۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$A=\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 75^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 75^\circ}$$

بنابراین $A=\tan(45^\circ+75^\circ)=\tan 120^\circ=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

۵۸۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan(50^\circ+\alpha)=\tan(45^\circ+(5^\circ+\alpha))=\frac{\tan 45^\circ+\tan(5^\circ+\alpha)}{1-\tan 45^\circ\tan(5^\circ+\alpha)}=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$$

۵۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $45^\circ=25^\circ+20^\circ$. اگر از دو طرف این تساوی تانژانت بگیریم، نتیجه می‌شود

$$1=\tan(20^\circ+25^\circ)=\frac{\tan 20^\circ+\tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ\tan 25^\circ}$$

$$1-\tan 20^\circ\tan 25^\circ=\tan 20^\circ+\tan 25^\circ$$

$$\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ=1$$

از طرف دیگر،

$$(1+\tan 20^\circ)(1+\tan 25^\circ)=1+\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ$$

$$=1+1=2$$

۵۸۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\cot\hat{A}=3\Rightarrow\tan\hat{A}=\frac{1}{3}\ ,\quad \cot\hat{B}=\frac{1}{2}\Rightarrow\tan\hat{B}=2$$

از طرف دیگر، $\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})$، در نتیجه

$$\tan\hat{C}=\tan(180^\circ-(\hat{A}+\hat{B}))=-\tan(\hat{A}+\hat{B})$$

$$=-\frac{\tan\hat{A}+\tan\hat{B}}{1-\tan\hat{A}\tan\hat{B}}=-\frac{\frac{1}{3}+2}{1-\frac{1}{3}\times 2}=-7$$

۵۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\tan\alpha=4$ و $\tan\beta=\frac{2}{3}$.

بنابراین $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4+\frac{2}{3}}{1-4\times\frac{2}{3}}=-\frac{14}{5}$.

۵۹۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

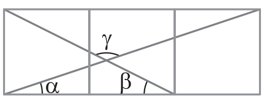
$$\tan\alpha=\frac{1}{3},\quad \tan\beta=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1$$

از طرف دیگر، چون $0<\tan\alpha,\tan\beta<1$ و تابع تانژانت روی بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است، پس $0^\circ<\alpha,\beta<45^\circ$، در نتیجه $0^\circ<\alpha+\beta<90^\circ$.

بنابراین $\alpha+\beta=45^\circ$. در نتیجه $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)=135^\circ$.



۵۹۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3}=\frac{1+3+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$$

۵۹۲- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow 3=\frac{2-\tan\beta}{1+2\tan\beta}$$

$$3+6\tan\beta=2-\tan\beta\Rightarrow 7\tan\beta=-1\Rightarrow\tan\beta=-\frac{1}{7}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $\beta=\alpha-(\alpha-\beta)$. بنابراین

$$\tan\beta=\tan(\alpha-(\alpha-\beta))=\frac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{2-3}{1+2\times 3}=-\frac{1}{7}$$

۵۹۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\tan(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan x-1}{1+\tan x}$، بنابراین

$$\frac{\tan x-1}{1+\tan x}=4\Rightarrow 4+4\tan x=\tan x-1\Rightarrow\tan x=-\frac{5}{3}$$

۵۹۴- گزینهٔ ۱ از رابطهٔ مربوط به حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود

$$\cot\alpha\cot\beta=-2\Rightarrow\frac{1}{\tan\alpha}\times\frac{1}{\tan\beta}=-2\Rightarrow\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{2}$$

از رابطهٔ مربوط به مجموع جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود

$$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=6$$

پس

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=6\xrightarrow{\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{2}}\tan\alpha+\tan\beta=-3$$

بنابراین

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3}{1-(-\frac{1}{2})}=-2$$

پس $\cot(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$.

۵۹۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\cot 50^\circ=\cot(90^\circ-40^\circ)=\tan 40^\circ$.

بنابراین

$$\frac{\tan 50^\circ-\cot 50^\circ}{1+\tan 50^\circ\cot 50^\circ}=\frac{\tan 50^\circ-\tan 40^\circ}{1+\tan 50^\circ\tan 40^\circ}=\tan(50^\circ-40^\circ)=\tan 10^\circ$$

۵۹۶- گزینهٔ ۱ ابتدا از دو طرف تساوی $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\frac{1}{3}}=1\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=\frac{4}{3}$$

اکنون باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=\frac{4}{3}\\ \tan\alpha\tan\beta=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $\tan\beta=\frac{4}{3}-\tan\alpha$ که اگر در معادلهٔ دوم به جای $\tan\beta$ مقدار مساوی آن، یعنی $\frac{4}{3}-\tan\alpha$ را قرار دهیم، معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\tan\alpha(\frac{4}{3}-\tan\alpha)=\frac{-1}{3}\Rightarrow 3\tan^2\alpha-4\tan\alpha-1=0$$

پس $\tan\alpha=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ که از حاده بودن α نتیجه می‌شود $\tan\alpha=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

۵۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از دو طرف تساوی $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$ تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=-1\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=-1+\tan\alpha\tan\beta$$

$$\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta=-1$$

از طرف دیگر،

$$A=(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=1-\tan\beta-\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta$$

$$=1-(\tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta)=1-(-1)=2$$

۵۹۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$5x+7y=2(2x+3y)+x+y=180^\circ+x+y$$

بنابراین

$$\tan(5x+7y)=\tan(180^\circ+x+y)=\tan(x+y)$$

$$=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{2+3}{1-2\times 3}=-1$$

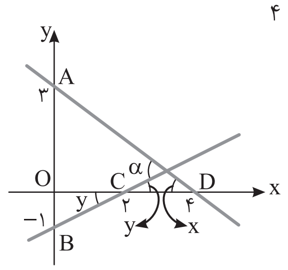
۵۹۹- گزینهٔ ۲ با نمادگذاری شکل زیر نتیجه می‌شود که $\alpha=x+y$.

از طرف دیگر،

$$\triangle AOD:\tan x=\frac{3}{4}\ ,\quad\triangle OBC:\tan y=\frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{3}{8}}=2$$



۶۰۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cot x-\tan x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2\cot 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cot 2x=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه

$$\tan 2x=-4$$

بنابراین

$$\tan 4x=\frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x}=\frac{-8}{1-16}=\frac{8}{15}$$

۶۰۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$. بنابراین

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt3}{3}}{1-\frac{\sqrt3}{3}}=\frac{3+\sqrt3}{3-\sqrt3}$$

$$=\frac{(3+\sqrt3)^2}{(3-\sqrt3)(3+\sqrt3)}=\frac{9+3+6\sqrt3}{9-3}=2+\sqrt3$$

۶۰۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که از $\cot a\cot b=3$ نتیجه می‌شود $\tan a\tan b=\frac{1}{3}$. از طرف دیگر

$$\cot(a-b)=\frac{1}{\tan(a-b)}=\frac{1+\tan a\tan b}{\tan a-\tan b}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{3}$$

۶۰۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}=\frac{25}{9}\Rightarrow\tan^2x=\frac{16}{9}\xrightarrow{\text{x حاده است}}\tan x=\frac{4}{3}$$

بنابراین

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{1+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}}=-7$$

۶۰۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sin x=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos^2x=1-\sin^2x=\frac{16}{25}$$

$$\xrightarrow[\text{است}]{\text{x حاده}}\cos x=\frac{4}{5}\Rightarrow\tan x=\frac{3}{4}$$

$$\sin y=\frac{5}{13}\Rightarrow\cos^2y=1-\sin^2y=\frac{144}{169}$$

$$\xrightarrow[\text{است}]{\text{y منفرجه}}\cos y=-\frac{12}{13}\Rightarrow\tan y=-\frac{5}{12}$$

در نتیجه $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{1+\frac{3}{4}\times\frac{5}{12}}=\frac{16}{63}$.

۶۰۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\Rightarrow\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=2\Rightarrow\frac{\tan x+1}{1-\tan x}=2$$

$$\tan x+1=2-2\tan x\Rightarrow3\tan x=1\Rightarrow\tan x=\frac{1}{3}$$

بنابراین

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt3}{3}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt3}{3}}=\frac{3+3\sqrt3}{9-\sqrt3}$$

$$=\frac{(3+3\sqrt3)(9+\sqrt3)}{(9-\sqrt3)(9+\sqrt3)}=\frac{27+3\sqrt3+27\sqrt3+9}{81-3}=\frac{6+5\sqrt3}{13}$$

۶۰۶- گزینهٔ ۳ از تساوی $\alpha-\beta=\frac{7\pi}{4}$ نتیجه می‌شود

$$\tan(\alpha-\beta)=-1$$

بنابراین

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-1\Rightarrow\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-6}=-1\Rightarrow\tan\alpha-\tan\beta=5$$

اکنون باید دستگاه معادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}\tan\alpha-\tan\beta=5\\ \tan\alpha\tan\beta=-6\end{cases}$$

اگر از معادلهٔ اول $\tan\beta$ را برحسب $\tan\alpha$ نوشته و در معادلهٔ دوم جای‌گذاری کنیم، به معادلهٔ $\tan\alpha(\tan\alpha-5)=-6$ می‌رسیم. پس

$$\tan^2\alpha-5\tan\alpha+6=0\Rightarrow\tan\alpha=2\ \text{یا}\ \tan\alpha=3$$

۶۰۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که عبارت $\tan x+\tan y$ در صورت بسط $\tan(x+y)$ آمده است. بنابراین خوب است که عبارت $\tan(20^\circ+25^\circ)$ را تشکیل دهیم:

$$\tan(20^\circ+25^\circ)=\frac{\tan20^\circ+\tan25^\circ}{1-\tan20^\circ\tan25^\circ}\Rightarrow1=\frac{\tan20^\circ+\tan25^\circ}{1-\tan20^\circ\tan25^\circ}$$

اگر این تناسب را طرفین - وسطین کنیم، به‌دست می‌آید

$$\tan20^\circ+\tan25^\circ=1-\tan20^\circ\tan25^\circ$$

$$\tan20^\circ+\tan25^\circ+\tan20^\circ\tan25^\circ=1$$

۶۰۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که از $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$، نتیجه می‌شود که $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=2\sin\alpha\sin\beta$. اگر طرفین را بر $\sin\alpha\cos\beta$ تقسیم کنیم، می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=2\Rightarrow\frac{1}{\tan\beta}+\frac{1}{\tan\alpha}=2$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=2\tan\alpha\tan\beta\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=-6$$

بنابراین $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-6}{1-(-3)}=-\frac{3}{2}$.

۶۰۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

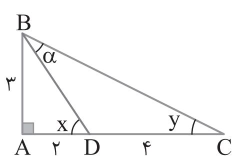
$$\tan\beta=\tan((\alpha+\beta)-\alpha)=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{-1-3}{1-3}=2$$

بنابراین $\tan2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$.

۶۱۰- گزینهٔ ۴ با نمادگذاری شکل زیر، $x=\alpha+y$، پس $\alpha=x-y$.

از طرف دیگر، $\triangle ABC:\tan y=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ، $\triangle ABD:\tan x=\frac{3}{2}$

بنابراین $\tan\alpha=\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{7}$.



۶۱۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\cot(\alpha+\beta)=\frac{۱}{\tan(\alpha+\beta)}$. بنابراین

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{۱}{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}}=\frac{۱-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

$$=\frac{۱-\frac{۱}{\cot\alpha}\times\frac{۱}{\cot\beta}}{\frac{۱}{\cot\alpha}+\frac{۱}{\cot\beta}}=\frac{\cot\alpha\cot\beta-۱}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

۶۱۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\cot a-\cot b=۲\Rightarrow\frac{۱}{\tan a}-\frac{۱}{\tan b}=۲\Rightarrow\frac{\tan b-\tan a}{\tan a\tan b}=۲$$

چون $\tan a\tan b=۳$، پس

$$\frac{\tan b-\tan a}{۳}=۲\Rightarrow\tan a-\tan b=-۶$$

بنابراین $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{۱+\tan a\tan b}=\frac{-۶}{۱+۳}=-\frac{۳}{۲}$.

۶۱۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=۲\alpha$. بنابراین

$$\tan ۲\alpha=\tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{-۲+۳}{۱-(-۲)(۳)}=\frac{۱}{۷}$$

۶۱۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\tan x+۱}{۱-\tan x}$$

$$\tan(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{۴}}{۱+\tan x\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\tan x-۱}{۱+\tan x}$$

در نتیجه

$$\cot(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\tan(x+\frac{\pi}{۴})}=\frac{۱-\tan x}{\tan x+۱}$$

$$\cot(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\tan(x-\frac{\pi}{۴})}=\frac{۱+\tan x}{\tan x-۱}$$

بنابراین

$$\tan(x+\frac{\pi}{۴})+\tan(x-\frac{\pi}{۴})=-(\cot(x+\frac{\pi}{۴})+\cot(x-\frac{\pi}{۴}))$$

و مقدار عبارت مورد نظر برابر -۱ است.

۶۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\frac{\pi}{۹}-\alpha)+(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶})=\frac{\pi}{۴}$، بنابراین

$$\frac{\pi}{۹}-\alpha=\frac{\pi}{۴}-(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶})\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{۹}-\alpha)=\tan(\frac{\pi}{۴}-(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶}))$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶})}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan(\alpha+\frac{۵\pi}{۳۶})}=\frac{۱-\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

۶۱۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\tan ۴۰^\circ+۲\tan ۱۰^\circ=\tan ۴۰^\circ+۲\tan(۵۰^\circ-۴۰^\circ)$$

$$=\tan ۴۰^\circ+۲\times\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۱+\tan ۵۰^\circ\tan ۴۰^\circ}$$

$$=\tan ۴۰^\circ+۲\times\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۱+\cot ۴۰^\circ\tan ۴۰^\circ}$$

$$=\tan ۴۰^\circ+۲\times\frac{\tan ۵۰^\circ-\tan ۴۰^\circ}{۲}=\tan ۵۰^\circ$$

۶۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$. بنابراین

$$\tan(۸۰^\circ-۲۰^\circ)=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\tan ۸۰^\circ-\tan ۲۰^\circ}{۱+\tan ۲۰^\circ\tan ۸۰^\circ}=\sqrt{۳}$$

$$\tan ۸۰^\circ-\tan ۲۰^\circ=\sqrt{۳}+\sqrt{۳}\tan ۲۰^\circ\tan ۸۰^\circ$$

$$\tan ۸۰^\circ-\tan ۲۰^\circ-\sqrt{۳}\tan ۲۰^\circ\tan ۸۰^\circ=\sqrt{۳}$$

پس

$$\tan ۲۰^\circ-\tan ۸۰^\circ+\sqrt{۳}\tan ۲۰^\circ\tan ۸۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

۶۱۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{۴}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+۱}{۱-\tan\alpha}=\frac{\tan\alpha-۱+۲}{۱-\tan\alpha}$$

$$=-۱+\frac{۲}{۱-\tan\alpha}$$

چون $\frac{۱}{۲}\le\tan\alpha<۱$، بنابراین

$$-۱<-\tan\alpha\le-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰<۱-\tan\alpha\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰<\frac{۱-\tan\alpha}{۲}\le\frac{۱}{۴}$$

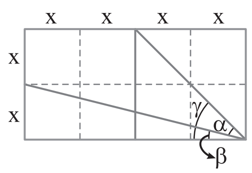
$$\frac{۲}{۱-\tan\alpha}\ge ۴\Rightarrow -۱+\frac{۲}{۱-\tan\alpha}\ge ۳\Rightarrow\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})\ge ۳$$

بنابراین حداقل مقدار $\tan(\alpha+\frac{\pi}{۴})$ برابر ۳ است.

۶۱۹- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر $\alpha=\gamma-\beta$ و در نتیجه

$$\tan\alpha=\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{۱+\tan\gamma\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{۲x}{۲x}-\frac{x}{۴x}}{۱+\frac{۲x}{۲x}\times\frac{x}{۴x}}=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{۳}{۵}$$



۶۲۰- گزینهٔ ۴ با نمادگذاری شکل زیر

$$\alpha+x+۴۵^\circ+y+۴۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۹۰^\circ-(x+y)$$

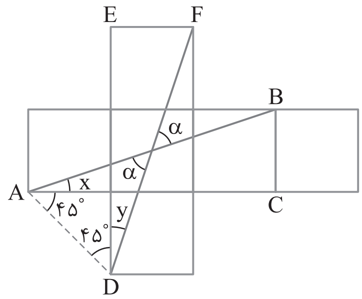
از طرف دیگر،

$$\triangle ABC:\tan x=\frac{۱}{۳}\ ,\quad \triangle DEF:\tan y=\frac{۱}{۳}$$

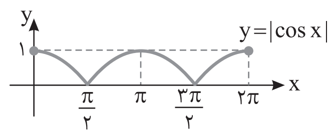
بنابراین

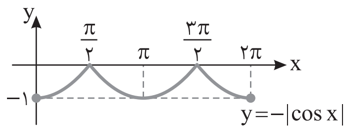
$$\tan\alpha=\tan(۹۰^\circ-(x+y))=\cot(x+y)=\frac{۱}{\tan(x+y)}$$

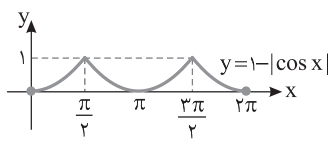
$$=\frac{۱-\tan x\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{۱-\frac{۱}{۹}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۴}{۳}$$



۶۲۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم و قرینهٔ قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به محور طول‌ها رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌هایی را که پایین محور طول‌ها قرار دارند حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\cos x|$ به‌دست آید. نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-|\cos x|$ به‌دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.







۶۲۲- گزینهٔ ۴ چون نمودار تابع از نقاط $(\frac{\pi}{۴},\sqrt{۲}-۱)$ و $(\frac{\pi}{۳},۰)$ می‌گذرد، پس

$$f(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow a\cos\frac{\pi}{۴}-b=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow\frac{a\sqrt{۲}}{۲}-b=\sqrt{۲}-۱$$

$$f(\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow a\cos\frac{\pi}{۳}-b=۰\Rightarrow\frac{a}{۲}=b$$

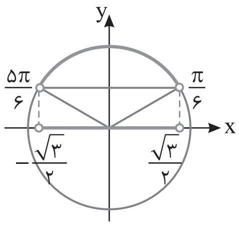
در نتیجه

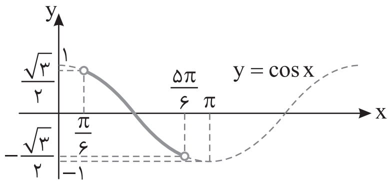
$$\frac{a\sqrt{۲}}{۲}-b=b\sqrt{۲}-b=b(\sqrt{۲}-۱)=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow b=۱$$

بنابراین $a=۲b=۲$. پس مقدار ab برابر ۲ است.

۶۲۳- گزینهٔ ۴ با توجه به هر یک از شکل‌های زیر می‌توان فهمید که اگر $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۵\pi}{۶}$، آن‌گاه $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}<\cos x<\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. پس

$$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}<\sqrt{۳}m<\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow-\frac{۱}{۲}<m<\frac{۱}{۲}$$





۶۲۴- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۲\pi}{|k|}$، بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|k|}=\frac{\pi}{۲k+۱}\Rightarrow|k|=۴k+۲$$

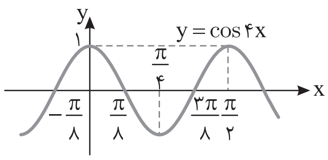
اگر $k>۰$، آن‌گاه

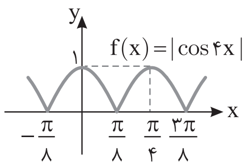
$$k=۴k+۲\Rightarrow k=-\frac{۲}{۳}\quad\text{(غ.ق.ق.)}$$

اگر $k<۰$، آن‌گاه

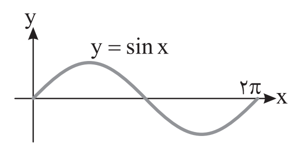
$$-k=۴k+۲\Rightarrow k=-\frac{۲}{۵}$$

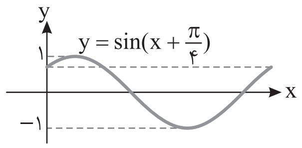
۶۲۵- گزینهٔ ۳ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم است که دورهٔ تناوب آن برابر است با $\frac{\pi}{۸}-(-\frac{\pi}{۸})=\frac{\pi}{۴}$.





۶۲۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ است. بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کنیم و آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ به چپ انتقال دهیم.





۶۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $a-۲$ است که با توجه به نمودار تابع برابر ۱− است. پس $a-۲=-۱\Rightarrow a=۱$

از طرف دیگر با توجه به نمودار دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۴۵}{۸}-\frac{۵}{۸}=۵$ است. پس

$$T=\frac{۲\pi}{|\frac{۲\pi}{b}|}=۵\Rightarrow |b|=۵\Rightarrow b=\pm۵$$

اگر $b=-۵$، آن‌گاه $f(x)=۱+۲\sin(-\frac{۲\pi}{۵}x+\frac{\pi}{۴})$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=۰$ نزولی باشد که این‌طور نیست. پس $b=۵$ و در نتیجه $b-a=۴$.

توجه کنید که اگر $b=-۵$، آن‌گاه $f(x)=۱+۲\sin(-\frac{۲\pi}{۵}x+\frac{\pi}{۴})$ و $f(\frac{۵}{۸})=۱$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

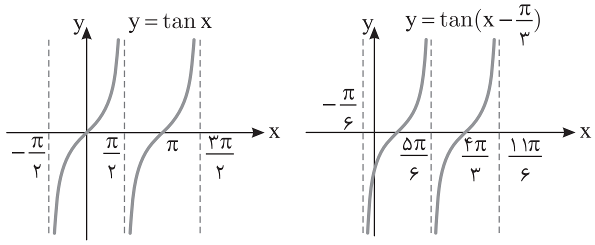
۶۲۸- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع از نامساوی $\{\frac{\pi x}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$ به‌دست می‌آید. پس $D_f=\{x\in\mathbb{R}|x\neq ۲k+۱\,,k\in\mathbb{Z}\}$.

۶۲۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{۳}\leq x<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\tan x\geq\tan(-\frac{\pi}{۳})$ و در نتیجه $\tan x\geq-\sqrt{۳}$. بنابراین

$$\frac{۲-m}{\sqrt{۳}}\geq-\sqrt{۳}\Rightarrow ۲-m\geq-۳\Rightarrow m\leq۵$$

پس حداکثر مقدار m برابر ۵ است.

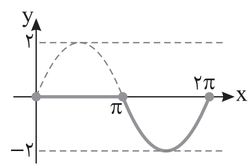
۶۳۰- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=\tan x$ را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{۳})$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر است. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶})$ اکیداً صعودی است و حداقل مقدار a برابر $\frac{۵\pi}{۶}$ است.



۶۳۱- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\sin x & ۰\leq x\leq\pi\\ \sin x+\sin x & \pi<x\leq۲\pi\end{cases}=\begin{cases}۰ & ۰\leq x\leq\pi\\ ۲\sin x & \pi<x\leq۲\pi\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. توجه کنید که در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ نمودار تابع از دو برابر کردن عرض نقاط روی نمودار تابع $y=\sin x$ به‌دست آمده است.



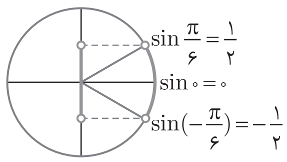
۶۳۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل $f(۰)=۲$ و کمترین مقدار تابع برابر ۱ است. بنابراین $f(۰)=۲a-b=۲$ و $f_{min}=۲a-b-|a+b|$. با توجه به شکل ضریب $\sin x$ مثبت است، پس مینیمم تابع برابر است با $۲a-b-a-b=a-۲b$. از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases}۲a-b=۲\\ a-۲b=۱\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=۱$ و $b=۰$. بنابراین $f(x)=\sin x+۲$ که بیشترین مقدار آن برابر ۳ است.

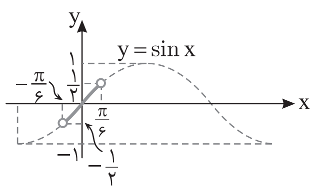
۶۳۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل‌های زیر، اگر $-\frac{\pi}{۶}<x<\frac{\pi}{۶}$، آن‌گاه $-\frac{۱}{۲}<\sin x<\frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$-\frac{۱}{۲}<\frac{m+۱}{۲m}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۱<\frac{m+۱}{m}<۱\Rightarrow |\frac{m+۱}{m}|<۱$$
$$|m+۱|<|m|,\quad m\neq۰$$

در نتیجه

$$m^۲+۲m+۱<m^۲\Rightarrow m<-\frac{۱}{۲}$$





۶۳۴- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\sin^۲x+\cos^۲x+۲\cos^۲x=۱+۲\cos^۲x$$

چون $-۱\leq\cos x\leq۱$، پس

$$۰\leq\cos^۲x\leq۱\Rightarrow ۰\leq۲\cos^۲x\leq۲\Rightarrow ۱\leq۱+۲\cos^۲x\leq۳\Rightarrow ۱\leq f(x)\leq۳$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[۱,۳]$ است.

۶۳۵- گزینهٔ ۱ کمترین مقدار تابع f برابر $۳a-a^۲$ است که وقتی $\cos ax=-۱$ اتفاق می‌افتد. بنابراین

$$۳a-a^۲=۲\Rightarrow a^۲-۳a+۲=۰\Rightarrow a=۱,a=۲$$

دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{۲\pi}{|a|}$ است. پس اگر $a=۱$، آن‌گاه دورهٔ تناوب این تابع برابر ۲π است و اگر $a=۲$، آن‌گاه دورهٔ تناوب آن برابر π است.

۶۳۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که از اتحاد $\cos^۲x=\frac{۱+\cos۲x}{۲}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

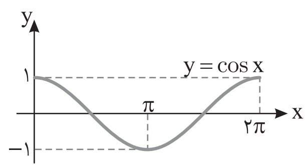
$$f(x)=\cos۴x+\frac{۱+\cos۴x}{۲}=\frac{۳\cos۴x+۱}{۲}$$

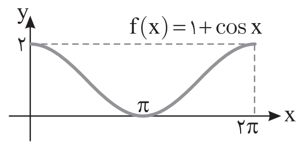
در نتیجه، دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$.

۶۳۷- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است. توجه کنید که از اتحاد $\cos^۲ x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$ استفاده می‌کنیم.

$$f(x)=۲\sin^۲(\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲})=۲\cos^۲\frac{x}{۲}=۲(\frac{۱+\cos x}{۲})=۱+\cos x$$

بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\cos x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ یک واحد به بالا انتقال دهیم.





۶۳۸- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است. این مقدار زمانی به‌دست می‌آید که $\cos(\frac{\pi}{۲}-bx)=۱$، پس

$$a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

در نتیجه

$$f(x)=-۱+۲\sin bx$$

با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر با $\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۲\pi}{۳}$ است. بنابراین

$$\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow b=\pm ۳$$

برای $x>۰$ نمودار تابع $f(x)=-۱+۲\sin bx$ به‌صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b=۳$ قابل قبول است، یعنی $f(x)=-۱+۲\sin ۳x$ و مقدار $b-a$ برابر است با ۴. توجه کنید که اگر $b=-۳$، آن‌گاه $f(x)=-۱+۲\sin(-۳x)$ و $f(\frac{\pi}{۱۸})=-۲$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

۶۳۹- گزینهٔ ۳ تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۴}]$ اکیداً صعودی است، پس

$$۰\le x\le\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \tan ۰\le\tan x\le\tan\frac{\pi}{۴}$$

$$۰\le\tan x\le ۱\Rightarrow -۱\le-\tan x\le ۰\Rightarrow ۱\le\frac{۳-\tan x}{۲}\le\frac{۳}{۲}$$

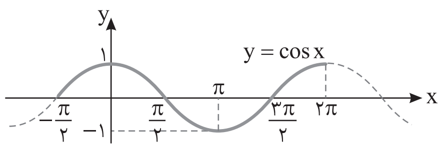
بنابراین $R_f=[۱,\frac{۳}{۲}]$.

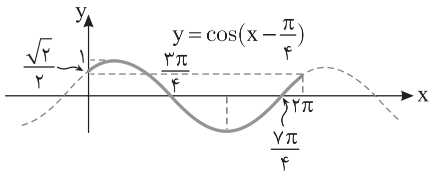
۶۴۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\tan x>۱$ و اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۴}$، آن‌گاه $\tan x<-۱$. بنابراین

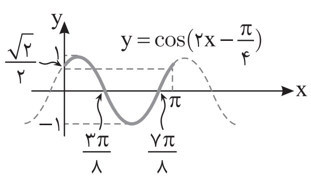
$$\frac{m-۱}{۲}>۱\Rightarrow m-۱>۲\Rightarrow m>۳$$

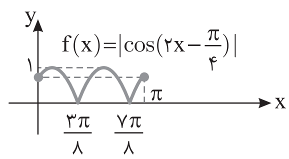
$$\frac{m-۱}{۲}<-۱\Rightarrow m-۱<-۲\Rightarrow m<-۱$$

۶۴۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ به‌دست آید. سپس طول نقاط روی این نمودار را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})$ به‌دست آید. در آخر قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار به‌دست آمده را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=|\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})|$ به‌دست آید.









۶۴۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,۲)$ عبور می‌کند، یعنی $f(۰)=۲$. بنابراین

$$f(۰)=a-۲b\sin ۰=a\Rightarrow a=۲$$

پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=۲-۲b\sin x$ است. بیشترین مقدار تابع برابر ۶ است که یا به ازای $\sin x=۱$ به‌دست می‌آید یا به ازای $\sin x=-۱$ (بستگی به علامت b دارد). اگر $b>۰$، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x=-۱$ به‌دست می‌آید که برابر است با $۲+۲b$. بنابراین

$$۲+۲b=۶\Rightarrow b=۲$$

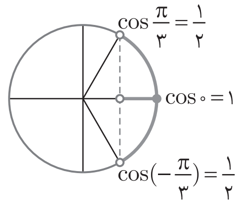
و در نتیجه $f(x)=۲-۴\sin x$. اگر $b<۰$، آن‌گاه بیشترین مقدار تابع به ازای $\sin x=۱$ به‌دست می‌آید که برابر است با $۲-۲b$. بنابراین

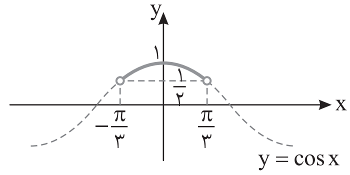
$$۲-۲b=۶\Rightarrow b=-۲$$

و در نتیجه $f(x)=۲+۴\sin x$. با توجه به اینکه برای xهایی که کمی بزرگ‌تر از صفر هستند، مقدار تابع کمتر از ۲ است، ضابطهٔ $f(x)=۲+۴\sin x$ قابل قبول نیست. بنابراین $b=۲$ و در نتیجه $ab=۴$.

۶۴۳- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل‌های زیر اگر $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$، آن‌گاه $\frac{1}{2}<\cos x\le 1$. بنابراین

$$\frac{1}{2}<\frac{m^2+1}{4}\le 1\Rightarrow 2<m^2+1\le 4\Rightarrow 1<m^2\le 3\Rightarrow 1<|m|\le\sqrt{3}$$





۶۴۴- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را بـه شکل $f(x)=(\sin^2 x+1)^2-1$ می‌نویسیم. چون $-1\le\sin x\le 1$، پس

$$0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le\sin^2 x+1\le 2\Rightarrow 1\le(\sin^2 x+1)^2\le 4$$

$$0\le(\sin^2 x+1)^2-1\le 3\Rightarrow 0\le f(x)\le 3$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[0,3]$ است.

۶۴۵- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a\pi|}=4\Rightarrow |a|=\frac{1}{2}$$

کمترین مقدار تابع f برابر $|a|-|b|$ است. بنابراین

$$|a|-|b|=-3\Rightarrow\frac{1}{2}-|b|=-3\Rightarrow |b|=\frac{7}{2}$$

بیشترین مقدار تابع f برابر $|a|+|b|$ است که برابر است با $\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4$.

۶۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\cos^2 ax(1-\cos^2 ax)=\cos^2 ax\sin^2 ax=(\cos ax\sin ax)^2$$

$$=(\frac{1}{2}\sin 2ax)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2ax=\frac{1}{4}(\frac{1-\cos 4ax}{2})$$

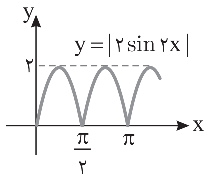
بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|4a|}$ است. پس

$$\frac{2\pi}{|4a|}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow |a|=2\Rightarrow a=\pm 2$$

۶۴۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=4|\sin x\cos x|=4|\frac{1}{2}\sin 2x|=|2\sin 2x|$$

بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط آن را نصف و عرض نقاط آن را دو برابر می‌کنیم تا نمودار تابع $y=2\sin 2x$ به‌دست آید. سپس قرینهٔ قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، نسبت به این محور رسم می‌کنیم و در آخر قسمت‌هایی را که زیر محور طول‌ها قرار دارند، حذف می‌کنیم.



اکنون کافی است نمودار تابع را فقط در یک دورهٔ تناوب مثلاً در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ رسم کنیم.

۶۴۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $1-|a|$ است که با توجه به نمودار تابع، برابر -1 است:

$$1-|a|=-1\Rightarrow |a|=2\Rightarrow a=\pm 2$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار مقدار $f(0)$ مثبت است:

$$f(0)>0\Rightarrow 1+a\sin\frac{\pi}{4}>0\Rightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}+1>0\Rightarrow a>-\sqrt{2}$$

بنابراین فقط $a=2$ قابل قبول است. با توجه به نمودار تابع، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{b}|}=4\Rightarrow |b|=2\Rightarrow b=\pm 2$$

با توجه به اینکه تابع $f(x)=1+2\sin(\frac{\pi}{b}x+\frac{\pi}{4})$ در یک همسایگی صفر صعودی است، فقط مقدار $b=2$ قابل قبول است. پس $a+b=4$. توجه کنید که اگر $b=-2$، آن‌گاه $f(x)=1+2\sin(-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4})$ و $f(\frac{1}{2})=1$ که با توجه به شکل این‌طور نیست.

۶۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

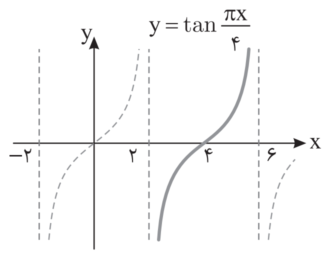
$$0\le x\le 2\Rightarrow 0\le\frac{\pi x}{4}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow -\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{6}$$

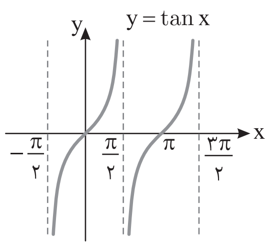
از طرف دیگر تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ اکیداً صعودی است، پس تابع f روی این بازه اکیداً نزولی است. بنابراین

$$-\tan\frac{\pi}{6}\le-\tan(\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{3})\le-\tan(-\frac{\pi}{3})\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}\le f(x)\le\sqrt{3}$$

پس $R_f=[-\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$.

۶۵۰- گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{4}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. پس حداکثر مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازهٔ $(2,a)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۶ است.





۶۵۱- گزینهٔ ۱ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند

$$3x=2k\pi+2x\Rightarrow x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$3x=2k\pi-2x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به‌صورت $\frac{2k\pi}{5}$ شامل جواب‌های به‌صورت $2k\pi$ هم هستند (مثلاً اگر در $\frac{2k\pi}{5}$ قرار دهید $k=5$، آن‌گاه جواب 2π به‌دست می‌آید که از قرار دادن $k=1$ در $2k\pi$ حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت $\frac{2k\pi}{5}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

۶۵۲- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=8k\pi+\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=8k\pi+3\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۵۳- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای با طول x قطع کند، $f(x)=0$. پس

$$\sin(2x-\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$$

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{(3k+1)\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{(3k+1)\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow -3<3k+1<9\Rightarrow -\frac{4}{3}<k<\frac{8}{3}$$

بنابراین به ازای $k=-1$، $k=0$، $k=1$ و $k=2$ چهار مقدار برای x به‌دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها هستند.

۶۵۴- گزینهٔ ۱ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$4x=k\pi+2x-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x	$-\frac{\pi}{6}$ (غ.ق.ق.)	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازهٔ $(0,2\pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}+\frac{11\pi}{6}=\frac{13\pi}{3}$$

۶۵۵- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{5})=-\sin x\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{5})=\cos(\frac{\pi}{2}+x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+\frac{\pi}{5}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+x\Rightarrow 2k\pi=-\frac{3\pi}{10}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$x+\frac{\pi}{5}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=k\pi-\frac{7\pi}{20}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۵۶- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$\sin 2x(\cos 2x-1)=0\Rightarrow\sin 2x=0$ یا $\cos 2x=1$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z},\quad 2x=2k\pi\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های معادلهٔ دوم جزء جواب‌های معادلهٔ اول هستند، بنابراین جواب‌های معادلهٔ اصلی $x=\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ است.

۶۵۷- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\sin 2x$، آن‌گاه معادله به‌صورت $2t^2-7t+5=0$ درمی‌آید و از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود $t=1$ و $t=\frac{5}{2}$. بنابراین

$$\begin{cases}\sin 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}\\ \sin 2x=\frac{5}{2}\ \ \text{(غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

۶۵۸- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2\sin 2x\cos 2x=\sqrt{2}\sin 2x\Rightarrow 2\sin 2x(\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{2})=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{8}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{\pi}{8},\frac{7\pi}{8}$. پس معادله پنج جواب در این بازه دارد.

۶۵۹- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2\cos^2 x-1=\cos x-1\Rightarrow\cos x(2\cos x-1)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\quad \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

۶۶۰- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 2x+2\sin^2 x=\sin 2x\Rightarrow 1-2\sin^2 x+2\sin^2 x=\sin 2x$$

$$\sin 2x=1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۶۱- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$5x=2k\pi+4x\Rightarrow x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$5x=2k\pi-4x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{9},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به‌صورت $\frac{2k\pi}{9}$ شامل جواب‌های به‌صورت $2k\pi$ هم هستند (مثلاً اگر در $\frac{2k\pi}{9}$ قرار دهید $k=9$، آن‌گاه جواب 2π به‌دست می‌آید که از قرار دادن $k=1$ در $2k\pi$ حاصل می‌شود). پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت $\frac{2k\pi}{9},\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

راه‌حل دوم $x=0$ جواب معادله است، پس گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند (به ازای هیچ مقدار صحیح k، $x=0$ به‌دست نمی‌آید). اگر $k=9$، آن‌گاه $\frac{k\pi}{9}=\pi$، اما $x=\pi$ جواب معادله نیست، پس گزینهٔ (۳) هم رد می‌شود.

۶۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2\sin x=-\sqrt{3}\Rightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sin x=\sin(-\frac{\pi}{3})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x=2k\pi-\frac{\pi}{3},\ x=2k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{3})\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{3},\ x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$$

۶۶۳- گزینهٔ ۳ در نقاطی که $\sin 3x=1$، نمودار تابع f حداکثر مقدار خود را دارد. پس

$$3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{(4k+1)\pi}{6},k\in\mathbb{Z}$$

k	-1	0	1	2
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین نمودار تابع در بازهٔ $[-\pi,2\pi]$، چهار بار به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

برای پیدا کردن نقاطی که نمودار تابع در آن‌ها حداکثر می‌شود، می‌توانیم به شکل زیر نیز عمل کنیم:

$$-\pi\le\frac{(4k+1)\pi}{6}\le 2\pi\Rightarrow -6\le 4k+1\le 12\Rightarrow -7\le 4k\le 11$$

$$-\frac{7}{4}\le k\le\frac{11}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-1,0,1,2\}$$

۶۶۴- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{2x}{3}\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})=\cos\frac{2x}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=2k\pi+\frac{2x}{3}\Rightarrow x=\frac{(-12k+3)\pi}{7},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=2k\pi-\frac{2x}{3}\Rightarrow x=12k\pi-3\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را مشخص می‌کنیم. واضح است که هیچ‌یک از جواب‌های به‌صورت $x=12k\pi-3\pi$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ قرار ندارند.

پس جواب‌های به‌صورت $x=\frac{(-12k+3)\pi}{7}$ را بررسی می‌کنیم

k	0	1	-1
x	$\frac{3\pi}{7}$	$\frac{-9\pi}{7}$ (غ.ق.ق.)	$\frac{15\pi}{7}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادله فقط یک جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۶۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}$. بنابراین

$$\cot(\frac{\pi}{4}-x)=\cot(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}+x))=\tan(\frac{\pi}{4}+x)$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\tan(\frac{\pi}{4}+x)+\tan(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{\pi}{6}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$\frac{\pi}{4}+x=k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12}$$

۶۶۶- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2}\sin^2 x-\sin x=0\Rightarrow\sin x(\sqrt{2}\sin x-1)=0$$

$$\sin x=0 \ \text{یا}\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,2\pi)$ عبارت‌اند از π، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر 2π است.

۶۶۷- گزینهٔ ۳ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2(1-\sin^2 x)-3\sin x-3=0\Rightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$، معادله به‌صورت $2t^2+3t+1=0$ درمی‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t=-1$ و $t=-\frac{1}{2}$. بنابراین

$$\sin x=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6},-\frac{5\pi}{6}$$

توجه کنید که فقط جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,0)$ را مشخص کرده‌ایم که تعداد آن‌ها سه‌تاست.

۶۶۸- گزینهٔ ۱ چون $\sin 4x\neq 0$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\cos 2x}=\frac{1}{\sin 4x}\Rightarrow\sin 4x=\cos 2x\Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x=\cos 2x$$

$$2\sin 2x\cos 2x-\cos 2x=0\Rightarrow\cos 2x(2\sin 2x-1)=0$$

$$\begin{cases}\cos 2x=0 \quad (\text{غ.ق.ق.})\\ \sin 2x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$، که مجموع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

۶۶۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{3\sin x}{\cos x}\Rightarrow\sin 2x\cos x=3\sin x\cos 2x$$

اکنون از اتحادهای $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ استفاده می‌کنیم

$$2\sin x\cos^2 x-3\sin x(2\cos^2 x-1)=0$$

$$\sin x(2\cos^2 x-6\cos^2 x+3)=0$$

$$\sin x(3-4\cos^2 x)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,2\pi)$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=\pi\\ \cos^2 x=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در این بازه برابر است با 5π.

۶۷۰- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{16}{3}$$

$$16\sin^2 x\cos^2 x=3\Rightarrow 4(2\sin x\cos x)^2=3$$

$$4\sin^2 2x=3\Rightarrow \sin^2 2x=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ به‌صورت زیر هستند:

$$2x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\ ,\qquad 2x=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

$$2x=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}\ ,\qquad 2x=\frac{5\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$$

پس مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ برابر است با 2π.

۶۷۱- گزینهٔ ۳ جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$5x=2k\pi+3x\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$5x=2k\pi+\pi-3x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8},\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۷۲- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos\frac{x}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=4k\pi\pm\frac{4\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\pi,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	−۱
$x=4k\pi-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$4\pi-\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$-4\pi-\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)

k	۰	۱	−۱
$x=4k\pi+\frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$4\pi+\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)	$-4\pi+\frac{4\pi}{3}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادلهٔ فوق یک جواب در بازهٔ $(-\pi,2\pi)$ دارد.

۶۷۳- گزینهٔ ۳ در نقاطی کـه $\cos 4x=1$، تابع f به حداقل مقدار خود می‌رسد. پس

$$4x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

k	−۱	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

بنابراین در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ نمودار تابع ۵ بار به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۶۷۴- گزینهٔ ۳ ابتدامعادله‌رابه‌صورت $\cos(2x-\frac{\pi}{9})=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$ می‌نویسیم. پس جواب کلی معادله به‌صورت زیر است

$$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x\Rightarrow 2k\pi=-\frac{11\pi}{18},\ k\in\mathbb{Z}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{7\pi}{72}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۷۵- گزینهٔ ۲ جواب‌های معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$2\cos^3 x-\cos x=0\Rightarrow \cos x(2\cos^2 x-1)=0$$

$$\cos x=0\ ,\qquad \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چـون جواب‌هـای معادلـه را در بـازهٔ $(0,2\pi)$ می‌خواهیـم، پس ایـن جواب‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

بنابراین معادله شش جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارد.

۶۷۶- گزینهٔ ۳ با توجه به $\sin(\pi+x)=-\sin x$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2 x-\sin x-2=0\Rightarrow(\sin x+1)(\sin x-2)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x-2=0\Rightarrow \sin x=2\quad \text{(غ.ق.ق.)}$$

$$\sin x+1=0\Rightarrow \sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۷۷- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x=1-\sin^2 x\Rightarrow \cos 2x=\cos^2 x$$

اکنون از اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ استفاده می‌کنیم:

$$2\cos^2 x-1=\cos^2 x\Rightarrow \cos^2 x=1\Rightarrow \cos x=\pm 1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x=2k\pi \ \text{یا}\ x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، π و 2π.

راه‌حل دوم از اتحاد $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$1-\cos 2x=\sin^2 x\Rightarrow 2\sin^2 x=\sin^2 x\Rightarrow \sin^2 x=0\Rightarrow \sin x=0$$

$$x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=0, x=\pi, x=2\pi$$

۶۷۸- گزینهٔ ۱ اگـر فرض کنیـم $t=\tan x$، آن‌گاه $\cot x=\frac{1}{t}$ و در نتیجه معادله به شکل $3t-\frac{3}{t}=2\sqrt{3}$ درمی‌آید. بنابراین

$$3t^2-2\sqrt{3}t-3=0\Rightarrow t=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+36}}{6}\Rightarrow t=\sqrt{3},\ t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین جواب‌های معادله که در بازهٔ $(\pi,2\pi)$ قرار دارند به‌صورت زیر هستند:

$$\tan x=\sqrt{3}\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$$

$$\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{11\pi}{6}$$

مجموع این جواب‌ها برابر است با $\frac{19\pi}{6}$.

۶۷۹- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم، سپس از اتحاد $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ استفاده می‌کنیم.

$$1+\cos\frac{x}{2} = -\cos x \xrightarrow{\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}-1}$$

$$1+\cos\frac{x}{2} = -2\cos^2\frac{x}{2}+1 \Rightarrow \cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است

$$\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi+\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=4k\pi\pm\frac{4\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

از جواب‌های $x=4k\pi-\frac{4\pi}{3}$ هیچ یک در بازهٔ $(0,2\pi)$ قرار ندارند، ولی از جواب‌های $x=2k\pi+\pi$ و $x=4k\pi+\frac{4\pi}{3}$ جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ به‌ازای $k=0$ به‌دست می‌آیند که π و $\frac{4\pi}{3}$ هستند و مجموع آن‌ها $\frac{7\pi}{3}$ است.

۶۸۰- گزینهٔ ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1$$

$$\xrightarrow{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x} 1-\sin x=1\Rightarrow \sin x=0$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارتند از $x=0$، $x=\pi$ و $x=2\pi$. ولی توجه کنید که جواب $x=0$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند و قابل قبول نیست. این جواب به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم، تولید شده است. بنابراین معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ دو جواب دارد.

۶۸۱- گزینهٔ ۳ جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$3x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+x-\frac{\pi}{9}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{9}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$3x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-x+\frac{\pi}{9}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{13\pi}{36}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$0<k\pi+\frac{\pi}{9}<2\pi\Rightarrow -\frac{1}{9}<k<\frac{17}{9}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0,1\}$$

$$0<\frac{k\pi}{2}+\frac{13\pi}{36}<2\pi\Rightarrow\frac{-13}{18}<k<\frac{59}{18}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0,1,2,3\}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ شش جواب دارد.

۶۸۲- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos 3x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 3x=\cos\frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$3x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}=\frac{(6k\pm1)\pi}{9}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\pi)$ را معین می‌کنیم

k	0	1	2
$x=(6k+1)\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{9}$ (غ.ق.ق.)

k	0	1	2
$x=(6k-1)\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{9}$ (غ.ق.ق.)	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$ (غ.ق.ق.)

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\pi)$ برابر است با

$$\frac{\pi}{9}+\frac{7\pi}{9}+\frac{5\pi}{9}=\frac{13\pi}{9}$$

۶۸۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد $2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$، معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(3x-\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow\sin 3x=0\Rightarrow 3x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

۶۸۴- گزینهٔ ۲ چون $\cos(x-\frac{\pi}{6})\neq 0$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{6})=-\sin 3x\Rightarrow\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{2}+3x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+3x\Rightarrow x=-k\pi-\frac{\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,\pi)}0<-k\pi-\frac{\pi}{3}<\pi\Rightarrow\frac{1}{3}<-k<\frac{4}{3}\Rightarrow-\frac{4}{3}<k<-\frac{1}{3}$$

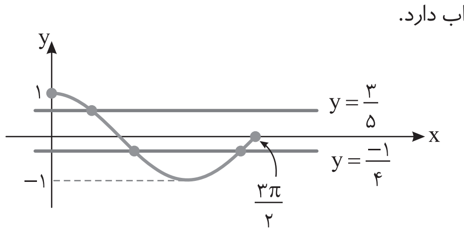
$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-1\}\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-3x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,\pi)}0<\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}<\pi\Rightarrow\frac{2}{12}<k<\frac{26}{12}$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{1,2\}$$

پس جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{5\pi}{12}$ و $\frac{11\pi}{12}$ که $\frac{2\pi}{3}$ قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج در معادلهٔ اصلی می‌شود (توجه کنید که این جواب در اثر ضرب کردن طرفین معادله در $\cos(x-\frac{\pi}{6})$ به وجود آمده است). بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(0,\pi)$ دارد.

۶۸۵- گزینهٔ ۳ جواب‌های معادله به‌صورت $\cos x=-\frac{1}{4}$ یا $\cos x=\frac{3}{5}$ هستند. پس با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خطوط $y=-\frac{1}{4}$ و $y=\frac{3}{5}$، معادلهٔ $\cos x=\frac{3}{5}$ در بازهٔ $[0,\frac{3\pi}{2}]$ یک جواب و معادلهٔ $\cos x=-\frac{1}{4}$ در این بازه دو جواب دارد. پس معادلهٔ مورد نظر در بازهٔ فوق سه جواب دارد.



۶۸۶- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=2\Rightarrow \tan^2 x-2\tan x+1=0$$

$$(\tan x-1)^2=0\Rightarrow \tan x=1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

راه‌حل دوم معادله را به کمک اتحاد $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}$ به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2}{\sin 2x}=2\Rightarrow \sin 2x=1\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۶۸۷- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\tan x$، آن‌گاه معادله به‌صورت $3t^2+4\sqrt{3}t+3=0$ درمی‌آید. از حل این معادلهٔ درجهٔ دوم نتیجه می‌شود $t=-\sqrt{3}$ یا $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. بنابراین

$$\begin{cases}\tan x=-\sqrt{3}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{3}=k\pi-\frac{2\pi}{6}\\ \tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت $x=k\pi-\frac{n\pi}{6}$ هستند که در آن k هر عدد صحیح دلخواه و n برابر ۱ یا ۲ است.

۶۸۸- گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد $\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\sin^2\alpha$ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=1\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 8x=1$$

$$\cos 8x=-\cos 2x\Rightarrow \cos 8x=\cos(\pi-2x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$8x=2k\pi+\pi-2x\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{10}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$8x=2k\pi-\pi+2x\Rightarrow x=(2k-1)\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
$x=(2k+1)\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{2}$
			(غ.ق.ق.)

k	۰	۱	۲
$x=(2k-1)\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
	(غ.ق.ق.)		(غ.ق.ق.)

پس جواب‌های معادله که در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ قرار دارند عبارت‌اند از

$$\frac{\pi}{10},\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{6}$$

۶۸۹- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos^4 x-\sin^4 x=1\Rightarrow(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=1$$

$$\cos 2x=1$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,3\pi)$ به ازای $k=1,2$ به‌دست می‌آیند که عبارت‌اند از π و 2π و مجموع آن‌ها برابر 3π است.

۶۹۰- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\cos x$، آن‌گاه $\sin^2 x=1-t^2$ و معادله به‌صورت $(2-\sqrt{2})(1-t^2)+t-1=0$ در می‌آید. بنابراین

$$(2-\sqrt{2})(1-t)(1+t)-(1-t)=0$$

$$(1-t)((2-\sqrt{2})(1+t)-1)=0$$

$$(1-t)(2-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})t-1)=0$$

$$t=1,\quad t=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=1\Rightarrow x=0\ ,\qquad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، سه است.

۶۹۱- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(x-\frac{\pi}{3})=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

بنابراین جواب‌های آن به‌صورت زیر هستند:

$$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2k\pi=-\frac{7\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{13\pi}{24},k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(-\pi,2\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۱-	۲-
x	$\frac{13\pi}{24}$	$\frac{37\pi}{24}$	$\frac{61\pi}{24}$	$-\frac{11\pi}{24}$	$-\frac{35\pi}{24}$
			(غ.ق.ق.)		(غ.ق.ق.)

پس معادله سه جواب در بازهٔ فوق دارد.

۶۹۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(x+\frac{5\pi}{36})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$x+\frac{5\pi}{36}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{2\pi}{18}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x+\frac{5\pi}{36}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{11\pi}{18}$$

پس i می‌تواند برابر ۲ یا ۱۱ باشد.

۶۹۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin^۲(۵x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \sin(۵x-\frac{\pi}{۳})=\pm\frac{۱}{۲}$$

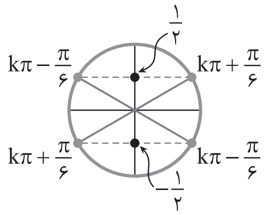
با توجه به شکل زیر جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$۵x-\frac{\pi}{۳}=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۵x=k\pi+\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۱۰}=\frac{k\pi}{۵}+\frac{۳\pi}{۳۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$۵x=k\pi-\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۳۰}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین i می‌تواند مقادیر ۳ و ۱ را داشته باشد که مجموع آن‌ها برابر ۴ است.



۶۹۴- گزینهٔ ۱ چون $\cos ۲x\neq ۰$، طرفین معادله را در $\cos ۲x$ ضرب می‌کنیم

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\cos ۲x\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-۲x)$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{(۸k+۱)\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}+۲x\Rightarrow x=-\frac{(۸k+۱)\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ را به‌دست می‌آوریم:

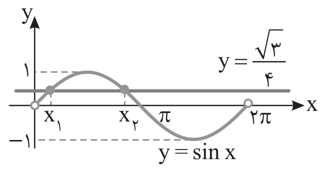
k	۰	۱	۲
$x=\frac{(۸k+۱)\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ (غ.ق.ق.)

k	۰	۱	−۱
$x=-\frac{(۸k+۱)\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۴}$ (غ.ق.ق.)	$-\frac{۹\pi}{۴}$ (غ.ق.ق.)	$\frac{۷\pi}{۴}$ (غ.ق.ق.)

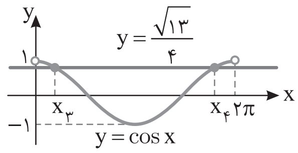
جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ ولی $\frac{۳\pi}{۴}$ قابل قبول نیست، زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر در معادلهٔ اصلی می‌شود (توجه کنید که $x=\frac{۳\pi}{۴}$ در اثر ضرب کردن معادله در $\cos ۲x$ به وجود آمده است).

پس تعداد جواب‌ها در بازهٔ $(۰,\pi)$ برابر یک است.

۶۹۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ یا $\cos x=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$. با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$، معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



همچنین با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$، معادلهٔ $\cos x=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$ دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



ولی توجه کنید که یکی از این جواب‌ها $(x_۳)$ همان جواب معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ است $(x_۱)$، زیرا $(\frac{\sqrt{۳}}{۴})^۲+(\frac{\sqrt{۱۳}}{۴})^۲=۱$.

بنابراین معادلهٔ مورد نظر مسئله سه جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۶۹۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که $\cos^۲x-\sin^۲x=\cos ۲x$.

$$-(\cos^۲x-\sin^۲x)=-\cos x\Rightarrow\cos ۲x=\cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

واضح است که جواب‌های $\frac{۲k\pi}{۳}$ شامل جواب‌های $۲k\pi$ نیز می‌شوند، پس جواب‌های کلی به‌صورت $\frac{۲k\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ هستند.

راه‌حل دوم $x=۰$ جواب معادله است، پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند.

به ازای $k=۳$، گزینهٔ (۱) برابر π می‌شود، اما $x=\pi$ جواب معادله نیست:

$$\sin^۲\pi-\cos^۲\pi=-۱,\quad \sin(\frac{۳\pi}{۲}-\pi)=\sin\frac{\pi}{۲}=۱$$

بنابراین گزینهٔ (۱) هم رد می‌شود.

۶۹۷- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}\times\frac{\sin ۴x}{\cos ۴x}=۱\Rightarrow \sin ۲x\sin ۴x=\cos ۲x\cos ۴x$$

$$\cos ۲x\cos ۴x-\sin ۲x\sin ۴x=۰\Rightarrow\cos(۴x+۲x)=۰$$

$$۶x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۶}+\frac{\pi}{۱۲}=\frac{(۲k+۱)\pi}{۱۲},k\in\mathbb{Z}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{۷\pi}{۱۲}$ (غ.ق.ق.)

توجه کنید که $x=\frac{\pi}{۴}$ قابل قبول نیست، زیرا به‌ازای آن $\tan ۲x$ تعریف نشده است. پس معادله دو جواب در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\tan 2x\tan 4x=1\Rightarrow \tan 2x\times\frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x}=1$$

$$2\tan^2 2x=1-\tan^2 2x\Rightarrow 3\tan^2 2x=1\Rightarrow \tan 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases}\tan 2x=\tan\frac{\pi}{6}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\\ \tan 2x=\tan(-\frac{\pi}{6})\Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\end{cases}$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ را می‌یابیم.

k	۱	۲
$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$
		(غ.ق.ق.)

k	۰	۱
$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$
		(غ.ق.ق.)

بنابراین معادله دو جواب در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ دارد.

راه‌حل سوم معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tan 2x=\cot 4x=\tan(\frac{\pi}{2}-4x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}-4x\Rightarrow 6x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ به‌صورت $x=\frac{\pi}{12}$ و $x=\frac{5\pi}{12}$ هستند.

۶۹۸- گزینهٔ ۴ از اتحـاد مثلثاتی $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ کمک می‌گیریم و معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

طرفین معادله را در $\cos x+\sin x$ ضرب می‌کنیم

$$\cos x-\sin x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2$$

$$\begin{cases}\cos x-\sin x=0 & (1)\\ (\cos x+\sin x)^2=1 & (2)\end{cases}$$

از معادلهٔ (۱) جواب‌های زیر در بازهٔ $[0,\pi]$ به‌دست می‌آید:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

از معادلهٔ (۲) جواب‌های زیر در بازهٔ $[0,\pi]$ به‌دست می‌آید:

$$\cos^2 x+\sin^2 x+\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=1\Rightarrow \sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi$$

$$x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\xrightarrow{x\in[0,\pi]}x=0\ ,\ x=\frac{\pi}{2}\ ,\ x=\pi$$

پس مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ برابر $\frac{7\pi}{4}$ است.

۶۹۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=\sin x$$

$$(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\sin x$$

$$\sin x-\sin^2 x\cos x+\cos x-\sin x\cos^2 x=\sin x$$

$$\cos x(-\sin^2 x+1-\sin x\cos x)=0$$

$$\cos x(\cos^2 x-\sin x\cos x)=0\Rightarrow \cos^2 x(\cos x-\sin x)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

پس معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x\Rightarrow \sin x-\sin^3 x-\cos^3 x=0$$

$$\sin x(1-\sin^2 x)-\cos^3 x=0\Rightarrow \sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$$

$$\cos^2 x(\sin x-\cos x)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\\ \sin x=\cos x\Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ چهار جواب دارد.

۷۰۰- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan^2 x=2-2\sin^2 x\Rightarrow \tan^2 x=2(1-\sin^2 x)$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=2\cos^2 x\xrightarrow{\cos x\neq 0}\sin^2 x=2\cos^4 x$$

$$1-\cos^2 x=2\cos^4 x\Rightarrow 2\cos^4 x+\cos^2 x-1=0$$

$$(\cos^2 x+1)(2\cos^2 x-1)=0$$

چون $\cos^2 x+1\neq 0$، بنابراین

$$2\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},\ \ k\in\mathbb{Z}$$

۷۰۱- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin x(1-\sin^2 x)-\cos x(1-\cos^2 x)=0$$

$$\sin x\cos^2 x-\cos x\sin^2 x=0$$

$$\sin x\cos x(\cos x-\sin x)=0\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x(\cos x-\sin x)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از صفر، $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{3\pi}{2}$، 2π، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{13\pi}{2}$.

۷۰۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x+\frac{\pi}{۹}-(x-\frac{۷\pi}{۱۸})=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x-\frac{۷\pi}{۱۸}=(x+\frac{\pi}{۹})-\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})+۲\sin^{۲}(-\frac{\pi}{۲}+(x+\frac{\pi}{۹}))=۲$$

$$\sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})+۲\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})=۲$$

$$۱-\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})+۲\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})=۲$$

$$\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۹})=۱\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{۹})=\pm۱\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۹})=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر است:

$$x+\frac{\pi}{۹}=k\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۹}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

۷۰۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم. توجه کنید که از اتحادهای چاق و لاغر و $\cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$(\cos x-\sin x)(\cos^{۲}x+\sin x\cos x+\sin^{۲}x)=\cos^{۲}x-\sin^{۲}x$$

$$(\cos x-\sin x)(۱+\sin x\cos x)-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=۰$$

$$(\cos x-\sin x)(۱+\sin x\cos x-\sin x-\cos x)=۰$$

$$(\cos x-\sin x)(۱-\sin x)(۱-\cos x)=۰$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=\sin x\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

$$\sin x=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\ ,\qquad \cos x=۱\Rightarrow x=۰,۲\pi$$

پس معادله در این بازه پنج جواب دارد.

۷۰۴- گزینهٔ ۲ دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از اتحاد $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$ استفاده می‌کنیم.

$$۲(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x)=۳\Rightarrow۲(۱+\sin ۲x)=۳$$

$$\sin ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,\pi)$ به ازای $k=۰$، $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۵\pi}{۱۲}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

۷۰۵- گزینهٔ ۲ از $\cos(۲\pi\sin x)=-۱$ نتیجه می‌شود

$$۲\pi\sin x=۲k\pi+\pi\Rightarrow\sin x=k+\frac{۱}{۲},k\in\mathbb{Z}$$

با توجه به $-۱\le\sin x\le۱$ نتیجه می‌شود که k می‌تواند مقادیر صفر و -۱ را داشته باشد. بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$k=۰\Rightarrow\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},x=\frac{۵\pi}{۶}$$

$$k=-۱\Rightarrow\sin x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۶},x=\frac{۱۱\pi}{۶}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر است با ۴π.

۷۰۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

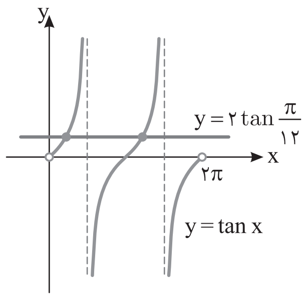
$$\sin x\cos\frac{\pi}{۱۲}+\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos x=۳\sin x\cos\frac{\pi}{۱۲}-۳\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos x$$

$$۴\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos x=۲\sin x\cos\frac{\pi}{۱۲}$$

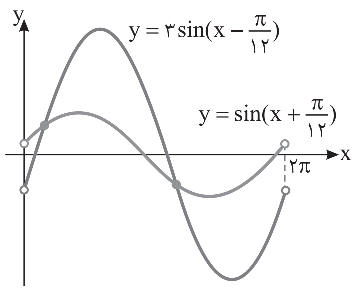
$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۲}}{\cos\frac{\pi}{۱۲}}$$

$$\tan x=۲\tan\frac{\pi}{۱۲}$$

با توجه به نمودار تابع‌های $y=\tan x$ و خط $y=۲\tan\frac{\pi}{۱۲}$ معادلهٔ فوق دو جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.



راه‌حل دوم نمودار تابع‌های $y=\sin(x+\frac{\pi}{۱۲})$ و $y=۳\sin(x-\frac{\pi}{۱۲})$ را در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ رسم می‌کنیم و تعداد نقاط برخورد آن‌ها را می‌یابیم. با توجه به شکل زیر معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.



۷۰۷- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})=-\frac{۱}{۴}$$

$$(\cos x\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sin x\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\cos x\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\sin x\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۴}$$

$$(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}(\cos^{۲}x-\sin^{۲}x)=-\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{۱}{۲}\cos ۲x=-\frac{۱}{۴}$$

$$\cos ۲x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos ۲x=\cos\frac{۲\pi}{۳}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۷۰۸- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=\tan ۲x \Rightarrow \frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan x}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan x}=\tan ۲x$$

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\tan(۲x)$$

$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲}, k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را به‌دست می‌آوریم:

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$ (غ.ق.ق.)	$\frac{۱۳\pi}{۱۲}$	$\frac{۱۷\pi}{۱۲}$	$\frac{۷\pi}{۴}$ (غ.ق.ق.)

توجه کنید که $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$ جواب معادله نیستند زیرا به ازای این مقادیر $\tan ۲x$ تعریف نمی‌شود. پس معادله چهار جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد.

۷۰۹- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan ۳x-\tan x}{۱+\tan x\tan ۳x}=\frac{\tan ۵x+\tan x}{۱-\tan x\tan ۵x}$$

$$\tan(۳x-x)=\tan(۵x+x)\Rightarrow \tan ۲x=\tan ۶x$$

بنابراین جواب کلی معادله به‌صورت زیر است

$$۶x=k\pi+۲x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

فقط $x=\frac{\pi}{۴}$ در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد که قابل قبول نیست زیرا باعث صفر شدن مخرج کسر $\frac{۱+\tan x\tan ۳x}{۱-\tan x\tan ۵x}$ می‌شود. بنابراین معادله در بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ جواب ندارد.

۷۱۰- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\tan x$، آن‌گاه $\cot x=\frac{۱}{t}$ و در نتیجه معادله به‌صورت $۳t+\frac{k}{t}=۲$ درمی‌آید. اگر دو طرف معادله را در t ضرب کنیم، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید: $۳t^۲+k=۲t\Rightarrow ۳t^۲-۲t+k=۰$

معادلهٔ فوق با شرط مقابل جواب دارد: $\Delta=۴-۱۲k\ge۰\Rightarrow k\le\frac{۱}{۳}$

اکنون فرض کنید $t_۱$ جواب معادلهٔ درجهٔ دوم فوق باشد. در این صورت معادلهٔ $\tan x=t_۱$ جواب دارد و در نتیجه معادلهٔ اصلی نیز جواب خواهد داشت. پس کافی است $k\le\frac{۱}{۳}$.

۷۱۱- گزینهٔ ۱ دو طرف تساوی $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۱}{۳}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۹}$$

$$۱+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۹}\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{۸}{۹}$$

اگر فرض کنیم $A=\sin\alpha-\cos\alpha$، آن‌گاه

$$A^۲=(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=۱-(-\frac{۸}{۹})=\frac{۱۷}{۹}\Rightarrow A=\pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد، $\sin\alpha<۰$ و $\cos\alpha>۰$. پس مقدار $\sin\alpha-\cos\alpha$ منفی است و در نتیجه $A=-\frac{\sqrt{۱۷}}{۳}$.

۷۱۲- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم اندازهٔ این زاویه برحسب درجه برابر D و برحسب رادیان برابر R باشد. بنابراین $D=\frac{۲۰۰}{\pi}R-۵$. از تساوی $\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$ به‌دست می‌آید

$$\frac{\frac{۲۰۰}{\pi}R-۵}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow ۱۸۰R=۲۰۰R-۵\pi\Rightarrow ۲۰R=۵\pi\Rightarrow R=\frac{\pi}{۴}$$

۷۱۳- گزینهٔ ۳ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دورهٔ تناوب برابر ۶ است، پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin(b\pi x)$ برابر ۲ است:

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۲\Rightarrow\frac{۱}{|b|}=۱\Rightarrow b=\pm۱$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است. پس $|a|=۴$. در نتیجه $a=\pm۴$.
با توجه به نمودار که در شروع به‌صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases}a=۴\\b=-۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=۴\sin(-\pi x),\quad \begin{cases}a=-۴\\b=۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=-۴\sin(\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر ۴- است.

۷۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\cot ۳۸۰^\circ=\cot(۲۷۰^\circ+۱۱۰^\circ)=-\tan ۱۱۰^\circ$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۱-\cot۳۸۰^\circ}+\frac{۱}{۱+\cot۱۱۰^\circ}=\frac{۱}{۱+\tan۱۱۰^\circ}+\frac{۱}{۱+\cot۱۱۰^\circ}$$

$$=\frac{۱+\cot۱۱۰^\circ+۱+\tan۱۱۰^\circ}{(۱+\tan۱۱۰^\circ)(۱+\cot۱۱۰^\circ)}$$

$$=\frac{۲+\tan۱۱۰^\circ+\cot۱۱۰^\circ}{۱+\cot۱۱۰^\circ+\tan۱۱۰^\circ+\tan۱۱۰^\circ\cot۱۱۰^\circ}$$

$$=\frac{۲+\tan۱۱۰^\circ+\cot۱۱۰^\circ}{۲+\tan۱۱۰^\circ+\cot۱۱۰^\circ}=۱$$

۷۱۵- گزینهٔ ۳ چون $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$، پس

$$\frac{۱}{\sin۱۵^\circ}+\frac{۱}{\cos۱۵^\circ}=\frac{\cos۱۵^\circ+\sin۱۵^\circ}{\sin۱۵^\circ\cos۱۵^\circ}=\frac{\sqrt{۲}\sin(۱۵^\circ+۴۵^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin۳۰^\circ}$$

$$=۴\sqrt{۲}\sin۶۰^\circ=۴\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۶}$$

۷۱۶- گزینهٔ ۳ دو طرف تساوی داده شده را به توان دو می‌رسانیم و از اتحادهای $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ و $\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

$$۱+\sin۲x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin۲x=-\frac{۳}{۴}$$

بنابراین $\cos۴x=۱-۲\sin^۲۲x=۱-۲(-\frac{۳}{۴})^۲=-\frac{۱}{۸}$.

۷۱۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

بنابراین $A=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

۷۱۸- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $\cos 2x=\cos(x+\frac{\pi}{4})$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌ها به‌صورت زیر هستند: $(k\in\mathbb{Z})$

$$2x=2k\pi+x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4},\quad 2x=2k\pi-x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{12}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{6}$ است.

۷۱۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $1+\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2$

بنابراین معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$(\cos x+\sin x)^2=\cos x+\sin x$$

$$(\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x-1)=0$$

اگر $\cos x+\sin x=0$، آن‌گاه $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$. اگر $\cos x+\sin x=1$، آن‌گاه

$$1-\cos x=\sin x$$

از اتحادهای $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$ و $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ به ازای $\alpha=\frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$2\sin^2\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=0\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi\Rightarrow x=2k\pi\\ \sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$.

۷۲۰- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\tan x-3}\Rightarrow\frac{\tan x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan x}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\tan x-3}$$

$$\sqrt{3}\tan^2 x-3\tan x+3\tan x-3\sqrt{3}=3+\sqrt{3}-(3\sqrt{3}+3)\tan x$$

$$\sqrt{3}\tan^2 x+(3+3\sqrt{3})\tan x-3-4\sqrt{3}=0$$

اگر فرض کنیم $t=\tan x$ معادلهٔ فوق به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل می‌شود که مجموع ضرایب آن صفر است. پس $\tan x=1$ و $\tan x=-\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ جواب‌های معادله هستند که چون جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ مورد سؤال است، پس $\tan x=-\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$ قابل قبول نیست و معادلهٔ $\tan x=1$ هم فقط یک جواب $(x=\frac{\pi}{4})$ در این بازه دارد.

۷۲۱- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $\tan\alpha\cot\alpha=1$. بنابراین

$$A=\frac{1-\tan\frac{\pi}{5}+\cot\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{5}}{1+\tan\frac{\pi}{5}-\cot\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{5}\cot\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{1-\tan\frac{\pi}{5}+\cot\frac{\pi}{5}-1}{1+\tan\frac{\pi}{5}-\cot\frac{\pi}{5}-1}=\frac{-(\tan\frac{\pi}{5}-\cot\frac{\pi}{5})}{\tan\frac{\pi}{5}-\cot\frac{\pi}{5}}=-1$$

۷۲۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\cot x=\frac{1}{\tan x}$. بنابراین از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{\tan x-\frac{1}{\tan x}}{\tan x+\frac{1}{\tan x}}=\frac{7}{25}\Rightarrow\frac{\tan^2 x-1}{\tan^2 x+1}=\frac{7}{25}$$

$$25\tan^2 x-25=7\tan^2 x+7\Rightarrow\tan^2 x=\frac{16}{9}$$

از اتحاد $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+\frac{16}{9}}=\frac{9}{25}$$

چون x زاویه‌ای حاده است، پس $\cos x>0$، در نتیجه $\cos x=\frac{3}{5}$.

۷۲۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $\sin x+\cos x=y$. در نتیجه

$$y^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{y^2-1}{2}=y\Rightarrow y^2-2y-1=0$$

پس $y=1\pm\sqrt{2}$. ولی چون $1+\sqrt{2}>2$، پس $\sin x+\cos x$ نمی‌تواند با این عدد برابر باشد و در نتیجه $\sin x+\cos x=1-\sqrt{2}$.

۷۲۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\cos^2 179^\circ=\cos^2(180^\circ-1^\circ)=\cos^2 1^\circ$$

$$\cos^2 178^\circ=\cos^2(180^\circ-2^\circ)=\cos^2 2^\circ$$

$$\vdots$$

$$\cos^2 91^\circ=\cos^2(180^\circ-89^\circ)=\cos^2 89^\circ$$

بنابراین

$$A=2(\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\cos^2 89^\circ)+\cos^2 90^\circ+\cos^2 180^\circ$$

از طرف دیگر $\cos^2 90^\circ=0$ و همچنین

$$\cos^2 89^\circ=\sin^2 1^\circ,\ \cos^2 88^\circ=\sin^2 2^\circ,\ \ldots,\ \cos^2 46^\circ=\sin^2 44^\circ$$

بنابراین

$$A=2(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ+\cos^2 45^\circ)+\cos^2 180^\circ$$

$$\xrightarrow[\cos^2 180^\circ=1]{\cos^2 45^\circ=\frac{1}{2}}A=2(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{۴۴ تا}}+\frac{1}{2})+1=90$$

۷۲۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $-\frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه $\tan x\ge\tan(-\frac{\pi}{3})$، زیرا تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است و در نتیجه $\tan x\ge-\sqrt{3}$. بنابراین

$$m+2\sqrt{3}\ge-\sqrt{3}\Rightarrow m\ge-3\sqrt{3}$$

پس حداقل مقدار m برابر $-3\sqrt{3}$ است.

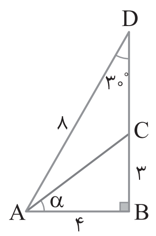
۷۲۶- گزینهٔ ۴ بیشترین و کمترین مقدار تابع به‌ترتیب برابر ۲ و ۲− هستند. پس $|a|=2$. نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{4}{3},0)$ عبور می‌کند، بنابراین

$$f(\frac{4}{3})=0\Rightarrow a\sin(\pi(b-\frac{4}{3}))=0\Rightarrow\sin(\pi(b-\frac{4}{3}))=0$$

$$\pi(b-\frac{4}{3})=k\pi\Rightarrow b=k+\frac{4}{3}$$

چون $2<b<3$، پس $b=\frac{7}{3}$. بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=2\sin(\frac{7\pi}{3}-\pi x)$ یا $f(x)=-2\sin(\frac{7\pi}{3}-\pi x)$ است. چون $f(0)>0$، پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=2\sin(\frac{7\pi}{3}-\pi x)$ است. در نتیجه $a=2$، $b=\frac{7}{3}$ و $a+b=\frac{13}{3}$.

۷۲۷- گزینهٔ ۲ چون $\sin\hat{D}=\sin 30^\circ=\frac{AB}{8}=\frac{1}{2}$، پس $AB=4$. بنابراین با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، $AC=5$. در نتیجه $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. بنابراین $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$.



۷۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

به همین ترتیب $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$. در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{(1+\tan\alpha)^2+(1-\tan\alpha)^2}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(1+\tan^2\alpha)}{1-\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{2(\frac{1}{\cos^2\alpha})}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2}{\cos 2\alpha}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$$

۷۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}$. در ادامه معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=-1$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{8}))=-1$$

$$2\sin(x+\frac{\pi}{8})=-1\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{8})=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}x+\frac{\pi}{8}=2k\pi-\frac{\pi}{6}\\ x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi-\frac{7\pi}{24}\\ x=2k\pi+\frac{25\pi}{24}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{41\pi}{24}$ و $\frac{25\pi}{24}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{11\pi}{4}$ است.

۷۳۰- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2\sin 3x\cos 4x-2\sin 4x\cos 3x=-1$$

$$2\sin(3x-4x)=-1\Rightarrow 2\sin(-x)=-1\Rightarrow\sin x=\frac{1}{2}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $(0,\pi)$ عبارت‌اند از $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{6}$ که مجموع آن‌ها برابر π است.

۷۳۱- گزینهٔ ۲ وقتی چرخ‌وفلک ۱۸۰ ثانیه (۳ دقیقه) می‌چرخد، ۶ دور چرخیده و کابین‌ها در محل اولیهٔ خود قرار گرفته‌اند. باید ببینیم در ۴ ثانیه هر کابین چقدر جابه‌جا می‌شود. چون در هر ۶۰ ثانیه ۲ دور می‌چرخد، پس در ۴ ثانیه $2\times\frac{4}{60}$ دور، یعنی $\frac{2}{15}$ دور معادل $\frac{2}{15}\times2\pi=\frac{8\pi}{30}$ رادیان می‌چرخد.

چون زاویهٔ بین دو کابین متوالی $\frac{2\pi}{30}$ رادیان است، پس هر کابین به ۴ کابین جلوتر منتقل می‌شود. یعنی کابین شمارهٔ یک به محل کابین شمارهٔ پنج منتقل می‌شود.

۷۳۲- گزینهٔ ۳ در صورت کسر از $\sin 25^\circ$ و در مخرج کسر از $\cos 25^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$A=\frac{\sin 25^\circ(1-\sin^2 25^\circ)}{\cos 25^\circ(1-\cos^2 25^\circ)}=\frac{\sin 25^\circ\times\cos^2 25^\circ}{\cos 25^\circ\times\sin^2 25^\circ}=\frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ}=\cot 25^\circ$$

۷۳۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$7a+9a=\frac{7\pi}{32}+\frac{9\pi}{32}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow 9a=\frac{\pi}{2}-7a\Rightarrow\cos 9a=\sin 7a$$

به همین ترتیب

$$21a+27a=\frac{21\pi}{32}+\frac{27\pi}{32}=\frac{48\pi}{32}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow 27a=\frac{3\pi}{2}-21a$$

$$\cos 27a=-\sin 21a$$

بنابراین $\frac{\sin 7a\cos 27a}{\sin 21a\cos 9a}=-\frac{\sin 7a\sin 21a}{\sin 21a\sin 7a}=-1$.

۷۳۴- گزینهٔ ۲ حداقل مقدار تابع مورد نظر باید -4 و حداکثر مقدار آن ۲ باشد. حداقل مقدار تابع $y=3\cos(2x)-4$ برابر -7 و حداقل مقدار تابع $y=-2\cos(3x)+1$ برابر -1 است. پس این توابع جواب نیستند. در تابع $y=-3\sin(3x)-1$ مقدار تابع در $x=0$ برابر -1 است و تابع در سمت راست $x=0$ نزولی است. پس $y=-3\sin(3x)-1$ جواب نیست. ولی تابع $y=3\sin(2x)-1$ در سمت راست $x=0$ صعودی است.

۷۳۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\tan((x+10^\circ)+(y+35^\circ))=\frac{\tan(x+10^\circ)+\tan(y+35^\circ)}{1-\tan(x+10^\circ)\tan(y+35^\circ)}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{9}{7}\qquad(1)$$

از طرف دیگر،

$$\tan((x+10^\circ)+(y+35^\circ))=\tan((x+y)+45^\circ)$$

$$=\frac{\tan(x+y)+\tan 45^\circ}{1-\tan(x+y)\tan 45^\circ}=\frac{\tan(x+y)+1}{1-\tan(x+y)}\qquad(2)$$

اگر تساوی (۱) و (۲) را برابر قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{\tan(x+y)+1}{1-\tan(x+y)}=\frac{9}{7}\Rightarrow\tan(x+y)=\frac{1}{8}$$

۷۳۶- گزینهٔ ۲ دو طرف تساوی $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2}{3}$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=(\frac{2}{3})^2\Rightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$$

$$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}\Rightarrow2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{9}$$

بنابراین $\sin2\alpha=\frac{5}{9}$ و در نتیجه $\sin^2 2\alpha=\frac{25}{81}$.

۷۳۷- گزینهٔ ۲ از اتحادهای $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ و $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}=\frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}{\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}}$$

$$=\cos^2x-\sin^2x=\cos2x$$

بنابراین $A=(\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x})^2=\cos^2 2x=\frac{1+\cos4x}{2}$. اکنون به ازای $x=\frac{\pi}{16}$ مقدار عبارت A را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1+\cos4(\frac{\pi}{16})}{2}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt2}{4}$$

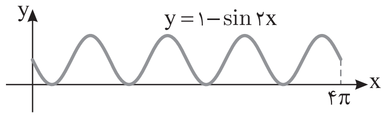
۷۳۸- گزینهٔ ۴ از روی نمودار تابع f در شکل زیر معلوم می‌شود که وقتی نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس می‌شود، $f(x)=0$، پس

$$1-\sin(2x)=0\Rightarrow\sin(2x)=1$$

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}$$

$$0<x<4\pi\Rightarrow0<k\pi+\frac{\pi}{4}<4\pi\Rightarrow0<k+\frac{1}{4}<4\Rightarrow-\frac{1}{4}<k<\frac{15}{4}$$

پس به ازای $k=0$، $k=1$، $k=2$ و $k=3$ چهار مقدار برای x به‌دست می‌آید که طول نقاط تماس نمودار تابع با محور طول‌هاست.



۷۳۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$2\cos^2 2x+3\cos2x+1=0\Rightarrow(2\cos2x+1)(\cos2x+1)=0$$

بنابراین

$$\cos2x=-1\Rightarrow2x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

۷۴۰- گزینهٔ ۲ دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt3}{2}\cos x=\frac{\sqrt2}{2}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt2}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{12}$$

$$x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{12}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $(0,2\pi)$ دو جواب $\frac{23\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ را دارد.

۷۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A=\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cot\theta$$

بنابراین $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tan\theta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times0.2}=3$.

ریاضی - ۹۱

۷۴۲- گزینهٔ ۴ از اتحادهای $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ و $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ استفاده می‌کنیم و عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta}=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\times\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta-\cos^4\theta}=\frac{\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}$$

اکنون از اتحاد $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sin^4\theta\cos^4\theta}=\frac{1}{\frac{1}{16}\sin^4 2\theta}=\frac{16}{\sin^4 2\theta}=16\sin^{-4}2\theta$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۷۴۳- گزینهٔ ۱ از نمودار داده شده مشخص است که سه برابر دورهٔ تناوب، برابر ۳ است، پس دورهٔ تناوب تابع $y=a\sin(b\pi x)$ برابر ۱ است:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=1\Rightarrow\frac{2}{|b|}=1\Rightarrow b=\pm2$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس $|a|=3\Rightarrow a=\pm3$

با توجه به نمودار که در شروع به‌صورت نزولی است، دو حالت زیر قابل قبول است:

$$\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}\Rightarrow y=3\sin(-2\pi x)$$

$$\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}\Rightarrow y=-3\sin(2\pi x)$$

در هر دو حالت مقدار ab برابر -6 است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۷۴۴- گزینهٔ ۲ از اتحاد $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot2\alpha$ استفاده می‌کنیم. اگر $\alpha=\frac{x}{2}$، آن‌گاه

$$\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=-2\cot x=-\frac{2}{\tan x}=\frac{-2}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{2}$$

تجربی - ۹۶

۷۴۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})$$
$$=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}+\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$$

بنابراین $\cos x=\frac{2}{3}$ و $\cos2x=2\cos^2x-1=2\times\frac{4}{9}-1=\frac{8}{9}-1=-\frac{1}{9}$.

تجربی - ۹۳

۷۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا مقدار $\tan\alpha$ را حساب می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\tan((\alpha-\beta)+\beta)=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2(3)}{1+9}=\frac{6}{10}=0/6$$

تجربی - ۹۴

۷۴۷- گزینهٔ ۴ کافی است صورت و مخرج برابر باشند به شرطی که مخرج صفر نباشد:

$$\sin3x=\cos(\frac{3\pi}{2}+x)\Rightarrow\sin3x=\sin x$$

$$\begin{cases}3x=2k\pi+x\Rightarrow x=k\pi & \text{(غ.ق.ق.)}\\3x=2k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

به‌ازای $x=k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس این جواب غیرقابل قبول است و جواب $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۷۴۸- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $\cos3x=-\cos x=\cos(\pi-x)$ نوشته و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}3x=2k\pi+\pi-x\\3x=2k\pi-\pi+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=2k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\\2x=2k\pi-\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

با توجه به $\cos x\neq0$، جواب $x=k\pi-\frac{\pi}{2}$ غیرقابل قبول است. پس جواب کلی $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۷۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا دقت کنید که $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$. در ادامه معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{8}))=1$$

$$2\sin(x+\frac{\pi}{8})=1\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\x+\frac{\pi}{8}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{3\pi}{4}$ است:

$$x_1=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8},\quad x_2=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{8}\Rightarrow x_1+x_2=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۷۵۰- گزینهٔ ۴ زاویهٔ $\frac{\pi}{2}-x$، متمم زاویهٔ x است، پس

$$\sin2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0\Rightarrow\sin2x+\sin x=0$$
$$\sin2x=-\sin x\Rightarrow\sin2x=\sin(-x)$$
$$2x=2k\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3},\quad 2x=2k\pi+\pi+x\Rightarrow x=(2k+1)\pi$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ عبارت‌اند از ۰، $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$، 2π و π. مجموع این جواب‌ها برابر 5π است.

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۷۵۱- گزینهٔ ۱ از اتحاد $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم.
ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$$

$$1-\sin2\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\sin2\alpha=\frac{3}{4}$$

چون $\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)=-\sin2\alpha$، بنابراین $\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)=-\frac{3}{4}$.

تجربی - ۹۵

۷۵۲- گزینهٔ ۳ عبارت را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 20° می‌نویسیم:

$$A=\frac{\sin(270^\circ-20^\circ)+\sin(720^\circ-20^\circ)}{\cos(540^\circ+20^\circ)-\cos(90^\circ+20^\circ)}=\frac{-\cos20^\circ-\sin20^\circ}{-\cos20^\circ+\sin20^\circ}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos20^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{\frac{-\cos20^\circ-\sin20^\circ}{\cos20^\circ}}{\frac{-\cos20^\circ+\sin20^\circ}{\cos20^\circ}}=\frac{-1-\tan20^\circ}{-1+\tan20^\circ}=\frac{-1-\frac{2}{5}}{-1+\frac{2}{5}}=\frac{\frac{-7}{5}}{\frac{-3}{5}}=\frac{7}{3}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۷۵۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل حداکثر مقدار تابع برابر ۱ است، این مقدار زمانی به‌دست می‌آید که $\cos(bx+\frac{\pi}{2})=-1$، پس $a+2=1\Rightarrow a=-1$

در نتیجه $y=-1-2\cos(bx+\frac{\pi}{2})=-1+2\sin(bx)$. با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر با $\frac{2\pi}{3}=\frac{13\pi}{18}-\frac{\pi}{18}$ است. بنابراین $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow b=\pm 3$

برای $x>\frac{\pi}{18}$ نمودار تابع $y=-1+2\sin(bx)$ به‌صورت صعودی شروع می‌شود، پس $b=3$ قابل قبول است، یعنی $y=-1+2\sin(3x)$ و مقدار $a+b$ برابر است با $-1+3=2$.

ریاضی - ۹۵

۷۵۴- گزینهٔ ۳ چون $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$، پس

$$\frac{1}{\sin 15^\circ}-\frac{1}{\cos 15^\circ}=\frac{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{-\sqrt{2}\sin(15^\circ-45^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ}=2\sqrt{2}$$

ریاضی - ۹۶

۷۵۵- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول ابتدا $\tan 2\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times 2}{1-4}=-\frac{4}{3}$$

$$\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{1+\frac{-4}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}}=-3$$

راه‌حل دوم ابتدا $\tan(\alpha-\beta)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$$

$$\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{2+1}{1-2\times 1}=\frac{3}{-1}=-3$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۷۵۶- گزینهٔ ۴ با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2(\pi+\frac{\pi}{4})$$

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin^2\frac{\pi}{4}\Rightarrow-\cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

تجربی - ۹۲

۷۵۷- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\cos 2x=\frac{\cos x}{\sin x}(4\sin x+\frac{\sin x}{\cos x})=4\cos x+1$$

$$2(2\cos^2 x-1)=4\cos x+1\Rightarrow 4\cos^2 x-4\cos x-3=0$$

$$(2\cos x+1)(2\cos x-3)=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x=\frac{3}{2}\ (\text{غ.ق.ق.})\ ,\quad \cos x=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۷۵۸- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$-(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\cos x\Rightarrow\cos 2x=\cos x$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}2x=2k\pi+x\Rightarrow x=2k\pi\\ 2x=2k\pi-x\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{2k\pi}{3}$ شامل جواب $2k\pi$ نیز می‌شود، پس جواب‌های کلی به‌صورت $\frac{2k\pi}{3}$ هستند.

تجربی - ۹۱

۷۵۹- گزینهٔ ۱ از اتحادهای $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ و $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم. ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2\cos^2 x-1)+2\sin x\cos x=0\Rightarrow\cos 2x+\sin 2x=0$$

$$\cos 2x=-\sin 2x\Rightarrow\cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x\Rightarrow k=-\frac{1}{4}\ (\text{غ.ق.ق.})\\ 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\end{cases}$$

راه‌حل دوم برای به‌دست آوردن جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos 2x=-\sin 2x$ به کمک دایرهٔ مثلثاتی متوجه می‌شویم: $2x=k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

تجربی - ۹۴

۷۶۰- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=1-\cos^2 x$$

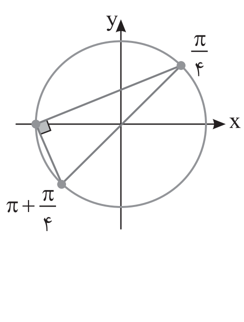
$$\sin x\cos x=\sin^2 x\Rightarrow\sin x(\cos x-\sin x)=0$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,\quad \cos x-\sin x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

دقت کنید که به‌ازای $x=2k\pi$ مخرج کسر صفر می‌شود. پس جواب‌های معادله $x=(2k+1)\pi$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ هستند که روی دایرهٔ مثلثاتی مطابق شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱



۷۶۱- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل دورهٔ تناوب تابع برابر π است، پس

$$\frac{2\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=2$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۱/۵ است، پس $|a|=\frac{1}{2}$. با توجه به آنکه تابع در شروع از مبدأ یک روند نزولی دارد باید a و b مختلف‌العلامت باشند. اگر فرض کنیم $a=\frac{1}{2}$ و $b=-2$، آن‌گاه

$$y=1+\frac{1}{2}\sin(-2x-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow y(0)=\frac{3}{4}$$

اما با توجه به نمودار تابع $1<y(0)<1.5$، پس این حالت غیرقابل قبول است.

بنابراین $a=-\frac{1}{2}$ و $b=2$، یعنی $a+b=\frac{3}{2}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۷۶۲- گزینهٔ ۴ تانژانت‌ها را برحسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم:

$$\cos 50^\circ(\frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}+\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ})$$

$$=\cos 50^\circ(\frac{\sin 70^\circ \cos 10^\circ+\sin 10^\circ \cos 70^\circ}{\cos 10^\circ \cos 70^\circ})$$

$$=\frac{\cos 50^\circ \times \sin(70^\circ+10^\circ)}{\cos 10^\circ \cos 70^\circ}=\frac{\cos 50^\circ \sin 80^\circ}{\cos 10^\circ \cos 70^\circ}=\frac{\cos 50^\circ \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ \cos 70^\circ}$$

$$=\frac{\cos 50^\circ}{\cos 70^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=2\cos 20^\circ$$

ریاضی - ۸۵

۷۶۳- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan 2x=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\ , \quad k\in\mathbb{Z}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۷۶۴- گزینهٔ ۱ معادلهٔ داده شده را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، بازنویسی کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+3\cos x=0 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0$$

$$-2\cos^2 x+3\cos x+2=0 \Rightarrow \cos x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-4}$$

$$\begin{cases}\cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\\ \cos x=2 \ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

تجربی - ۹۵

۷۶۵- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با توجه به اتحاد $2\cos^2 x=\cos 2x+1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x+2\cos^2 x=0 \Rightarrow \cos 2x+\cos 2x+1=0$$

$$\cos 2x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ , \quad k\in\mathbb{Z}$$

راه‌حل دوم با توجه به اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x+2\cos^2 x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-1+2\cos^2 x=0 \Rightarrow 4\cos^2 x=1$$

$$\cos x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\\ \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ , & k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\ , & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

این جواب‌ها همان $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ هستند.

تجربی - ۹۶

۷۶۶- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tan 3x=\frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan 3x=\cot x \Rightarrow \tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$3x=k\pi+\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ , \quad k\in\mathbb{Z}$$

توجه کنید که جواب‌های به‌دست آمده در دامنهٔ تعریف عبارت‌های معادله قرار دارند و $\tan(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8})$ و $\tan(\frac{3k\pi}{4}+\frac{3\pi}{8})$ مقادیری تعریف شده هستند.

تجربی - ۹۷

۷۶۷- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

پس می‌توان نوشت:

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2\sin x\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\sin 2x=\sin(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}+x \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\ 2x=2k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

واضح است که جواب $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ جواب $2k\pi+\frac{\pi}{4}$ را نیز در خود دارد، زیرا کافی است مقادیر k را مضرب ۳ انتخاب کنیم. پس جواب کلی معادله به‌صورت $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ است.

ریاضی - ۹۲

۷۶۸- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan 3x \Rightarrow \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=\tan 3x$$

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\tan(3x) \Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{4}-x$$

$$4x=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{16}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۷۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$$

$$(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{4}$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{4}$$

$$\cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{3}$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۷۷۰- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin x+\sin ۲x+\sin(۲x+x)=۰$$

$$\underline{\sin x}+\underline{\underline{\sin ۲x}}+\underline{\underline{\sin ۲x}}\cos x+\underline{\sin x}\cos ۲x=۰$$

$$\sin x(۱+\cos ۲x)+\sin ۲x(۱+\cos x)=۰$$

$$\sin x(۱+\cos ۲x)+۲\sin x\cos x(۱+\cos x)=۰$$

$$\sin x(۱+۲\cos^۲ x-۱+۲\cos x+۲\cos^۲ x)=۰$$

$$۲\sin x\cos x(۲\cos x+۱)=۰\Rightarrow \sin ۲x(۲\cos x+۱)=۰$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{۲} & \text{(غ.ق.ق.)}\\ \cos x=-\dfrac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\dfrac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۷۷۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون نمودار تابع از نقطهٔ $(۰,۰)$ گذشته است، پس

$$۰=a+b\cos(۰)=a+b \quad (۱)$$

از طرف دیگر، چون تابع کسینوس در همسایگی راست نقطهٔ $x=۰$ نزولی است، اما تابع مورد نظر در همسایگی راست نقطهٔ $x=۰$ صعودی است، پس b عددی منفی است. در نتیجه، چون بیشترین مقدار تابع مورد نظر برابر ۴ است، پس

$$۴=a-b \quad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $b=-۲$.

ریاضی - ۹۷

۷۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$

$$=\cos\frac{\pi}{۴}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha-\cos\frac{\pi}{۴}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha$$

$$=۲\sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha=\sqrt{۲}\sin\alpha$$

از طرف دیگر،

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{۷}}{۳}\Rightarrow \sin^۲\alpha+\frac{۷}{۹}=۱\Rightarrow \sin^۲\alpha=\frac{۲}{۹}$$

چون α در ربع چهارم است، پس $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ و در نتیجه

$$\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۳})=-\frac{۲}{۳}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۷۷۳- گزینهٔ ۳ از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan\alpha}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱}{۵}$$

$$۱+\tan\alpha=۵-۵\tan\alpha\Rightarrow ۶\tan\alpha=۴\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲\times\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۷۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که برای تعریف شدن عبارت سمت چپ معادله لازم است که

$$۱+\cos x\neq ۰\Rightarrow \cos x\neq -۱\Rightarrow x\neq ۲k\pi+\pi$$

با شرط فوق معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin ۳x+\sin ۲x=۰\Rightarrow \sin ۳x=-\sin ۲x\Rightarrow \sin ۳x=\sin(-۲x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases}۳x=۲k\pi-۲x\Rightarrow x=\dfrac{۲k\pi}{۵},\ k\in\mathbb{Z}\\ ۳x=۲k\pi+\pi+۲x\Rightarrow x=۲k\pi+\pi & \text{(غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۷۷۵- گزینهٔ ۳ از اتحادهای

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha\ ,\qquad \cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$$

و اتحاد مزدوج برای ساده کردن معادله استفاده می‌کنیم:

$$۲\sin ۲x\cos ۲x=(\sin^۲ x-\cos^۲ x)(\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱})$$

$$۲\sin ۲x\cos ۲x=-\cos ۲x\Rightarrow \cos ۲x(۲\sin ۲x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\dfrac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{۲}+\dfrac{\pi}{۴}\\ \sin ۲x=\dfrac{-۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi-\dfrac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\dfrac{۷\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\dfrac{\pi}{۱۲}\\ x=k\pi+\dfrac{۷\pi}{۱۲}\end{cases}\end{cases}$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ و $\frac{۷\pi}{۱۲}$ که مجموعشان برابر $\frac{۳۰\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۲}$ است.

ریاضی - ۹۵

۷۷۶- گزینهٔ ۲ از اتحاد مثلثاتی $\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x$ کمک می‌گیریم و معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin ۲x(\sin x+\cos x)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)^۲$$

$$=(\cos x+\sin x)\times(\sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x)$$

پس

$$\sin ۲x(\sin x+\cos x)=(\cos x+\sin x)(۱-\sin ۲x)$$

$$(\cos x+\sin x)(۲\sin ۲x-۱)=۰$$

پس جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$\cos x+\sin x=۰\Rightarrow \tan x=-۱\Rightarrow x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\sin ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{۱۲}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{۱۲}\\ ۲x=۲k\pi+\dfrac{۵\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{۵\pi}{۱۲}\Rightarrow x=\dfrac{۵\pi}{۱۲}\end{cases}$$

که مجموع این سه جواب برابر است با $\frac{۵\pi}{۴}$.

تجربی - ۹۳

۷۷۷- گزینهٔ ۲ با شرط $\sin x \neq 0$ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin(2x+x)=2\sin x\cos^2 x$$

$$\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=2\sin x\cos^2 x$$

$$2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos 2x=2\sin x\cos^2 x$$

$$\sin x\cos 2x=0\Rightarrow \cos 2x=0$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ \ k\in\mathbb{Z}$$

ریاضی - ۹۳

۷۷۸- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x+\sin 2x}{\cos x+\cos 2x}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x+\sin 2x\sin x=\cos^2 x+\cos 2x\cos x$$

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$$

$$-\cos 2x=\cos(2x+x)\Rightarrow \cos(\pi-2x)=\cos 3x$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases}3x=2k\pi+\pi-2x\\ 3x=2k\pi-\pi+2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2k\pi}{5}+\dfrac{\pi}{5}\\ x=2k\pi-\pi\ \ \text{(غ.ق.ق.)}\end{cases}$$

واضح اسـت که مضارب فرد k باعث صفر شـدن مخرج کسر در معادلهٔ اصلی می‌شـوند. بنابراین گزینهٔ (۴) باید به‌صورت $\{\frac{1}{5}(2k+1)\pi\}-\{(2k+1)\pi\}$ نوشته می‌شد.

ریاضی - ۹۴

۷۷۹- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin x\sin 3x=\cos(3x-x)$$

$$\sin x\sin 3x=\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x$$

$$\cos 3x\cos x=0$$

پس جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\\ \cos 3x=0\Rightarrow 3x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=(2k+1)\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

واضح است که جواب $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ شامل جواب $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ نیز هست (کافی اسـت $2k+1$ مضرب ۳ باشـد). پس جـواب کلی معادلـه همان $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ است.

ریاضی - ۹۶

۷۸۰- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(2\sin x\cos x)(2\sin 2x\cos 2x)=1-\sin^2 x$$

$$(2\sin x\cos x)(4\sin x\cos x\cos 2x)=\cos^2 x$$

$$8\sin^2 x\cos^2 x\cos 2x-\cos^2 x=0$$

$$\cos^2 x(8\sin^2 x\cos 2x-1)=0$$

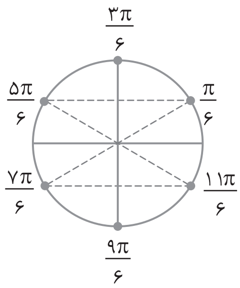
$$\cos^2 x(8\sin^2 x(1-2\sin^2 x)-1)=0$$

$$\cos^2 x(-16\sin^4 x+8\sin^2 x-1)=0\Rightarrow -\cos^2 x(4\sin^2 x-1)^2=0$$

بنابراین

$$\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}=k\pi+\dfrac{3\pi}{6}\\ \sin x=\pm\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{6},\ x=2k\pi\pm\dfrac{5\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

اگـر انتهای کمان نظیـر جواب‌های معادلـه را روی دایره مثلثاتی نشـان دهیم، به‌صورت زیر خواهند بود که می‌توان آن‌ها را به‌صورت $\frac{(2k+1)\pi}{6}$ نشان داد.



ریاضی - ۹۷

۷۸۱- گزینهٔ ۴ کافی است $x=۲$ عضو بازهٔ $(a-۲,۲a)$ باشد. یعنی

$$a-۲<۲\Rightarrow a<۴,\quad ۲a>۲\Rightarrow a>۱$$

بنابراین $۱<a<۴$.

۷۸۲- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع از شرط $[x]\neq ۲$ به‌دست می‌آید که به‌صورت مقابل است: $D_f=(-\infty,۲)\cup[۳,+\infty)$

بنابراین تابع در همسایگی چپ نقطهٔ $x=۳$ تعریف نشده است.

۷۸۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۴$ و $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=۳$،

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۷ است.

۷۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to۱} f(x)=۰$. در نتیجه

$$\lim_{x\to۰} f(x+۱)=\lim_{y\to۱} f(y)=۰$$

از طرف دیگر، اگر $x\to ۹^+$، آن‌گاه $\frac{x}{۳}\to ۳^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to۹^+} f(\frac{x}{۳})=\lim_{t\to۳^+} f(t)=۱$$

بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۱ است.

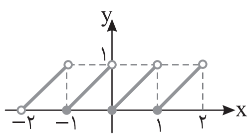
۷۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۱، $[x]=۰$.

بنابراین $\lim\limits_{x\to۱^-} f(x[x])=\lim\limits_{x\to۱^-} f(۰)=\lim\limits_{x\to۱^-} ۲=۲$.

۷۸۶- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار، $x\to(-۱)^-\Rightarrow f(x)\to ۲^+$

بنابراین $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(f(x))=\lim\limits_{t\to۲^+} f(t)=-۲$.

۷۸۷- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل روبه‌رو است. واضح است که تابع در نقطه‌های $x=-۱$، $x=۰$ و $x=۱$ از بازهٔ $(-۲,۲)$ حد ندارد.



۷۸۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to۵^-} f(x)=۲a(۵)-۳=۱۰a-۳$$

$$\lim_{x\to۵^+} f(x)=۵^۲-a(۵)+b=۲۵-۵a+b$$

اکنون توجه کنید که چون $\lim\limits_{x\to۵} f(x)=۱۷$، پس هر یک از حدهای بالا برابر ۱۷ است:

$$\begin{cases}۱۰a-۳=۱۷\\ ۲۵-۵a+b=۱۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=۲\end{cases}\Rightarrow ab=۴$$

۷۸۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که بنابر قضایای حد، $\lim\limits_{x\to۳} f(x)$ وجود دارد.

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to۳}\frac{x+۴}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to۳}(x+۴)}{\lim\limits_{x\to۳} f(x)}=\frac{۷}{\lim\limits_{x\to۳} f(x)}=\frac{۷}{۶}$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to۳} f(x)=۶$. همچنین $\lim\limits_{x\to۱} f(۲x+۱)=\lim\limits_{t\to۳} f(t)=۶$. بنابراین

$$\lim_{x\to۱}\frac{f(۲x+۱)}{x+۲}=\frac{۶}{۱+۲}=۲$$

۷۹۰- گزینهٔ ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+}(۶x^۲-x^۳)=۲۴-۸=۱۶$$

$$\lim_{x\to۲^-} f(x)=\lim_{x\to۲^-}(۳x^۲-x^۳)=۱۲-۸=۴$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع در $x=۲$ برابر ۲۰ است.

۷۹۱- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادله را حل می‌کنیم

$$|x-۱|<۲\Rightarrow -۲<x-۱<۲\Rightarrow -۱<x<۳$$

پس بازهٔ $(-۱,۳)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است که همسایگی نقطهٔ $x=-۲$ نیست.

۷۹۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=۲a,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=a-۲,\quad f(a)=a$$

بنابراین

$$۲a-(a-۲)=۳a+۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۷۹۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to۱^+$، آن‌گاه $(۱-x^۲)\to۰^-$ و اگر $x\to۱^-$، آن‌گاه $(۱-x^۲)\to۰^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to۱^+} f(۱-x^۲)-\lim_{x\to۱^-} f(۱-x^۲)=\lim_{t\to۰^-} f(t)-\lim_{t\to۰^+} f(t)=۳-۱=۲$$

۷۹۴- گزینهٔ ۳ در سمت راست نقطهٔ ۱-، $[x]=-۱$ و $|x|=-x$.

بنابراین $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(\frac{|x|}{[x]})=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(\frac{-x}{-۱})=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=-۱$.

۷۹۵- گزینهٔ ۴ چون

$$x\to۱^+\Rightarrow f(x)\to(-۱)^+,\quad x\to(-۱)^-\Rightarrow f(x)\to۱^-$$

می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to۱^+}(fof)(x)=\lim_{t\to(-۱)^+} f(t)=-۱$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}(fof)(x)=\lim_{t\to۱^-} f(t)=۱$$

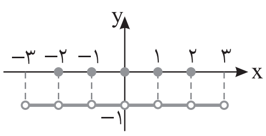
بنابراین $\lim\limits_{x\to۱^+}(fof)(x)-\lim\limits_{x\to(-۱)^-}(fof)(x)=-۱-۱=-۲$.

۷۹۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]\Rightarrow f(x)=۰$$

$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[-x]=-[x]-۱\Rightarrow f(x)=-۱$$

بنابراین نمودار تابع f در بازهٔ $(-۳,۳)$ به شکل مقابل است. با توجه به نمودار، تابع f در تمام نقاط این بازه حد دارد و حد آن برابر ۱- است.



۷۹۷- گزینهٔ ۱ این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد، پس در $x=2$ و $x=-2$ نیز حد دارد. بنابراین باید حد چپ و حد راست تابع در هر یک از این نقاط برابر باشند:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax^3+x^2)=8a+4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+b)=2+b$$
$$\lim_{x\to (-2)^+} f(x)=\lim_{x\to (-2)^+}(ax^3+x^2)=-8a+4$$
$$\lim_{x\to (-2)^-} f(x)=\lim_{x\to (-2)^-}(x+b)=-2+b$$

بنابراین

$$\begin{cases}8a+4=2+b\\-8a+4=-2+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=8a+2\\b=-8a+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=4\end{cases}\Rightarrow ab=1$$

۷۹۸- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $\lim_{x\to 2} f(x)=L$، طبق قضایای حد

$$\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)}{f(x)+1}=3\Rightarrow\frac{2L}{L+1}=3\Rightarrow 2L=3L+3\Rightarrow L=-3$$

در نتیجه $\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-1}{f(x)}=\frac{2\times(-3)-1}{-3}=\frac{7}{3}$.

۷۹۹- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=-2$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(ax[3x]+x)=\lim_{x\to(-2)^-}(-7ax+x)=14a-2$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(ax[3x]+x)=\lim_{x\to(-2)^+}(-6ax+x)=12a-2$$

بنابراین $14a-2+12a-2=11\Rightarrow 26a=15\Rightarrow a=\frac{15}{26}$

۸۰۰- گزینهٔ ۲ ابتدا حد چپ و حد راست تابع را در نقطهٔ $x=1$ حساب می‌کنیم. اگر $x\to 1^+$، آن‌گاه $-x\to(-1)^-$ و $2x\to 2^+$ و اگر $x\to 1^-$، آن‌گاه $-x\to(-1)^+$ و $2x\to 2^-$. در نتیجه

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}[2x]+(m+1)\lim_{x\to 1^-}[-x]=1+(m+1)(-1)=-m$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}[2x]+(m+1)\lim_{x\to 1^+}[-x]=2+(m+1)(-2)=-2m$$

در نتیجه $-2m=-m\Rightarrow m=0$

۸۰۱- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$4-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 4\Rightarrow -2\leq x\leq 2\Rightarrow x-[x]\neq 0\Rightarrow x\neq[x]\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$ است، پس نقاط $x=\pm 1$ و $x=0$ در دامنهٔ تابع قرار ندارند ولی همسایگی محذوف آن‌ها در دامنهٔ تابع قرار دارد.

۸۰۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید اگر $x\to 3^-$، آن‌گاه $t=(x-1)\to 2^-$. بنابراین $\lim_{x\to 3^-} f(x-1)=\lim_{t\to 2^-} f(t)=-1$. همچنین اگر $x\to 0^+$، آن‌گاه $t=(x+1)\to 1^+$. بنابراین $\lim_{x\to 0^+} f(x+1)=\lim_{t\to 1^+} f(t)=-2$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر -3 است.

۸۰۳- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی راست $x=0$ مقدارهای تابع f نزدیک ۲ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to 2^-$ و $[f(x)]=1$. بنابراین $\lim_{x\to 0^+}[f(x)]=1$.

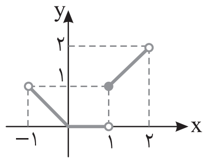
همچنین در یک همسایگی چپ $x=0$ مقدارهای تابع f نزدیک -1 و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to(-1)^-$ و $[f(x)]=-2$. بنابراین $\lim_{x\to 0^-}[f(x)]=-2$،

در نتیجه $2\lim_{x\to 0^+}[f(x)]-\lim_{x\to 0^-}[f(x)]=2-(-2)=4$

۸۰۴- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$-1<x<0\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow f(x)=-x$$
$$0\leq x<1\Rightarrow[x]=0\Rightarrow f(x)=0\ ,\quad 1\leq x<2\Rightarrow[x]=1\Rightarrow f(x)=x$$

پس نمودار تابع به شکل روبه‌رو است و تابع فقط در نقطهٔ $x=1$ از بازهٔ $(-1,2)$ حد ندارد.



۸۰۵- گزینهٔ ۴ اگر x در یک همسایگی راست ۱ باشد، $x>1$، پس $2-x<1$. در نتیجه $\lim_{x\to 1^+} f(2-x)=\lim_{y\to 1^-} f(y)=2a$. همچنین $\lim_{x\to 1^+} f(x)=a$. در نتیجه $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(2-x)}{f(x)}=\frac{2a}{a}=2$.

۸۰۶- گزینهٔ ۱ چون تابع‌های f و g در $x=a$ حد دارند، پس

$$\lim_{x\to a}(f(x)-2g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} 2g(x)=\lim_{x\to a} f(x)-2\lim_{x\to a} g(x)=2$$

همچنین

$$\lim_{x\to a}(2f(x)-3g(x))=\lim_{x\to a} 2f(x)-\lim_{x\to a} 3g(x)=2\lim_{x\to a} f(x)-3\lim_{x\to a} g(x)=6$$

بنابراین اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$، آن‌گاه

$$\begin{cases}L_1-2L_2=2\\2L_1-3L_2=6\end{cases}\Rightarrow L_1=6\ ,\ L_2=2$$

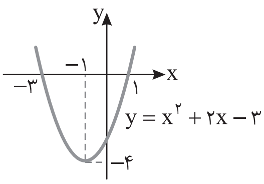
بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=L_1\times L_2=12$.

۸۰۷- گزینهٔ ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطهٔ $x=2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x[x]+2a)=\lim_{x\to 2^+}(2x+2a)=4+2a$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(b[-x]+3x)=\lim_{x\to 2^-}(-2b+3x)=-2b+6$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ حد دارد، در نتیجه حد چپ و حد راست تابع f در این نقطه برابرند: $4+2a=-2b+6\Rightarrow 2a+2b=2\Rightarrow a+b=1$

۸۰۸- گزینهٔ ۱ در شکل زیر نمودار تابع $y=x^2+2x-3$ رسم شده است. توجه کنید $\lim_{x\to -3}(x^2+2x-3)=0$. اما در سمت چپ $x=-3$، مقدارهای تابع مثبت هستند. در نتیجه در سمت چپ $x=-3$، $[x^2+2x-3]=0$. در نتیجه حاصل حد نیز صفر می‌شود.



۸۰۹- گزینهٔ ۳ مطابق قضیه‌های محاسبهٔ حد، اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1+f^2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{1+(\lim\limits_{x\to a} f(x))^2}=\frac{L}{1+L^2}$$

در بقیهٔ گزینه‌ها ممکن است حد مخرج کسر تابع برابر صفر و حد صورت کسر برابر صفر نباشد و در نتیجه تابع حد نداشته باشد.

۸۱۰- گزینهٔ ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $2x$ عددی صحیح نشود، تابع $y=[2x]$ حد دارد. در نقطه‌هایی که مقدار $2x$ عددی صحیح شود، تابع $y=[2x]$ حد ندارد. این نقطه‌ها را به‌دست می‌آوریم

$$2x=k,\quad k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{k}{2}$$

$$0<\frac{k}{2}<3\Rightarrow 0<k<6\Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5\}$$

پس تابع در پنج نقطه از بازهٔ $(0,3)$ حد ندارد.

۸۱۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to1^+$، آن‌گاه $(1-x^3)\to0^-$ و اگر $x\to1^-$، آن‌گاه $(1-x^3)\to0^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to1^+} f(1-x^3)+\lim_{x\to1^-} f(1-x^3)=\lim_{t\to0^-} f(t)+\lim_{t\to0^+} f(t)=4+2=6$$

۸۱۲- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که $\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$. بنابراین $[\lim\limits_{x\to1} f(x)]=[3]=3$. از طرف دیگر در یک همسایگی محذوف $x=1$ مقادیر تابع f نزدیک ۳ و کمتر از آن هستند، یعنی $f(x)\to3^-$. بنابراین در این بازه $[f(x)]=2$، پس $\lim\limits_{x\to1}[f(x)]=\lim\limits_{x\to1}2=2$. بنابراین

$$\frac{\lim\limits_{x\to1}[f(x)]}{[\lim\limits_{x\to1} f(x)]}=\frac{2}{3}$$

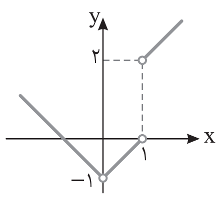
۸۱۳- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$x<0\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{-x}+\frac{-(x-1)}{x-1}=-x-1$$

$$0<x<1\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x}+\frac{-(x-1)}{x-1}=x-1$$

$$x>1\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x}+\frac{x-1}{x-1}=x+1$$

بنابراین نمودار تابع به شکل مقابل است. پس تابع فقط در نقطهٔ $x=1$ حد ندارد.



۸۱۴- گزینهٔ ۱ تابع f فقط در $x=2$ و $x=-2$ ممکن است حد نداشته باشد. حد چپ و حد راست تابع را در این نقاط حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+} x^2=4,\quad \lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^3-2x)=4$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(x^3-2x)=-4$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-} x^2=4$$

پس تابع در $x=2$ حد دارد ولی در $x=-2$ حد ندارد.

۸۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x^3-x=x(x^2-1)$. در نتیجه اگر x از سمت چپ به صفر نزدیک شود، آن‌گاه $x^3-x>0$. بنابراین

$$\lim_{x\to0^-} f(x^3-x)=\lim_{t\to0^+} f(t)=\lim_{t\to0^+}(\sqrt{t+9})=3$$

۸۱۶- گزینهٔ ۲ حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(ax^2+3)=4a+3$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(x^2+3a)=4+3a$$

باید حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ برابر باشند، یعنی

$$4+3a=4a+3\Rightarrow a=1$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}(x^2+3a)=\lim\limits_{x\to3}(x^2+3)=12$.

۸۱۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{3f(x)}{4f(x)+2}=1\Rightarrow\frac{3\lim\limits_{x\to a} f(x)}{4\lim\limits_{x\to a} f(x)+2}=1\Rightarrow\frac{3L}{4L+2}=1$$

$$4L+2=3L\Rightarrow L=-2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{f(x)-3}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)-3}=\frac{L}{L-3}=\frac{-2}{-2-3}=\frac{2}{5}$$

۸۱۸- گزینهٔ ۲ تابع $y=x$ در تمام نقاط حد دارد. تابع $y=x-[x]$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. پس ضرب این دو تابع یعنی $f(x)=x(x-[x])$ در تمام نقاط غیر صحیح حد دارد. در نقاط صحیح غیر صفر حد چپ و حد راست تابع $y=x-[x]$ یکسان نیستند پس تابع f نیز در این نقاط حد ندارد. ولی در $x=0$ چون حد تابع $y=x$ برابر صفر است، پس حد تابع f هم برابر صفر است. بنابراین تابع f در نقاط $x=1$ و $x=-1$ از بازهٔ $(-2,2)$ حد ندارد.

۸۱۹- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در $x=2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(\frac{4a}{x^2}+x^2\right)=\frac{4a}{4}+4=a+4$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{3a}{x^2}+x^2\right)=\frac{3a}{4}+4$$

بنابراین

$$a+4+\frac{3a}{4}+4=10\Rightarrow\frac{7a}{4}=2\Rightarrow a=\frac{8}{7}$$

۸۲۰- گزینهٔ ۴ اگر تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد، آن‌گاه تفاضل این تابع و تابع $y=|x|$ باید در $x=a$ حد داشته باشد. تفاضل این دو تابع همان تابع $y=f(x)$ است که باید در $x=a$ حد داشته باشد و این خلاف فرض مسئله است. پس تابع $y=|x|+f(x)$ در $x=a$ حد ندارد.

برای رد گزینه‌های (۱) و (۳)، تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

$\lim\limits_{x\to0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to0}1=1,\quad \lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{f(x)}=0$ ولی این تابع در $x=0$ حد ندارد.

برای رد گزینهٔ (۲)، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x<0\\ \frac{1}{2} & x\geq0\end{cases}$ را در نظر بگیرید که در $x=0$ حد ندارد ولی $\lim\limits_{x\to0}[f(x)]=\lim\limits_{x\to0}0=0$.

۸۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x+1}=\frac{5}{2}$$

۸۲۲- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. توجه کنید که $x^4+4x^3+4x^2=x^2(x^2+4x+4)=x^2(x+2)^2$. بنابراین

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+4x^3+4x^2}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2(x+2)^2}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}x^2=4$$

۸۲۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)\ ,\quad x^2-4=(x-2)(x+2)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

$$=\frac{4+4+4}{2+2}=3$$

۸۲۴- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم می‌شود که $\lim_{x\to -2}f(x)=4$. در نتیجه

$$\lim_{x\to -2}\frac{f^3(x)-64}{f(x)-4}=\lim_{x\to -2}\frac{f^3(x)-4^3}{f(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(f(x)-4)(f^2(x)+4f(x)+16)}{f(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to -2}(f^2(x)+4f(x)+16)=4^2+4\times 4+16=48$$

۸۲۵- گزینهٔ ۳ یک عامل $x-1$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1-3x+3}{x^3-1+3x-3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+x+4}=\frac{0}{6}=0$$

۸۲۶- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x^2-3x+2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x-1}=-1$$

۸۲۷- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر صفر است، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. که این طور نیست $(b\neq 0)$. پس

$$\lim_{x\to 3}(x^2+ax+3)=9+3a+3=12+3a=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین

$$b=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+ax+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-1}=\frac{3+3}{3-1}=3$$

بنابراین $a+b=-4+3=-1$.

۸۲۸- گزینهٔ ۲ از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-2x^3}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-2x^3})(1+\sqrt{1-2x^3})}{x^3(1+\sqrt{1-2x^3})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2x^3)}{x^3(1+\sqrt{1-2x^3})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^3(1+\sqrt{1-2x^3})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+\sqrt{1-2x^3}}=\frac{2}{1+1}=1$$

۸۲۹- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-4}}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-4})(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}{(x^2-6x+5)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4(x-4)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-3(x-5)}{(x-1)(x-5)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-3}{(x-1)(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})}=\frac{-3}{4(2+2)}=\frac{-3}{16}$$

۸۳۰- گزینهٔ ۱ به کمک اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3}=\lim_{x\to 8}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+1}+3}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 8}\left(\frac{x-8}{x+1-9}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\right)=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{3+3}{4+4+4}=\frac{1}{2}$$

۸۳۱- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است، توجه کنید که

$$(2x+1)^3+(2x-1)^3=8x^3+12x^2+6x+1+8x^3-12x^2+6x-1$$

$$=16x^3+12x=4x(4x^2+3)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)^3+(2x-1)^3}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x(4x^2+3)}{4x}=\lim_{x\to 0}(4x^2+3)=3$$

۸۳۲- گزینهٔ ۳ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{3x^4-9x^2}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{3x^2(x^2-3)}{x-\sqrt{3}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{3x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}(3x^2(x+\sqrt{3}))$$

$$=3(\sqrt{3})^2(\sqrt{3}+\sqrt{3})=18\sqrt{3}$$

۸۳۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^4-27x=x(x^3-27)=x(x-3)(x^2+3x+9)$$

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-27x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x^2+3x+9)}{x+2}=\frac{3(9+9+9)}{3+2}=\frac{81}{5}$$

۸۳۴- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{x^6-1}{x^4-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^2(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=3$$

۸۳۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $[x]$ در سمت چپ ۳ مساوی ۲ است. پس

$$\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-x[x]-3}{x[x]-6}=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-2x-3}{2x-6}$$
$$=\lim_{x\to3^-}\frac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)}=\lim_{x\to3^-}\frac{x+1}{2}=2$$

۸۳۶- گزینهٔ ۱ بنابر اتحاد چاق و لاغر، $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ در نتیجه حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}\right)\times\left(\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\right)\times\frac{1}{12}=\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{2+\sqrt{x+2}}\right)\times\frac{1}{12}=\frac14\times\frac{1}{12}=\frac{1}{48}$$

۸۳۷- گزینهٔ ۲ به کمک اتحاد مزدوج معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x-\sqrt{x+2}}{3x-\sqrt{15x+6}}\times\frac{x+\sqrt{x+2}}{3x+\sqrt{15x+6}}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-x-2}{9x^2-15x-6}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(9x+3)}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{x+1}{9x+3}\times\frac{3x+\sqrt{15x+6}}{x+\sqrt{x+2}}\right)=\frac{3}{21}\times\frac{6+6}{2+2}=\frac37$$

۸۳۸- گزینهٔ ۴ حد مورد نظر به‌صورت $\frac00$ است. فرض می‌کنیم $\sqrt[6]{x}=t$.

در این صورت، اگر $x\to64$، آنگاه $t\to2$، بنابراین $t>0$. اکنون می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}$$
$$=\lim_{t\to2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=\frac{2^2+2\times2+4}{2+2}=3$$

۸۳۹- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt[12]{x}$، آنگاه $x=t^{12}$ و $t\to1$.
بنابراین $t>0$ و می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{t^{12}}-t^{12}}{\sqrt[3]{t^{12}}-\sqrt[4]{t^{12}}}=\lim_{t\to1}\frac{t^6-t^{12}}{t^4-t^3}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{-t^6(t^6-1)}{t^3(t-1)}=\lim_{t\to1}\frac{-t^3(t-1)(t^5+t^4+\dots+t+1)}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1}(-t^3(t^5+t^4+\dots+t+1))=-6$$

۸۴۰- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر برابر صفر است و حد مورد نظر صفر نیست، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac00$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-3)=0\Rightarrow\sqrt{b}=3\Rightarrow b=9$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، مقدار حد را به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{ax+9}-3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sqrt{ax+9}-3}\times\frac{\sqrt{ax+9}+3}{\sqrt{ax+9}+3}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{ax+9-9}\times\frac{\sqrt{ax+9}+3}{1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+9}+3}{a}=\frac6a$$

بنابراین $\frac6a=\frac12$ و در نتیجه $a=12$. پس $a+b=21$.

۸۴۱- گزینهٔ ۱ در یک همسایگی راست π، $\sin x<0$ بنابراین

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x}{|\sin x|}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x}{-\sin x}=-1$$

۸۴۲- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac12}\frac{\cos\pi x}{\sin2\pi x}=\lim_{x\to\frac12}\frac{\cos\pi x}{2\sin\pi x\cos\pi x}=\lim_{x\to\frac12}\frac{1}{2\sin\pi x}=\frac{1}{2\times1}=\frac12$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac12}\frac{\cos\pi x}{\sin2\pi x}=\lim_{x\to\frac12}\frac{-\pi\sin\pi x}{2\pi\cos2\pi x}=\frac{-\pi\times1}{2\pi\times(-1)}=\frac12$$

۸۴۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحاد $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ و اتحاد مزدوج مقدار حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to-\frac\pi4}\frac{1+\sqrt2\sin x}{\cos2x}=\lim_{x\to-\frac\pi4}\frac{1+\sqrt2\sin x}{1-2\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to-\frac\pi4}\frac{1+\sqrt2\sin x}{(1-\sqrt2\sin x)(1+\sqrt2\sin x)}=\lim_{x\to-\frac\pi4}\frac{1}{1-\sqrt2\sin x}=\frac12$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\frac\pi4}\frac{1+\sqrt2\sin x}{\cos2x}=\lim_{x\to-\frac\pi4}\frac{\sqrt2\cos x}{-2\sin2x}=\frac{\sqrt2\times\frac{\sqrt2}{2}}{-2(-1)}=\frac12$$

۸۴۴- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\frac\pi4}\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin(x-\frac\pi4)}$$
$$=\lim_{x\to\frac\pi4}\left(\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin(x-\frac\pi4)}\times\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac\pi4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x\cos\frac\pi4-\sin\frac\pi4\cos x}\times\frac{1}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac\pi4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\sqrt2}{2}(\sin x-\cos x)}\times\frac{1}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\frac\pi4}\frac{\sqrt2}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{\sqrt2}{\sqrt{\frac{\sqrt2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt2}{2}}}=\frac{\sqrt2}{\frac{1}{\sqrt[4]2}+\frac{1}{\sqrt[4]2}}=\frac{1}{\sqrt[4]2}$$

۸۴۵- گزینهٔ ۳ از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{3x}+\lim_{x\to0}f(x)=3\Rightarrow\frac23+\lim_{x\to0}f(x)=3$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=3-\frac23=\frac73$$

۸۴۶- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^4-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\times\frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+1}=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

۸۴۷- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{1-\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{(4x)^2}{2}}{\frac{(2x)^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{8x^2}{2x^2}=4$$

۸۴۸- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر و $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 4x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos4x)(1+\cos4x+\cos^2 4x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x(1+\cos4x+\cos^2 4x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}\times\lim_{x\to0}(1+\cos4x+\cos^2 4x)$$

$$=\lim_{x\to0}8\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\times3=8\times3=24$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 4x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{12\sin4x\cos^2 4x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{x}\times\lim_{x\to0}6\cos^2 4x=4\times6=24$$

۸۴۹- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $x-2=t$، در نتیجه $x=t+2$ و $t\to0$ بنابراین

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin\pi x}{x^2-2x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi(t+2))}{t(t+2)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t+2\pi)}{t(t+2)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi t}{t(t+2)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}\times\lim_{t\to0}\frac{\pi}{t+2}=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin\pi x}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{\pi\cos\pi x}{2x-2}=\frac{\pi\cos2\pi}{4-2}=\frac{\pi}{2}$$

۸۵۰- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

اکنون با فرض $t=x+\frac{\pi}{4}$ معلوم می‌شود $t\to0$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{4x+\pi}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{4(x+\frac{\pi}{4})}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{2}\sin t}{4t}=\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{4x+\pi}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۸۵۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to\pi^-$ آن‌گاه $\sin^2 x\to0^+$ و $\cos x\to(-1)^+$. بنابراین $[\sin^2 x]=0$ و $[\cos x]=-1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin^2 x-[\sin^2 x]}{\cos x-[\cos x]}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin^2 x}{\cos x+1}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi^-}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}(1-\cos x)=1-(-1)=2$$

۸۵۲- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول با استفاده از اتحاد $\sin2x=2\sin x\cos x$ مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin4x}{\sin x}=\lim_{x\to2\pi}\frac{2\sin2x\cos2x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to2\pi}\frac{4\sin x\cos x\cos2x}{\sin x}=\lim_{x\to2\pi}(4\cos x\cos2x)=4\times1\times1=4$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin4x}{\sin x}=\lim_{x\to2\pi}\frac{4\cos4x}{\cos x}=\frac{4\times1}{1}=4$$

۸۵۳- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحاد $\cos2x=2\cos^2 x-1$. می‌توان نوشت:

$$\sqrt{2+2\cos2x}=\sqrt{2+2(2\cos^2 x-1)}=\sqrt{4\cos^2 x}=2|\cos x|$$

در یک همسایگی چپ $x=\frac{3\pi}{2}$ مقدار $\cos x$ منفی است. بنابراین $|\cos x|=-\cos x$، در نتیجه

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{-2\cos x}{\sin2x}=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{-2\cos x}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{-1}{\sin x}=1$$

۸۵۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول به کمک اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج مقدار حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sin^2 x)^2}{(1-\cos^3 x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos^2 x)^2}{(1-\cos x)^2(\cos^2 x+\cos x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2(1+\cos x)^2}{(1-\cos x)^2(\cos^2 x+\cos x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x)^2}{(\cos^2 x+\cos x+1)^2}=\frac{(1+1)^2}{(1+1+1)^2}=\frac{4}{9}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 x}{(1-\cos^3 x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^3 x\cos x}{6\sin x\cos^2 x(1-\cos^3 x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{3\cos x-3\cos^4 x}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin x\cos x}{-3\sin x+12\sin x\cos^3 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x}{-3+12\cos^3 x}=\frac{4}{12-3}=\frac{4}{9}$$

۸۵۵- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول به جای $\sin ax$ هم‌ارز آن یعنی ax را قرار می‌دهیم و مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin3x-\sin x}{\sin4x-3\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{2(3x)-x}{4x-3(2x)}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{-2x}=-\frac{5}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x-\sin x}{\sin 4x-3\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 3x-\cos x}{4\cos 4x-6\cos 2x}=\frac{6-1}{4-6}=-\frac{5}{2}$$

۸۵۶- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $t=\cos x$ و در نتیجه $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2t^2-1$ و $t\to 0$. بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(\cos x)}{1+\cos 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{1+2t^2-1}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$$

۸۵۷- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{(2x)^2}{2}-1+\frac{(4x)^2}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2+8x^2}{x^2}=6$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 4x}{x^2}-\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}8\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2-\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=8\times 1^2-2\times 1^2=6$$

۸۵۸- گزینهٔ ۱ اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت ضرب کنیم، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x-(\cos x-\sin x)}{(\sqrt{\cos x+\sin x}+\sqrt{\cos x-\sin x})x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x+\sin x}+\sqrt{\cos x-\sin x}}=2\times\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$$

۸۵۹- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $x-\frac{\pi}{2}=t$، در نتیجه $x=\frac{\pi}{2}+t$ و $t\to 0$. بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\cos 5x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2\pi+4t)}{\cos(\frac{5\pi}{2}+5t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 4t}{-\sin 5t}=-\frac{4}{5}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\cos 5x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos 4x}{-5\sin 5x}=\frac{4\cos 2\pi}{-5\sin\frac{5\pi}{2}}=-\frac{4}{5}$$

۸۶۰- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos 2x}\times\frac{\sqrt{\tan x}+1}{\sqrt{\tan x}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos 2x}\times\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\tan x}+1}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{\cos 2x}\times\frac{1}{1+1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x\cos 2x}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{-1}{2(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})}=-\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}-1}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}}{-2\sin 2x}=\frac{\frac{1+1}{2\times 1}}{-2\times 1}=-\frac{1}{2}$$

۸۶۱- گزینهٔ ۱ با استفاده از اتحادهای $\sin^2 x=1-\cos^2 x$، مزدوج و چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x+\cos^2 x}{1-\cos x}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

۸۶۲- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با استفاده از اتحاد

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

و اتحاد مزدوج مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{-(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x+\sin x}=\frac{-1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{-2\sin 2x}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2\times 1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۸۶۳- گزینهٔ ۲ با توجه به اتحاد $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$، می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin^2 x-1}{2\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos 2x}{2(2\sin 2x\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{4\sin 2x}=\frac{-1}{4\sin\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{4}$$

۸۶۴- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\cos^2 x-\frac{1}{2}=\frac{2\cos^2 x-1}{2}=\frac{\cos 2x}{2}$$

$$\cos^4 x-\frac{1}{4}=(\cos^2 x-\frac{1}{2})(\cos^2 x+\frac{1}{2})=\frac{\cos 2x}{2}(\cos^2 x+\frac{1}{2})$$

در نتیجه حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x(\cos^2 x+\frac{1}{2})}{2\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x(\cos^2 x+\frac{1}{2})}{4\sin 2x\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x+\frac{1}{2}}{4\sin 2x}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{4\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^4 x-\frac{1}{4}}{\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-4\sin x\cos^3 x}{4\cos 4x}=\frac{-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{4(-1)}=\frac{1}{4}$$

۸۶۵- گزینهٔ ۳ در یک همسایگی چپ نقطهٔ صفر $|x|=-x$. بنابراین حد مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$L=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+x\sin 6x}{5x^2-x\sin 4x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+\sin 6x}{5x-\sin 4x}$$

راه‌حل اول از هم‌ارزی مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+6x}{5x-4x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{8x}{x}=8$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+\sin 6x}{5x-\sin 4x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+6\cos 6x}{5-4\cos 4x}=\frac{2+6}{5-4}=8$$

۸۶۶- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{3}\right)}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{3}(1-x)}\times\frac{\frac{\pi}{3}}{1+x+x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{3}(1-x)}\times\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{3}}{1+x+x^2}=1\times\frac{\frac{\pi}{3}}{1+1+1}=\frac{\pi}{9}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{3}\right)}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{3}\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{3}\right)\right)}{-3x^2}=\frac{-\frac{\pi}{3}(1+0)}{-3}=\frac{\pi}{9}$$

۸۶۷- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{\tan^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{\tan^2 x}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\tan^2 x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\tan^2 x}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$L=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{\tan^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\left(1-\frac{1}{2}(5x)^2\right)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{x^2}=6$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{5\sin 5x}{2\sqrt{\cos 5x}}}{2\tan x(1+\tan^2 x)}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{5(5x)}{2\sqrt{\cos 5x}}}{2x(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{25}{2\sqrt{\cos 5x}}}{2(1+x^2)}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{25}{2}}{2}=6$$

۸۶۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$. بنابراین

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin(1+\cos x)}{1+\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x}\right)$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\times\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x}=1\times\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)(1-\cos x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2(1-\cos x)}=\frac{1}{4}$$

۸۶۹- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $x-\frac{\pi}{6}=t$. در نتیجه $x=\frac{\pi}{6}+t$ و $t\to 0$. بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+t\right)-1}{6\left(\frac{\pi}{6}+t\right)-\pi}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\cos t+2\cos\frac{\pi}{6}\sin t-1}{6t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin t}{6t}-\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{6t}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های مثلثاتی (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}t}{6t}-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{6t}=\frac{\sqrt{3}}{6}-0=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x}{6}=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

۸۷۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** با توجه به اتحاد $\cos 2x=1-2\sin^2 x$، اگر فرض کنیم $\sqrt[3]{\sin x}=t$، آن‌گاه $\sin x=t^3$ و $t\to 1$. در نتیجه

$$1-\cos 4x=2\sin^2 2x=2-2\cos^2 2x=2-2(1-2\sin^2 x)^2$$

$$=2-2(1-2t^6)^2=2-2+8t^6-8t^{12}=8t^6(1-t^6)$$

پس

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\cos 4x}=\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{8t^6(1-t^6)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{8t^6(1-t)(1+t+\cdots+t^5)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1}{8t^6(1+t+\cdots+t^5)}=\frac{1}{8\times 6}=\frac{1}{48}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال (درس هشتم فصل چهار) استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt[3]{\sin x}}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{-\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}}{4\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{12\sin 4x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{24\sin 2x\cos 2x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{48\sin x\cos x\cos 2x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{48\sin x\cos 2x\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\frac{1}{48}$$

۸۷۱- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f به‌صورت $[-2,0)\cup(0,2]$ است، بنابراین این تابع در نقطهٔ $x=2$ فقط پیوستگی چپ دارد، در نقطهٔ $x=-2$ فقط پیوستگی راست دارد و در نقطهٔ $x=0$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است: $\lim_{x\to 1}f(x)=\sqrt{3}=f(1)$.

۸۷۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(2)=4,\quad \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+x)=4+2=6$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-x)=4-2=2$$

بنابراین مقدار تابع f در نقطهٔ $x=2$ نه با حد چپ آن در این نقطه برابر است نه با حد راست آن. پس این تابع در نقطهٔ $x=2$ نه پیوستگی چپ دارد، نه پیوستگی راست.

۸۷۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(7-m^2x^2)=7-9m^2$$

همچنین $f(3)=\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x^2-6)=3$، در نتیجه

$$7-9m^2=3\Rightarrow 9m^2=4\Rightarrow m=\pm\frac{2}{3}$$

بنابراین حاصل ضرب مقدارهای ممکن m برابر $-\frac{4}{9}$ است.

۸۷۴- گزینهٔ ۱ چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در $x=-1$ هم پیوسته است. بنابراین حدهای چپ و راست تابع و مقدار تابع در این نقطه برابرند:

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{a}{x-2}=\frac{a}{-3}$$

$$f(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x+2a}{x+2}=\frac{-1+2a}{-1+2}=2a-1$$

بنابراین $2a-1=-\frac{a}{3}\Rightarrow a=\frac{3}{7}$

۸۷۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(2)=a,\quad \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(3x-[x])=\lim_{x\to 2^-}(3x-1)=5$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+2b)=2+2b$$

بنابراین $a=5$ و $2+2b=5$، پس $b=\frac{3}{2}$ و در نتیجه $ab=\frac{15}{2}$.

۸۷۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax^2-a+4)=a-a+4=4$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}}=4$$

بنابراین به‌ازای هر مقدار a تابع f در $x=1$ پیوسته است. زیرا:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=4$$

۸۷۷- گزینهٔ ۳

$$\frac{x^2-4x}{x^2-3x+2}\ge 0\Rightarrow\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-2)}\ge 0$$

به جدول تعیین علامت زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		0		1		2		4		$+\infty$
$\frac{x^2-4x}{x^2-3x+2}$		$+$	0	$-$	ت‌ن	$+$	ت‌ن	$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f روی بازه‌های $[4,+\infty)$، $(1,2)$ و $(-\infty,0]$ پیوسته است و حداکثر مقدار a برابر صفر است.

۸۷۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x\ge 0$، آن‌گاه $[x]\ge 0$ و $f(x)=0$ و اگر $x<0$، آن‌گاه $[x]<0$ و $f(x)=2[x]$. بنابراین تابع f در نقاط صحیح مثبت پیوسته است ولی در نقاط صحیح نامثبت، یعنی در نقاط $x=0$، $x=-1$، $x=-2$ و $x=-3$ از بازهٔ $(-4,4)$ ناپیوسته است.

۸۷۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** در نقطه‌هایی که مقدار $\frac{x+1}{4}$ عددی صحیح شود، تابع $y=[\frac{x+1}{4}]$ ناپیوسته است: $\frac{x+1}{4}=k\Rightarrow x=4k-1,\quad k\in\mathbb{Z}$

یعنی در نقطه‌هایی به‌صورت $4k-1$ تابع ناپیوسته است. پس تابع روی بازهٔ $(-1,3)$ پیوسته است و در $x=3$ ناپیوسته است. سپس روی بازهٔ $(3,7)$ پیوسته است، یعنی حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

راه حل دوم توجه کنید که

$$-1<x<k\xrightarrow{+1}0<x+1<k+1\xrightarrow{\div 4}0<\frac{x+1}{4}<\frac{k+1}{4}$$

برای اینکه $[\frac{x+1}{4}]$ در این بازه پیوسته باشد، باید $\frac{k+1}{4}=1$، پس $k=3$.

۸۸۰- گزینهٔ ۳ در نقطه‌هایی که مقدار $\sqrt{x}$ عددی صحیح شود تابع $y=[\sqrt{x}]$ ناپیوسته است. $\sqrt{x}=k\in\mathbb{R}\Rightarrow x=k^2$

پس تابع در نقطه‌های $x=0$، $x=1$، $x=4$، $x=9$ و ... ناپیوسته است، یعنی تابع روی بازهٔ $(1,4)$ پیوسته است، در $x=4$ ناپیوسته است سپس روی بازهٔ $(4,9)$ پیوسته است. پس حداکثر مقدار k برابر ۹ است.

۸۸۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(4)=[\frac{4}{2}]+[-\frac{4}{2}]=2-2=0$ و

$$\lim_{x\to 4^+}f(x)=2-3=-1,\quad \lim_{x\to 4^-}f(x)=1-2=-1$$

بنابراین تابع در $x=4$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. تابع در این نقطه حد دارد ولی پیوسته نیست.

۸۸۲- گزینهٔ ۲ در $x=۴$ ، $x=۱۶$ و $x=۶۴$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{۲}$ عدد صحیح می‌شود. پس تابع $f(x)=[\frac{\sqrt{x}}{۲}]$ در این نقطه‌ها پیوسته نیست.

در نقطهٔ $x=۹$ مقدار عبارت $\frac{\sqrt{x}}{۲}$ عدد صحیح نیست، پس تابع $y=[\frac{\sqrt{x}}{۲}]$ در این نقطه پیوسته است.

۸۸۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(۲-۳x)=۵$$

همچنین $f(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=|-۳-a|=|۳+a|$. در نتیجه

$$|۳+a|=۵\Rightarrow ۳+a=۵ \text{ یا } ۳+a=-۵\Rightarrow a=۲ \text{ یا } a=-۸$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر -۶ است.

۸۸۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(\frac{\pi}{۴})=۱+ab$ و

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}(\sin ۲x-a)=\sin\frac{\pi}{۲}-a=۱-a$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}(-۲-\sin ۲x)=-۲-\sin\frac{\pi}{۲}=-۳$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، باید $۱+ab=۱-a=-۳$. در نتیجه $a=۴$ و $۱+ab=۱+۴b=-۳$ ، بنابراین $b=-۱$. پس $a+b=۳$.

۸۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}(۳x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(ax-b)\Rightarrow -۳=-a-b \qquad (۱)$$

همچنین

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}(ax-b)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۱)$$

$$۲a-b=۳ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $a=۲$ و $b=۱$. پس $\frac{a}{b}=۲$.

۸۸۶- گزینهٔ ۳ مخرج نباید هیچ جا صفر شود، در نتیجه باید دلتای معادلهٔ $x^۲-۶x+m+۱=۰$ منفی باشد:

$$\Delta=۳۶-۴(m+۱)<۰\Rightarrow m>۸$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۸۸۷- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ نقطه‌های ناپیوستگی تابع f مقدارهایی از x است که مخرج، یعنی $x^۲-ax+b$ ، به ازای آن‌ها صفر است. بنابراین -۳ و ۴ ریشه‌های مخرج هستند. به این ترتیب

$$a=\text{مجموع ریشه‌ها}=۴-۳=۱$$

$$b=\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=۴(-۳)=-۱۲$$

بنابراین $a+b=-۱۱$.

۸۸۸- گزینهٔ ۲ این تابع در تمام نقاطی که $۲x+\frac{۱}{۲}$ مقداری صحیح داشته باشد، ناپیوسته است:

$$۲x+\frac{۱}{۲}=k\,,\,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow ۲x=k-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k-۱}{۴}$$

پس در تمام نقاطی که به‌صورت $\frac{۲k-۱}{۴}$ باشند و k عددی صحیح باشد، این تابع ناپیوسته است. برای اینکه معلوم شود در بازهٔ $(-۱,۲)$ چند نقطه به این صورت است، کافی است نامعادلهٔ $-۱<x<۲$ را حل کنیم:

$$-۱<\frac{۲k-۱}{۴}<۲\Rightarrow -۴<۲k-۱<۸\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<k<\frac{۹}{۲}$$

$$k\in\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$$

بنابراین تابع f در شش نقطه از بازهٔ $(-۱,۲)$ ناپیوسته است که این نقاط به‌صورت زیر هستند:

k	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	$-\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۷}{۴}$

۸۸۹- گزینهٔ ۳ باید $x^۲+kx+۴\geq ۰$. در نتیجه $\Delta\leq ۰$ ، یعنی

$$k^۲-۱۶\leq ۰\Rightarrow -۴\leq k\leq ۴$$

بنابراین اگر k یکی از عددهای صحیح زیر باشد، تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴$$

۸۹۰- گزینهٔ ۲ باید

$$۷-|x-۲|\geq ۰\Rightarrow |x-۲|\leq ۷\Rightarrow -۷\leq x-۲\leq ۷\Rightarrow -۵\leq x\leq ۹$$

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۵,۹]$ پیوسته است.

۸۹۱- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=[\cos(\pi x)]$ در $x=۱$ پیوسته است، زیرا

$$f(۱)=[\cos\pi]=[-۱]=-۱$$

در یک همسایگی راست $x=۱$ ، $\pi x\to\pi^+$ و در نتیجه $\cos(\pi x)\to(-۱)^+$

و در یک همسایگی چپ $x=۱$ ، $\pi x\to\pi^-$ و در نتیجه $\cos(\pi x)\to(-۱)^+$.

پس

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{t\to(-۱)^+}[t]=-۱\,,\quad \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{t\to(-۱)^+}[t]=-۱$$

بقیهٔ تابع‌ها در $x=۱$ ناپیوسته‌اند.

۸۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ زیرا ریشهٔ مخرج کسر $\frac{۱}{x^۳-۹}$ در بازهٔ $(-\infty,۲)$ قرار ندارد و ریشه‌های مخرج کسر $\frac{۱}{x^۲+x-۲}$ در بازهٔ $[۲,+\infty)$ قرار ندارند. بنابراین تابع f فقط در $x=۲$ می‌تواند ناپیوسته باشد. پیوستگی تابع f را در $x=۲$ بررسی می‌کنیم.

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x^۲+x-۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۱}{x^۳-۹}=-۱$$

بنابراین تابع f فقط در $x=۲$ ناپیوسته است.

۸۹۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x^4=x^2\Rightarrow x=\pm 1,\ x=0$$

ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x=0 \text{ یا } x=\pm 1\\ x^2+2x & x\neq 0,\ x\neq \pm 1\end{cases}$$

پس

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\neq 0,\ x\neq \pm 1\\ -1 & x=1\\ 0 & x=0\\ 3 & x=-1\end{cases}$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to(-1)} f(x)=\lim_{x\to(-1)}(x^2+2x)=-1\neq f(-1)=3$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+2x)=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+2x)=3\neq f(1)=-1$$

بنابراین تابع در $x=-1$ و $x=1$ ناپیوسته است.

۸۹۴- گزینهٔ ۱ تابع f در نقطه‌هایی ناپیوسته است که تعریف نشده باشد، در نتیجه باید ریشه‌های مخرج کسر را پیدا کنیم:

اگر $x\geq 4$، آن‌گاه

$$x^2-4x-3=0\Rightarrow x=2+\sqrt{7},\ x=2-\sqrt{7}\quad (\text{غ.ق.ق.})$$

اگر $x<4$، آن‌گاه

$$x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1,\ x=3$$

بنابراین تابع f در نقاط $x=1$، $x=3$ و $x=2+\sqrt{7}$ ناپیوسته است که مجموع این نقاط برابر $6+\sqrt{7}$ است.

۸۹۵- گزینهٔ ۳ باید مخرج فقط در یک نقطه برابر صفر باشد، یعنی دلتای معادلهٔ $x^2+(2m-1)x+1=0$ برابر صفر است:

$$\Delta=(2m-1)^2-4(1)=0\Rightarrow 4m^2-4m+1-4=0\Rightarrow 4m^2-4m-3=0$$

پس حاصل ضرب مقادیر ممکن برای m برابر $-\frac{3}{4}$ است.

۸۹۶- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{x}}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x-1}}{x-1}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطهٔ ۱ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

۸۹۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید k عددی صحیح باشد، در این صورت

$$f(k)=k([k]-1)+[-k]=k^2-k-k=k^2-2k$$

$$\lim_{x\to k^-} f(x)=\lim_{x\to k^-}(x(k-2)-k)=k^2-2k-k=k^2-3k$$

برای اینکه تابع f در $x=k$ پیوستگی چپ داشته باشد، باید

$$k^2-2k=k^2-3k\Rightarrow k=0$$

پس در بین نقاط صحیح، فقط در $x=0$ این تابع پیوستگی چپ دارد.

۸۹۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که به‌ازای $x=-\frac{7}{2}$، $2x-5$ عددی صحیح است. بنابراین درصورتی تابع $f(x)$ در $x=-\frac{7}{2}$ پیوسته است که $x=-\frac{7}{2}$ ریشهٔ عبارت $4x^2-2ax-7$ باشد. در نتیجه

$$4\left(-\frac{7}{2}\right)^2-2a\left(-\frac{7}{2}\right)-7=0\Rightarrow 49+7a-7=0\Rightarrow a=-6$$

۸۹۹- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع را پیدا می‌کنیم:

$$4x-x^2>0\Rightarrow 0<x<4$$

پس دامنهٔ تابع بازهٔ $(0,4)$ است. در نقطه‌های صحیح این بازه تابع ناپیوسته است، یعنی در نقطه‌های $x=1$، $x=2$ و $x=3$.

۹۰۰- گزینهٔ ۱ ابتدا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 8x}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b-x}}\times\frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x})\sin 8x}{(b+x)-(b-x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x})\sin 8x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{b+x}+\sqrt{b-x})\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{2x}$$

$$=2\sqrt{b}\times 4=8\sqrt{b}$$

بنابراین باید

$$8\sqrt{b}=16\Rightarrow b=4$$

۹۰۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=0$ و در یک همسایگی چپ نقطهٔ -2 مقادیر تابع f منفی هستند. بنابراین $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{4}{f(x)}=-\infty$.

۹۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to 3}|x-3|=0$، و چون مقادیر $|x-3|$ در یک همسایگی محذوف ۳ مثبت‌اند، پس $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{|x-3|}=+\infty$.

۹۰۳- گزینهٔ ۳ اگر $x\to 1^-$، آن‌گاه $-x\to(-1)^+$ و در نتیجه $[-x]=-1$. بنابراین $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{[-x]}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-1}{x-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$.

۹۰۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که مخرج کسر تابع f سه ریشه دارد:

$$x^3-4x=0\Rightarrow x(x^2-4)=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm 2$$

این اعداد ریشه‌های صورت کسر تابع نیستند. از طرف دیگر، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$. پس تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد چپ نامتناهی دارد. همین‌طور در نقطه‌های $x=-2$ و $x=2$ حد چپ تابع f نامتناهی است.

۹۰۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x^3-x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x(x-1)}$$

از طرف دیگر، $\lim_{x\to0^-}x(x-1)=0$ و اگر $x\to0^-$، مقادیر $x(x-1)$ مثبت هستند، پس $\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x^3-x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x(x-1)}=+\infty$.

۹۰۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to\pi^+}\sin x=\lim_{x\to\pi^-}\sin x=0$ و اگر $x\to\pi^+$، مقادیر $\sin x$ منفی‌اند و اگر $x\to\pi^-$، مقادیر $\sin x$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim_{x\to\pi^+}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to\pi^-}f(x)=+\infty$.

۹۰۷- گزینهٔ ۲ اگر $x\to\pi^+$، آن‌گاه $\cos x\to(-1)^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[\cos x]}{\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-1}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

۹۰۸- گزینهٔ ۱ اگر $x\to0^-$، آن‌گاه $[x]=-1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x[x]}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{x}{\sin x}\times\frac{-1}{\sin x}\right)=1\times\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

۹۰۹- گزینهٔ ۳ اگر $x\to1^+$، آن‌گاه $[x]=1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\tan(\pi(x-1))}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\tan(\pi x-\pi)}$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\tan(\pi x)}=+\infty$$

اگر $x\to1^-$، آن‌گاه $[x]=0$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\tan(\pi x)}=-\infty$$

۹۱۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{4-3}{x-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{0-3}{x-1}=+\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت مقابل است:

۹۱۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim_{x\to4^-}f(x)=0$ و مقادیر f در یک همسایگی چپ نقطهٔ ۴، منفی هستند. بنابراین $\lim_{x\to4^-}\frac{-2}{f(x)}=+\infty$. بقیهٔ گزینه‌ها نادرست هستند.

۹۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-1)^+}(2x+1)=-1,\quad \lim_{x\to(-1)^+}(x^2+x)=0$$

از طرف دیگر، وقتی $x\to(-1)^+$، مقادیر x^2+x منفی هستند ($x^2+x=\underbrace{x}_{\text{منفی}}\underbrace{(x+1)}_{\text{مثبت}}$)، پس $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x+1}{x^2+x}=+\infty$.

۹۱۳- گزینهٔ ۱ اگر $x\to2^+$، آن‌گاه $[x]=2$ و $f(x)=\frac{2}{x-2}$ و در نتیجه $\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$. اگر $x\to2^-$، آن‌گاه $[x]=1$ و $f(x)=\frac{-1}{x-2}$ و در نتیجه $\lim_{x\to2^-}f(x)=+\infty$.

۹۱۴- گزینهٔ ۱ در ریشه‌های مخرج ممکن است تابع حد چپ نامتناهی داشته باشد. ریشه‌های مخرج $x=1$ و $x=2$ هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2}{x-2},\quad x\neq1$$

پس $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$. بنابراین تابع فقط در $x=2$ حد چپ نامتناهی دارد.

۹۱۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq1$، آن‌گاه

$$\frac{x^2-3x+2}{-2x^2+4x-2}=\frac{(x-1)(x-2)}{-2(x-1)^2}=\frac{x-2}{-2(x-1)}$$

بنابراین $\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{-2x^2+4x-2}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-2}{-2(x-1)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$.

۹۱۶- گزینهٔ ۲ اگر $x\to(\frac{1}{3})^+$، آن‌گاه

$$\pi x\to(\frac{\pi}{3})^+\Rightarrow\cos(\pi x)\to(\frac{1}{2})^-$$

بنابراین $\lim_{x\to(\frac{1}{3})^+}\frac{3x+1}{2\cos(\pi x)-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$.

۹۱۷- گزینهٔ ۳ چون $\lim_{x\to2}(x-3)=-1$، پس باید ax^2+6x+b در $x=2$ برابر صفر شود و مقدار این عبارت در دو طرف $x=2$ عددی منفی باشد. بنابراین باید $x=2$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2+6x+b=0$ باشد، یعنی این عبارت باید به‌صورت $a(x-2)^2$ باشد. چون $a<0$، پس

$$ax^2-4ax+4a=ax^2+6x+b$$

$$\begin{cases}-4a=6\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\\ b=4a=-6\end{cases}$$

پس $ab=9$.

۹۱۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

بنابراین $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$.

۹۱۹- گزینهٔ ۳ می‌توان ضابطهٔ تابع را به شکل زیر نوشت:

$$f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{\cos x}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$
$$=\frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

اکنون توجه کنید که عبارت $1+\sin x$ همواره نامنفی است. بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

۹۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲-۴}{x^۲-۳x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(x-۱)}=\frac{x+۲}{x-۱}\ ,\ x\neq ۲$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty\ ,\quad \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=۱$ به‌صورت مقابل است:

۹۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۰}(f(x)-۲)=۰$ و مقادیر $f(x)-۲$ در یک همسایگی محذوف نقطهٔ صفر منفی هستند. زیرا در این همسایگی مقادیر $f(x)$ کمتر از ۲ هستند. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{f(x)-۲}=-\infty$.

۹۲۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۰}(x-۱)=-۱\ ,\quad \lim_{x\to ۰}(x^۳-۲x^۲)=۰$$

از طرف دیگر، چون $x^۳-۲x^۲=x^۲(x-۲)$، وقتی $x\to ۰$، مقادیر $x^۳-۲x^۲$ منفی هستند. پس $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x-۱}{x^۳-۲x^۲}=+\infty$.

۹۲۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to ۵^-}([x]^۲-۲۵)=۱۶-۲۵=-۹$ و $\lim\limits_{x\to ۵^-}(x-۵)=۰$ و مقادیر $x-۵$ در یک همسایگی چپ ۵ منفی‌اند.

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۵^-}\frac{[x]^۲-۲۵}{x-۵}=+\infty$.

۹۲۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اعداد صحیح، ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f هستند:
$x-[x]=۰\Rightarrow x=[x]\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

اکنون دقت کنید که از اعداد صحیح فقط $x=۰$ و $x=۱$ ریشهٔ صورت $f(x)$ هستند. حد چپ و حد راست تابع در این نقاط را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x(x-۱)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}(x-۱)=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x(x-۱)}{x+۱}=۰$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-x}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}x=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-x}{x}=\lim_{x\to ۱^-}(x-۱)=۰$$

بنابراین تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ حد چپ متناهی و حد راست متناهی دارد. در بقیهٔ اعداد صحیح حد صورت کسر صفر نیست، درحالی که حد راست مخرج کسر صفر است، پس تابع f در این نقاط حد راست نامتناهی دارد.

۹۲۵- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $\sqrt[۶]{x}=t$. در این صورت اگر $x\to ۰^+$ آن‌گاه $t\to ۰^+$ و

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t^۳-t^۲}{t^۶-t^۳}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t-۱}{t(t^۳-۱)}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۱}{t(t^۲+t+۱)}=+\infty$$

۹۲۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{۱}{۲\sin x\cos x-۲\sin x}=\frac{۱}{۲\sin x(\cos x-۱)}$$

عبارت $\cos x-۱$ همواره نامثبت است. یعنی $\cos x-۱\leq ۰$. از طرف دیگر اگر $x\to ۰^-$، آن‌گاه $\sin x\to ۰^-$ و اگر $x\to ۰^+$، آن‌گاه $\sin x\to ۰^+$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{۲\sin x(\cos x-۱)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۲\sin x(\cos x-۱)}=-\infty$$

۹۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-}(x)=\frac{\pi}{۴}$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-}(\sin x-\cos x)=۰$$

از طرف دیگر، وقتی $x\to (\frac{\pi}{۴})^-$ مقادیر $\sin x$ از مقادیر $\cos x$ کوچک‌ترند، پس مقادیر $\sin x-\cos x$ منفی‌اند. در نتیجه

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{۴})^-}\frac{x}{\sin x-\cos x}=-\infty$$

۹۲۸- گزینهٔ ۱ اگر $x\to ۱^-$، آن‌گاه $[x]=۰$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{x+\tan ۰}=\frac{۱}{۱+۰}=۱$$

اگر $x\to ۱^+$، آن‌گاه $[x]=۱$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱}{x+\tan(\frac{\pi x}{۲})}=\frac{۱}{۱+(-\infty)}=۰$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع f در $x=۱$ برابر ۱ است.

۹۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sin x-\cos x}{۱-\sin ۲x}=\frac{\sin x-\cos x}{\sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x-\cos x)^۲}=\frac{۱}{\sin x-\cos x}=\frac{۱}{\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{\sin x-\cos x}{۱-\sin ۲x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{۱}{\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

۹۳۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=\frac{۴}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\frac{۴}{۰^-}=-\infty$$

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=-۲$ به‌صورت مقابل است.

۹۳۱- گزینهٔ ۲ حد مخرج $f(x)$ در $x=۲$ و $x=-۳$ باید برابر صفر باشد، یعنی $x=۲$ و $x=-۳$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+۲=۰$ هستند. با توجه به مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها معلوم می‌شود:

$$۲\times(-۳)=\frac{۲}{a}\ ,\quad ۲+(-۳)=-\frac{b}{a}$$

بنابراین $a=-\frac{۱}{۳}$ و $b=-\frac{۱}{۳}$. پس

$$f(x)=\frac{x^۲+۱}{-\frac{۱}{۳}x^۲-\frac{۱}{۳}x+۲}\Rightarrow\lim_{x\to۱}f(x)=\frac{۱+۱}{-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}+۲}=\frac{۳}{۲}$$

۹۳۲- گزینهٔ ۳ باید علامت عبارت $۲x-\sqrt{x+۳}$ را در اطراف نقطهٔ $x=۱$ مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که $x=۱$ تنها جواب معادلهٔ $۲x-\sqrt{x+۳}=۰$ است.

$$۲x=\sqrt{x+۳}\Rightarrow ۴x^۲-x-۳=۰\Rightarrow x=۱,\ x=-\frac{۳}{۴}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین علامت عبارت $۲x-\sqrt{x+۳}$ را می‌توانیم با عددگذاری مشخص کنیم. مثلاً اگر $x=۲$، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $۴-\sqrt{۵}$ است که عددی مثبت است و اگر $x=۰$، آن‌گاه مقدار عبارت برابر $-\sqrt{۳}$ است که عددی منفی است.

x		-۳		۱		$+\infty$
$۲x-\sqrt{x+۳}$		ت ن	$-$	۰	$+$	

در یک همسایگی چپ $x=۱$ مقدار عبارت منفی است، پس $\lim_{x\to۱^-}f(x)=-\infty$.

در یک همسایگی راست $x=۱$ مقدار عبارت مثبت است، پس $\lim_{x\to۱^+}f(x)=+\infty$.

۹۳۳- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج وقتی $x\to۲$ صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید.

بنابراین $x-۲$ یکی از عامل‌های صورت است و صورت را می‌توان این‌طور نوشت $۲x^۲+mx+n=(x-۲)(۲x+k)$. به این ترتیب، حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(۲x+k)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{۲\times۲+k}{۲+۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow k=۶$$

اکنون می‌توان نوشت $۲x^۲+mx+n=(x-۲)(۲x+۶)=۲x^۲+۲x-۱۲$. پس $m=۲$ و $n=-۱۲$، و در نتیجه $m-n=۱۴$.

۹۳۴- گزینهٔ ۳ چون حد مخرج وقتی $x\to۱$ برابر صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، باید حد صورت هم صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to۱}(\sqrt{۲x+a}-\sqrt{x+b})=۰\Rightarrow\sqrt{۲+a}=\sqrt{۱+b}\Rightarrow b=a+۱$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج مقدار حد را حساب می‌کنیم

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{۲x+a}-\sqrt{x+a+۱}}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to۱}\left(\frac{\sqrt{۲x+a}-\sqrt{x+a+۱}}{x-۱}\times\frac{\sqrt{۲x+a}+\sqrt{x+a+۱}}{\sqrt{۲x+a}+\sqrt{x+a+۱}}\right)$$
$$=\lim_{x\to۱}\left(\frac{۲x+a-x-a-۱}{x-۱}\times\frac{۱}{\sqrt{۲x+a}+\sqrt{x+a+۱}}\right)=\frac{۱}{۲\sqrt{a+۲}}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲\sqrt{a+۲}}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\sqrt{a+۲}=۳\Rightarrow a=۷$$

پس $b=۸$ و در نتیجه $ab=۵۶$.

۹۳۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x^۳-۴x^۲+۵x-۲=(x-۱)(x^۲-۳x+۲)$$
$$=(x-۱)(x-۱)(x-۲)=(x-۱)^۲(x-۲)$$

بنابراین در هر دو حالت $x\to۱^+$ و $x\to۱^-$:

$$(x-۱)^۲\to۰^+\Rightarrow(x-۱)^۲(x-۲)\to۰^-$$

پس $\lim_{x\to۱^+}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to۱^-}f(x)=-\infty$.

۹۳۶- گزینهٔ ۱ در یک همسایگی راست $x=۲$ تساوی $[x]=۲$ برقرار است. پس $\lim_{x\to۲^+}\frac{۳[x]+k}{x-۲}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۶+k}{x-۲}=+\infty$.

چون $(x-۲)\to۰^+$، پس $۶+k>۰$ و در نتیجه $k>-۶$.

در یک همسایگی چپ $x=۲$ تساوی $[x]=۱$ برقرار است. پس

$$\lim_{x\to۲^-}\frac{۳[x]+k}{x-۲}=\lim_{x\to۲^-}\frac{۳+k}{x-۲}=+\infty$$

چون $(x-۲)\to۰^-$، پس $۳+k<۰$ و در نتیجه $k<-۳$، بنابراین $-۶<k<-۳$.

۹۳۷- گزینهٔ ۱ از فرض‌های مسئله نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to a}\frac{۲}{۱+f(x)}=۱\Rightarrow\frac{۲}{۱+\lim_{x\to a}f(x)}=۱\Rightarrow۱+\lim_{x\to a}f(x)=۲\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=۱$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)-۱)=۰$. از طرف دیگر $\lim_{x\to a}\frac{g(x)+۱}{f(x)-۱}=۲$. اگر $\lim_{x\to a}(g(x)+۱)\neq۰$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{g(x)+۱}{f(x)-۱}$ وجود ندارد، چون حد مخرج آن صفر است. پس $\lim_{x\to a}(g(x)+۱)=۰$ و در نتیجه $\lim_{x\to a}g(x)=-۱$. بنابراین

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+۱}{g(x)-۳}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)+۱}{\lim_{x\to a}g(x)-۳}=\frac{۱+۱}{-۱-۳}=-\frac{۱}{۲}$$

۹۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$x^۳-ax^۲+ax-۱=(x^۳-۱)-ax(x-۱)=(x-۱)(x^۲+x+۱)-ax(x-۱)$$
$$=(x-۱)(x^۲+(۱-a)x+۱)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{x^۳-ax^۲+ax-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(x^۲+(۱-a)x+۱)}$$
$$=\lim_{x\to۱}\frac{۱}{x^۲+(۱-a)x+۱}$$

برای اینکه مقدار حد فوق برابر $+\infty$ شود باید $x=۱$ ریشهٔ مخرج (ریشهٔ مضاعف) باشد. پس $۱+(۱-a)+۱=۰\Rightarrow a=۳$

۹۳۹- گزینهٔ ۴ اگر $x\to۲^-$، آن‌گاه $[x]=۱$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{t\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan t=-\infty$$

اگر $x\to۲^+$، آن‌گاه $[x]=۲$ و در نتیجه

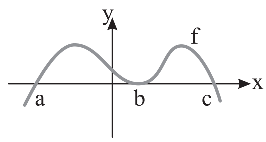
$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\tan\left(\frac{۲\pi}{x}\right)=\tan\pi=۰$$

۹۴۰- گزینهٔ ۱ برای اینکه حد مورد نظر $+\infty$ شـود باید $x=\frac{\pi}{4}$ ریشهٔ مخرج کسر باشد:

$$a\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=0\Rightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow a=-1$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{bx+1}{\cos x-\sin x}=+\infty$. اکنون توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\pi}{4})^+$ مقدار مخرج کسر منفی است و باید مقدار صورت کسر هم منفی باشد تا حد مورد نظر برابر $+\infty$ شود. پس $\frac{b\pi}{4}+1<0\Rightarrow b<-\frac{4}{\pi}$

۹۴۱- گزینهٔ ۳ مطابق شکل زیر در نقاط $x=a$، $x=b$ و $x=c$ حد تابع f برابر صفر است، بنابراین حد تابع $\frac{1}{f}$ در این نقاط نامتناهی است و نمودار تابع $\frac{1}{f}$ در این نقاط مجانب قائم دارد.



۹۴۲- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x-6}=\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-6)}=\frac{x-4}{x-6},\quad x\neq-1$$

بنابراین $x=6$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۴۳- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x-2}{(x^2+1)(x^2-4)}=\frac{x-2}{(x^2+1)(x-2)(x+2)}=\frac{1}{(x^2+1)(x+2)},\ x\neq2$$

بنابراین $x=-2$ تنها ریشهٔ مخرج است و خط $x=-2$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۴۴- گزینهٔ ۳ ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$|x-1|-2=0\Rightarrow|x-1|=2\Rightarrow\begin{cases}x-1=2\\x-1=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-1\end{cases}$$

بنابراین خط‌های $x=-1$ و $x=3$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر ۴ است.

۹۴۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x}{x-\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1},\quad D_f=(0,+\infty)-\{1\}$$

پس نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=1$ دارد.

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty,\quad\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$

۹۴۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z}),\quad\frac{-3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=-\pi,0,\pi$$

بنابراین نمودار تابع f سه مجانب قائم به معادلات $x=\pi$، $x=0$ و $x=-\pi$ در بازهٔ $(\frac{-3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ دارد.

۹۴۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$0\le x-[x]<1\Rightarrow-2\le x-[x]-2<-1$$

پس حد مخرج کسر ضابطهٔ تابع f هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که تابع f در آن حد نامتناهی داشته باشد. پس نمودار تابع f مجانب قائم ندارد.

۹۴۸- گزینهٔ ۲ اگر مخرج کسـر ضابطهٔ تابع f ریشه نداشته باشد، نمودار این تابع مجانب قائم نخواهد داشت (توجه کنید که صورت کسر ۱ است). بنابراین

$$x^2+mx+1=0,\quad\Delta=m^2-4<0\Rightarrow-2<m<2$$

پس m سه مقدار صحیح ±1 و ۰ را می‌تواند داشته باشد.

۹۴۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x=1$ ریشـهٔ مخرج کسـر ضابطهٔ تابع f است و

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{4-3}{1-x}=-\infty,\quad\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{0-3}{1-x}=-\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت زیر است:

۹۵۰- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2},\quad x\neq1$$

پس $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است و

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=2$ به‌صورت مقابل است.

۹۵۱- گزینهٔ ۴ مخـرج کسـر در ضابطـهٔ تابع f ریشــه نـدارد. بنابراین نمودار تابع f مجانب قائم ندارد. $x^2-x+1=0,\quad\Delta=1-4<0$

۹۵۲- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^3-4x^2+3x}=\frac{(x-2)(x-3)}{x(x^2-4x+3)}$$

$$=\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x(x-1)},\quad x\neq3$$

بنابراین خطوط $x=0$ و $x=1$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند.

۹۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا ریشه‌های مخرج کسر ضابطهٔ تابع f را به دست می‌آوریم:

$$x-|x^2-2x|=0\Rightarrow|x^2-2x|=x,\quad x\ge0$$

$$\begin{cases}x^2-2x=x\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x=0,\ x=3\\x^2-2x=-x\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x=0,\ x=1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f سه مجانب قائم به معادلات $x=0$، $x=1$ و $x=3$ دارد.

۹۵۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x^2-4x>0\Rightarrow x\in\mathbb{R}-[0,4],\quad1-x^2>0\Rightarrow-1<x<1$$

بنابراین $D_f=(-1,0)$. پس نمودار تابع، دو خط مجانب قائم به معادلات $x=0$ و $x=-1$ دارد:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty,\quad\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty$$

۹۵۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$2\cos x-1=0\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$0<x<2\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

بنابرایـن نمودار تابـع f در بازهٔ $(0,2\pi)$ دو مجانب قائم به معادلات $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ دارد. توجه کنید که هیچ‌یک از این دو مقدار صورت کسر ضابطهٔ تابع را صفر نمی‌کنند.

۹۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ریشه‌های مخرج کسر ضابطهٔ تابع f در بازهٔ $(\frac{-3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ به‌صورت زیر هستند:

$$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z}),\qquad \frac{-3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=-\pi,0,\pi$$

از بین این ریشه‌ها $x=0$ ریشهٔ صورت کسر هم است. همچنین

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

بنابرایـن $x=0$ مجانـب قائـم نمـودار تابع f نیسـت ولی $x=\pi$ و $x=-\pi$ مجانب قائم هستند. زیرا تابع در این نقاط حد نامتناهی دارد.

۹۵۷- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\quad(\cos x\neq\sin x)$$

اکنون ریشه‌های مخرج را که در بازهٔ $(0,2\pi)$ واقع هستند مشخص می‌کنیم:

$$\sin x+\cos x=0\Rightarrow\sin x=-\cos x\Rightarrow\tan x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},x=\frac{7\pi}{4}$$

بنابراین نمودار تابع f در بازهٔ $(0,2\pi)$ دو مجانب قائم به معادلات $x=\frac{3\pi}{4}$ و $x=\frac{7\pi}{4}$ دارد. توجه کنید که هیچ‌یک از این دو مقدار صورت کسر ضابطهٔ تابع را صفر نمی‌کنند.

۹۵۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $0\le x-[x]<1\Rightarrow 1\le x-[x]+1<2$

پس حد مخرج کسـر ضابطهٔ تابع f هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. یعنی نقطه‌ای وجود نـدارد کـه تابع f در آن حد نامتناهی داشـته باشـد. پس نمـودار تابع f مجانب قائم ندارد.

۹۵۹- گزینهٔ ۲ در دو حالت زیر نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد:

حالت اول مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$x^2-mx+9=0,\quad \Delta=m^2-36=0\Rightarrow m=\pm 6$$

حالت دوم مخرج دو ریشـه داشـته باشد که یکی ریشـهٔ صورت کسـر یعنی $x=4$ است:

$$16-4m+9=0\Rightarrow m=\frac{25}{4}$$

پس به‌ازای سه مقدار m نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد.

۹۶۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\frac{1}{\sqrt{x}}\ ,\quad D_f=(0,+\infty)-\{1\}$$

بنابراین $x=0$ ریشهٔ مخرج است و خط $x=0$ مجانب قائم نمودار تابع f است:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=0$ به‌صورت روبه‌رو است.

۹۶۱- گزینهٔ ۱ مخرج کسر در ضابطهٔ تابع ریشهٔ مضاعف دارد:

$$x^2-6x+9=0\Rightarrow(x-3)^2=0\Rightarrow x=3$$

چون $x=3$ ریشهٔ صورت کسر در ضابطهٔ تابع f نیست، پس تابع f در $x=3$ حد نامتناهی دارد و $x=3$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x+2}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x+2}{(x-3)^2}=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

۹۶۲- گزینهٔ ۱ ریشه‌های مخرج کسر ضابطهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$x^3+x-2=0\Rightarrow x^3-1+x-1=0\Rightarrow(x-1)(x^2+x+1)+x-1=0$$

$$(x-1)(x^2+x+2)=0$$

معادلهٔ $x^2+x+2=0$ جواب ندارد $(\Delta<0)$، بنابراین $x=1$ تنها ریشهٔ مخرج اسـت و چون این عدد ریشهٔ صورت نیسـت، پس خط $x=1$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۶۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x(x+2)(x-2)}\ ,\quad D_f=[1,+\infty)-\{2\}$$

بنابراین $x=2$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است.

۹۶۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$x^2-3x>0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$$

$$x^2-5x+4>0\Rightarrow x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$$

بنابراین $D_f=(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$، پس تابع f دو مجانب قائم به معادلات $x=4$ و $x=0$ دارد:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$$

۹۶۵- گزینهٔ ۴ در تابع $y=\tan x$ خطـوط $x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$ مجانب‌هـای قائم نمودار تابع‌اند. بنابراین معادلـهٔ مجانب‌های تابع f به‌صورت زیر است:

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=3k\pi+\pi=(3k+1)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

مجانب‌هـای قائـم نمودار تابـع f در بـازهٔ $(-6\pi,6\pi)$ عبارت‌اند از $x=\pi$، $x=4\pi$، $x=-2\pi$ و $x=-5\pi$.

۹۶۶- گزینهٔ ۱ $x=2$ باید جواب معادلهٔ $3ax-4=0$ باشد. پس

$$6a-4=0\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

۹۶۷- گزینهٔ ۳ باید $x=-3$ ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f باشد:

$$x^3+mx-3=0 \xrightarrow{x=-3} -27-3m-3=0 \Rightarrow m=-10$$

بنابراین $f(x)=\frac{x}{x^3-10x-3}=\frac{x}{(x+3)(x^2-3x-1)}$. توجه کنید که

$$x^3-10x-3=x^3-9x-x-3=x(x^2-9)-(x+3)$$

$$=x(x-3)(x+3)-(x+3)=(x+3)(x^2-3x-1)$$

پس مجانب‌های قائم دیگر نمودار تابع f جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x-1=0$ هستند که عبارت‌اند از $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ و $x=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

۹۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$(m-1)x^2+x+1-m=0,\quad \Delta=1-4(m-1)(1-m)=1+4(m-1)^2>0$$

بنابراین اگر $m\neq 1$، آن‌گاه مخرج کسر ضابطهٔ تابع f همواره دو ریشه دارد. برای اینکه نمودار تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد، باید یکی از ریشه‌های مخرج، ریشهٔ صورت کسر هم باشد. پس $x=2$ ریشهٔ مخرج است.

$$(m-1)x^2+x+1-m=0 \xrightarrow{x=2} 4(m-1)+2+1-m=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3}$$

اما اگر $m=1$، آن‌گاه مخرج کسر از درجهٔ اول است و ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{x-2}{x}$ است که $x=0$ مجانب قائم نمودار آن است. بنابراین حاصل‌جمع مقادیر ممکن برای m برابر $\frac{4}{3}$ است.

۹۶۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$2x-1\geq 0\Rightarrow x\geq \frac{1}{2},\quad x-x^2>0\Rightarrow 0<x<1$$

بنابراین $D_f=[\frac{1}{2},1)$ و تنها مجانب قائم نمودار تابع f خط $x=1$ است. از طرف دیگر $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$. بنابراین نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت مقابل است.

۹۷۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $x=\frac{3\pi}{2}$ تنها ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f در بازهٔ $(\pi,2\pi)$ است. همچنین در همسایگی $x=\frac{3\pi}{2}$ مقدار عبارت $\sin x$ نزدیک ۱- و بیشتر از آن است. یعنی

$$\sin x\to(-1)^+\Rightarrow[\sin x]=-1$$

بنابراین $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{-1}{\cos^2 x}=-\infty$، پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=\frac{\pi}{2}$ به‌صورت روبه‌رو است.

۹۷۱- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم است که $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر ۲ است.

۹۷۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to 1^-}(fof)(x)=\lim_{x\to 1^-} f(f(x))=\lim_{t\to-\infty} f(t)=-2$$

۹۷۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\frac{1}{x}+\frac{x^2}{x-1}}{2x-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2(x-1)+x-1+x^3}{x(x-1)}}{\frac{2x^2-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x^2+x-1}{(2x^2-1)(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-3x^2+x-1}{2x^3-2x^2-x+1}=\frac{4}{2}=2$$

۹۷۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to-\infty$، مقادیر $1-3x$ مثبت‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-|1-3x|}{5x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-(1-3x)}{5x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1}{5x-3}=1$$

۹۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-2)^4(4x^2+1)^2}{(6x^4-2x^3+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3^4x^4-\cdots)(4^2x^4+\cdots)}{6^2x^8+\cdots}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^4\times 4^2x^8-\cdots}{6^2x^8+\cdots}=\frac{3^4\times 4^2}{6^2}=36$$

۹۷۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، $3n+4$ و $2n+6$ از ۱ بیشترند، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3n+4}+x+1}{x^{2n+6}-x+1}=\lim_{x\to+\infty} x^{3n+4-(2n+6)}=\lim_{x\to+\infty} x^{n-2}$$

اگر این حد صفر باشد، باید $n-2<0$، یعنی $n<2$، بنابراین فقط $n=1$ ویژگی مورد نظر را دارد.

۹۷۷- گزینهٔ ۲ اگر m عددی مثبت باشد، وقتی $x\to+\infty$، مقادیر $1-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(mx-1)+2x-1}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+2)x-2}{3x+1}=\frac{m+2}{3}$$

بنابراین $\frac{m+2}{3}=3$، پس $m=7$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی $x\to+\infty$، مقادیر $1-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-mx)+2x-1}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-m)x}{3x+1}=\frac{2-m}{3}$$

بنابراین $\frac{2-m}{3}=3$، پس $m=-7$. اگر $m=0$، حد مورد نظر برابر $\frac{2}{3}$ می‌شود که درست نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۷ و ۷- هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها ۴۹- است.

۹۷۸- گزینهٔ ۴ چون حد مورد نظر برابر $-\infty$ شده است، پس باید درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشد و ضریب بزرگ‌ترین جمله در صورت باید منفی باشد. برای اینکه درجهٔ مخرج از درجهٔ صورت کمتر باشد، باید $5-a=0$، یعنی $a=5$. توجه کنید که اگر $a=5$، بزرگ‌ترین جملهٔ صورت $-x^2$ می‌شود، بنابراین حد مورد نظر برابر $-\infty$ است.

۹۷۹- گزینهٔ ۳ چون درجهٔ مخرج کسر داده شده برابر ۲ است، اگر در صورت این کسر جملهٔ شامل x^3 وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب x^3 در صورت کسر داده شده صفر است، یعنی $a=3$. در نتیجه حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x\to+\infty}\frac{(b+2)x^2-3x+4}{3x^2-1}=\frac{b+2}{3}$.

بنابراین $\frac{b+2}{3}=5$، پس $b=13$. به این ترتیب $a+b=16$.

۹۸۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\lim_{x\to+\infty} f(x)=۱$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=۱$.

از طرف دیگر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۳}=۱-\frac{۴}{x+۳}$. اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{۴}{x+۳}\to ۰^+$، پس $f(x)<۱$. اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $\frac{۴}{x+۳}\to ۰^-$، پس $f(x)>۱$. پس در $+\infty$ نمودار تابع f پایین‌تر از خط $y=۱$ قرار دارد و در $-\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط $y=۱$ قرار دارد.

۹۸۱- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $t=۱-x$. در این صورت اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $t\to-\infty$. اکنون از روی شکل معلوم است که

$$\lim_{x\to+\infty} f(۱-x)=\lim_{t\to-\infty} f(t)=-۲$$

۹۸۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to+\infty} f(x)=۲$. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۲$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{t\to ۲^+} f(t)=+\infty$$

۹۸۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to+\infty} f(x)=۱$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-۲$. همچنین اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۱$ و $[f(x)]=۱$ و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-۲$ و $[f(x)]=-۳$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=۱,\quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)]=-۳$$

پس $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]-\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=-۳-۱=-۴$.

۹۸۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{۱}{x}\to ۰^+$ و در نتیجه $[\frac{۱}{x}]=۰$، بنابراین $\lim_{x\to+\infty}(x[\frac{۱}{x}])=\lim_{x\to+\infty} x(۰)=\lim_{x\to+\infty} ۰=۰$.

در واقع در $+\infty$ تابع $f(x)=x[\frac{۱}{x}]$ و تابع $g(x)=۰$ مساوی‌اند و حد آن‌ها برابر صفر است.

۹۸۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، مقادیر x، $۲x$ و $۳x-۱$ همگی منفی‌اند. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|۲x|+|x|}{|۳x-۱|-|۲x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x-x}{۱-۳x-(-۲x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x}{-x+۱}=۳$$

۹۸۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $n=۱$، آن‌گاه مقدار حد برابر صفر است که وجود دارد. اگر $n>۱$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^{n-۱}-۲x}{x^۴-x+۱}=\lim_{x\to+\infty}(۳x^{n-۱-۴})=۳\lim_{x\to+\infty}x^{n-۵}$$

برای اینکه این حد وجود نداشته باشد، باید $n-۵\geq ۱$، یعنی $n\geq ۶$. بنابراین کوچک‌ترین عددی که ویژگی مورد نظر را دارد، ۶ است.

۹۸۷- گزینهٔ ۲ اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^۲$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۲$ باید صفر باشد، یعنی $a+۱=۰$، پس $a=-۱$. در این صورت، حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x\to-\infty}\frac{-۵x+۴}{(b-۲)x-۱}=\frac{-۵}{b-۲}$. بنابراین $\frac{-۵}{b-۲}=\frac{۱}{۲}$، در نتیجه $b=-۸$. به این ترتیب، $ab=۸$.

۹۸۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^۳$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۳$ در صورت کسر داده شده صفر است، درنتیجه $۲a-۱=۰$، پس $a=\frac{۱}{۲}$. به این ترتیب حد مسئله می‌شود $\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۲-۱}{۲x^۲+x+۱}=\frac{۴}{۲}=۲$.

در نتیجه $b=۲$ و $a+b=\frac{۵}{۲}$.

۹۸۹- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $t=\frac{۱}{x}$، آن‌گاه $t\to ۰^+$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{۱}{x}}{\tan\frac{۲}{x}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\sin t}{\tan ۲t}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\sin t}{\frac{۲\sin t\cos t}{\cos ۲t}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\cos ۲t}{۲\cos t}=\frac{۱}{۲}$$

۹۹۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱}{x-۱}=۲$. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{۲x+۱}{x-۱}=۲+\frac{۳}{x-۱}>۲$. بنابراین اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $[\frac{۲x+۱}{x-۱}]=۲$ و در نتیجه $\lim_{x\to+\infty}[\frac{۲x+۱}{x-۱}]=\lim_{x\to+\infty}۲=۲$.

۹۹۱- گزینهٔ ۴ گزینهٔ (۱) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=۱\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}(۱-f(x))=۰$

و اگر $x\to-\infty$، مقادیر $۱-f(x)$ مثبت‌اند. بنابراین $\lim_{x\to-\infty}\frac{۴}{۱-f(x)}=+\infty$.

گزینهٔ (۲) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty$

گزینهٔ (۳) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to ۱^-}((x+۲)f(x))=-\infty$

گزینهٔ (۴) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=۱\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(۱-f(x))=۰$

و اگر $x\to+\infty$، مقادیر $۱-f(x)$ منفی‌اند. بنابراین $\lim_{x\to+\infty}\frac{-۴}{۱-f(x)}=+\infty$.

پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

۹۹۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-۲,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=۲$$

اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<-۲$، بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to-\infty} f(f(x))=\lim_{t\to(-۲)^-} f(t)=-\infty$$

از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $f(x)>۲$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{t\to ۲^+} f(t)=+\infty$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)-\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=(-\infty)-(+\infty)=-\infty$$

۹۹۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $-\frac{1}{x}\to 0^-$ و در نتیجه $[-\frac{1}{x}]=-1$، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x[-\frac{1}{x}]-1}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

۹۹۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که جملهٔ دارای بزرگ‌ترین توان در صورت کسر برابر $(2x^3)^2-(3x^2)^3=-23x^6$ است و جملهٔ دارای بزرگ‌ترین توان در مخرج کسر برابر $x^2(3x^2)^2=9x^6$ است. پس حد مورد نظر برابر است با $\lim_{x\to-\infty}\frac{-23x^6}{9x^6}=-\frac{23}{9}$.

۹۹۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to-\infty$، مقادیر $3x^2-1$، $2x^2-3$ و $5x^2-x$ مثبت‌اند، پس

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|3x^2-1|-|2x^2-3|}{|5x^2-x|-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-1-2x^2+3}{5x^2-x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}$$

۹۹۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که باید $m\neq 0$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+1)^5(mx+2)^7}{(2mx-1)^4(6x-1)^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3^5x^5+\cdots)(m^7x^7+\cdots)}{(2^4m^4x^4-\cdots)(6^8x^8-\cdots)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^5m^7x^{12}+\cdots}{2^4\times 6^8m^4x^{12}+\cdots}=\frac{3^5m^7}{2^4\times 6^8m^4}=\frac{m^3}{2^{12}\times 3^3}$$

بنابراین $\frac{m^3}{2^{12}\times 3^3}=-1$، پس $m=-48$.

۹۹۷- گزینهٔ ۳ اگر $n>3$، آن‌گاه $L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^n}=1$، اگر $n=3$، آن‌گاه $L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^3-1}{x^3-2x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{-x^3}=-5$. اگر $n<3$، آن‌گاه $L=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{-2x^3}=-2$، پس سه مقدار مختلف برای L وجود دارد.

۹۹۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $f(x)=ax+b$، آن‌گاه $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}}{ax+b}=\frac{\frac{1}{a}}{a}=\frac{1}{a^2}$$

بنابراین $\frac{1}{a^2}=16$. چون a منفی است، پس $a=-\frac{1}{4}$. به این ترتیب $f(x)=-\frac{1}{4}x+b$ و $f(3)=3$، پس $-\frac{3}{4}+b=3$. در نتیجه $b=\frac{15}{4}$. بنابراین $f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}$، پس $f(-1)=4$.

۹۹۹- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=\tan x$، آن‌گاه $t\to-\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan x}{1-\tan x}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{1-t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{-t}=-1$$

۱۰۰۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x-1}=\frac{1}{2}$$

از طرف دیگر وقتی $x\to+\infty$،

$$\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{2x-1}=\frac{4x^2}{4x^2-1}=1+\frac{1}{4x^2-1}>1$$

بنابراین $[\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{2x-1}]=1$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{x}{2x+1}+\frac{x}{2x-1}]=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

۱۰۰۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{4x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=0$$

بنابراین خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

۱۰۰۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x}=4$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-x}{-x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

بنابراین خطوط $y=4$ و $y=-2$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها برابر ۶ است.

۱۰۰۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که خطوط $x=4$ و $y=3$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع f هستند. پس نقطهٔ $A(4,3)$ محل تلاقی مجانب‌هاست و فاصلهٔ آن تا مبدأ برابر است با $\sqrt{4^2+3^2}=5$.

۱۰۰۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $y=\frac{a}{a-1}$ مجانب افقی نمودار تابع f است. پس

$$\frac{a}{a-1}=2\Rightarrow 2a-2=a\Rightarrow a=2$$

همچنین خط $x=\frac{-2a}{a-1}$ مجانب قائم نمودار تابع است. پس معادلهٔ مجانب قائم $x=-4$ است.

۱۰۰۵- گزینهٔ ۳ خطوط $x=\frac{a}{a-1}$ و $y=\frac{2}{a-1}$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین نقطهٔ $(\frac{a}{a-1},\frac{2}{a-1})$ روی خط $y=x+1$ قرار دارد. پس

$$\frac{2}{a-1}=\frac{a}{a-1}+1\Rightarrow 2=a+a-1\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

۱۰۰۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$. بنابراین باید نقاط تلاقی خط $y=0$ و نمودار تابع f را مشخص کنیم:

$$f(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$$

پس نمودار تابع f در دو نقطهٔ $(1,0)$ و $(-1,0)$ مجانب افقی خود را قطع می‌کند.

۱۰۰۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$. بنابراین باید خط $y=0$ و نمودار تابع f تلاقی داشته باشند، یعنی باید معادلهٔ $f(x)=0$ جواب داشته باشد:

$$\frac{x^2-2x+m}{x^3+1}=0\Rightarrow x^2-2x+m=0\Rightarrow \Delta=4-4m\geq 0\Rightarrow m\leq 1$$

۱۰۰۸- گزینهٔ ۲ خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ است، پس $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۲$ بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(۱-۲f(۳-x))=۱-۲\lim_{x\to-\infty} f(۳-x)$$

از طرف دیگر اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $(۳-x)\to+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=۱-۲\lim_{t\to+\infty} f(t)=۱-۲\times۲=-۳$$

پس خط $y=-۳$ مجانب افقی نمودار تابع g در $-\infty$ است.

۱۰۰۹- گزینهٔ ۴ خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع f است. از طرف دیگر

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}=۲-\frac{۷}{x+۳}$$

اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{۷}{x+۳}\to۰^+$، پس $f(x)<۲$.

اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $\frac{۷}{x+۳}\to۰^-$، پس $f(x)>۲$.

پس در $+\infty$ نمودار تابع f پایین‌تر از خط مجانب افقی آن قرار دارد و در $-\infty$ نمودار تابع f بالاتر از خط مجانب افقی آن قرار دارد.

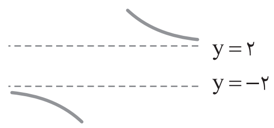
۱۰۱۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که خطوط $y=۲$ و $y=-۲$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند. از طرف دیگر، اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{۲x}{x-۱}=۲+\frac{۲}{x-۱}>۲$$

و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{۲x}{-x-۱}=-۲+\frac{۲}{x+۱}<-۲$$

بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ بالای خط مجانب آن و در $-\infty$ پایین خط مجانب آن است.

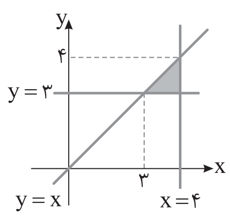


۱۰۱۱- گزینهٔ ۳ تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۲}$ در بی‌نهایت حد ندارد:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲-۱}{x-۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{x}=\lim_{x\to\pm\infty} x=\pm\infty$$

توجه کنید که در ضابطهٔ تابع f درجهٔ صورت کسر بیشتر از درجهٔ مخرج آن است ولی در بقیه گزینه‌ها چنین نیست.

۱۰۱۲- گزینهٔ ۱ خط‌های $x=۴$ و $y=۳$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین مساحت مثلث رنگی در شکل زیر مورد سؤال است که برابر $\frac{۱}{۲}$ است.



۱۰۱۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $x=۴$ باید ریشهٔ مخرج کسر ضابطهٔ تابع f باشد: $۲x-a+۲=۰\xrightarrow{x=۴}۸-a+۲=۰\Rightarrow a=۱۰$

از طرف دیگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(a+۴)x}{۲x}=\frac{a+۴}{۲}=۷$

بنابراین $y=۷$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

۱۰۱۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲+۲x(x-۱)}{x^۲-۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲}{x^۲}=۳$$

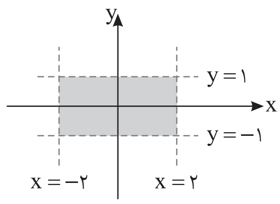
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۲-۲x(x-۱)}{x^۲-۳x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۲}{x^۲}=-۱$$

بنابراین خط‌های $y=۳$ و $y=-۱$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها ۴ واحد است.

۱۰۱۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که خطوط $x=۲$ و $x=-۲$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند و خطوط $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب‌های افقی آن هستند.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲+۱}{x^۲-۴}=۱,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۲+۱}{x^۲-۴}=-۱$$

بنابراین باید مساحت مستطیل شکل زیر را به‌دست آوریم که برابر ۸ است.



۱۰۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $y=۱$ مجانب افقی نمودار تابع f است زیرا

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲-۴}{x^۲+۳x+۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{x^۲}=۱$$

بنابراین باید طول نقطهٔ برخورد خط $y=۱$ با نمودار تابع f را به‌دست آوریم:

$$f(x)=۱\Rightarrow\frac{x^۲-۴}{x^۲+۳x+۲}=۱\Rightarrow x^۲-۴=x^۲+۳x+۲\Rightarrow x=-۲$$

۱۰۱۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که خط $y=۱$ مجانب افقی نمودار تابع f است. بنابراین باید معادلهٔ $f(x)=۱$ جواب نداشته باشد تا نمودار تابع f خط $y=۱$ را قطع نکند:

$$\frac{x^۳+x^۲+mx+۴}{x^۳+۲}=۱\Rightarrow x^۳+x^۲+mx+۴=x^۳+۲\Rightarrow x^۲+mx+۲=۰$$

$$\Delta=m^۲-۸<۰\Rightarrow-\sqrt{۸}<m<\sqrt{۸}$$

۱۰۱۸- گزینهٔ ۴ خط $y=۳$ مجانب افقی نمودار تابع f است:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۲}{x^۲}=۳$$

بنابراین نمودار تابع f باید دو مجانب قائم داشته باشد، یعنی مخرج کسر تابع f باید دو ریشه داشته باشد:

$$x^۲+mx+m+۱=۰$$

$$\Delta=m^۲-۴(m+۱)>۰\Rightarrow m^۲-۴m-۴>۰\Rightarrow(m-۲)^۲>۸$$

پس $m-۲>\sqrt{۸}$ یا $m-۲<-\sqrt{۸}$. بنابراین $m>۲+\sqrt{۸}$ یا $m<۲-\sqrt{۸}$.

۱۰۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که خط‌های $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x}{x-۱}=۱+\frac{۱}{x-۱}>۱$$

و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-x}{x-۱}=-۱+\frac{-۱}{x-۱}>-۱$. پس نمودار تابع f در $+\infty$ و $-\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد.

۱۰۲۰- گزینهٔ ۳ خط $y=۰$ مجانب افقی نمودار تابع f است. همچنین مقادیر تابع همواره مثبت هستند. بنابراین نمودار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ بالای خط مجانب آن قرار دارد.

۱۰۲۱- گزینهٔ ۱ اگر $x\to ۲^+$، آن‌گاه $f(x)\to(-۱)^-$ و در نتیجه $f(f(x))\to ۲^-$. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲^+}[(fof)(x)]=\lim_{x\to ۲^+}[f(f(x))]=\lim_{t\to ۲^-}[t]=۱$$

۱۰۲۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x+۱)=a(x+۱)^۲+b(x+۱)-c\ ,\quad f(۳x)=۹ax^۲+۳bx-c$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰}f(x+۱)=a(۰+۱)^۲+b(۰+۱)-c=a+b-c$$

$$\lim_{x\to ۱}f(۳x)=۹a\times ۱^۲+۳b\times ۱-c=۹a+۳b-c$$

بنابراین از شرط مسئله نتیجه می‌شود $a+b-c=۹a+۳b-c$. یعنی $۸a=-۲b$، پس $\frac{a}{b}=-\frac{۱}{۴}$.

۱۰۲۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to ۳^-$، آن‌گاه $-x\to(-۳)^+$ و در نتیجه $[x]=۲$ و $[-x]=-۳$. پس

$$\lim_{x\to ۳^-}\left(\frac{x^۲}{[x]}-\frac{[-x]}{x}\right)=\lim_{x\to ۳^-}\left(\frac{x^۲}{۲}-\frac{-۳}{x}\right)=\frac{۹}{۲}+\frac{۳}{۳}=\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$$

۱۰۲۴- گزینهٔ ۳ حد چپ و حد راست تابع در $x=۱$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۴-۵x^۲+۴}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x^۲-۱)(x^۲-۴)}{x^۲-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}(x^۲-۴)=-۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{a}{x-۲}=-a$$

چون حد تابع در $x=۱$ وجود دارد، پس حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابرند:

$$-a=-۳\Rightarrow a=۳$$

۱۰۲۵- گزینهٔ ۳ چون حد صورت کسر وقتی $x\to ۳$ صفر است، باید حد مخرج آن هم صفر باشد، زیرا در غیر این صورت حد کسر برابر صفر خواهد شد. پس

$$\lim_{x\to ۳}(x^۲+ax+۳)=۹+۳a+۳=۱۲+۳a=۰\Rightarrow a=-۴$$

بنابراین

$$b=\lim_{x\to ۳}\frac{ax-۳a}{x^۲+ax+۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۴x+۱۲}{x^۲-۴x+۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{-۴(x-۳)}{(x-۳)(x-۱)}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۴}{x-۱}=-۲$$

بنابراین $a+b=-۶$.

۱۰۲۶- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\tan x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{\cos x(\cos x-\sin x)}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}=۱$$

راه‌حل دوم از اتحاد $\cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\tan x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\tan x}{\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\tan^۲ x}{۱-\tan x}=\frac{۲}{۲}=۱$$

راه‌حل سوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\tan x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\tan^۲ x}{-۲\sin ۲x}=\frac{۲}{-۲(-۱)}=۱$$

۱۰۲۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$، بنابراین تابع f فقط در نقطهٔ $x=۱$ ممکن است ناپیوسته باشد. در این نقطه حد چپ، حد راست و مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۳}{۲x^۲+۱}=\frac{۴}{۳}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۴-۱}{x^۳-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x^۳+x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳+x^۲+x+۱}{x^۲+x+۱}=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین تابع f در $x=۱$ پیوسته است و نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۱۰۲۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to-\infty}f(x)=۳$. بنابراین $[\lim_{x\to-\infty}f(x)]=[۳]=۳$. از طرف دیگر اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $f(x)<۳$، بنابراین $[f(x)]=۲$ و در نتیجه $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}۲=۲$. پس

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]-۲[\lim_{x\to-\infty}f(x)]=۲-۲\times ۳=-۴$$

۱۰۲۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(2x)-1=3(2x)^2-2x-1=12x^2-2x-1$$

$$f(x)+3x^2-1=3x^2-x+3x^2-1=6x^2-x-1$$

بنابراین حد مورد نظر برابر است با $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12x^2-2x-1}{6x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12x^2}{6x^2}=2$.

۱۰۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$4x-x^2>0\Rightarrow 0<x<4$$

پس $D_f=(0,4)$ و مخرج $f(x)$ همواره مثبت است. در نتیجه

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty\ ,\qquad \lim_{x\to 4^-} f(x)=+\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در اطراف مجانب‌های قائم آن به‌صورت گزینهٔ (۳) است.

۱۰۳۱- گزینهٔ ۲ اگر $x\to(\frac{5\pi}{4})^+$ ، آن‌گاه $\sin x\to(-\frac{\sqrt{2}}{2})^-$. بنابراین $\sqrt{2}\sin x\to(-1)^-$ ، پس $\lim\limits_{x\to(\frac{5\pi}{4})^+}[\sqrt{2}\sin x]=\lim\limits_{t\to(-1)^-}[t]=-2$.

۱۰۳۲- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{x^2-25}=\lim_{x\to5}(\frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25}-\frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25})$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25}-\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25}$$

اکنون از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to5}(\frac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-25}\times\frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3})-\lim_{x\to5}(\frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25}\times\frac{\sqrt{x-4}+1}{\sqrt{x-4}+1})$$

$$=\lim_{x\to5}(\frac{x+4-9}{(x-5)(x+5)}\times\frac{1}{\sqrt{x+4}+3})-\lim_{x\to5}(\frac{x-4-1}{(x-5)(x+5)}\times\frac{1}{\sqrt{x-4}+1})$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{1}{(\sqrt{x+4}+3)(x+5)}-\lim_{x\to5}\frac{1}{(\sqrt{x-4}+1)(x+5)}=\frac{1}{60}-\frac{1}{20}=-\frac{1}{30}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-2}{x^2-25}=\lim_{x\to5}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2x}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}{10}=-\frac{1}{30}$$

۱۰۳۳- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x}=t$. در این صورت وقتی $x\to8$ ، $t=2$. بنابراین

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8}=\lim_{t\to2}\frac{\sqrt{t^3+1}-t-1}{t^3-8}$$

$$=\lim_{t\to2}(\frac{\sqrt{t^3+1}-(t+1)}{t^3-8}\times\frac{\sqrt{t^3+1}+(t+1)}{\sqrt{t^3+1}+(t+1)})$$

$$=\lim_{t\to2}(\frac{t^3+1-t^2-2t-1}{t^3-8}\times\frac{1}{\sqrt{t^3+1}+t+1})$$

$$=\lim_{t\to2}(\frac{t(t-2)(t+1)}{(t-2)(t^2+2t+4)}\times\frac{1}{\sqrt{t^3+1}+t+1})=\frac{2\times(2+1)}{4+4+4}\times\frac{1}{3+2+1}=\frac{1}{12}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8}=\lim_{x\to8}(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}-\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8})$$

$$=\lim_{x\to8}(\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}\times\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}+3})-\lim_{x\to8}(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4})$$

$$=\lim_{x\to8}(\frac{x+1-9}{x-8}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+3})-\lim_{x\to8}(\frac{x-8}{x-8}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4})$$

$$=\lim_{x\to8}\frac{1}{\sqrt{x+1}+3}-\lim_{x\to8}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$=\frac{1}{3+3}-\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

راه‌حل سوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x}-1}{x-8}=\lim_{x\to8}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{1}=\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12}$$

۱۰۳۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^4x-\sin^4x}{\cos x+\sin x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)}{\cos x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x+\sin x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^4x-\sin^4x}{\cos x+\sin x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{-4\sin x\cos^3x-4\cos x\sin^3x}{-\sin x+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{-4\sin x\cos x(\cos^2x+\sin^2x)}{\cos x-\sin x}=\frac{-4\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{\sqrt{2}}{2})}=\sqrt{2}$$

۱۰۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(\frac{\pi}{2})=ab-1\ ,\qquad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}(a\sin x)=a$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\cos 2x+b)=-1+b$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد باید $\begin{cases}ab-1=a\\ a=b-1\end{cases}$. بنابراین

$$ab-1=a\xrightarrow{b=a+1}a(a+1)-1=a$$

$$a^2+a-1=a\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1$$

اگر $a=1$ ، آن‌گاه $b=2$ و $a+b=3$.

اگر $a=-1$ ، آن‌گاه $b=0$ و $a+b=-1$.

۱۰۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(f+2g)-(f-g)=3g$، پس تابع g در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است. به این ترتیب چون $(f-g)+g=f$، پس تابع f هم در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است. چون برد تابع‌های f و g مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است، پس مخرج کسرهای $\frac{1}{f}$، $\frac{1}{g}$ و $\frac{1}{f+g}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و دامنهٔ این توابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است و چون f و g در $x=a$ پیوسته‌اند، این توابع هم در $x=a$ پیوسته‌اند. ولی دامنهٔ تابع $\frac{1}{f-g}$ ممکن است $\mathbb{R}$ نباشد و این تابع ممکن است در $x=a$ تعریف نشود. (کافی است $f(a)=g(a)$)، پس تابع $\frac{1}{f-g}$ ممکن است در $x=a$ پیوسته نباشد.

۱۰۳۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$. بنابراین

$$\lim_{x\to 2}(fof)(x)=\lim_{x\to 2} f(f(x))=\lim_{t\to+\infty} f(t)=1$$

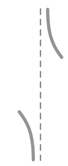
همچنین مقادیر $f(x)$ در مثبت بی‌نهایت بزرگ‌تر از یک هستند. پس $(fof)(x)\to 1^+$، در نتیجه $\lim_{x\to 2}\frac{1}{1-(fof)(x)}=-\infty$.

۱۰۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

بنابراین $\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$ و $\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$.

پس نمودار تابع f در اطراف خط $x=1$ به‌صورت مقابل است.



۱۰۳۹- گزینهٔ ۲ اگر m عددی مثبت باشد، وقتی که $x\to+\infty$، مقادیر $3-mx$ منفی‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(mx-3)+x-1}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+1)x-4}{3x+1}=\frac{m+1}{3}$$

بنابراین $\frac{m+1}{3}=\frac{2}{3}$، پس $m=1$. اگر m عددی منفی باشد، وقتی که $x\to+\infty$، مقادیر $3-mx$ مثبت‌اند و حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3-mx)+x-1}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-m)x+2}{3x+1}=\frac{1-m}{3}$$

بنابراین $\frac{1-m}{3}=\frac{2}{3}$، پس $m=-1$. اگر $m=0$، حد مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$ می‌شود و قابل قبول نیست. بنابراین مقادیر m عددهای ۱ و ۱- هستند. پس m دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۱۰۴۰- گزینهٔ ۳ صورت کسر ضابطهٔ تابع f ریشه ندارد. پس اگر مخرج این کسر ریشه نداشته باشد، نمودار تابع مجانب قائم نخواهد داشت، در غیر این صورت مجانب قائم دارد. پس

$$x^2-6x+2m=0,\quad \Delta=36-8m<0\Rightarrow m>\frac{9}{2}$$

بنابراین m مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را نمی‌تواند داشته باشد.

۱۰۴۱- گزینهٔ ۱ وقتی که x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود. بنابراین

$$\lim_{x\to2^-}(fof)(x)=\lim_{x\to2^-}f(f(x))=\lim_{t\to2^+}f(t)=-1$$

۱۰۴۲- گزینهٔ ۱ با فرض $\lim_{x\to2}f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to2}g(x)=L_2$ معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to2}(f(x)+g(x))=3\Rightarrow\lim_{x\to2}f(x)+\lim_{x\to2}g(x)=3\Rightarrow L_1+L_2=3$$

$$\lim_{x\to2}(f^2(x)-g^2(x))=21\Rightarrow\lim_{x\to2}f^2(x)-\lim_{x\to2}g^2(x)=21$$

$$L_1^2-L_2^2=21\Rightarrow(L_1-L_2)(L_1+L_2)=21$$

$$3(L_1-L_2)=21\Rightarrow L_1-L_2=7$$

از حل دستگاه معادله‌های $\begin{cases}L_1-L_2=7\\L_1+L_2=3\end{cases}$ به دست می‌آید $L_1=5$ و $L_2=-2$. بنابراین $\lim_{x\to1}\frac{f(2x^2)}{g(x+1)}=\frac{\lim_{x\to1}f(2x^2)}{\lim_{x\to1}g(x+1)}=\frac{\lim_{t\to2}f(t)}{\lim_{k\to2}g(k)}=\frac{5}{-2}$.

۱۰۴۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=1$ تساوی‌های $[2x]=1$، $[-x]=-1$ و $|1-x|=1-x$ برقرار هستند. بنابراین

$$\lim_{x\to1^-}\frac{[2x](x+2)}{x[-x]+|1-x|}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+2}{-x+1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+2}{-2x+1}=-3$$

۱۰۴۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید.

بنابراین

$$\lim_{x\to2}(\sqrt{x^2+x+a}-2)=0\Rightarrow\sqrt{2^2+2+a}-2=0\Rightarrow a=-2$$

اگر $a=-2$، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2+x-2}-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-2-4}{(x-2)}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+x-2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{(x-2)}\times\frac{1}{16}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{16}\lim_{x\to2}(x+3)=\frac{5}{16}$$

در نتیجه $b=\frac{5}{16}$.

راه‌حل دوم چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد، تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ در بیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to2}(\sqrt{x^2+x+a}-2)=0\Rightarrow\sqrt{2^2+2+a}-2=0\Rightarrow a=-2$$

اکنون برای به‌دست آوردن مقدار حد می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}}{2x}=\frac{\frac{5}{4}}{4}=\frac{5}{16}$$

۱۰۴۵- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $x-\frac{\pi}{2}=t$. در نتیجه $x=\frac{\pi}{2}+t$ و $t\to 0$. پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\pi-2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{5\pi}{2}+5t)}{\pi-(\pi+2t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 5t}{-2t}=\frac{5}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (به درس آخر فصل چهارم مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\pi-2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\sin 5x}{-2}=\frac{(-5)(1)}{-2}=\frac{5}{2}$$

۱۰۴۶- گزینهٔ ۴ ابتدا حد تابع در $x=0$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\sqrt[3]{x+27}-3)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{x+27}=t$. پس $x+27=t^3$. در نتیجه $x=t^3-27$
همچنین اگر $x\to 0$، آنگاه $t\to 3$. بنابراین حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{t^3-27}=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{(t-3)(t^2+3t+9)}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{t^2+3t+9}=\frac{1}{27}$$

در نتیجه $a=27$.

۱۰۴۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$2x^2-50=2(x^2-25)=2(x-5)(x+5)$$
$$x^3-10x^2+25x=x(x^2-10x+25)=x(x-5)^2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{2x^2-50}{x^3-10x^2+25x}=\lim_{x\to 5^-}\frac{2(x-5)(x+5)}{x(x-5)^2}=\lim_{x\to 5^-}\frac{2(x+5)}{x(x-5)}=-\infty$$

۱۰۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to+\infty$، آنگاه $-\frac{1}{x}\to 0^-$ و در نتیجه $[-\frac{1}{x}]=-1$، بنابراین $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-1}{4x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{4x^2}=-\frac{1}{4}$.

۱۰۴۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که اگر $f(x)=ax+b$، آنگاه $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-1}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}}=\frac{a}{\frac{1}{a}}=a^2$$

بنابراین $a^2=9$، و چون شیب خط مثبت است، بنابراین a مثبت است، پس $a=3$. به این ترتیب $f(x)=3x+b$ و $f(3)=10\Rightarrow 9+b=10\Rightarrow b=1$
بنابراین $f(x)=3x+1$، پس $f(1)=4$.

۱۰۵۰- گزینهٔ ۴ خط $y=4$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ است، پس

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=4\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+ax+3}{3x-x+1}=4$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+4)x}{2x}=4\Rightarrow\frac{a+4}{2}=4\Rightarrow a=4$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-4x+3}{3x+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{4x}=0$$

پس $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f در $-\infty$ است.

۱۰۵۱- گزینهٔ ۱ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=\pi$ را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x\to\pi^-$، آنگاه $\frac{x}{2}\to(\frac{\pi}{2})^-$، بنابراین $\cos\frac{x}{2}\to 0^+$، پس $\lim_{x\to\pi^-}[\cos\frac{x}{2}]=0$ و $2x\to(2\pi)^-$، بنابراین $\sin 2x\to 0^-$، پس $\lim_{x\to\pi^-}[\sin 2x]=-1$. در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}(\sin\frac{x}{2}\times 0-\cos x\times(-1))=\cos\pi=-1$$

از طرف دیگر، اگر $x\to\pi^+$، آنگاه $\frac{x}{2}\to(\frac{\pi}{2})^+$. بنابراین $\cos\frac{x}{2}\to 0^-$، پس $\lim_{x\to\pi^+}[\cos\frac{x}{2}]=-1$ و $2x\to(2\pi)^+$. بنابراین $\sin 2x\to 0^+$، پس

$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin 2x]=0$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{x\to\pi^+}(\sin\frac{x}{2}\times(-1)-\cos x\times 0)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

پس $\lim_{x\to\pi}f(x)=-1$.

خارج از کشور ریاضی – ۹۵

۱۰۵۲- گزینهٔ ۱ چون حد مخرج کسر صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید. بنابراین

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{ax+b}-2)=0\Rightarrow\sqrt{a+b}=2\Rightarrow a+b=4\Rightarrow b=4-a$$

اکنون با استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2})$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{ax+b-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{ax-a}{(x-1)(x+1)}\times\frac{1}{2+2}=\lim_{x\to 1}\frac{a}{x+1}\times\frac{1}{4}=\frac{a}{8}$$

بنابراین $\frac{a}{8}=\frac{3}{2}$ و در نتیجه $a=12$، پس $b=-8$.

خارج از کشور ریاضی – ۹۵

۱۰۵۳- گزینهٔ ۳ چون $\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$. بنابراین باید مخرج کسر به صفر میل کند. همچنین چون حد چپ و راست برابر $-\infty$ است، پس $x=3$ باید ریشهٔ مضاعف مخرج کسر باشد. بنابراین

$$2x^2+ax+b=2(x-3)^2\Rightarrow 2x^2+ax+b=2x^2-12x+18$$
$$a=-12,\ b=18\Rightarrow a+b=6$$

ریاضی – ۹۳

۱۰۵۴- گزینهٔ ۱ باید تعداد نقاطی را پیدا کنیم که به‌ازای آن‌ها $(\frac{1}{3}x-1)\in\mathbb{Z}$:

$$0<x<9\Rightarrow 0<\frac{1}{3}x<3\Rightarrow -1<\frac{1}{3}x-1<2$$
$$\xrightarrow{(\frac{1}{3}x-1)\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{3}x-1)\in\{0,1\}$$

ولی در نقطهٔ $x=3$ که به‌ازای آن $\frac{1}{3}x-1=0$، عامل صفر کنندهٔ $x-3$ موجب پیوستگی می‌شود. پس تابع f فقط در یک نقطه از بازهٔ $(0,9)$ ناپیوسته است.

ریاضی – ۸۵

۱۰۵۵- گزینهٔ ۲ برای آنکه تابع روی دامنه‌اش پیوسته باشد، باید در $x=a$ پیوسته باشد. پس

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)\Rightarrow \frac{1}{a}=1-\frac{a}{4}\Rightarrow 4=4a-a^2$$

$$a^2-4a+4=0\Rightarrow (a-2)^2=0\Rightarrow a=2$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۰۵۶- گزینهٔ ۳ حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ باید برابر مقدار تابع در این نقطه باشند، بنابراین

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=5\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}(x^2+bx-1)=5\Rightarrow 4+2b-1=5\Rightarrow b=1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=5\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}(ax+b)=5\Rightarrow 2a+b=5$$

چون $b=1$، در نتیجه $2a+1=5$، یعنی $a=2$.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۰۵۷- گزینهٔ ۲ برای برقراری شرط پیوستگی تابع روی $\mathbb{R}$، پیوستگی آن در نقاط $x=\pm1$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1\times[1^-]=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a+b=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=-a+b \\ \lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=(-1)\times[(-1)^+]=1 \end{array}\right\}\Rightarrow -a+b=1$$

بنابراین $a=-\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$. در نتیجه به‌ازای $|x|\geq 1$، $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$، پس $f(3)=-1$.

ریاضی - ۹۰

۱۰۵۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x\notin\mathbb{Z}$، آن‌گاه $[x]+[-x]=-1$. بنابراین تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ است و به‌ازای $a=-1$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی پیوسته است.

ریاضی - ۹۶

۱۰۵۹- گزینهٔ ۴ باید حدهای چپ و راست تابع با مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ برابر باشند:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\cos 3x}{\cos x}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\cos 3(t+\frac{\pi}{2})}{\cos(t+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\lim_{t\to 0^-}\frac{\sin 3t}{-\sin t}=-3$$

$$f(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}(\sin 5x-a)=1-a$$

بنابراین $-3=1-a$، در نتیجه $a=4$.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۰۶۰- گزینهٔ ۱ چون تابع در بازهٔ $[0,2\pi]$ پیوسته است، پس در $x=\frac{\pi}{2}$ هم پیوسته است. پس ابتدا حد تابع را در $x=\frac{\pi}{2}$ پیدا می‌کنیم

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\pi-2x)}{-(\pi-2x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{-t}=-1$$

بنابراین برای اینکه تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید

$$f(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\Rightarrow a=-1$$

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۰۶۱- گزینهٔ ۲ چون حد مورد نظر برابر عددی غیر صفر و حد صورت برابر صفر است، باید حد مخرج هم صفر باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to 2}(ax+b)=0\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow b=-2a$$

اگر از اتحاد مزدوج استفاده کنیم، حد مورد نظر می‌شود

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax-2a}\times\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{a(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{a(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}=\frac{1}{a(2+2)}=\frac{1}{4a}$$

بنابراین $\frac{1}{4a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

چون $b=-2a$، پس $b=-1$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۰۶۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2||x+1|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{|x-2||x+1|}{2x-\sqrt{x^2+12}}\times\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{2x+\sqrt{x^2+12}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2||x+1|(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x^2-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+1)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+1)(2x+\sqrt{x^2+12})}{3(x+2)}=\frac{-(3)\times 8}{3\times 4}=-2$$

ریاضی - ۹۰

۱۰۶۳- گزینهٔ ۴ از فرض سؤال نتیجه می‌شود $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{|x^2|}{ax^2}=\frac{1}{a}=-1$، پس $a=-1$. برای محاسبهٔ حد راست عبارت در $x=-2$ دقت کنید که به ازای $-2<x<2$، عبارت x^2-4 منفی است، بنابراین باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{4-x^2}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(-x+1)}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{2-x}{-x+1}=\frac{4}{3}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۰۶۴- گزینهٔ ۱ وقتی $x\to(\frac{1}{6})^+$، $\cos\pi x$ با مقدارهای کوچک‌تر از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نزدیک می‌شود، پس

$$\cos\pi x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-\Rightarrow 4\cos^2\pi x\to 3^-\Rightarrow[4\cos^2\pi x]=2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{[4\cos^2\pi x]-12x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\frac{1}{2}$$

چون حد صورت برابر صفر است، حد مخرج کسر نیز باید صفر شود تا حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ دربیاید، زیرا در غیر این‌صورت حاصل حد برابر صفر می‌شود.

در نتیجه

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}(ax+b)=0\Rightarrow\frac{a}{6}+b=0\Rightarrow a=-6b$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{ax+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2-12x}{-6bx+b}=\lim_{x\to(\frac{1}{6})^+}\frac{2(1-6x)}{b(1-6x)}=\frac{2}{b}$$

بنابراین $\frac{1}{2}=\frac{2}{b}$، یعنی $b=4$. چون $a=-6b$، پس $a=-24$.

در نتیجه $a+b=-20$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۰۶۵- گزینهٔ ۱ ابتدا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\tan(\pi x)}{2x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\frac{1}{4}}(\frac{1-\tan(\pi x)}{2x-\sqrt{x}}\times\frac{2x+\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}})$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\tan(\pi x)}{4x^2-x}\times\lim_{x\to\frac{1}{4}}(2x+\sqrt{x})=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}}{x(4x-1)}\times 1$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\cos(\pi x)-\sin(\pi x)}{4x-1}\times\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1}{x\cos(\pi x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})}{4(x-\frac{1}{4})}\times\frac{1}{\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})}{x-\frac{1}{4}}$$

$$=2\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\pi x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{1}{4}}=2\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\pi\sin(\frac{\pi}{4}-\pi x)}{-(\frac{\pi}{4}-\pi x)}=2(-\pi)=-2\pi$$

ریاضی - ۹۱

۱۰۶۶- گزینهٔ ۲ از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\cos^2x-\sqrt{\cos x}}{x^2}\times\frac{\cos^2x+\sqrt{\cos x}}{\cos^2x+\sqrt{\cos x}})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^4x-\cos x}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2x+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2x)}{x^2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\times\lim_{x\to 0}(-\cos x(1+\cos x+\cos^2x))\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times(-3)\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$$

ریاضی - ۹۳

۱۰۶۷- گزینهٔ ۴ ابتدا از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}{x^2}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 5x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-(1-\frac{1}{2}(5x)^2)}{x^2}\times\frac{1}{2}=12\times\frac{1}{2}=6$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۰۶۸- گزینهٔ ۴ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=3$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(ax-3a-\frac{3}{8})=3a-3a-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}$$

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}(\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}\times\frac{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}})$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-x+\sqrt{x+1}}{x-3}\times\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}(\frac{1-x+\sqrt{x+1}}{x-3}\times\frac{1-x-\sqrt{x+1}}{1-x-\sqrt{x+1}})\times\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{(1-x)^2-(x+1)}{x-3}\times\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{1-x-\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x(x-3)}{x-3}\times\frac{1}{-4}\times\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{-4}\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$$

از طرف دیگر $f(3)=-\frac{3}{8}$. بنابراین تابع به‌ازای هر مقدار a در نقطهٔ $x=3$ پیوسته است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۱۰۶۹- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد، باید حد تابع در این نقطه برابر a باشد، پس

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}})$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{-\sqrt[3]{2}(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(1-x)^2}}=-\infty$$

با توجه به اینکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ حد نامتناهی دارد، پس هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۰۷۰- گزینهٔ ۳ ابتدا حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=2-a=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x}\times\frac{1-\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{1-\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{a(1+1-x)}{x(x-2)\times(1-\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}=\frac{-a}{6}$$

برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد، باید حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x=2$ برابر باشند، بنابراین

$$\frac{-a}{6}=2-a\Rightarrow 12-6a=-a\Rightarrow 12=5a\Rightarrow a=2/4$$

ریاضی - ۹۴

۱۰۷۱- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4\cos x}\right)$$

$$=2\times 1\times 1\times\frac{1}{4\times 1}=\frac{1}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۰۷۲- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحادهای مزدوج و

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

بنابراین

$$2^a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=2^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

ریاضی - ۹۲

۱۰۷۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0^-}([2x]+[-2x])=-1+0=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}([2x]+[-2x])=0-1=-1$$

بنابراین $\lim_{x\to 0}([2x]+[-2x])=-1$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{1-1-x^2}\times\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{-x^2}\times 2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\times 2\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)$$

$$=-\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times 2(1+1+1)=-\frac{1}{2}\times 1\times 6=-3$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\left(([2x]+[-2x])\left(\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\right)\right)=3$$

ریاضی - ۹۴

۱۰۷۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax-a+2)=a-a+2=2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=2$$

بنابراین به ازای هر مقدار a، $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=2$

خارج از کشور تجربی - ۹۶

۱۰۷۵- گزینهٔ ۴ با توجه به رابطهٔ

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

تابع g همان تابع ثابت $g(x)=-1$ است که نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

ریاضی - ۹۲

۱۰۷۶- گزینهٔ ۲ در نقطهٔ $x=-1$، باید حد چپ و حد راست تابع با هم برابر باشند:

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\frac{1}{2\sqrt{3-x}}}{1}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-a+1$$

بنابراین

$$\frac{1}{4}=-a+1\Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۰۷۷- گزینهٔ ۴ در نقطـهٔ $x=0$، باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشـد.

توجه کنید که

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-1+x}=\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x})=2$$

بنابراین اگر $f(0)=a=2$، تابع در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است. تجربی - ۹۶

۱۰۷۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$-1\le x<0\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow f(x)=-\sin(\frac{\pi x}{2})$$

$$0\le x<1\Rightarrow[x]=0\Rightarrow f(x)=\sin(\frac{\pi x}{2})$$

$$1\le x<2\Rightarrow[x]=1\Rightarrow f(x)=-\sin(\frac{\pi x}{2})$$

پیوسـتگی تابع در نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ را بررسـی می‌کنیم تا گزینهٔ درست مشخص شود:

$$f(0)=0,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-\sin(\frac{\pi x}{2}))=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin(\frac{\pi x}{2})=0$$

$$f(1)=-1,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sin(\frac{\pi x}{2})=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-\sin(\frac{\pi x}{2}))=-1$$

پس تابع در $x=0$ پیوسته و در $x=1$ ناپیوسته است. به همین ترتیب این تابع در تمام نقطه‌های زوج پیوسته و در تمام نقطه‌های فرد ناپیوسته است.

ریاضی - ۹۳

۱۰۷۹- گزینهٔ ۳ نشـان می‌دهیم تابع gof در $x=0$ پیوسـته است. حد چپ و حد راست تابع gof در نقطهٔ $x=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to 0^-: f(x)=-\frac{1}{2}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} g(f(x))=\lim_{t\to(\frac{-1}{2})} g(t)=-2\times\frac{-1}{2}=1$$

$$x\to 0^+: f(x)=2x\to 0^+\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(f(x))=\lim_{t\to 0^+} g(t)=1$$

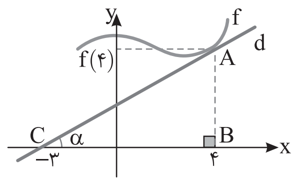
بـا توجـه به اینکـه $g(f(0))=1$، تابع gof در نقطهٔ $x=0$ پیوسـته اسـت. ناپیوستگی توابع دیگر نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. (بررسی سایر گزینه‌ها بر عهدهٔ خواننده) خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۰۸۰- گزینهٔ ۲ بـا توجـه بـه آنکـه $f(x)=[x^2-3]=[x^2]-3$، باید $y=[x^2]$ روی ایـن بازه پیوسـته باشـد. تابع مورد نظـر در نقاط $x=\pm\sqrt{n}$ (که $n\in\mathbb{N}$) ناپیوسته است. پس در نقاط $x=2$ و $x=\sqrt{5}$ ناپیوسته است و در نتیجه بازهٔ مورد نظر $[2,\sqrt{5})$ است، بنابراین $k=\sqrt{5}-2$. ریاضی - ۸۸

۱۰۸۱- گزینهٔ ۱ در نقاط $x=b$ و $x=c$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f صفر است. در نقطهٔ $x=d$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f مثبت و در نقطهٔ $x=a$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f منفی است. بنابراین مشتق تابع f در $x=a$ از بقیه کوچک‌تر است.

۱۰۸۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با $f'(۴)$. از طرف دیگر، شیب خط d برابر با $\tan\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{f(۴)}{۷}$ است. به این ترتیب $f'(۴)=\frac{f(۴)}{۷}$، پس

$$f(۴)+f'(۴)=۲\Rightarrow f(۴)+\frac{f(۴)}{۷}=۲\Rightarrow f(۴)=\frac{۷}{۴}$$



۱۰۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\lim_{x\to۲}\frac{۲f(x)-۲f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to۲}\frac{۲(f(x)-f(۲))}{x-۲}=۲\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۲f'(۲)=۶$$

۱۰۸۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر به جای ۲ در صورت کسر داده شده، $\sqrt{f(۲)}$ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x(x-۲)}$$
$$=\lim_{x\to۲}\left(\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(۲)}}{x(x-۲)}\times\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)}}\right)$$
$$=\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\lim_{x\to۲}\frac{۱}{(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(۲)})x}$$
$$=f'(۲)\times\frac{۱}{۲(\sqrt{f(۲)}+\sqrt{f(۲)})}=f'(۲)\times\frac{۱}{۴\sqrt{f(۲)}}=\frac{۲\times۲}{۲-۱}\times\frac{۱}{۴\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt{f(x)}-۲}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to۲}\frac{\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}}{۲x-۲}=\frac{f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}(۴-۲)}=\frac{\frac{۲\times۲}{۲-۱}}{۲\times۲\times۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۰۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{۲h^۲+۳h}=\lim_{h\to۰}\left(\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}\times\frac{۱}{۳+۲h}\right)$$
$$=f'(۳)\times\frac{۱}{۳+۰}=\frac{۶}{۳}=۲$$

۱۰۸۶- گزینهٔ ۲ اگر $-h^۲=k$ و $h\to۰$، آن‌گاه $k\to۰^-$ و در نتیجه

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۱-h^۲)-f(۱)}{h^۲}=\lim_{k\to۰^-}\frac{f(۱+k)-f(۱)}{-k}$$
$$=-\lim_{k\to۰^-}\frac{f(۱+k)-f(۱)}{k}=-f'_-(۱)=-۲$$

۱۰۸۷- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$f'(۱)=\lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x+۱)^۲(x^۲+۱)^۲}{x-۱}$$
$$=\lim_{x\to۱}((x+۱)^۲(x^۲+۱)^۲)=(۱+۱)^۲(۱+۱)^۲=۱۶$$

۱۰۸۸- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{\frac{x}{|x|+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{۱}{|x|+۱}=۱$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

۱۰۸۹- گزینهٔ ۴ با استفاده از تعریف، مشتق چپ و مشتق راست تابع در $x=۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to۲^+}\frac{\sqrt[۳]{(۲-x)^۲}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}}=+\infty$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to۲^-}\frac{\sqrt[۳]{(۲-x)^۲}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to۲^-}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۲}}=-\infty$$

۱۰۹۰- گزینهٔ ۱ مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to۰^+}\frac{|x|\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^+}\frac{x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to۰^+}\sqrt[۳]{x}=۰$$
$$f'_-(۰)=\lim_{x\to۰^-}\frac{|x|\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to۰^-}\frac{-x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to۰^-}(-\sqrt[۳]{x})=۰$$

بنابراین $f'(۰)=۰$ و نمودار تابع در این نقطه، خط مماس موازی محور طول‌ها دارد.

۱۰۹۱- گزینهٔ ۲ شیب خطی که از نقطه‌های $A(-۱,۳)$ و $B(۴,۴)$ می‌گذرد، برابر است با $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱}{۵}$. از طرف دیگر، مشتق تابع f در نقطهٔ -۱ با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ A برابر است. بنابراین $f'(-۱)=\frac{۱}{۵}$.

۱۰۹۲- گزینهٔ ۲ اگر $x\to۳$، آن‌گاه شیب خطی که نقطه‌های A و B را به هم وصل می‌کند، به شیب خط مماس بر نمودار تابع f در $x=۳$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین

$$۲=\lim_{x\to۳}\frac{k}{x}\Rightarrow ۲=\frac{k}{۳}\Rightarrow k=۶$$

۱۰۹۳- گزینهٔ ۳ اگر به جای ۴ مقدار $f(۱)$ را قرار دهیم، آن‌گاه

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۲}{f(x)-۴}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲(x-۱)}{f(x)-f(۱)}=\frac{۲}{\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}}=\frac{۲}{f'(۱)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۱۰۹۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۳f(x)-۳f(۳)}{x^۲-۹}=۳\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{(x-۳)(x+۳)}$$

$$=۳(\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳})(\lim_{x\to ۳}\frac{۱}{x+۳})=۳\times f'(۳)\times\frac{۱}{۳+۳}=۳\times ۴\times\frac{۱}{۶}=۲$$

۱۰۹۵- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $x=۲-h$، آن‌گاه $h\to ۰$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{f(x)-f(۲)}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲-h-۲}{f(۲-h)-f(۲)}=-\lim_{h\to ۰}\frac{h}{f(۲-h)-f(۲)}$$

$$=-\frac{۱}{\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-f(۲)}{h}}=-\frac{۱}{۴}$$

۱۰۹۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** به جای ۸ قرار می‌دهیم $f^۳(۱)$ و از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=۱$ استفاده کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-f^۳(۱)}{h}$$

توجه کنید که به کمک اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-f^۳(۱)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{(f(۱+h)-f(۱))(f^۲(۱+h)+f(۱)f(۱+h)+f^۲(۱))}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}\times\lim_{h\to ۰}(f^۲(۱+h)+۲f(۱+h)+۴)$$

$$=f'(۱)\times(f^۲(۱)+۲f(۱)+۴)=(\sqrt[۳]{۱}+۱)(۴+۴+۴)=۲۴$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم. (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۳f'(۱+h)f^۲(۱+h)}{۱}=۳f'(۱)f^۲(۱)$$

$$=۳\times(\sqrt[۳]{۱}+۱)\times ۲^۲=۲۴$$

۱۰۹۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(۲)=۰$. اکنون با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=۲$ مقدار $f'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲-۳x+۲)\sqrt{\frac{x+۲}{x+۷}}-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}((x-۱)\sqrt{\frac{x+۲}{x+۷}})$$

$$=(۲-۱)\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\frac{۲}{۳}$$

۱۰۹۸- گزینهٔ ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x+|x|\sqrt[۳]{x+۸}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x+x\sqrt[۳]{x+۸}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}(۱+\sqrt[۳]{x+۸})=۱+۲=۳$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x+|x|\sqrt[۳]{x+۸}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x-x\sqrt[۳]{x+۸}}{x}$$

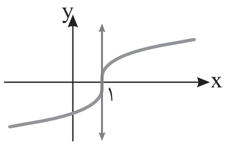
$$=\lim_{x\to ۰^-}(۱-\sqrt[۳]{x+۸})=۱-۲=-۱$$

بنابراین $f'_+(۰)-f'_-(۰)=۴$.

۱۰۹۹- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ در نقطهٔ $x=۱$ مشتق ندارد، زیرا

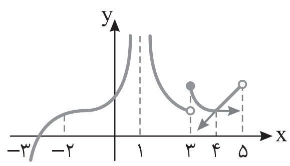
$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}=+\infty$$

ولی خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه وجود دارد و موازی محور عرض‌ها است.



۱۱۰۰- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطهٔ ۳ پیوسته نیست، پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. تابع در نقطهٔ ۴ نیز مشتق‌پذیر نیست، زیرا مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابر نیستند. در بقیهٔ نقاط، دامنهٔ تابع مشتق وجود دارد. بنابراین مجموع مورد نظر برابر ۷ است.

توجه کنید که نقطهٔ $x=۱$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد.



۱۱۰۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f روی بازهٔ $[۰,۲]$ پاره‌خطی است که نقطه‌های $(۰,۰)$ و $(۲,۱)$ را به هم وصل می‌کند، پس شیب آن برابر $\frac{۱-۰}{۲-۰}=\frac{۱}{۲}$ است، در نتیجه $f'(۱)=\frac{۱}{۲}$. نمودار تابع f روی بازهٔ $[۲,۴]$ پاره‌خطی است که شیب آن صفر است، پس $f'(۳)=۰$. نمودار تابع f روی بازهٔ $[۴,+\infty)$ نیم‌خطی است که از نقطه‌های $(۴,۱)$ و $(۶,۵)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر $\frac{۵-۱}{۶-۴}=۲$ است، در نتیجه $f'(۵)=۲$. بنابراین $\frac{f'(۱)+f'(۳)}{f'(۵)}=\frac{\frac{۱}{۲}+۰}{۲}=\frac{۱}{۴}$.

۱۱۰۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}=۳$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۹}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{(f(x)-۳)(f(x)+۳)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-۲}\times\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)+۳}{x+۲}=f'(۲)\times\frac{f(۲)+۳}{۲+۲}$$

$$=۳\times\frac{۳+۳}{۴}=\frac{۹}{۲}$$

۱۱۰۳- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=6$$

بنابراین

$$\lim_{x\to1}\frac{f^3(x)-27}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(f(x)-3)(f^2(x)+3f(x)+9)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}\times\lim_{x\to1}((f^2(x)+3f(x)+9)(\sqrt{x}+1))$$

$$=f'(1)\times(f^2(1)+3f(1)+9)(1+1)=3\sqrt{1+3}(3^2+3\times3+9)\times2=324$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{x\to1}\frac{f^3(x)-27}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{3f'(x)f^2(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{3\times3\sqrt{1+3}\times3^2}{\frac{1}{2\times1}}=324$$

۱۱۰۴- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول اگر فرض کنیم $x=2-h$، آن‌گاه $h\to0$ و در نتیجه

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{f(x)-f(2)}=\lim_{h\to0}\frac{(2-h)^3-8}{f(2-h)-f(2)}=\lim_{h\to0}\frac{h(-12+6h-h^2)}{f(2-h)-f(2)}$$

$$=\frac{1}{\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}}\times\lim_{h\to0}(-12+6h-h^2)=\frac{1}{4}\times(-12)=-3$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم: (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-f'(2-h)}{1}=-f'(2)=4\Rightarrow f'(2)=-4$$

بنابراین

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{f(x)-f(2)}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2}{f'(x)}=\frac{12}{f'(2)}=\frac{12}{-4}=-3$$

۱۱۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3-h)}{h}=(2-(-1))f'(3)$$

بنابراین $3f'(3)=12$، در نتیجه

$$f'(3)=4$$

۱۱۰۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حد خواسته شده برابر مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x=1$ است، ولی چون تابع در این نقطه پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد و این حد وجود ندارد. به‌صورت مستقیم هم می‌توان حاصل این حد را به‌دست آورد:

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-2(1+h)-1}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-2h-3}{h}=+\infty$$

۱۱۰۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $g(0)=0$ و $\lim_{x\to0}f(x)=-2$. پس

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{x-2f(x)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-2f(x)}=\frac{1}{4}$$

۱۱۰۸- گزینهٔ ۳ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطهٔ $x=2$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{|x-2|[x]}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{|x-2|[x]}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

بنابراین $f'_+(2)-f'_-(2)=3$.

۱۱۰۹- گزینهٔ ۲ برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ تساوی‌های داده‌شده برقرار هستند:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$$

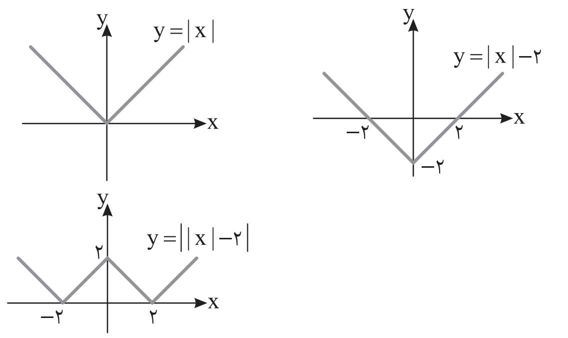
برای توابع دیگر توجه کنید که

گزینهٔ (۱): $f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'_+(0)=f'_-(0)=+\infty$

گزینهٔ (۳): $f(x)=-\sqrt[3]{|x|}\Rightarrow f'_+(0)=-\infty,\ f'_-(0)=+\infty$

گزینهٔ (۴): $f(x)=-\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'_+(0)=f'_-(0)=-\infty$

۱۱۱۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است.



بنابراین تابع در نقاط $x=0$، $x=2$ و $x=-2$ مشتق‌ناپذیر است.

۱۱۱۱- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=(1-(-1))f'(2)=2\times(-2)=-4$$

۱۱۱۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+3h)-f(1-4h)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+3h)-f(1)+f(1)-f(1-4h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0^-}\frac{f(1-4h)-f(1)}{h}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}=\lim_{H\to0^-}\frac{f(1+H)-f(1)}{\frac{H}{3}}=3f'_-(1)=-12$$

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(1-4h)-f(1)}{h}=\lim_{H\to0^+}\frac{f(1+H)-f(1)}{-\frac{H}{4}}=-4f'_+(1)=-16$$

بنابراین

$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+3h)-f(1-4h)}{h}=-12+16=4$$

۱۱۱۳- گزینهٔ ۴ مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x=0$ را با استفاده از تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{6-\sqrt{4-|x|}}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{6-\sqrt{4+x}}-2}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt{6-\sqrt{4+x}}-2}{x}\times\frac{\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2}{\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{6-\sqrt{4+x}-4}{x\left(\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2-\sqrt{4+x}}{x\left(\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2\right)}\times\frac{2+\sqrt{4+x}}{2+\sqrt{4+x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{4-(4+x)}{x(2+\sqrt{4+x})\left(\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{(2+\sqrt{4+x})\left(\sqrt{6-\sqrt{4+x}}+2\right)}=\frac{-1}{(2+2)(2+2)}=\frac{-1}{16}$$

۱۱۱۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to 1^+$، آن‌گاه $[x]=1$، پس

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{[x]-x^2}{\sqrt{x^2+3[x]}}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{-2}{2}=-1$$

۱۱۱۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ $x=2$ تساوی‌های $|x|=x$ و $[-x]=-2$ برقرار است. پس در این همسایگی $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{4x^3-5}$ و در نتیجه

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\sqrt[3]{4x^3-5}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\sqrt[3]{4x^3-5}=\sqrt[3]{32-5}=3$$

۱۱۱۶- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است، بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه را حساب می‌کنیم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|[\sin x]-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x[\sin x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}[\sin x]=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|[\sin x]-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x[\sin x]}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-[\sin x])=1$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست دارد ولی چون برابر نیستند، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱۱۱۷- گزینهٔ ۲ مشتق چپ و مشتق راست تابع در نقطهٔ $x=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2-1)\sin|x|-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2-1)\sin x}{x}=-1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x^2-1)\sin|x|-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x^2-1)\sin(-x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(x^2-1)\sin x}{x}=1$$

بنابراین $f'_+(0)-f'_-(0)=-1-1=-2$.

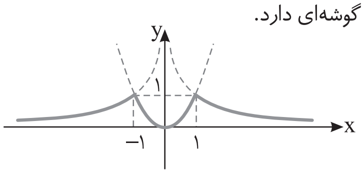
۱۱۱۸- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول با استفاده از تعریف مشتق در نقطهٔ $x=2$ مقدار $f'(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{(x-2)\cos^3(\pi x)}{1+\tan(\frac{\pi x}{8})}}{x-2}$$

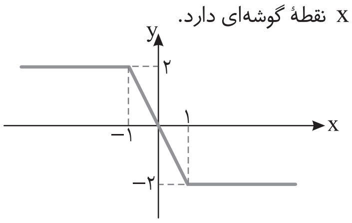
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cos^3(\pi x)}{1+\tan(\frac{\pi x}{8})}=\frac{\cos^3 2\pi}{1+\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

راه‌حل دوم چون مقدار $x-2$ در $x=2$ برابر صفر است و مشتق این عبارت برابر یک است، پس فقط کافی است مقدار عبارت $\frac{\cos^3(\pi x)}{1+\tan(\frac{\pi x}{8})}$ را در $x=2$ حساب کنیم که این مقدار برابر $\frac{1}{2}$ است. (درس دوم همین فصل را ببینید.)

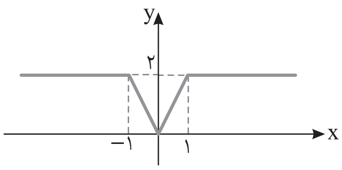
۱۱۱۹- گزینهٔ ۲ نمودار تابع به شکل زیر است و تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد.



۱۱۲۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع به شکل زیر است و تابع در نقاط $x=0$، $x=1$ و $x=-1$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد.



$y=|x-1|-|x+1|$



$y=\big||x-1|-|x+1|\big|$

۱۱۲۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=3x^2-3$، پس

$$f'(\tfrac{1}{3})=3\times\tfrac{1}{9}-3=\tfrac{1}{3}-3=-\tfrac{8}{3}$$

۱۱۲۲- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=a(x-3)+ax+1=2ax-3a+1$$

در نتیجه

$$\begin{cases}f'(1)=-a+1\\ f'(1)=5\end{cases}\Rightarrow a=-4$$

۱۱۲۳- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(x-4+x-2)x^2-2x(x-2)(x-4)}{x^4}$$
$$=\frac{(2x-6)x^2-2x(x-2)(x-4)}{x^4}$$

در نتیجه $f'(-2)=\frac{(-10)4+4(-4)(-6)}{16}=\frac{7}{2}$.

۱۱۲۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{3x^2(x^2+k)-(2x)(x^3)}{(x^2+k)^2}$.

در نتیجه

$$f'(-1)=\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{3(1+k)-2}{(1+k)^2}=\frac{5}{8}\Rightarrow k=3,\ k=-\frac{1}{5}$$ (غ.ق.ق.)

۱۱۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+3\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

در نتیجه $f'(2^{-6})=\frac{1}{\sqrt{2^{-6}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^{-12}}}=2^3+2^4=24$.

۱۱۲۶- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ تقسیم، $(\frac{f}{g})'(1)=\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}$.

از طرف دیگر، $f(1)=1$ ، $g(1)=-\frac{1}{2}$ و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2},\quad g'(x)=\frac{1}{2}(2x)=x\Rightarrow g'(1)=1$$

بنابراین $(\frac{f}{g})'(1)=\frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})-1\times1}{\frac{1}{4}}=-5$.

۱۱۲۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{6\sqrt{x}-24}{\sqrt[3]{x}}=\frac{6\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{24}{\sqrt[3]{x}}=6x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-24x^{-\frac{1}{3}}=6x^{\frac{1}{6}}-24x^{-\frac{1}{3}}$$

بنابراین $f'(x)=\frac{6}{6}x^{-\frac{5}{6}}+\frac{24}{3}x^{-\frac{4}{3}}$، پس $f'(1)=1+8=9$.

۱۱۲۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ ۳ علامت عبارت $x-4$ منفی است، بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ ۳، $f(x)=-(x-4)+2x=x+4$.

در نتیجه $f'(x)=1$ و $f'(3)=1$.

۱۱۲۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{1}{2}$، $1<\frac{x}{2}+1<2$،

پس در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{1}{2}$، مقدار $[\frac{x}{2}+1]$ برابر ۱ است، و در نتیجه

$$f(x)=3x^2-1\Rightarrow f'(x)=6x\Rightarrow f'(\frac{1}{2})=3$$

۱۱۳۰- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(\pi+h)-f^2(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}\times\lim_{h\to 0}(f(\pi+h)+f(\pi))$$
$$=f'(\pi)\times 2f(\pi)$$

از طرف دیگر، $f(\pi)=3$ و $f'(x)=2\cos x+3\sin x$، پس $f'(\pi)=-2$.

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر -12 است.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (درس هشتم همین فصل را ببینید.)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(\pi+h)-f^2(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(\pi+h)f(\pi+h)}{1}$$
$$=2f'(\pi)f(\pi)=2\times(-2)\times3=-12$$

توجه کنید که $f(\pi)=3$ و $f'(x)=2\cos x+3\sin x$، پس $f'(\pi)=-2$.

۱۱۳۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{3x^2}{3}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2x)+2=x^2+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+2$$

بنابراین $f'(\sqrt{2})=\sqrt{2}^2+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}+2=2+2\sqrt{6}-4+2=2\sqrt{6}$.

۱۱۳۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$، در نتیجه

$$f'(x)=\frac{(1)(x^2+1)-(2x)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

در نتیجه، $f'(-1)=\frac{2-4}{4}=-\frac{1}{2}$.

۱۱۳۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g'(x)=\frac{2xf(x)-x^2f'(x)}{f^2(x)}$$

بنابراین $g'(2)=\frac{4f(2)-4f'(2)}{f^2(2)}=\frac{12-(-8)}{9}=\frac{20}{9}$.

۱۱۳۴- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{(1)(x+a)-(1)(x)}{(x+a)^2}=\frac{a}{(x+a)^2}$$

در نتیجه

$$f'(0)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a}{a^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow a=3$$

۱۱۳۵- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1)+(\sqrt{x}-1)(2x)$$

بنابراین $f'(4)=\frac{1}{2\times2}(17)+(2-1)(8)=\frac{49}{4}$.

۱۱۳۶- گزینهٔ ۴ بنابر قاعدهٔ تقسیم،

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})-(-\frac{1}{2\sqrt{x}})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2}$$

در نتیجه $f'(\frac{1}{4})=\frac{\frac{2}{2}(1-\frac{1}{2})+\frac{2}{2}(1+\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2})^2}=8$.

۱۱۳۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}+2)=x^{\frac{11}{6}}+2x^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{11}{6}+3=\frac{29}{6}$$

۱۱۳۸- گزینهٔ ۲ چون $x^3-2x=x(x^2-2)$، در یک همسایگی نقطهٔ ۲ علامت عبارت x^3-2x مثبت است، بنابراین

$$f(x)=x^2+(x^3-2x)=x^3+x^2-2x$$

در نتیجه $f'(x)=3x^2+2x-2$ و $f'(2)=14$.

۱۱۳۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{۳}{۲}$ مقدار $[x]$ برابر ۱ است و در نتیجه

$$f(x)=\frac{x^۳}{x+۵}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳x^۲(x+۵)-x^۳}{(x+۵)^۲}=\frac{۲x^۳+۱۵x^۲}{(x+۵)^۲}\Rightarrow f'(\frac{۳}{۲})=\frac{۱۶۲}{۱۶۹}$$

۱۱۴۰- گزینهٔ ۲ مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(۱+۲\sin x)'(۱+۳\cos x)-(۱+۳\cos x)'(۱+۲\sin x)}{(۱+۳\cos x)^۲}$$
$$=\frac{۲\cos x(۱+۳\cos x)+۳\sin x(۱+۲\sin x)}{(۱+۳\cos x)^۲}$$

در نتیجه $f'(\pi)=\frac{۲(-۱)(۱-۳)+۰}{(۱-۳)^۲}=۱$.

۱۱۴۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=۳ax^۲-۲ax+۴$. بنابراین

$$f'(-۲)=۱۲\Rightarrow ۱۲a+۴a+۴=۱۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $f'(x)=\frac{۳}{۲}x^۲-x+۴$. پس $f'(۱)=\frac{۹}{۲}$.

۱۱۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم و مشتق آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x(x^۲-۱)(x^۲-۲)=x^۵-۳x^۳+۲x\Rightarrow f'(x)=۵x^۴-۹x^۲+۲$$

بنابراین

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۵x^۴-۹x^۲+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲=\frac{۹+\sqrt{۴۱}}{۱۰}\\ x^۲=\frac{۹-\sqrt{۴۱}}{۱۰}\end{cases}$$

پس در نقاط $x=\pm\sqrt{\frac{۹+\sqrt{۴۱}}{۱۰}}$ و $x=\pm\sqrt{\frac{۹-\sqrt{۴۱}}{۱۰}}$ مشتق تابع f برابر صفر است. حاصل‌ضرب این اعداد برابر است با $\frac{۲}{۵}$.

۱۱۴۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^{-۱۰}+x^{-۹}+\dots+x^{-۱}+۱+x+x^۲+\dots+x^{۱۰}$$

بنابراین $f'(x)=-۱۰x^{-۱۱}-۹x^{-۱۰}-\dots-x^{-۲}+۱+۲x+\dots+۱۰x^۹$.

در نتیجه $f'(۱)=-۱۰-۹-\dots-۱+۱+۲+\dots+۱۰=۰$.

۱۱۴۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^۵+x^۲)-(x^۳+۱)}{x^۳+۱}=\frac{x^۲(x^۳+۱)-(x^۳+۱)}{x^۳+۱}=x^۲-۱\quad(x\neq-۱)$$

در نتیجه برای هر $x\neq-۱$ مشتق تابع f برابر $۲x$ است و $f'(\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲})=\sqrt{۲}-۱$.

۱۱۴۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(۲x-m)(x^۲+۵x+۳)-(۲x+۵)(x^۲-mx+۴)}{(x^۲+۵x+۳)^۲}$$

در نتیجه

$$f'(-۱)=۰\Rightarrow(-۲-m)(۱-۵+۳)-(-۲+۵)(۱+m+۴)=۰\Rightarrow m=-\frac{۱۳}{۲}$$

۱۱۴۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}$ به‌ازای $x=۱$ برابر صفر است، پس عامل صفر کننده است. از طرف دیگر،

$$y=\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\Rightarrow y'(۱)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

در نتیجه

$$f'(۱)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۱۴۷- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=xx^{\frac{۱}{۳}}(xx^{\frac{۱}{۲}}+۱)=x^{\frac{۱۷}{۶}}+x^{\frac{۴}{۳}}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{۱۷}{۶}x^{\frac{۱۱}{۶}}+\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۱۷}{۶}+\frac{۴}{۳}=\frac{۲۵}{۶}$$

۱۱۴۸- گزینهٔ ۲ اگر در تساوی $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^۲-۱}{۲x}$ قرار دهیم $x=-۱$، چون $f(-۱)=۱$، به‌دست می‌آید $g(-۱)=۰$. اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^۲(x)}=\frac{(۲x)(۲x)-۲(x^۲-۱)}{۴x^۲}$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-۱$، به‌دست می‌آید $\frac{g'(-۱)-۰}{۱}=۱$، بنابراین

$$g'(-۱)=۱$$

۱۱۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{\cos x\times x-(۱)\sin x}{x^۲}$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{۲})=-\frac{۴}{\pi^۲}$$

۱۱۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{\cos x(۱-\cos x)-(-(-\sin x))\sin x}{(۱-\cos x)^۲}$$
$$=\frac{\cos x-\cos^۲x-\sin^۲x}{(۱-\cos x)^۲}=\frac{\cos x-۱}{(۱-\cos x)^۲}=\frac{۱}{\cos x-۱}$$

۱۱۵۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=۱-۲x+۳x^۲-۴x^۳+\dots+۴۹x^{۴۸}-۵۰x^{۴۹}$$

بنابراین $f'(-۱)=۱+۲+۳+۴+\dots+۴۹+۵۰=۱۲۷۵$.

۱۱۵۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که چون مقدار $x+۱$ به‌ازای $x=-۱$ صفر است، پس مشتق عبارت $(x+۱)(x+۲)(x+۳)(ax+۴)$ به‌ازای $x=-۱$ برابر است با $(-۱+۲)(-۱+۳)(-a+۴)=۸-۲a$. بنابراین

$$۸-۲a=۲\Rightarrow a=۳$$

۱۱۵۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $f(x)=ax+b$. در این صورت

$$f'(x)=a\Rightarrow f'(x)f(x)=a^۲x+ab=۴x-۸$$

بنابراین

$$a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲,\quad f'(۳)=a\Rightarrow f'(۳)=\pm۲$$

۱۱۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲-x+۱}{x^۲+mx+۱}$$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۱)(x^۲+mx+۱)-(۲x+m)(x^۲-x+۱)}{(x^۲+mx+۱)^۲}$$

بنابراین $f'(۰)=\frac{(-۱)(۱)-(m)(۱)}{۱^۲}=-۱-m$. در نتیجه

$$-۱-m=۲m\Rightarrow m=-\frac{۱}{۳}$$

۱۱۵۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{g(x)-۱}{x^۲+۱}\Rightarrow(x^۲+۱)f(x)=g(x)-۱$$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید

$$(۲x)f(x)+(x^۲+۱)f'(x)=g'(x)\Rightarrow ۲f(۱)+۲f'(۱)=g'(۱)\Rightarrow g'(۱)=۱۲$$

۱۱۵۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{۳h}=\frac{۲}{۳}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+۲h)-f(۲)}{۲h}=\frac{۲}{۳}f'(۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=۲x^۲+۸x^{-۲}$، پس

$$f'(x)=۴x+۸(-۲)x^{-۳}=۴x-\frac{۱۶}{x^۳}$$

بنابراین $f'(۲)=۸-۲=۶$ و مقدار حد مورد نظر برابر است با $\frac{۲}{۳}\times۶=۴$.

۱۱۵۷- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۲+\sqrt{x}}{x^۳+\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{(x^۲+\sqrt{x})'(x^۳+\sqrt[۳]{x})-(x^۳+\sqrt[۳]{x})'(x^۲+\sqrt{x})}{(x^۳+\sqrt[۳]{x})^۲}$$

$$=\frac{(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(x^۳+\sqrt[۳]{x})-(۳x^۲+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}})(x^۲+\sqrt{x})}{(x^۳+\sqrt[۳]{x})^۲}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=۱$، نتیجه می‌شود

$$f'(۱)=\frac{(۲+\frac{۱}{۲})(۱+۱)-(۳+\frac{۱}{۳})(۱+۱)}{(۱+۱)^۲}=-\frac{۵}{۱۲}$$

۱۱۵۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$(f\times g)'(۱)=f'(۱)g(۱)+g'(۱)f(۱)$$

ابتدا ضابطهٔ تابع $f\times g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(x^۲+\sqrt{x^۴+x^۲})^۹(x^۲-\sqrt{x^۴+x^۲})^۹$$

$$=((x^۲+\sqrt{x^۴+x^۲})(x^۲-\sqrt{x^۴+x^۲}))^۹=(x^۴-x^۴-x^۲)^۹=-x^{۱۸}$$

بنابراین

$$(f\times g)'(x)=(-x^{۱۸})'=-۱۸x^{۱۷}\Rightarrow(f\times g)'(۱)=-۱۸\times۱^{۱۷}=-۱۸$$

۱۱۵۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{\cos x(\cos x-۱)-(-\sin x)(a+\sin x)}{(\cos x-۱)^۲}$$

$$f'(\frac{\pi}{۲})=۱\Rightarrow\frac{a+۱}{۱}=۱\Rightarrow a=۰$$

۱۱۶۰- گزینهٔ ۲ مشتق تابع را حساب می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=m-۲\sin x=۰\Rightarrow\sin x=\frac{m}{۲}$$

چون $-۱\le\sin x\le۱$، پس

$$-۱\le\frac{m}{۲}\le۱\Rightarrow-۲\le m\le۲$$

۱۱۶۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\sqrt{x}-۸$ به‌ازای $x=۶۴$ برابر با صفر است. پس عامل صفر کننده است و مشتق آن به‌ازای $x=۶۴$ برابر $\frac{۱}{۱۶}$ است:

$$y=\sqrt{x}-۸\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow y'(۶۴)=\frac{۱}{۱۶}$$

بنابراین مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۶۴$ برابر است با

$$\frac{۱}{۱۶}\times(\sqrt[۳]{۶۴}+۴)(\sqrt[۴]{۶۴})=\frac{۱}{۱۶}\times۸\times۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

۱۱۶۲- گزینهٔ ۲ در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$، علامت عبارت $x^۲-۱$ منفی است و $۱<۲x<۲$، پس در نزدیکی نقطهٔ $\frac{۴}{۵}$، $[۲x]=۱$. بنابراین

$$f(x)=\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=-(x-۱)$$

در نتیجه $f'(x)=-۱$ و $f'(\frac{۴}{۵})=-۱$.

۱۱۶۳- گزینهٔ ۳ در یک همسایگی $x=۲$ مقدار عبارت $x^۲-۳x$ منفی است و مقدار عبارت $x^۲+۳x$ مثبت است. بنابراین ضابطهٔ تابع در این همسایگی به‌صورت $f(x)=-x^۲+۳x-x^۲-۳x=-۲x^۲$ است. بنابراین

$$f'(x)=-۴x\Rightarrow f'(۲)=-۸$$

۱۱۶۴- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی نقطهٔ $x=۱$ علامت عبارت $۲x-x^۲\sqrt{x}$ مثبت است و در یک همسایگی نقطهٔ $x=۴$ علامت این عبارت منفی است. بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ ۱،

$$f(x)=۲x-x^۲\sqrt{x}=۲x-x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f'(x)=۲-\frac{۵}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}$$

$$f'(۱)=۲-\frac{۵}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

و در یک همسایگی نقطهٔ ۴،

$$f(x)=-۲x+x^۲\sqrt{x}=-۲x+x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f'(x)=-۲+\frac{۵}{۲}x^{\frac{۳}{۲}}$$

پس

$$f'(۴)=-۲+\frac{۵}{۲}\times۸=۱۸$$

بنابراین

$$f'(۱)f'(۴)=-۹$$

۱۱۶۵- گزینهٔ ۳ اگر ضابطهٔ تابع را به‌صورت

$$f(x)=(x^2-49)\underbrace{(x^2-50)(x^2-20)(x^2-21)\cdots(x^2-48)}_{g(x)}$$

بنویسیم، در این صورت

$$f(x)=(x^2-49)g(x)\Rightarrow f'(x)=2xg(x)+(x^2-49)g'(x)$$

واضح است که اگر $f'(7)$ را حساب کنیم، مقدار عبارت $(x^2-49)g'(x)$ صفر می‌شود و کافی است مقدار عبارت $2xg(x)$ را حساب کنیم:

$$f'(7)=2\times7g(7)=2\times7\times(49-50)(49-20)(49-21)\cdots(49-48)$$
$$=-14\times29!$$

۱۱۶۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $\frac{21}{2}$ مقدار عبارت‌های x، $x-1$، $x-2$ و ... و $x-10$ مثبت و مقدار عبارت‌های $x-11$، $x-12$، ... و $x-20$ منفی است. بنابراین ضابطهٔ تابع در همسایگی این نقطه به شکل زیر است:

$$f(x)=x+(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-10)-(x-11)-(x-12)-\cdots-(x-20)$$

در نتیجه $f(x)=x+k$، که k مقداری ثابت است. بنابراین $f'(\frac{21}{2})=1$.

۱۱۶۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(\sin x+x\cos x)(1-x\sin x)-(-\sin x-x\cos x)(1+x\sin x)}{(1-x\sin x)^2}$$

در نتیجه $f'(\frac{\pi}{2})=\dfrac{(1+0)(1-\frac{\pi}{2})-(-1)(1+\frac{\pi}{2})}{(1-\frac{\pi}{2})^2}=\dfrac{2}{(1-\frac{\pi}{2})^2}$.

۱۱۶۸- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(1+\sin x)'(1+2\cos x)-(1+2\cos x)'(1+\sin x)}{(1+2\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos x(1+2\cos x)+2\sin x(1+\sin x)}{(1+2\cos x)^2}$$

در نتیجه $f'(0)=\dfrac{1(1+2)+0}{(1+2)^2}=\dfrac{1}{3}$.

۱۱۶۹- گزینهٔ ۲ مشتق تابع به‌صورت $y'=a\cos x-2\sin x$ است.

بنابراین

$$y^2=a^2\sin^2x+4\cos^2x+4a\sin x\cos x$$
$$y'^2=a^2\cos^2x+4\sin^2x-4a\sin x\cos x$$
$$y^2+y'^2=a^2(\sin^2x+\cos^2x)+4(\cos^2x+\sin^2x)=a^2+4$$

پس $a^2+4=8$ و در نتیجه $a^2=4$.

۱۱۷۰- گزینهٔ ۳ مشتق دو تابع را حساب می‌کنیم و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=m+2\cos x,\quad g'(x)=4$$
$$f'(x)=g'(x)\Rightarrow m+2\cos x=4\Rightarrow\cos x=\frac{4-m}{2}$$

چون $-1\le\cos x\le1$، پس $-1\le\frac{4-m}{2}\le1$، در نتیجه

$$-2\le4-m\le2\Rightarrow-6\le-m\le-2\Rightarrow2\le m\le6$$

۱۱۷۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(3x-2)'(3x-2)^{3-1}-4(2x-3)'(2x-3)^{4-1}$$
$$=3(3)(3x-2)^2-4(2)(2x-3)^3$$

در نتیجه $f'(-1)=9(-3-2)^2-8(-2-3)^3=9\times5^2+8\times5^3=49\times5^2$.

۱۱۷۲- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ ضرب و اینکه $(g^n)'=ng'g^{n-1}$،

$$f'(x)=((x^2-1)^2)'(x+2)^4+(x^2-1)^2((x+2)^4)'$$
$$=(2(2x)(x^2-1)^{2-1})(x+2)^4+(x^2-1)^2(4(1)(x+2)^{4-1})$$
$$=4x(x^2-1)(x+2)^4+4(x^2-1)^2(x+2)^3$$

بنابراین $f'(0)=0+4(1)(2)^3=32$.

۱۱۷۳- گزینهٔ ۳ بنابر قاعدهٔ زنجیری، $(gof)'(1)=f'(1)g'(f(1))$. از طرف دیگر، $f(x)=x^3-x+1$، در نتیجه $f'(x)=3x^2-1$. بنابراین $f(1)=1$ و $f'(1)=2$. همچنین

$$g(x)=2-x^2\Rightarrow g'(x)=-2x\Rightarrow g'(f(1))=g'(1)=-2$$

بنابراین $(gof)'(1)=2\times(-2)=-4$.

۱۱۷۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=(-3)(3-\frac{1}{x^2})(3x+\frac{1}{x})^{-4}$$

در نتیجه، $f'(1)=(-3)(2)(4)^{-4}=\dfrac{-3}{128}$. بنابراین $128f'(1)=-3$.

۱۱۷۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})'=\dfrac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}\Rightarrow f'(5)=\frac{10}{27}$$

۱۱۷۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-7}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=\frac{4}{\sqrt{9}}-\frac{1}{2\times2}=\frac{13}{12}$$

۱۱۷۷- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(2x)=-x^2+3x+4$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$(2x)'f'(2x)=-2x+3\Rightarrow2f'(2x)=-2x+3$$
$$\xrightarrow{x=2}2f'(4)=-4+3\Rightarrow f'(4)=-\frac{1}{2}$$

۱۱۷۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}\cos(\frac{2}{x})-2\cos(\frac{1}{x})-2x(-\frac{1}{x^2}(-\sin(\frac{1}{x})))$$
$$=-\frac{2}{x^2}\cos(\frac{2}{x})-2\cos(\frac{1}{x})-\frac{2}{x}\sin(\frac{1}{x})$$

در نتیجه

$$f'(\frac{2}{\pi})=-\frac{2}{\frac{4}{\pi^2}}\cos(\pi)-2\cos(\frac{\pi}{2})-\pi\sin(\frac{\pi}{2})$$
$$=\frac{\pi^2}{2}+0-\pi=\frac{\pi^2-2\pi}{2}$$

۱۱۷۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=a\cos x+\frac{1}{4}(2(\cos 2x)'\cos 2x)$$

$$=a\cos x+(-\sin 2x)\cos 2x=a\cos x-\frac{1}{2}\sin 4x$$

در نتیجه

$$f'(\frac{\pi}{6})=0\Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2}-(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۱۱۸۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=(\sin x\cos x)\cos 2x\cos 4x$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 4x)\cos 4x$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin 8x)=\frac{1}{8}\sin 8x$$

بنابراین $f'(x)=\frac{1}{8}\times 8\cos 8x=\cos 8x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{8})=\cos(\pi)=-1$

۱۱۸۱- گزینهٔ ۱ بنابر قاعدهٔ زنجیری،

$$(fog)'(-1)=g'(-1)f'(g(-1))$$

از طرف دیگر، $g(x)=x^3-3x\Rightarrow g'(x)=3x^2-3\Rightarrow g'(-1)=0$

بنابراین $(fog)'(-1)=0$.

۱۱۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(1+(2+x^2)^2)'(1+(2+x^2)^2)^{3-1}$$

$$=3(2(2x)(2+x^2)^{2-1})(1+(2+x^2)^2)^2=12x(2+x^2)(1+(2+x^2)^2)^2$$

بنابراین $f'(1)=12\times 1\times 3\times 10^2=3600$.

۱۱۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+1)(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+x)^2$$

در نتیجه $f'(1)=9$.

۱۱۸۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt[3]{g})'=\frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{-1}{3(1)}=-\frac{1}{3}$$

۱۱۸۵- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ ضرب،

$$f'(x)=(2x+3)\sqrt{x^2+3}+(x^2+3x)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

بنابراین $f'(1)=5\times 2+4\times\frac{1}{2}=12$.

۱۱۸۶- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی $f(x)=g(x^2+2x)$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $f'(x)=(2x+2)g'(x^2+2x)$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$، به‌دست می‌آید $f'(3)=8g'(15)$، پس $g'(15)=9$.

۱۱۸۷- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2mx+4\tan 2x(1+\tan^2 2x)$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{8})=2m(\frac{\pi}{8})+4\tan\frac{\pi}{4}(1+\tan^2\frac{\pi}{4})=\frac{m\pi}{4}+8=8+2\pi\Rightarrow m=8$$

۱۱۸۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\cos 2x$$

$$f'(x)=-2\sin 2x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{12})=-2\sin(\frac{\pi}{6})=-1$$

۱۱۸۹- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(x+\sin x+2)=\sin(kx)$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$(1+\cos x)f'(x+\sin x+2)=k\cos(kx)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$، به‌دست می‌آید:

$$2f'(2)=k\xrightarrow{f'(2)=2}k=4$$

۱۱۹۰- گزینهٔ ۳ با استفاده از قواعد مشتق‌گیری، مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=4\times 2\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8})\times(-\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8}))\times(-\frac{1}{8})$$

$$=\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8})\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8})\xrightarrow{\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sin(2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{8}))=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4})$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12})=\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۱۹۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2(\frac{3x^2(x^2-1)-2x(x^3-1)}{(x^2-1)^2})(\frac{x^3-1}{x^2-1})\Rightarrow f'(-2)=0$$

۱۱۹۲- گزینهٔ ۱ چون نقطهٔ $(2,3)$ روی نمودار تابع f است، پس $f(2)=3$. چون خط d از نقطه‌های $(2,3)$ و $(5,0)$ گذشته است، شیب آن برابر است با $\frac{3-0}{2-5}=-1$. بنابراین $f'(2)=-1$. اکنون توجه کنید که

$$g'(x)=f(3x-4)+x(3f'(3x-4))$$

$$g'(2)=f(2)+6f'(2)=3-6=-3$$

۱۱۹۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=((x^3+2)(\sqrt{x}+2x))^2$ و $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=2((3x^2)(\sqrt{x}+2x)+(x^3+2)(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2))(x^3+2)(\sqrt{x}+2x)$$

در نتیجه $f'(1)=2(3(3)+3(\frac{1}{2}+2))(3)(3)=297$.

۱۱۹۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=\frac{3x^2+3a}{3\sqrt[3]{(x^3+3ax)^2}}$. بنابراین

$$f'(2)=0\Rightarrow 3\times 2^2+3a=0\Rightarrow a=-4$$

۱۱۹۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{(\sqrt[3]{x^2-1})^3+1}=\sqrt{x^2-1+1}=\sqrt{x^2}=|x|$$

بنابراین $g'(x)f'(g(x))=(fog)'(x)=(|x|)'=\frac{x}{|x|}$

۱۱۹۶- گزینهٔ ۱ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(x^3)=\frac{x}{f(x^2)}\Rightarrow 3x^2g'(x^3)=\frac{f(x^2)-2x^2f'(x^2)}{f^2(x^2)}$$

$$g'(x^3)=\frac{f(x^2)-2x^2f'(x^2)}{3x^2f^2(x^2)}$$

اکنون در تساوی فوق قرار می‌دهیم $x=2$ و نتیجه می‌شود

$$g'(8)=\frac{f(4)-8f'(4)}{12f^2(4)}=\frac{1-8\times\frac{13}{8}}{12\times1}=-1$$

۱۱۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=(\pi\sin 2x)'(-\sin(\pi\sin 2x))=-2\pi(\cos 2x)\sin(\pi\sin 2x)$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{12})=-2\pi\cos\frac{\pi}{6}\sin(\pi\sin\frac{\pi}{6})=-2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin(\frac{\pi}{2})=-\pi\sqrt{3}$$

۱۱۹۸- گزینهٔ ۲ با استفاده از اتحادهای $1=\sin^2x+\cos^2x$، $\sin 2x=2\sin x\cos x$ و $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$، ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$f(x)=\frac{(1-\sin 2x)(\sin x+\cos x)}{\cos 2x}$$
$$=\frac{(\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}$$
$$=\frac{(\cos x-\sin x)^2(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}$$
$$=\cos x-\sin x\ \ (x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z})$$

بنابراین

$$f'(x)=-\sin x-\cos x$$

$$f'(\frac{2\pi}{3})=-\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

۱۱۹۹- گزینهٔ ۲ مشتق تابع به‌صورت زیر است

$$y'=2a\cos 2x-4\sin 2x$$

بنابراین

$$y^2=a^2\sin^2 2x+4\cos^2 2x+4a\sin 2x\cos 2x$$
$$4y^2=4a^2\sin^2 2x+16\cos^2 2x+16a\sin 2x\cos 2x$$
$$y'^2=4a^2\cos^2 2x+16\sin^2 2x-16a\sin 2x\cos 2x$$
$$4y^2+y'^2=4a^2(\sin^2 2x+\cos^2 2x)+16(\cos^2 2x+\sin^2 2x)$$
$$=4a^2+16$$

پس $4a^2+16=18$ و در نتیجه $a^2=\frac{1}{2}$.

۱۲۰۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=12\tan^2 4x(1+\tan^2 4x)$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{12})=12\tan^2\frac{\pi}{3}(1+\tan^2\frac{\pi}{3})=12\times3(1+3)=144$.

۱۲۰۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f^2(x)=\frac{2x+1}{x+2}$. اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم و قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$2f'(x)f(x)=\frac{(2)(x+2)-(1)(2x+1)}{(x+2)^2}\Rightarrow 2f'(1)f(1)=\frac{6-3}{9}=\frac{1}{3}$$

بنابراین $f(1)f'(1)=\frac{1}{6}$.

۱۲۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2ax)\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(ax^2+a)}{3x+1}$$

بنابراین

$$f'(1)=\frac{21}{8}\Rightarrow\frac{(2a)(2)-\frac{3}{2\times2}(a+a)}{4}=\frac{21}{8}\Rightarrow\frac{\frac{5a}{2}}{4}=\frac{21}{8}\Rightarrow a=\frac{21}{5}$$

۱۲۰۳- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$(\frac{1}{3x-1})'f'(\frac{1}{3x-1})=6x\Rightarrow\frac{-3}{(3x-1)^2}f'(\frac{1}{3x-1})=6x$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید $\frac{-3}{4}f'(\frac{1}{2})=6$.

پس $f'(\frac{1}{2})=-8$.

۱۲۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$. از طرف دیگر، اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$-f'(1-x)=6x+1\xrightarrow{x=-1}-f'(2)=-5\Rightarrow f'(2)=5$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر ۵ است.

۱۲۰۵- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی داده شده طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $4xf'(2x^2-4)=3f'(x-3)+5$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$4f'(-2)=3f'(-2)+5\Rightarrow f'(-2)=5$$

۱۲۰۶- گزینهٔ ۲ طبق قاعدهٔ مشتق تابع مرکب:

$$y=f(x+\sqrt{1+x^2})\Rightarrow y'=(x+\sqrt{1+x^2})'f'(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\times\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۱۲۰۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=(\tan 4x)'(1+\tan^2(\tan 4x))$$
$$=4(1+\tan^2 4x)(1+\tan^2(\tan 4x))$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{4})=4(1+\tan^2\pi)(1+\tan^2(\tan\pi))=4(1+0)(1+0)=4$.

۱۲۰۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(\cos x+2\sin x)(\sin x-2\cos x)^2$$

در نتیجه $f'(\frac{\pi}{4})=3(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{2})^2=\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

۱۲۰۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(g^n)'=ng'g^{n-1}$، بنابراین

$$f'(x)=3(\cos(4x^2))'\cos^2(4x^2)=3(8x(-\sin(4x^2)))\cos^2(4x^2)$$
$$=-24x\sin(4x^2)\cos^2(4x^2)$$

۱۲۱۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{۲\sqrt{g}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{(\sin\sqrt{x})'}{۲\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{۲\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

بنابراین $f'(\frac{\pi^۲}{۴})=۰$.

۱۲۱۱- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f^۲(x^۳)$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید

$$g'(x)=۲(f(x^۳))'f(x^۳)=۲(۳x^۲)f'(x^۳)f(x^۳)=۶x^۲f'(x^۳)f(x^۳)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۲$، به‌دست می‌آید

$$g'(۲)=۶\times۴\times f'(۸)f(۸)=۶\times۴\times\frac{۱}{۶}=۴$$

۱۲۱۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که چون $g(-۱)=۲$، پس $f(۲)=f(g(-۱))$.

بنابراین

$$\lim_{x\to-۱}\frac{f(g(x))-f(۲)}{x+۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{f(g(x))-f(g(-۱))}{x-(-۱)}$$

$$=(fog)'(-۱)=g'(-۱)f'(g(-۱))=۵\times f'(۲)=۵\times(-۳)=-۱۵$$

۱۲۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $g(۴)=\frac{۲+۱}{۳}=۱$ و

$$(fog)'(۴)=g'(۴)f'(g(۴))=g'(۴)f'(۱)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\frac{(۲x+۱)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-x^۲+۲x+۱}{(x^۲+۱)^۲},\quad f'(۱)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$g'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sqrt{x^۲-۷}-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲-۷}}(\sqrt{x}+۱)}{x^۲-۷}$$

$$g'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}\times۳-\frac{۸}{۶}\times۳}{۹}=-\frac{۱۳}{۳۶}$$

بنابراین $(fog)'(۴)=\frac{۱}{۲}\times\frac{-۱۳}{۳۶}=\frac{-۱۳}{۷۲}$.

۱۲۱۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+k}{x+۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲-k}{(x+۲)^۲}$$

بنابراین

$$g(x)=(fof)(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)f'(f(x))$$

$$g'(۰)=f'(۰)f'(f(۰))=f'(۰)f'(\frac{k}{۲})$$

در نتیجه

$$\frac{۲-k}{۴}\times\frac{۲-k}{(\frac{k}{۲}+۲)^۲}=۴\Rightarrow(۲-k)^۲=۱۶(\frac{k}{۲}+۲)^۲$$

$$\begin{cases}۲-k=۴(\frac{k}{۲}+۲)\\ ۲-k=-۴(\frac{k}{۲}+۲)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-۲\\ k=-۱۰\end{cases}$$

پس حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای k برابر ۲۰ است.

۱۲۱۵- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $f(\frac{۲x-۳}{x+۲})=ax^۲+x+۴$ طبق قاعدهٔ زنجیری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۷}{(x+۲)^۲}f'(\frac{۲x-۳}{x+۲})=۲ax+۱$$

اگر در تساوی بالا قرار دهیم $x=-۱$، مقدار $f'(-۵)$ به‌دست می‌آید.

$$۷f'(-۵)=-۲a+۱\Rightarrow f'(-۵)=\frac{۱-۲a}{۷}$$

پس

$$\frac{۱-۲a}{۷}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow a=-۱$$

۱۲۱۶- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی $g(x)=f(x^۲-f(x))$ مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$g'(x)=(۲x-f'(x))f'(x^۲-f(x))$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$، به‌دست می‌آید:

$$g'(۱)=(۲-f'(۱))f'(۱-f(۱))=(۲-۳)f'(۱)=-f'(۱)=-۳$$

۱۲۱۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(\sqrt{g})'=\frac{g'}{۲\sqrt{g}}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۳\cos۳x}{۲\sqrt{\sin۳x}}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۳(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{۲\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{-۳}{۲\sqrt[۴]{۲}}=-۳\times۲^{-\frac{۵}{۴}}$$

پس $a=-\frac{۵}{۴}$.

۱۲۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=x(\frac{۱}{۲}\sin۸x)=\frac{x}{۲}\sin۸x$$

بنابراین $f'(x)=\frac{۱}{۲}\sin۸x+\frac{x}{۲}(۸\cos۸x)$. بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{۱۶})=\frac{۱}{۲}\times۱+۰=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۱۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=۲(۴(-\sin۴x))\cos(\cos۴x)\sin(\cos۴x)$$

$$=-۸\sin۴x\cos(\cos۴x)\sin(\cos۴x)$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{۸})=۰$.

۱۲۲۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که مقدار عبارت $\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ به‌ازای $x=۱$ برابر صفر است. پس کافی است از این عبارت مشتق بگیریم و مقدار مشتق آن در $x=۱$ را در مقدار عبارت $\sin(\frac{\pi\sqrt{x}}{x+۳})$ در این نقطه ضرب کنیم:

$$y=\cos(\frac{\pi}{۲}x)\Rightarrow y'=-\frac{\pi}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}x)\Rightarrow y'(۱)=-\frac{\pi}{۲}$$

$$y=\sin(\frac{\pi\sqrt{x}}{x+۳})\Rightarrow y(۱)=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین $f'(۱)=-\frac{\pi\sqrt{۲}}{۴}$.

۱۲۲۱- گزینهٔ ۴ توابع گزینه‌های (۱) و (۳) در نقطهٔ $x=1$ پیوسته نیستند، پس مشتق‌پذیر نیستند.

در گزینهٔ (۲)، ابتدا توجه کنید که تابع در $x=1$ پیوسته است:

$$f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=1$$

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge1\\ x^3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ 3x^2 & x<1\end{cases}$$

همچنین $f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}(2x)=2$ و $f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}(3x^2)=3$. چون $f'_+(1)\neq f'_-(1)$، پس این تابع هم در نقطهٔ $x=1$ مشتق ندارد.

در گزینهٔ (۴) تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است و

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-1 & x\ge1\\ 2x^3 & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}6x & x>1\\ 6x^2 & x<1\end{cases}$$

همچنین، $f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}(6x)=6$ و $f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}(6x^2)=6$. چون $f'_+(1)=f'_-(1)$، پس تابع گزینهٔ (۴) در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است.

۱۲۲۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید $\lim_{h\to0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'_+(-1)$

چون تابع f در نقطهٔ $x=-1$ پیوستگی راست ندارد، پس مشتق راست هم ندارد. بنابراین حد فوق وجود ندارد. دقت کنید که می‌توانیم بدون استفاده از مفهوم مشتق هم نشان دهیم این حد وجود ندارد:

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{2(-1+h)^3-3}{h}=-\infty$$

۱۲۲۳- گزینهٔ ۳ چون تابع در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)$$

$$-a+2=-a+2=1-b\Rightarrow a-b=1$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}3ax^2 & x>-1\\ 2x+b & x<-1\end{cases}$، بنابراین

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}(3ax^2)=3a,\ f'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}(2x+b)=-2+b$$

$$f'_+(-1)=f'_-(-1)\Rightarrow 3a=b-2$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a-b=1\\ 3a-b=-2\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{3}{2}$ و $b=-\frac{5}{2}$

و در نتیجه $a+b=-4$.

۱۲۲۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=2$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x>1\\ 2x+1 & x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}(3x^2)=3\\ f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}(2x+1)=3\end{cases}$$

بنابراین $f'(1)=3$. از طرف دیگر

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=f'(1)\times\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۱۲۲۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(1)=2$ و

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^3+x)=2,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}4x=4$$

پس تابع در $x=1$ پیوستگی چپ ندارد و $f'_-(1)$ وجود ندارد، از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & x>1\\ 4 & x<1\end{cases}$$

بنابراین $f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^+}(3x^2+1)=4$.

۱۲۲۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که تابع f در $x=2$ پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ هم ندارد. از طرف دیگر

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}2(x+2)=8$$

$$2<x<3\Rightarrow f(x)=2x^2\Rightarrow f'(x)=4x\Rightarrow\lim_{x\to2^+}f'(x)=8$$

$$1<x<2\Rightarrow f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow\lim_{x\to2^-}f'(x)=4$$

۱۲۲۷- گزینهٔ ۴ اگر $g(x)=(x+1)(x-2)^2$، آن‌گاه $g(2)=g'(2)=0$. بنابراین تابع $f(x)=|g(x)|$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است.

۱۲۲۸- گزینهٔ ۲ چندجمله‌ای داخل قدرمطلق یعنی x^2+4x+m^2 باید دو ریشهٔ متمایز داشته باشد. پس

$$\Delta=16-4m^2>0\Rightarrow m^2<4\Rightarrow -2<m<2$$

۱۲۲۹- گزینهٔ ۲ تابع را به‌صورت $f(x)=(x-2)|(x-2)(x-3)|$ می‌نویسیم. تابع $y=|(x-2)(x-3)|$ در نقاط $x=2$ و $x=3$ مشتق ندارد، ولی عامل صفرکنندهٔ $(x-2)$ در پشت قدرمطلق باعث می‌شود که تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر باشد. پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=3$ مشتق ندارد.

۱۲۳۰- گزینهٔ ۱ عبارت داخل قدرمطلق ($x^2-4=(x-2)(x+2)$) دو ریشهٔ سادهٔ ۲ و ۲- دارد. برای آنکه تابع مورد نظر مشتق‌پذیر باشد، باید x^2+ax+b به ازای $x=-2$ و $x=2$ برابر صفر شود:

$$\begin{cases}x=2\Rightarrow 2^2+a\times2+b=0\Rightarrow 2a+b=-4\\ x=-2\Rightarrow(-2)^2+a(-2)+b=0\Rightarrow -2a+b=-4\end{cases}$$

پس $a=0$ و $b=-4$، بنابراین $3a+b=-4$.

۱۲۳۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}4x-3 & x<3\\ 9 & x>3\end{cases}$. چون تابع f روی بازهٔ $(-\infty,3]$ پیوسته و روی بازهٔ $(-\infty,3)$ مشتق‌پذیر است، همین‌طور روی بازهٔ $[3,+\infty)$ پیوسته و روی بازهٔ $(3,+\infty)$ مشتق‌پذیر است و

$$\lim_{x\to3^-}f'(x)=\lim_{x\to3^-}(4x-3)=9 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to3^+}f'(x)=\lim_{x\to3^+}(9)=9 \qquad (2)$$

پس مقدار حد (۱) برابر $f'_-(3)$ و مقدار حد (۲) برابر $f'_+(3)$ است، و چون این دو مقدار برابرند، پس $f'(3)=9$.

۱۲۳۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}۲x+۲ & x>۲\\ ۳x^۲ & x<۲\end{cases}$. بنابراین

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x+۲)=۴+۲=۶$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳x^۲)=۳\times ۴=۱۲$$

در نتیجه $f'_+(۲)-f'_-(۲)=۶-۱۲=-۶$.

۱۲۳۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(۲)=۳$ و

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲+۱)=۵\ ,\quad \lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^۳-۱)=۷$$

پس تابع f در نقطهٔ $x=۲$ نه پیوستگی چپ دارد و نه پیوستگی راست. بنابراین مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه وجود ندارند.

۱۲۳۴- گزینهٔ ۴ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)$$
$$b=\lim_{x\to ۲^+}(x^۳+ax)=\lim_{x\to ۲^-}(cx^۲+c)\Rightarrow b=۸+۲a=۵c\qquad (I)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲+a & x>۲\\ ۲cx & x<۲\end{cases}$$
$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۳x^۲+a)=۱۲+a$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۲cx)=۴c$$

پس

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲+a=۴c\Rightarrow a=۴c-۱۲$$
$$\xrightarrow{(I)} ۸+۲(۴c-۱۲)=۵c\Rightarrow c=\frac{۱۶}{۳}$$

بنابراین $f(۲)=۵c=\frac{۸۰}{۳}$.

۱۲۳۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۲x+۴a & x>۲\\ ۳ax^۲+۲ & x<۲\end{cases}$$

پس

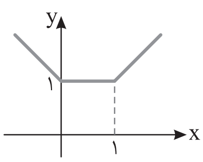
$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۲x+۴a)=۴+۴a$$
$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳ax^۲+۲)=۱۲a+۲$$

چون تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۴+۴a=۱۲a+۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین $f'(۴a)=f'(۱)=۳a+۲=\frac{۳}{۴}+۲=\frac{۱۱}{۴}$.

۱۲۳۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به شکل مقابل است و در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$. توجه کنید که $x=۰$ و $x=۱$ ریشه‌های سادهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند.



۱۲۳۷- گزینهٔ ۳ تابع در نقطهٔ $x=۱$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد:

$$x\geq ۱\Rightarrow f(x)=x(x^۲-x)=x^۳-x^۲$$
$$f'(x)=۳x^۲-۲x\Rightarrow f'_+(۱)=۳-۲=۱$$
$$۰\leq x\leq ۱\Rightarrow f(x)=x(x-x^۲)=x^۲-x^۳$$
$$f'(x)=۲x-۳x^۲\Rightarrow f'_-(۱)=۲-۳=-۱$$

ولی در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر است:

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x|x^۲-x|}{x}=\lim_{x\to ۰}|x^۲-x|=۰$$

توجه کنید که تابع $y=|g(x)|$ در ریشه‌های سادهٔ $g(x)=۰$ مشتق ندارد.

پس $y=|x^۲-x|$ در $x=۰$ و $x=۱$ مشتق ندارد ولی تابع $y=x|x^۲-x|$ به دلیل وجود عامل صفرکنندهٔ x که در قدرمطلق ضرب شده است در $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

۱۲۳۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=|x^۳-x^۲|=|x^۲(x-۱)|=x^۲|x-۱|$$

بنابراین تابع فقط در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا عبارت داخل قدرمطلق فقط یک ریشهٔ سادهٔ $x=۱$ دارد.

۱۲۳۹- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید چندجمله‌ای $y=x^۲-۲x+m$ ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. زیرا اگر این تابع دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta\leq ۰\Rightarrow ۴-۴m\leq ۰\Rightarrow m\geq ۱$$

۱۲۴۰- گزینهٔ ۲ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو عامل $x-۱$ در آن وجود داشته باشد. یعنی باید

$$x^۲+ax+b=(x-۱)^۲=x^۲-۲x+۱\Rightarrow a=-۲$$

۱۲۴۱- گزینهٔ ۱ تابع f در $x=\frac{\pi}{۲}$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است.

$$f(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}f(x)$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}a\sin x=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}(b\cos ۲x+b\cos x+۱)\Rightarrow a=-b+۱$$

از طرف دیگر باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x=\frac{\pi}{۲}$ برابر باشند.

$$x>\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f'(x)=a\cos x\Rightarrow f'_+(\frac{\pi}{۲})=۰$$
$$x<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f'(x)=-۲b\sin ۲x-b\sin x\Rightarrow f'_-(\frac{\pi}{۲})=-b$$

پس $b=۰$ و چون $a=-b+۱$ ، در نتیجه $a=۱$.

۱۲۴۲- گزینهٔ ۳ اولاً تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته است، زیرا

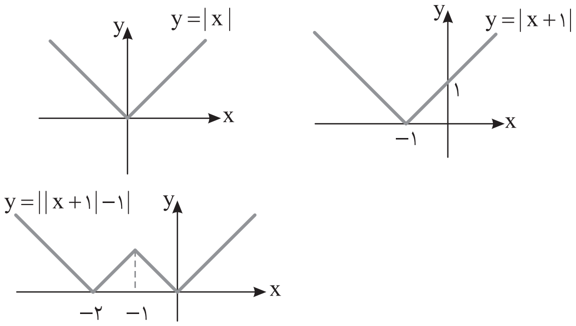
$$f(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)=0$$

ثانیاً در یک همسایگی راست نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ مقدار $[\cos x]$ برابر -1 است و تابع f با تابع $y=-\sin 2x$ برابر است. پس

$$f'_+(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}(-\sin 2x)'=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}-2\cos 2x=2$$

همچنین در یک همسایگی چپ نقطهٔ $\frac{\pi}{2}$ مقدار $[\cos x]$ برابر صفر است و تابع f با تابع ثابت صفر برابر است، پس $f'_-(\frac{\pi}{2})=0$. بنابراین تابع f در $x=\frac{\pi}{2}$ مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

۱۲۴۳- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم می‌شود:



در نقاط $x=0$، $x=-1$ و $x=-2$ نمودار تابع نقطهٔ گوشه‌ای دارد و تابع در این نقاط مشتق ندارد. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,-1,-2\}$.

۱۲۴۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های سادهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق هستند. بنابراین تابع f در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. در $x=-1$ تابع f تعریف نمی‌شود، بنابراین تابع f' هم تعریف نمی‌شود. پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,\pm1\}$. بنابراین سه عدد صحیح در دامنهٔ تابع f' قرار ندارند.

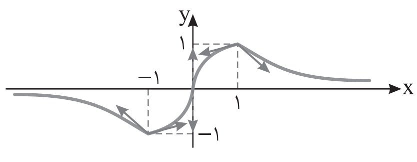
۱۲۴۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع f در $x=-1$ ناپیوسته است و در نتیجه مشتق‌پذیر نیست. در $x=1$ تابع پیوسته است، مشتق‌پذیری تابع در این نقطه را بررسی می‌کنیم:

$$|x|<1\Rightarrow f'(x)=2x\,,\quad |x|>1\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x^2}$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}2x=2\,,\quad f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{2}{x^2}=2$$

بنابراین تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است و در نتیجه $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1\}$.

۱۲۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع به‌صورت زیر است. تابع در $x=1$ و $x=-1$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد و در $x=0$ مماس موازی محور عرض‌ها دارد. پس در این سه نقطه تابع مشتق ندارد و در نتیجه $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,\pm1\}$.



۱۲۴۷- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=3$ مشتق‌پذیر نیست، پس مقدار $x^2+ax-12$ به‌ازای $x=3$ صفر است:

$$9+3a-12=0\Rightarrow a=1$$

بنابراین $f(x)=|x^2+x-12|$. در نزدیکی نقطهٔ -2 علامت عبارت x^2+x-12 منفی است، بنابراین

$$f(x)=-(x^2+x-12)\Rightarrow f'(x)=-2x-1\Rightarrow f'(-2)=3$$

۱۲۴۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که تابع $y=x^3+ax^2-ax$ حداقل یک ریشهٔ $x=0$ دارد: $y=x(x^2+ax-a)=xg(x)$

برای اینکه تابع f در سه نقطه مشتق نداشته باشد، باید تابع g دو ریشهٔ غیرصفر داشته باشد. پس $\Delta=a^2+4a>0$ و $a\neq0\Rightarrow a>0$ یا $a<-4$

۱۲۴۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که تابع $y=x^3+ax^2-ax$ حداقل یک ریشهٔ $x=0$ دارد: $y=x(x^2+ax-a)=xg(x)$. برای اینکه تابع f فقط در یک نقطه مشتق نداشته باشد، باید تابع g ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$\Delta=a^2+4a\le0\Rightarrow-4\le a<0$$

۱۲۵۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که عبارت $1-\sin x$ همواره نامنفی است. پس

$$f(x)=|\sin x||1-\sin x|=(1-\sin x)|\sin x|$$

فقط در $x=\pi$ عبارت داخل قدرمطلق یعنی $\sin x$ برابر صفر است، پس تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱۲۵۱- گزینهٔ ۱ شیب خط مماس برابر $f'(2)$ است.

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(2)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

خط مورد نظر از نقطهٔ $(2,f(2))$ می‌گذرد. پس معادلهٔ خطی را می‌خواهیم که از نقطهٔ $(2,\frac{3}{2})$ عبور کرده و شیب آن برابر $\frac{5}{4}$ باشد، یعنی

$$y-\frac{3}{2}=\frac{5}{4}(x-2)\Rightarrow5x-4y-4=0$$

۱۲۵۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=2\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x=5$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(5,2)$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\Rightarrow f'(5)=\frac{1}{4}$$

بنابراین شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{1}{4}$ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-2=\frac{1}{4}(x-5)\Rightarrow4y-x=3$$

۱۲۵۳- گزینهٔ ۲ در نقاطی که خط مماس بر نمودار موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین

$$f'(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x^4=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

پس معادلهٔ فوق دو جواب دارد و در دو نقطه، خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.

۱۲۵۴- گزینهٔ ۴ شیب خط $y=9x-1$ برابر ۹ است، پس مشتق تابع f در نقطهٔ مورد نظر باید برابر ۹ باشد:

$$f(x)=x^3-3x^2+15 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=9$$

$$3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x=-1\ \text{(غ.ق.ق.)}\ ,\ x=3$$

مقدار تابع در نقطه‌ای با طول مثبت مد نظر است، پس

$$f(3)=27-27+15=15$$

۱۲۵۵- گزینهٔ ۴ در نقطه‌ای که نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، مقدار تابع و مقدار مشتق آن صفر است. بنابراین:

$$f'(x)=3x^2+m=0 \Rightarrow m=-3x^2$$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^3+(-3x^2)x-54=0 \Rightarrow x^3=-27 \Rightarrow x=-3$$

بنابراین $m=-27$.

۱۲۵۶- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=-x+b$ برابر -1 است، بنابراین مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=2$ برابر با -1 است:

$$f'(x)=\frac{a(x+1)-(ax+3)}{(x+1)^2}=\frac{a-3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(2)=\frac{a-3}{(2+1)^2}=-1 \Rightarrow a=-6$$

۱۲۵۷- گزینهٔ ۱ شیب خط $y=\frac{2}{9}x+1$ برابر $\frac{2}{9}$ است. بنابراین مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=1$ برابر $\frac{2}{9}$ است.

$$f'(x)=\frac{(2x-m)(x+2)-(x^2-mx+1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(1)=\frac{(2-m)(3)-(2-m)}{(1+2)^2}=\frac{2(2-m)}{9}$$

بنابراین

$$\frac{2(2-m)}{9}=\frac{2}{9} \Rightarrow 2-m=1 \Rightarrow m=1$$

۱۲۵۸- گزینهٔ ۳ ابتدا نقطه‌ای با طول منفی روی نمودار تابع $f(x)=x^3-x^2$ پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب خط $y=x+k$ یعنی ۱ باشد:

$$f'(x)=3x^2-2x=1 \Rightarrow 3x^2-2x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{(غ.ق.ق.)} \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین خط $y=x+k$ در نقطهٔ $A(-\frac{1}{3},-\frac{4}{27})$ بر نمودار تابع مماس می‌شود و نقطهٔ A روی این خط قرار دارد. یعنی $-\frac{4}{27}=-\frac{1}{3}+k \Rightarrow k=\frac{5}{27}$

۱۲۵۹- گزینهٔ ۳ باید شیب خط یعنی a بتواند با مشتق تابع برابر شود. بنابراین $a=3x^2-1=f'(x)$. واضح است که $3x^2-1 \geq -1$ بنابراین $a \geq -1$.

۱۲۶۰- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=-x^2$ را k واحد به بالا انتقال دهیم، به نمودار تابع $f(x)=-x^2+k$ تبدیل می‌شود $(k>0)$. می‌خواهیم خط $y=2x+3$ بر نمودار تابع f مماس شود. ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع f را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه برابر شیب این خط یعنی ۲ باشد:

$$f'(x)=-2x=2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=1$$

پس نقطهٔ $A(-1,1)$ نقطهٔ مورد نظر است که باید روی نمودار تابع $f(x)=-x^2+k$ باشد. پس $-1+k=1 \Rightarrow k=2$

۱۲۶۱- گزینهٔ ۲ وقتی خط مماس بر نمودار در یک نقطه موازی محور طول‌هاست، مقدار مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر است. پس

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x(1+\sin x)-\cos x\sin x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

بنابراین $f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=0$

پس در نقطهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2})$ خط مماس بر نمودار تابع موازی محور طول‌هاست.

۱۲۶۲- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل معلوم می‌شود که $f(2)=\frac{3}{2}$ و $f'(2)$ برابر است با شیب خطی که از نقاط $(0,3)$ و $(4,0)$ می‌گذرد، پس $f'(2)=\frac{3-0}{0-4}=-\frac{3}{4}$. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول ۲ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$g(x)=4f^2(x)+x \Rightarrow g'(x)=8f'(x)f(x)+1 \Rightarrow g'(2)=8f'(2)f(2)+1$$

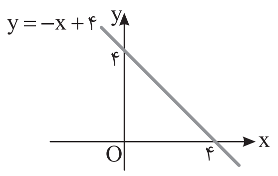
$$\text{شیب خط مماس}=g'(2)=8\times\frac{-3}{4}\times\frac{3}{2}+1=-8$$

همچنین $g(2)=4f^2(2)+2=4(\frac{3}{2})^2+2=11$. بنابراین می‌خواهیم معادلهٔ خطی با شیب -8 را بنویسیم که از نقطهٔ $(2,11)$ می‌گذرد:

$$y-11=-8(x-2) \Rightarrow y=-8x+27$$

۱۲۶۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(1)=3$ و $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$. بنابراین $f'(1)=-1$ و در نتیجه معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(1,3)$ به‌صورت زیر است:

$$y-3=-(x-1) \Rightarrow y=-x+4$$



این خط محورهای مختصات را در نقاط $A(0,4)$ و $B(4,0)$ قطع می‌کند. بنابراین مساحت مثلث OAB برابر است با $\frac{4\times4}{2}=8$.

۱۲۶۴- گزینهٔ ۱ چون A نقطه‌ای به طول صفر روی سهمی به معادلهٔ $y=-x^2+bx+2$ است، پس عرض آن برابر است با $y=2$. چون خط d از نقطه‌های $(0,2)$ و $(3,0)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با $\frac{2-0}{0-3}=-\frac{2}{3}$. چون خط d در نقطه‌ای به طول صفر بر سهمی مماس است، مقدار y' به‌ازای $x=0$ برابر با شیب خط d است:

$$y=-x^2+bx+2 \Rightarrow y'=-2x+b \xrightarrow{x=0} b=-\frac{2}{3}$$

۱۲۶۵- گزینهٔ ۳ باید شیب خط بتواند با مشتق تابع برابر شود. بنابراین

$$y'=\frac{2}{3}(1+\tan^2(\frac{x}{3}))=a \Rightarrow 1+\tan^2\frac{x}{3}=\frac{3a}{2} \Rightarrow \tan^2\frac{x}{3}=\frac{3a}{2}-1$$

$$\tan^2\frac{x}{3}\geq 0 \Rightarrow \frac{3a}{2}\geq 1 \Rightarrow 3a\geq 2 \Rightarrow a\geq\frac{2}{3}$$

۱۲۶۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=3x+1 \end{cases} \Rightarrow y=-2$$

بنابراین

$$f(-1)=-2 \Rightarrow -a+b=-2 \quad (1)$$

از طرف دیگر، شیب خط $y=3x+1$ برابر ۳ است و چون نمودار تابع f در نقطهٔ $x=-1$ بر این خط مماس است، پس $f'(-1)=3$. در نتیجه

$$f'(x)=3ax^2+2bx+2 \Rightarrow f'(-1)=3a-2b+2=3 \Rightarrow 3a-2b=1 \quad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=-5$، بنابراین $a+b=-8$.

۱۲۶۷- گزینهٔ ۳ شیب خط $2x+y=3$ برابر -2 است. پس شیب خط مماس بر نمودار تابع f برابر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین باید نقاطی را پیدا کنیم که مقدار مشتق تابع در آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است. پس

$$f'(x)=\frac{5(x+2)-(5x+2)}{(x+2)^2}=\frac{8}{(x+2)^2}=\frac{1}{2}$$

$$(x+2)^2=16 \Rightarrow x=2\,,\ x=-6$$

$$x=2 \Rightarrow f(2)=\frac{5\times 2+2}{2+2}=3\,, \qquad x=-6 \Rightarrow f(-6)=\frac{5\times(-6)+2}{-6+2}=7$$

پس نقاط مورد نظر $A(2,3)$ و $B(-6,7)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $AB=\sqrt{(-6-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{80}$.

۱۲۶۸- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خطی که نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ را به هم وصل می‌کند، به‌صورت $y=0$ است. یعنی می‌خواهیم بدانیم تابع در چه نقطه‌ای بر محور طول‌ها مماس است. بنابراین

$$f'(x)=4x^3-2x=0 \Rightarrow x=0,\ x^2=\frac{1}{2}$$

اگر $x=0$، آن‌گاه $f(x)=0$، پس نمودار تابع در $(0,0)$ بر محور طول‌ها مماس است. اگر $x^2=\frac{1}{2}$، آن‌گاه $f(x)=-\frac{1}{4}$، پس نمودار تابع در این نقاط بر محور طول‌ها مماس نیست. توجه کنید که شرط‌های $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ برای نقاطی که در آن‌ها نمودار تابع f بر محور طول‌ها مماس است، برقرار است.

۱۲۶۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطهٔ تماس را $(\alpha\,, 2\alpha-\alpha^2)$ در نظر بگیریم، معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y-(2\alpha-\alpha^2)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ است. چون $f'(\alpha)=2-2\alpha$، پس $y-(2\alpha-\alpha^2)=(2-2\alpha)(x-\alpha)$. نقطهٔ $(4,1)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$1-(2\alpha-\alpha^2)=(2-2\alpha)(4-\alpha) \Rightarrow 1-2\alpha+\alpha^2=8-2\alpha-8\alpha+2\alpha^2$$

$$\alpha^2-8\alpha+7=0 \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha-7)=0 \Rightarrow \alpha=1,\quad \alpha=7$$

اگر $\alpha=1$، آن‌گاه $f'(\alpha)=0$ و اگر $\alpha=7$، آن‌گاه $f'(\alpha)=-12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

راه‌حل دوم فرض کنید خطی که از نقطهٔ $A(4,1)$ می‌گذرد در نقطهٔ $B(\alpha, f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شود. در این صورت شیب این خط برابر با $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}$ است. از طرف دیگر، شیب این خط برابر $f'(\alpha)$ است. پس مقدار $f'(\alpha)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=2x-x^2 \Rightarrow f'(x)=2-2x \Rightarrow f'(\alpha)=2-2\alpha$$

بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-4}=2-2\alpha \Rightarrow \frac{2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha-4}=2-2\alpha$$

$$2\alpha-\alpha^2-1=2\alpha-8-2\alpha^2+8\alpha \Rightarrow \alpha^2-8\alpha+7=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha-7)=0 \Rightarrow \alpha=1, \alpha=7$$

اگر $\alpha=1$، آن‌گاه $f'(\alpha)=0$ و اگر $\alpha=7$، آن‌گاه $f'(\alpha)=-12$. بنابراین مجموع شیب‌های خطوط مماس برابر -12 است.

۱۲۷۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر مختصات نقطهٔ تماس را $(\alpha\,, \frac{5\alpha+1}{\alpha-1})$ در نظر بگیریم، معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر است:

$$y-\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

چون $f'(\alpha)=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$، پس $y-\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}(x-\alpha)$.

نقطهٔ $(0,2)$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند. پس

$$2-\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}(0-\alpha) \Rightarrow \frac{2(\alpha-1)-(5\alpha+1)}{\alpha-1}=\frac{-6(-\alpha)}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{2\alpha-2-5\alpha-1}{\alpha-1}=\frac{6\alpha}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow -3\alpha-3=\frac{6\alpha}{\alpha-1} \Rightarrow -3\alpha^2-6\alpha+3=0$$

مقادیر α که از معادلهٔ فوق حاصل می‌شوند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -2 است.

راه‌حل دوم فرض کنید این خط‌ها در نقطهٔ $B(\alpha, f(\alpha))$ بر نمودار تابع مماس شوند. در این صورت شیب این خط‌ها برابر $f'(\alpha)$ خواهد بود. بنابراین

$$f(x)=\frac{5x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{-6}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(\alpha)=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

از طرف دیگر، شیب این خط‌ها که از دو نقطهٔ $A(0,2)$ و $B(\alpha, f(\alpha))$ می‌گذرند برابر است با $\frac{f(\alpha)-2}{\alpha-0}$. بنابراین

$$\frac{f(\alpha)-2}{\alpha}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow \frac{\frac{5\alpha+1}{\alpha-1}-2}{\alpha}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2}$$

$$\frac{3\alpha+3}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{-6}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow 3(\alpha+1)(\alpha-1)=-6\alpha \Rightarrow \alpha^2+2\alpha-1=0$$

مقادیر α که از معادلهٔ فوق به‌دست می‌آیند، طول نقاط تماس هستند که مجموع آن‌ها -2 است.

۱۲۷۱- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[-1\,,2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{0-(-\frac{3}{2})}{3}=\frac{1}{2}$$

۱۲۷۲- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[1,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{\frac{1}{a}-1}{a-1}=\frac{1-a}{a(a-1)}=-\frac{1}{a}$ است. بنابراین

$$-\frac{1}{a}=-\frac{2}{3} \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

۱۲۷۳- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[4,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(4)}{a-4}=\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}$ است. بنابراین

$$\frac{\sqrt{a}-2}{a-4}=\frac{1}{6}\Rightarrow 6\sqrt{a}-12=a-4\Rightarrow 6\sqrt{a}=a+8\Rightarrow 36a=a^2+16a+64$$

$$a^2-20a+64=0\Rightarrow(a-16)(a-4)=0\Rightarrow a=16\,,\quad a=4\ (\text{غ.ق.ق})$$

۱۲۷۴- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\frac{1}{x-4}$ در بازهٔ $[-a,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(-a)}{2a}$ است:

$$\frac{f(a)-f(-a)}{2a}=\frac{\frac{1}{a-4}-\frac{1}{-a-4}}{2a}=\frac{-a-4-a+4}{2a(16-a^2)}=\frac{1}{a^2-16}$$

بنابراین

$$\frac{1}{a^2-16}=\frac{-1}{7}\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=3,\quad a=-3\ (\text{غ.ق.ق})$$

۱۲۷۵- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a-1,a]$ برابر $\frac{f(a)-f(a-1)}{a-a+1}$ است:

$$\frac{f(a)-f(a-1)}{1}=\frac{a-\frac{1}{a}-(a-1-\frac{1}{a-1})}{1}=\frac{-1}{a}+\frac{1}{a-1}+1=1+\frac{1}{a^2-a}$$

$$1+\frac{1}{a^2-a}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{a^2-a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a^2-a=2\Rightarrow a^2-a-2=0$$

$$(a-2)(a+1)=0\Rightarrow a=-1\,,2$$

۱۲۷۶- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-3,0]$ برابر است با

$$\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=\frac{0-(-30)}{3}=10$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است با $f'(a)$.

$$f'(x)=3x^2+1\Rightarrow f'(a)=3a^2+1$$

بنابراین

$$3a^2+1=10\Rightarrow a^2=3\Rightarrow a=\sqrt{3}\ (\text{غ.ق.ق}),\quad a=-\sqrt{3}$$

۱۲۷۷- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,1]$ برابر است با $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-k$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ $x=1$ برابر است با

$$f'(x)=3x^2-2kx\xrightarrow{x=1}f'(1)=3-2k$$

بنابراین

$$3-2k=1-k\Rightarrow k=2$$

۱۲۷۸- گزینهٔ ۱ اگر S مساحت و P محیط دایره‌ای به شعاع r باشد، آن‌گاه

$$S=\pi r^2\Rightarrow r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}\,,\quad P=2\pi r=2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}=2\sqrt{\pi}\sqrt{S}$$

بنابراین

$$P(S)=2\sqrt{\pi}\sqrt{S}\Rightarrow P'(S)=2\sqrt{\pi}\times\frac{1}{2\sqrt{S}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{S}}$$

مقدار $P'(4\pi)$ خواسته شده که برابر $\frac{1}{2}$ است.

۱۲۷۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$S=x(6-x)\Rightarrow S(x)=6x-x^2\Rightarrow S'(x)=6-2x$$

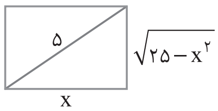
مقدار $S'(2)$ خواسته شده که برابر ۲ است.

۱۲۸۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس عرض مستطیل برابر است با $\sqrt{25-x^2}$. پس

$$P(x)=2(x+\sqrt{25-x^2})$$

$$P'(x)=2(1-\frac{2x}{2\sqrt{25-x^2}})=2-\frac{2x}{\sqrt{25-x^2}}$$

مقدار $P'(4)$ خواسته شده که برابر است با $P'(4)=2-\frac{8}{\sqrt{25-16}}=-\frac{2}{3}$.



۱۲۸۱- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=3x^2-2x+1\Rightarrow f''(x)=6x-2$$

بنابراین باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $3x^2-2x+1=6x^2-2x$ را مشخص کنیم:

$$3x^2=1\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس در دو نقطه تساوی $f'(x)=xf''(x)$ برقرار است.

۱۲۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases}f'(x)=4x^3+2ax+b\xrightarrow{x=1}14=4+2a+b\\ f''(x)=12x^2+2a\xrightarrow{x=1}16=12+2a\end{cases}$$

از این دستگاه معادلات نتیجه می‌شود $a=2$ و $b=6$. پس $a+b=8$.

۱۲۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=(x+k)^2(x-1)$$

$$f'(x)=2(x+k)(x-1)+(x+k)^2$$

$$f''(x)=2(x-1)+2(x+k)+2(x+k)$$

$$f''(2)=2+4(2+k)\xrightarrow{f''(2)=2}2+4(2+k)=2\Rightarrow k=-2$$

۱۲۸۴- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+4)^2-4x(x^2+4)(-x^2+4)}{(x^2+4)^4}$$

$$=\frac{-2x(x^2+4)-4x(-x^2+4)}{(x^2+4)^3}=\frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}$$

بنابراین

$$f''(x)=0\Rightarrow 2x^3-24x=0\Rightarrow x=0\,,\ x=\pm\sqrt{12}$$

پس در سه نقطه مشتق دوم تابع f برابر صفر است.

۱۲۸۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^6}{x^2}+\frac{x^4}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x^4+x^2+1+\frac{1}{x^2}$$

بنابراین

$$f'(x)=4x^3+2x-\frac{2}{x^3}\Rightarrow f''(x)=12x^2+2+\frac{6}{x^4}$$
$$f''(1)=12+2+6=20$$

۱۲۸۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=(x^{\frac{1}{3}}-1)(x^{\frac{1}{2}}+1)=x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}-1$$

$$f'(x)=\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=-\frac{5}{36}x^{-\frac{7}{6}}-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

بنابراین $f''(1)=-\frac{5}{36}-\frac{2}{9}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{9}$.

۱۲۸۷- گزینهٔ ۴ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

بنابراین $f''(\sqrt{3})=\frac{1}{(3+1)\sqrt{3+1}}=\frac{1}{8}$.

۱۲۸۸- گزینهٔ ۱ اگر از دو طرف تساوی داده شده مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $2f'(2x-3)=3x^2+2ax+b$. اگر باز هم از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید $4f''(2x-3)=6x+2a$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=1$، به‌دست می‌آید

$$4f''(-1)=6+2a\Rightarrow 4\times4=6+2a\Rightarrow a=5$$

۱۲۸۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x & x\geq0\\ -x & x<0\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases},\quad f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

چون تابع در نقطهٔ $x=0$ مشتق اول ندارد، پس مشتق دوم هم ندارد.

۱۲۹۰- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=4x^3+6ax^2+12x$$

$$f''(x)=12x^2+12ax+12=12(x^2+ax+1)$$

پس معادلهٔ $x^2+ax+1=0$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta=a^2-4<0\Rightarrow|a|<2$$

۱۲۹۱- گزینهٔ ۳ اگر از دو طرف تساوی

$$f(3x-2)=x^3+ax^2+bx+c$$

دو بار پشت سرهم مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$3f'(3x-2)=3x^2+2ax+b\Rightarrow 9f''(3x-2)=6x+2a$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$ به‌دست می‌آید:

$$9f''(-5)=-6+2a\Rightarrow 18=-6+2a\Rightarrow a=12$$

۱۲۹۲- گزینهٔ ۴ اگر از دو طرف تساوی $(gof)(x)=x^4+2x^2$ مشتق بگیریم به‌دست می‌آید: $f'(x)g'(f(x))=4x^3+4x$

اگر از دو طرف این تساوی مشتق بگیریم به‌دست می‌آید:

$$f''(x)g'(f(x))+f'(x)f'(x)g''(f(x))=12x^2+4$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=0$ به‌دست می‌آید:

$$0+(f'(0))^2g''(f(0))=4\Rightarrow g''(1)=4$$

۱۲۹۳- گزینهٔ ۴ اولاً تابع باید در نقطهٔ $x=1$ پیوسته باشد و مشتق اول داشته باشد. پس

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow a+b+1=c \qquad (I)$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x<1\\ \frac{-c}{x^2} & x>1\end{cases},\quad f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow 2a+b=-c \qquad (II)$$

ثانیاً باید مشتق دوم چپ و مشتق دوم راست تابع با هم برابر باشند:

$$f''(x)=\begin{cases}2a & x<1\\ \frac{2c}{x^3} & x>1\end{cases},\quad f''_-(1)=f''_+(1)\Rightarrow 2a=2c\Rightarrow a=c$$

اگر در تساوی‌های (I) و (II) به جای c، a را قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$\begin{cases}a+b+1=a\\ 2a+b=-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+1=0\Rightarrow b=-1\\ 3a+b=0\Rightarrow a=\frac{1}{3}\end{cases}$$

و در نتیجه $a+b=-\frac{2}{3}$.

۱۲۹۴- گزینهٔ ۱ ابتدا مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم

$$f'(x)=\cos x-x\sin x+k\cos x$$

$$f''(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x-k\sin x$$
$$=-(k+2)\sin x-x\cos x$$

بنابراین

$$f''(\frac{\pi}{2})=-(k+2)=-4\Rightarrow k=2$$

۱۲۹۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sin^2x\Rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x=\sin2x\Rightarrow f''(x)=2\cos2x$$

بنابراین

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=(f'(x))'=f''(x)=2\cos2x$$

۱۲۹۶- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=\sin ax\Rightarrow f'(x)=a\cos ax\Rightarrow f''(x)=-a^2\sin ax$$

بنابراین از $f''(x)=-64f(x)$ نتیجه می‌شود

$$-a^2\sin ax=-64\sin ax\Rightarrow a^2=64\Rightarrow a=\pm8$$

۱۲۹۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2x}}=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin2x$$

بنابراین

$$f'(x)=\cos2x\Rightarrow f''(x)=-2\sin2x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-2\sin\frac{\pi}{2}=-2$$

۱۲۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y=\sin kx-\cos kx$$
$$y'=k\cos kx+k\sin kx$$
$$y''=-k^2\sin kx+k^2\cos kx$$

بنابراین

$$\frac{y''}{y}=\frac{-k^2\sin kx+k^2\cos kx}{\sin kx-\cos kx}=\frac{-k^2(\sin kx-\cos kx)}{\sin kx-\cos kx}=-k^2$$

پس $-k^2=-16\Rightarrow |k|=4$

۱۲۹۹- گزینهٔ ۳ مشتق اول و دوم تابع در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{4}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2a\cos 2x-2b\sin 2x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=-2b$$
$$f''(x)=-4a\sin 2x-4b\cos 2x\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-4a$$

بنابراین

$$f'(\frac{\pi}{4})=-2b=24\Rightarrow b=-12\ ,\ \ f''(\frac{\pi}{4})=-4a=12\Rightarrow a=-3$$

در نتیجه $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$.

۱۳۰۰- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول

$$f'(x)=4\sin^3 x\cos x-4\sin x\cos^3 x$$
$$-4\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$$

بنابراین $f''(x)=-4\cos 4x$. پس $f''(\frac{\pi}{12})=-4\cos\frac{\pi}{3}=-2$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

بنابراین $f'(x)=-\sin 4x\Rightarrow f''(x)=-4\cos 4x$

$$f''(\frac{\pi}{12})=-4\cos\frac{\pi}{3}=-2$$

۱۳۰۱- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^7+1}=\lim_{x\to -1}\frac{5x^4}{7x^6}=\frac{5}{7}$$

۱۳۰۲- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^4+x^3+x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x^2+1}$$

توجه کنید که این حد هم حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. بنابراین باز هم از قاعدهٔ هوپیتال نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{4x^3+3x^2+1}=\lim_{x\to -1}\frac{6x+2}{12x^2+6x}=\frac{-6+2}{12-6}=-\frac{2}{3}$$

۱۳۰۳- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^4-(2x-3)^4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-1)^3-8(2x-3)^3}{2x}=\frac{4-8}{4}=-1$$

۱۳۰۴- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{2x}=\frac{n}{2}=10\Rightarrow n=20$$

۱۳۰۵- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-8}-2}{\sqrt{5x+10}-5}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{4}{2\sqrt{4x-8}}}{\frac{5}{2\sqrt{5x+10}}}=\frac{\frac{4}{2\times 2}}{\frac{5}{2\times 5}}=2$$

۱۳۰۶- گزینهٔ ۱ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{3x^2}=\frac{\frac{1}{3\times 4}}{3\times 4}=\frac{1}{144}$$

۱۳۰۷- گزینهٔ ۱ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos 2-\cos 2x}{x^2-x}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{2\sin 2x}{2x-1}=\frac{2\sin 2}{2-1}=2\sin 2$$

۱۳۰۸- گزینهٔ ۳ وقتی $x\to(\frac{\pi}{2})^-$، داریم: $3x\to(\frac{3\pi}{2})^-$ و طبق دایرهٔ مثلثاتی: $\cos 3x<0$. بنابراین:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{|\cos 3x|}{\cot x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{-\cos 3x}{\cot x}\xrightarrow{HOP}$$
$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{3\sin 3x}{-1-\cot^2 x}=\frac{3\times(-1)}{-1}=3$$

۱۳۰۹- گزینهٔ ۴ وقتی $x\to(-1)^+$، داریم: $x>-1$، بنابراین $x^2-1<0$ و درنتیجه:

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\tan\pi x}{|x^2-1|}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\tan\pi x}{1-x^2}\xrightarrow{HOP}$$
$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\pi(1+\tan^2(\pi x))}{-2x}=\frac{\pi\times 1}{2}=\frac{\pi}{2}$$

۱۳۱۰- گزینهٔ ۲ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد مورد نظر برابر است با:

$$\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)}{-\frac{\pi}{a}\sin(\frac{\pi x}{a})}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to a}\frac{2}{-\frac{\pi^2}{a^2}\cos(\frac{\pi x}{a})}=\frac{2a^2}{\pi^2}$$

با مقایسهٔ نتیجهٔ به‌دست آمده و فرض سؤال داریم: $\frac{2a^2}{\pi^2}=\frac{2}{\pi^2}$ بنابراین $a=\pm 1$.

۱۳۱۱- گزینهٔ ۲ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+14}-2x}{\sqrt[3]{x+25}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+14}}-2}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+25)^2}}}=\frac{\frac{1}{8}-2}{\frac{1}{3\times 9}}=-\frac{405}{8}$$

۱۳۱۲- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2\times 2}=\frac{5}{12}$$

۱۳۱۳- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{2}}-x}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1}{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=6$$

۱۳۱۴- گزینهٔ ۴ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۹}-۳}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{a}{۲\sqrt{ax+۹}}}{۱}=\frac{a}{۲\sqrt{۹}}=\frac{a}{۶}$$

پس $\frac{a}{۶}=۴$ و در نتیجه $a=۲۴$.

۱۳۱۵- گزینهٔ ۴ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۱}{n\sqrt[n]{(\cos x)^{n-۱}}}\times(-\sin x)}{۲x}=\frac{۱}{۸}$$

$$\frac{۱}{۲n}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{۱}{۲n}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow n=۴$$

۱۳۱۶- گزینهٔ ۴ با توجه بـه آنکه $۱+\cos ۲x=۲\cos^۲ x$، ضابطهٔ تابع را به‌صـورت $f(x)=\frac{\sqrt{۲}|\cos x|}{\sqrt{\pi}-\sqrt{۲x}}$ می‌تـوان نوشـت. بنابرایـن بایـد حاصـل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt{۲}\cos x}{\sqrt{\pi}-\sqrt{۲x}}$ و قرینهٔ آن را به‌دست آوریم تا مقادیر حدهای راست و چپ پیدا شوند.

داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt{۲}\cos x}{\sqrt{\pi}-\sqrt{۲x}}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-\sqrt{۲}\sin x}{-\frac{۱}{\sqrt{۲x}}}=\sqrt{۲\pi}$$

بنابراین اختلاف حدهای راست و چپ برابر است با:

$$|\sqrt{۲\pi}-(-\sqrt{۲\pi})|=۲\sqrt{۲\pi}$$

۱۳۱۷- گزینهٔ ۴ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\frac{\sqrt{۱-\sin ۲x}}{\tan x-۱}=\frac{\sqrt{\sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x}}{\tan x-۱}$$

$$=\frac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^۲}}{\tan x-۱}=\frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-۱}$$

وقتی $x\to(\frac{\pi}{۴})^-$ طبق دایرهٔ مثلثاتی داریم: $\sin x<\cos x$، پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^-}\frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\tan x-۱}$$

$$\overset{\text{HOP}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-\sin x-\cos x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۳۱۸- گزینهٔ ۴ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-۳\sin ۳x+۳\cos^۲ x\sin x}{۲x}$$

$$=\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin ۳x+(۱-\sin^۲ x)\sin x}{x}$$

$$=\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin ۳x+\sin x-\sin^۳ x}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{-۳x+x-x^۳}{x}=\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{-۲x-x^۲}{x}$$

$$=\frac{۳}{۲}\lim_{x\to ۰}(-۲-x)=\frac{۳}{۲}\times(-۲)=-۳$$

۱۳۱۹- گزینهٔ ۳ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x+۳\sin ۳x}{\frac{-۲x}{-۲\sqrt{۴-x^۲}}}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to ۰}\frac{(-x+۹x)\sqrt{۴-x^۲}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}۸\sqrt{۴-x^۲}=۱۶$$

۱۳۲۰- گزینهٔ ۳ با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\pi(۱+\tan^۲(\pi x))}{۲x-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{\pi}{۲-\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\pi}{۳}$$

۱۳۲۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to -۲}\frac{۲f(x)-۶}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{۲(f(x)-۳)}{x+۲}=۲\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=۲f'(-۲)$$

از طرف دیگر، مقدار $f'(-۲)$ برابر شـیب خط ممـاس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(-۲,۳)$، یعنی شـیب خط d اسـت. اکنـون توجه کنید که چـون خط d از نقطه‌های $A(-۲,۳)$ و $(۱,۰)$ می‌گذرد، شیب آن برابر است با $\frac{۳-۰}{-۲-۱}=-۱$.

بنابراین $f'(-۲)=-۱$ و حد مورد نظر برابر است با $۲f'(-۱)=۲(-۱)=-۲$.

۱۳۲۲- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f^۳(x)-f^۳(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{f^۳(x)-f^۳(-۲)}{x-(-۲)}$$

$$=(f^۳)'(-۲)=۳f'(-۲)f^۲(-۲)$$

از طرف دیگر، $f(-۲)=۳$ و $f'(x)=\frac{۲x-۱}{۲\sqrt{x^۲-x+۳}}$، پس

$$f'(-۲)=\frac{-۵}{۲\sqrt{۹}}=-\frac{۵}{۶}$$

به این ترتیب، مقدار حد مورد نظر برابر است با $۳(-\frac{۵}{۶})\times ۳^۲=-\frac{۴۵}{۲}$.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f^۳(x)-f^۳(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{۳f'(x)f^۲(x)}{۱}$$

از طرف دیگر، $f(-۲)=۳$ و $f'(x)=\frac{۲x-۱}{۲\sqrt{x^۲-x+۳}}$، پس

$$f'(-۲)=\frac{-۵}{۲\sqrt{۹}}=-\frac{۵}{۶}$$

پس $\lim_{x\to -۲}(۳f'(x)f^۲(x))=۳f'(-۲)f^۲(-۲)=-\frac{۴۵}{۲}$.

۱۳۲۳- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول اگر فرض کنیم $H=-h^۲$، آن‌گاه $H\to ۰^-$ و در نتیجه

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h^۲)-f(۲)}{h^۲-h^۴}=\lim_{H\to ۰^-}\frac{f(۲+H)-f(۲)}{-H-H^۲}$$

$$=\lim_{H\to ۰^-}\frac{f(۲+H)-f(۲)}{H}\times\lim_{H\to ۰^-}\frac{-۱}{۱+H}=-f'_-(۲)=۶$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم (به درس آخر این فصل مراجعه کنید):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h^2)-f(2)}{h^2-h^4}=\lim_{h\to 0}\frac{-2hf'(2-h^2)}{2h-4h^3}=\lim_{h\to 0}\frac{(-f'(2-h^2))}{1-2h^2}$$

$$=\lim_{H\to 0^+}\frac{(-f'(2-H))}{1-2H}=-f'_-(2)=6$$

توجه کنید که $H=h^2$.

۱۳۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=\begin{cases}2x+4 & x>2\\ 3x^2+2x & x<2\end{cases}$. بنابراین

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}f'(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x+4)=4+4=8$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}f'(x)=\lim_{x\to 2^-}(3x^2+2x)=12+4=16$$

و در نتیجه $f'_+(2)-f'_-(2)=8-16=-8$.

۱۳۲۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$g(0)=0,\quad \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$$

بنابراین

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-2x}{f(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{f(x)}=\frac{-2}{2}=-1$$

۱۳۲۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2ax)\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(ax^2+2)}{3x+1}$$

بنابراین

$$f'(1)=\frac{7}{16}\Rightarrow\frac{(2a)(2)-\frac{3}{2\times 2}(a+2)}{4}=\frac{7}{16}$$

$$16a-3(a+2)=7\Rightarrow 13a=13\Rightarrow a=1$$

۱۳۲۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}x}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{g^3(x)}$$

از طرف دیگر $g'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=-f(x)$.

بنابراین

$$f'(x)g'(x)=\left(\frac{1}{g^3(x)}\right)(-f(x))=-\frac{f(x)}{g^3(x)}$$

۱۳۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x^3+x)=g\left(\frac{4}{x}\right)\Rightarrow(3x^2+1)f'(x^3+x)=-\frac{4}{x^2}g'\left(\frac{4}{x}\right)$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$، نتیجه می‌شود

$$4f'(2)=-4g'(4)\Rightarrow f'(2)=-g'(4)=4$$

۱۳۲۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2+2x+a}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2ax+2)(x^2+1)^2-4x(x^2+1)(-ax^2+2x+a)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(-2ax+2)(x^2+1)-4x(-ax^2+2x+a)}{(x^2+1)^3}$$

بنابراین

$$f''(1)=\frac{(-2a+2)(2)-4(-a+2+a)}{2^3}=\frac{-a-1}{2}=4\Rightarrow a=-9$$

۱۳۳۰- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,0]$ برابر است با

$$\frac{f(0)-f(a)}{0-a}=\frac{a^2-2a}{-a}=-a+2$$

آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,a+1]$ برابر است با

$$\frac{f(a+1)-f(0)}{a+1-0}=\frac{-(a+1)^2+2(a+1)}{a+1}=\frac{-a^2+1}{a+1}=-a+1$$

بنابراین

$$(-a+2)+(-a+1)=4\Rightarrow -2a=1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۱۳۳۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که $f(1)=0$، پس

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x(2x-1)(2x-2)\cdots(2x-12)-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(4x(2x-1)(2x-3)(2x-4)\cdots(2x-12))$$

$$=4\times 1(1)(-1)(-2)(-3)\cdots(-10)=4\times 10!$$

راه‌حل دوم با توجه به اینکه مقدار $2x-2$ به‌ازای $x=1$ برابر صفر است، کافی است مشتق این عبارت یعنی ۲ را در مقدار عبارت $2x(2x-1)(2x-3)(2x-4)\cdots(2x-12)$ به‌ازای $x=1$ ضرب کنیم.

$$f'(1)=2\times 2\times 1\times(-1)(-2)\cdots(-10)=4\times 10!$$

۱۳۳۲- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^3+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{(x^3+\sqrt{x})'(x^2+\sqrt[3]{x})-(x^2+\sqrt[3]{x})'(x^3+\sqrt{x})}{(x^2+\sqrt[3]{x})^2}$$

$$=\frac{(3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2+\sqrt[3]{x})-(2x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(x^3+\sqrt{x})}{(x^2+\sqrt[3]{x})^2}$$

اگر در تساوی فوق قرار دهیم $x=1$، نتیجه می‌شود:

$$f'(1)=\frac{(3+\frac{1}{2})(1+1)-(2+\frac{1}{3})(1+1)}{(1+1)^2}=\frac{7}{12}$$

۱۳۳۳- گزینهٔ ۲ در نزدیکی نقطهٔ $\frac{1}{2}$، علامت عبارت x^2-x منفی است و $1<3x<2$، پس در نزدیکی نقطهٔ $\frac{1}{2}$ تساوی‌های $|x^2-x|=x-x^2$ و $[3x]=1$ برقرارند و

$$f(x)=\frac{x-x^2}{x^3-1}=\frac{-x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{-x}{x^2+x+1}\quad (x\neq 1)$$

در نتیجه

$$f'(x)=-\frac{x^2+x+1-(2x+1)x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{4}-1}{(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1)^2}=-\frac{12}{49}$$

۱۳۳۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تابع در نقطهٔ $x=1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=4$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+3 & x>1\\ 6x & x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}(3x^2+3)=6\\ f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}(6x)=6\end{cases}$$

بنابراین $f'(1)=6$، از طرف دیگر

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-4}{x^3-x}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x(x+1)}=f'(1)\times\frac{1}{2}=6\times\frac{1}{2}=3$$

۱۳۳۵- گزینهٔ ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$$

پس

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)+5}{x-4}=5\Rightarrow f(4)=-5,\ f'(4)=5$$

از طرف دیگر،

$$g(x)=\frac{x}{f(2x)}\Rightarrow g'(x)=\frac{f(2x)-2xf'(2x)}{f^2(2x)}$$

بنابراین $g'(2)=\frac{f(4)-4f'(4)}{f^2(4)}=\frac{-5-4\times5}{(-5)^2}=-1$.

۱۳۳۶- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع gof را به‌دست می‌آوریم. اگر $x\geq0$، آن‌گاه
$f(x)=4x+x=5x$

$$(gof)(x)=g(5x)=4(5x)-|5x|=20x-5x=15x$$

اگر $x<0$، آن‌گاه $f(x)=4x-x=3x$ و

$$(gof)(x)=g(3x)=4(3x)-|3x|=12x+3x=15x$$

بنابراین $(gof)(x)=15x$ و درنتیجه $(gof)'(x)=15$ و $(gof)'(0)=15$.

۱۳۳۷- گزینهٔ ۳ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید تابع $y=x^2-6x+m$ ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد، زیرا اگر این تابع دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، آن‌گاه تابع f در این دو ریشه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین

$$\Delta=36-4m\leq0\Rightarrow m\geq9$$

پس m مقادیر طبیعی ۱ تا ۸ را نمی‌تواند داشته باشد.

۱۳۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{1-\cos2x}{\sin2x}=\frac{2\sin^2x}{2\sin x\cos x}=\tan x\quad(x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z})$$

بنابراین

$$f'(x)=1+\tan^2x\Rightarrow f''(x)=2\tan x(1+\tan^2x)$$

$$f''(\frac{\pi}{4})=2\times1\times(1+1)=4$$

۱۳۳۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $y=4x+2$ در نقطهٔ $A(1,6)$ بر نمودار تابع f مماس است. از طرف دیگر $f'(x)=3x^2-3a$، بنابراین $f(1)=6$ و $f'(1)=4$. پس

$$\begin{cases}1-3a+b=6\\3-3a=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\b=4\end{cases}$$

۱۳۴۰- گزینهٔ ۳ خط d از نقطه‌های $(0,4)$ و $(2,0)$ گذشته است، پس معادلهٔ آن به‌صورت $y=-2x+4$ است. چون خط d در نقطه‌ای به طول ۱ بر سهمی مماس است، پس مقدار $f'(x)$ به‌ازای $x=1$ برابر با شیب خط d است:

$$f(x)=ax^2+c\Rightarrow f'(x)=2ax\Rightarrow f'(1)=2a=-2\Rightarrow a=-1$$

چون نقطهٔ A روی خط $y=-2x+4$ است، پس عرض آن برابر است با $y=2$. چون نقطهٔ $A(1,2)$ روی سهمی $f(x)=-x^2+c$ است، پس $f(1)=2$، بنابراین $-1+c=2$، یعنی $c=3$.

۱۳۴۱- گزینهٔ ۱ مقدار حد خواسته شده، همان $f'(2)$ است. پس ابتدا $f'(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=(\frac{x+2}{2x-3})^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}(\frac{x+2}{2x-3})^{\frac{1}{2}}\times\frac{-3-4}{(2x-3)^2}$$

بنابراین $f'(2)=\frac{3}{2}\times\sqrt{4}\times(-7)=-21$.

تجربی - ۹۵

۱۳۴۲- گزینهٔ ۲ تابع f باید در نقطهٔ $x=-2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)$$

$$4a-2b+4=-8+2\Rightarrow 2a-b=-5$$

از طرف دیگر چون تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر است، پس مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه با هم برابرند:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x\geq-2\\3x^2-1 & x\leq-2\end{cases}\Rightarrow f'_+(-2)=f'_-(-2)\Rightarrow -4a+b=11$$

بنابراین از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}2a-b=-5\\-4a+b=11\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=-1$ و در نتیجه $f(1)=a+b+4=0$.

تجربی - ۹۷

۱۳۴۳- گزینهٔ ۱ تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{4}$ پیوسته است، پس

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}f(x)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}f(x)=a+b\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$$

اکنون مشتق چپ و مشتق راست تابع f در این نقطه را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\begin{cases}\sin 2x+2\sin 2x & 0<x\le\frac{\pi}{4}\\ a(1+\tan^2 x)+2b\cos 2x & \frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_-(\frac{\pi}{4})=3\\ f'_+(\frac{\pi}{4})=2a\end{cases}\Rightarrow 2a=3\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

بنابراین $b=-1$.

تجربی - ۹۳

۱۳۴۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=\frac{(-\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}-\frac{(-\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-(\sin x+\cos x)^2-(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)^2}=\frac{-2}{(\cos x+\sin x)^2}$$

بنابراین $y'(\frac{\pi}{4})=\frac{-2}{(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{-2}{2}=-1$.

راه‌حل دوم عبارت $\cos x-\sin x$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{4}$ برابر صفر است. پس کافی است فقط از عامل صفرکننده مشتق بگیریم:

$$y=\underbrace{(\cos x-\sin x)}_{f(x)}\times\underbrace{\frac{1}{\cos x+\sin x}}_{g(x)}\ ,\quad f'(x)=-\sin x-\cos x$$

$$y'(\frac{\pi}{4})=f'(\frac{\pi}{4})g(\frac{\pi}{4})=(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}})=-1$$

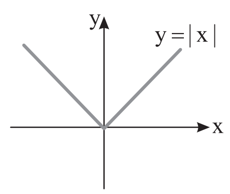
خارج از کشور تجربی - ۹۶

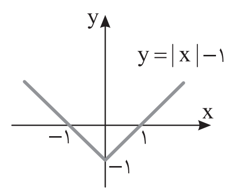
۱۳۴۵- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ تابع را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=x|x|$ نشان دهیم که به‌وضوح در $x=0$ پیوسته است. همچنین تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است، زیرا

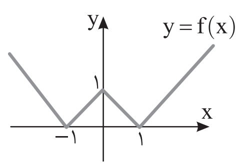
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}|x|=0,\quad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x|x|-0}{x-0}=0$$

ریاضی - ۸۷

۱۳۴۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع را رسم می‌کنیم:







از نمودار تابع مشخص است که سه نقطهٔ گوشه‌ای (و بنابراین مشتق‌ناپذیر) وجود دارد.

ریاضی - ۸۶

۱۳۴۷- گزینهٔ ۱ از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2\Rightarrow f'(x)=2(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})(-\frac{16}{x^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}})$$

$$f'(-8)=2(-2-4)(-\frac{1}{4}+\frac{2}{6})=-1$$

ریاضی - ۸۸

۱۳۴۸- گزینهٔ ۲ به‌جای اینکه حاصل $f'(x)\times g'(f(x))$ را بیابیم، مشتق تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}}=x$$

بنابراین $(gof)'(x)=1$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۳۴۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[4, 6.25]$ برابر است با

$$\frac{f(6.25)-f(4)}{6.25-4}=\frac{\sqrt{6.25}-\sqrt{4}}{6.25-4}=\frac{2.5-2}{2.25}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}=\frac{2}{9}$$

اما آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=4$ برابر $f'(4)$ است:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{4}$$

$$\text{مقدار مورد نظر}=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{9-8}{36}=\frac{1}{36}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۵۰- گزینهٔ ۲ باید معادلهٔ برخورد خط و نمودار ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$(m+3)x^2+mx=2x-4\Rightarrow(m+3)x^2+(m-2)x+4=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0}(m-2)^2-16(m+3)=0$$

$$m^2-20m-44=0\Rightarrow(m-22)(m+2)=0\Rightarrow m_1=22\ ,\ m_2=-2$$

ریاضی - ۹۰

۱۳۵۱- گزینهٔ ۳ به کمک تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$$

پس

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=-\frac{3}{2}\Rightarrow f(4)=-7,\ f'(4)=-\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$y=\frac{1}{x}f(2x)\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}f(2x)+2f'(2x)\times\frac{1}{x}$$

$$y'(2)=-\frac{1}{4}f(4)+2f'(4)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}-\frac{6}{4}=\frac{1}{4}$$

ریاضی - ۹۶

۱۳۵۲- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطهٔ $x=1$ باید پیوسته باشد و مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)=0\\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=a+b+1\end{cases}\Rightarrow a+b+1=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}1-\dfrac{-1}{x^2} & x>1\\ 2x+a & x<1\end{cases},\quad \lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^-}f'(x)\Rightarrow 2=2+a$$

از دو شرط $2=2+a$ و $a+b+1=0$ نتیجه می‌شود $a=0$ و $b=-1$، پس

$$f(1-\sqrt2)=(1-\sqrt2)^2+a(1-\sqrt2)+b=3-2\sqrt2-1=2-2\sqrt2$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۳۵۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=(2\sin^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}))'=2\times2\times\frac{-1}{4}\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})$$
$$=\frac{-1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})$$

پس به‌ازای $x=\frac{\pi}{3}$ مقدار مشتق تابع برابر است با $\frac{-1}{4}$.

تجربی - ۹۳

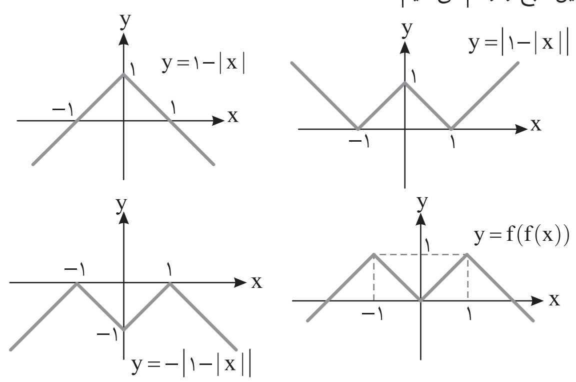
۱۳۵۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\tan^3 2x\Rightarrow f'(x)=6\tan^2 2x(1+\tan^2 2x)$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{6})=6\tan^2\frac{\pi}{3}(1+\tan^2\frac{\pi}{3})=6\times3(1+3)=72$.

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۳۵۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید کـه $f(f(x))=1-|1-|x||$. اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، $y=1-|1-|x||$ در سه نقطهٔ $x=0$ و $x=\pm1$ مشتق‌ناپذیر است.

خارج از کشور ریاضی -۸۸

۱۳۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا تابع‌های f و g را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{5}x & x\geq0\\ x & x\leq0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}5x & x\geq0\\ 3x & x\leq0\end{cases}$$

بنابرایـن $(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(5x) & x\geq0\\ f(3x) & x\leq0\end{cases}=\begin{cases}3x & x\geq0\\ 3x & x\leq0\end{cases}$ و در نتیجه $(fog)'(x)=3$.

تجربی - ۹۴

۱۳۵۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از دو طرف تساوی داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=x+1+(g(x))^5\Rightarrow f'(x)=1+5g'(x)g^4(x) \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0)=1+5g'(0)g^4(0)\Rightarrow1=1+5g'(0)\Rightarrow g'(0)=0$$

اکنون از دو طرف تساوی (۱) مشتق می‌گیریم:

$$f''(x)=0+5g''(x)g^4(x)+20g'^2(x)g^3(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} f''(0)=5g''(0)\times1^4+20\times0\times1=5g''(0)$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۳۵۸- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[1,1/44]$ برابر است با $\frac{f(1/44)-f(1)}{1/44-1}=\frac{\frac{0/44}{1/2}-0}{0/44}=\frac{5}{6}$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x=1$ نیز این‌گونه به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

اختلاف این دو مقدار $\frac{1}{6}$ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۱۳۵۹- گزینهٔ ۴ معادلهٔ خط مماس گذرنده از $(\alpha,\frac{2\alpha-1}{\alpha+1})$ را می‌نویسیم و مختصات $A(-1,0)$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$y'=\frac{2+1}{(x+1)^2}\Rightarrow m=\frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ مماس}} y-\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}(x-\alpha)$$

$$\xrightarrow{A(-1,0)} -\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1-\alpha)\Rightarrow2\alpha-1=3\Rightarrow\alpha=2$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۳۶۰- گزینهٔ ۱ شیب خط $(m+2)y=mx$ برابر $\frac{m}{m+2}$ است. پس باید مشتق تابع $y=\sqrt{1+x^2}$ در نقطهٔ x_0 واقع بر منحنی برابر $\frac{m}{m+2}$ باشد. یعنی

$$y'(x_0)=\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}=\frac{m}{m+2}\Rightarrow\frac{x_0^2}{1+x_0^2}=\frac{m^2}{(m+2)^2}$$

$$m^2x_0^2+m^2=(m+2)^2x_0^2\Rightarrow x_0^2=\frac{m^2}{4(m+1)}\geq0$$

بنابراین $m+1>0$ پس $m>-1$.

ریاضی - ۹۵

۱۳۶۱- گزینهٔ ۱ توجـه کنید کـه $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ همـان تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول یک است. پس ابتدا $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}}\times\frac{4\times3-5\times1}{(x+3)^2}$$

بنابراین

$$f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{9}{4}}}\times\frac{7}{16}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{48}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۳۶۲- گزینهٔ ۲ برای آنکه تابع f در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، ابتدا لازم است در این نقطه پیوسته باشد و همچنین، مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه برابر باشند:

شرط پیوستگی : $-3-5=1+a+b \Rightarrow a+b=-3$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{x^2} & x>1\\ 2x+a & x<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'_+(1)=-3\\ f'_-(1)=2+a\end{cases}$$

$$2+a=-3 \Rightarrow a=-5\ ,\ b=2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۶۳- گزینهٔ ۴ در یک همسایگی راست $\sqrt{2}$ ، $f(x)=x^3-4x$، پس در این همسایگی، $f'(x)=3x^2-4 \Rightarrow f'_+(\sqrt{2})=3\times 2-4=2$

خارج از کشور تجربی با کمی تغییر - ۹۴

۱۳۶۴- گزینهٔ ۳ با فرض $g(x)=f(x+\sqrt{1+x^2})$ طبق قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌شود

$$g'(x)=f'(x+\sqrt{1+x^2})\times(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

خارج از کشور ریاضی -۸۵

۱۳۶۵- گزینهٔ ۲ حاصل مورد نظر همان مشتق تابع $y=f(g(x))$ است. پس،

$$y=f(g(x))=\frac{x-1-2}{1+x-1}=\frac{x-3}{x} \Rightarrow y'=\frac{3}{x^2}$$

ریاضی - ۹۲

۱۳۶۶- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع‌های f و g را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}4x & x\geq 0\\ 2x & x\leq 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}(a+\frac{3}{4})x & x\geq 0\\ (\frac{3}{4}-a)x & x\leq 0\end{cases}$$

اکنون تابع gof را به‌دست می‌آوریم:

$$(gof)(x)=\begin{cases}(a+\frac{3}{4})\times 4x & x\geq 0\\ (\frac{3}{4}-a)\times 2x & x\leq 0\end{cases}$$

در نهایت از تابع به‌دست آمده مشتق می‌گیریم:

$$(gof)'(x)=\begin{cases}4a+3 & x\geq 0\\ \frac{3}{2}-2a & x\leq 0\end{cases}$$

از برابری مشتق چپ و مشتق راست تابع gof در نقطهٔ $x=0$ نتیجه می‌شود:

$$4a+3=\frac{3}{2}-2a \Rightarrow 6a=-\frac{3}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۳۶۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(fog)'(2)=f'(g(2))\times g'(2)=f'(\frac{1}{4})g'(2)$$

با توجه به اینکه $f'(x)=\pi\sin 2\pi x$ و $g'(x)=\frac{5}{8\sqrt{5x-9}}$، پس $f'(\frac{1}{4})=\pi$ و $g'(2)=\frac{5}{8}$. بنابراین $(fog)'(2)=\frac{5\pi}{8}$.

ریاضی - ۹۱

۱۳۶۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$y=\sin^3 u \Rightarrow y'=3\sin^2 u\times\cos u\times u'$$

پس

$$y=\sin^3\sqrt{2x}\ ,\quad y'=3\sin^2\sqrt{2x}\times\cos\sqrt{2x}\times\frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

بنابراین $y'(\frac{\pi^2}{18})=3\sin^2\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{3}\times\frac{1}{\frac{\pi}{3}}=3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{\pi}=\frac{27}{8\pi}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۶۹- گزینهٔ ۲ شیب خط $y=5x+a$ برابر ۵ است. پس ابتدا نقطه‌ای از تابع $f(x)=2x^2-3x+6$ را مشخص می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه (یعنی مشتق تابع) برابر ۵ باشد:

$$f'(x)=4x-3=5 \Rightarrow x=2$$

پس خط در نقطهٔ $(2,f(2))$ بر نمودار تابع مماس است. این نقطه متعلق به خط هم هست، پس در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$f(2)=5\times 2+a \Rightarrow 2\times 2^2-3\times 2+6=10+a \Rightarrow 8=10+a \Rightarrow a=-2$$

خارج از کشور تجربی - ۹۷

۱۳۷۰- گزینهٔ ۱ دو نقطه عبارت‌اند از $A(1,3+a)$ و $B(-1,-3+a)$.

معادلهٔ خط گذرنده از A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB}=\frac{3+a-(-3+a)}{1-(-1)}=3$$

معادلهٔ AB: $y-(3+a)=3(x-1) \Rightarrow y=3x+a$

فرض کنید $f(x)=3x+a$ و $g(x)=x^3+ax^2+2x$. برای آنکه خط بر منحنی مماس باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$g'(x)=f'(x) \Rightarrow 3x^2+2ax+2=3$$

$$g(x)=f(x) \Rightarrow x^3+ax^2+2x=3x+a$$

$$x^2(x+a)-(x+a)=0 \Rightarrow (x+a)(x^2-1)=0$$

از شرط دوم نتیجه می‌گیریم $x=-a$ یا $x=\pm 1$ که با جای‌گذاری این نتایج در معادلهٔ اول مقدار a به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x=\pm 1 \Rightarrow 3\pm 2a=1 \Rightarrow a=\pm 1\\ x=-a \Rightarrow 3a^2-2a^2=1 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1\end{cases} \Rightarrow a=\pm 1$$

ریاضی - ۹۰

۱۳۷۱- گزینهٔ ۱ با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع f در $x=-۱$ مورد نظر است. برای به‌دست آوردن مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}}{x+۱}$$
$$=\lim_{x\to -۱}((x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x})=-۶$$

ریاضی - ۹۲

۱۳۷۲- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس می‌توان نوشت:

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)\Rightarrow a+b=۲$$

$$f'(x)=\begin{cases}۳ax^۲+b & x\leq ۱\\ \dfrac{۴}{\sqrt{۴x-۳}} & x\geq ۱\end{cases},\quad f'_+(۱)=f'_-(۱)\Rightarrow ۴=۳a+b$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=۱$ و $b=۱$.

ریاضی - ۹۲

۱۳۷۳- گزینهٔ ۳ با توجه به ضابطه، نقطهٔ مشتق‌ناپذیری تابع $x=۰$ است. توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱+x} & x>۰\\ \sqrt{۱-x} & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲\sqrt{۱+x}} & x>۰\\ \dfrac{-۱}{۲\sqrt{۱-x}} & x<۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(۰)=\dfrac{۱}{۲}\\ f'_-(۰)=-\dfrac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow[\text{مشتق‌پذیر}]{x=۰\ \text{در}\ f}f'_+(۰)-f'_-(۰)=۱$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۳۷۴- گزینهٔ ۴ اگر $x<-۱$ ، آن‌گاه $-۱<\frac{۱}{x}<۰$ ، بنابراین $[\frac{۱}{x}]=-۱$.

پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-۱)$ تابعی ثابت و مشتق‌پذیر است. گزینه‌های (۱) و (۲) به راحتی رد می‌شوند، زیرا $\frac{۱}{x}$ در نامتناهی نقطه از آن‌ها مقدار صحیح می‌شود. همچنین در گزینهٔ (۳)، $\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{-۱}{x-۱}=-\infty$.

پس تابع f روی بازهٔ $[۱,+\infty)$ مشتق‌پذیر نیست.

ریاضی - ۹۱

۱۳۷۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$D_f=\mathbb{R}-\{-۳\},\quad D_g=\mathbb{R}-\{۴\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{۴\}\,|\,\frac{x+۲}{x-۴}\in\mathbb{R}-\{-۳\}\}$$

$$\frac{x+۲}{x-۴}=-۳\Rightarrow x+۲=-۳x+۱۲\Rightarrow x=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین $D_{fog}=\mathbb{R}-\{۴,\frac{۵}{۲}\}$. پس تابع fog در نقاط $x=۴$ و $x=\frac{۵}{۲}$ مشتق‌پذیر نیست.

ریاضی - ۸۴

۱۳۷۶- گزینهٔ ۴ چون حد مخرج کسر صفر است، حد صورت نیز باید صفر باشد تا حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ دربیاید. یعنی باید

$$\lim_{h\to ۰}(f(-۲+h)+۳)=۰\Rightarrow\lim_{h\to ۰}f(-۲+h)=-۳\Rightarrow f(-۲)=-۳$$

پس حد داده شده همان تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ است:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=f'(-۲)=\frac{۱}{۲}$$

پس

$$g(x)=x^۲f(x)\Rightarrow g'(x)=(x^۲f(x))'=۲xf(x)+x^۲f'(x)$$
$$g'(-۲)=-۴f(-۲)+۴f'(-۲)=۱۲+۲=۱۴$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۳۷۷- گزینهٔ ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه پیوستگی آن است:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)\Rightarrow\lim_{x\to ۱^+}(۱+a\cos\pi x)=\lim_{x\to ۱^-}(bx^۲+x)$$
$$۱-a=b+۱\Rightarrow b=-a$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۱$ با هم برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}-a\pi\sin\pi x & x\geq ۱\\ ۲bx+۱ & x\leq ۱\end{cases}$$

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}f'(x)=۰,\quad f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}f'(x)=۲b+۱$$

$$۲b+۱=۰\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

همچنین چون $b=-a$ ، بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۳۷۸- گزینهٔ ۴ از دو ضابطه مشتق می‌گیریم و با جای‌گذاری $x=۰$ در آنها، مشتق چپ و مشتق راست تابع را حساب می‌کنیم:

$$x>۰:f(x)=\frac{\sin x}{۱+\cos x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x(۱+\cos x)+\sin x(\sin x)}{(۱+\cos x)^۲}$$

$$f'_+(۰)=\frac{۱\times ۲+۰}{(۱+۱)^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$x\leq ۰:f(x)=\sin ۲x\Rightarrow f'(x)=۲\cos ۲x\Rightarrow f'_-(۰)=۲$$

پس $f'_-(۰)-f'_+(۰)=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۳۷۹- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[۱,۱/۲۱]$ محاسبه می‌کنیم: $\frac{\sqrt{۱/۲۱}-\sqrt{۱}}{۱/۲۱-۱}=\frac{۱/۱-۱}{۰/۲۱}=\frac{۰/۱}{۰/۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$. اکنون آهنگ تغییر لحظه‌ای f را در نقطهٔ $x=۱$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۲۱-۲۰}{۴۲}=\frac{۱}{۴۲}$$

تجربی - ۹۴ با کمی تغییر

۱۳۸۰- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول شیب نیمساز ناحیهٔ اول برابر ۱ است. پس ابتدا نقطه‌ای از نمودار تابع $f(x)=2x^2+(m+1)x+m+6$ را پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس بر نمودار در آن نقطه (مشتق) برابر یک باشد:

$$f'(x)=1\Rightarrow 4x+m+1=1\Rightarrow x=-\frac{m}{4}$$

بنابراین خط $y=x$ در نقطهٔ $(-\frac{m}{4},-\frac{m}{4})$ بر نمودار تابع f مماس شده است. این نقطه روی نمودار تابع f است، پس مختصات آن در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

$$-\frac{m}{4}=2(-\frac{m}{4})^2+(m+1)(-\frac{m}{4})+m+6$$

$$m^2-8m-48=0\Rightarrow(m-12)(m+4)=0\Rightarrow m=12\ ,\ m=-4$$

$m=12$ قابل قبول نیست، چون در این صورت نقطهٔ تماس $(-3,-3)$ می‌شود که در ناحیهٔ اول قرار ندارد.

راه‌حل دوم شرط آنکه یک تابع بر یک خط مماس باشد آن است که معادلهٔ حاصل از تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد. پس

$$\begin{cases}y=2x^2+(m+1)x+m+6\\ y=x\end{cases}\Rightarrow 2x^2+(m+1)x+m+6=x$$

$$2x^2+mx+m+6=0\xrightarrow{\Delta=0}m^2-8(m+6)=0$$

$$m^2-8m-48=0\Rightarrow(m-12)(m+4)=0\Rightarrow m=12, m=-4$$

$$\begin{cases}m=12\Rightarrow 2x^2+12x+18=0\Rightarrow x^2+6x+9=0\Rightarrow x=-3 \text{ (غ.ق.ق)}\\ m=-4\Rightarrow 2x^2-4x+2=0\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1\end{cases}$$

چون نمودار تابع بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس است، پس باید طول نقطهٔ تماس مثبت باشد. پس $x=1$ و در نتیجه $m=-4$ قابل قبول است.

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۱۳۸۱- گزینهٔ ۴ تابع باید در $x=1$ پیوسته باشد، بنابراین $a+b=2$. از طرف دیگر مشتق چپ و مشتق راست آن در این نقطه باید برابر باشند:

$$f(x)=\begin{cases}2x^{\frac{-1}{2}} & x\ge 1\\ ax^2+bx & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-x^{\frac{-3}{2}} & x>1\\ 2ax+b & x<1\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(1)=-1\\ f'_-(1)=2a+b\end{cases}\Rightarrow 2a+b=-1$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a+b=2\\ 2a+b=-1\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-3$ و $b=5$.

ریاضی - ۹۳

۱۳۸۲- گزینهٔ ۲ ابتدا مقدار جزءصحیح و علامت تابع قدرمطلق را در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=-3$ مشخص می‌کنیم:

$$x\to(-3)^+\Rightarrow[x]=-3,\quad |x|=-x\Rightarrow f(x)=(x-3)\sqrt[3]{9x}$$

بنابراین $f'(x)=\sqrt[3]{9x}+\frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(x-3)$. پس

$$f'_+(-3)=-3+\frac{9}{3\times 9}(-6)=-5$$

ریاضی - ۹۳

۱۳۸۳- گزینهٔ ۳ چون $f(0)=0$، پس

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{-\sqrt{x^2}}$$

دقت کنید که چون $x<0$، به جای x می‌توانیم $-\sqrt{x^2}$ قرار دهیم. بنابراین

$$f'_-(0)=-\lim_{x\to0^-}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$

$$=-\lim_{x\to0^-}\sqrt{\frac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}}=-\lim_{x\to0^-}\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{2}$$

ریاضی - ۸۹

۱۳۸۴- گزینهٔ ۴ به دلیل حضور جزءصحیح‌ها در هر نقطه‌ای که تابع ناپیوسته باشد، مشتق‌ناپذیر است. یعنی باید نقاطی را بیابیم که $x\in\mathbb{Z}$ یا $x+\frac{1}{3}\in\mathbb{Z}$. در هر یک از این نقاط یکی از دو تابع $[x]$ و $[x+\frac{1}{3}]$ پیوسته و دیگری ناپیوسته است، بنابراین مجموع آن دو نیز ناپیوسته است. در بازهٔ $(0,3)$ این نقاط عبارت‌اند از: $\{\frac{2}{3},1,\frac{5}{3},2,\frac{8}{3}\}$

خارج از کشور ریاضی - ۸۶

۱۳۸۵- گزینهٔ ۲ با توجه به فرض سؤال $f'(2)=-\frac{1}{3}$. همچنین اگر فرض کنیم $g(x)=f(\sqrt{|x|+3})$، در یک همسایگی $x=-1$،

$$g(x)=f(\sqrt{3-x})\Rightarrow g'(x)=f'(\sqrt{3-x})\times\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$\xrightarrow{x=-1}g'(-1)=-\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{12}$$

ریاضی - ۸۷

۱۳۸۶- گزینهٔ ۲ اگر $g(x)=f(xf(x))$، آن‌گاه طبق قاعدهٔ زنجیری،

$$g'(x)=f'(xf(x))\times(f(x)+xf'(x))$$

$$\xrightarrow{x=2}g'(2)=f'(2f(2))\times(f(2)+2f'(2))$$

چون $f(2)=-\frac{1}{2}$ و $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$، پس $f'(2)=-\frac{1}{4}$. پس

$$f'(2f(2))=f'(-1)=-\frac{1}{2\sqrt{-1+2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow g'(2)$$

$$=-\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2}+2\times\frac{-1}{4})=\frac{1}{2}$$

ریاضی - ۸۹

۱۳۸۷- گزینهٔ ۲ ابتدا آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[4,12]$ و سپس آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطهٔ $x=4$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\dfrac{f(12)-f(4)}{12-4}=\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8}=\dfrac{\frac{-2}{15}}{8}=\dfrac{-1}{60}\\ f'(x)=-(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(4)=\dfrac{-1}{27}\end{cases}\Rightarrow\frac{-1}{60}-(\frac{-1}{27})=\frac{11}{540}$$

تجربی - ۹۳

۱۳۸۸- گزینهٔ ۲ ابتـدا معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ را می‌نویسیم:

$$y-۲=\frac{۳-۲}{-۱-۱}(x-۱)\Rightarrow y-۲=\frac{-۱}{۲}(x-۱)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۵}{۲}$$

این خط در نقطهٔ $x=۳$ بر نمودار تابع f مماس است، پس در این نقطه با تابع مشترک است و شیب این خط، همان مشتق تابع در این نقطه است:

$$f(۳)=\frac{-۱}{۲}\times ۳+\frac{۵}{۲}=\frac{-۳}{۲}+\frac{۵}{۲}=۱,\quad f'(۳)=\frac{-۱}{۲}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۳}\frac{f^۲(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}=\lim_{x\to ۳}\left(\frac{f(x)-۱}{x-۳}\times\frac{f(x)+۵}{-۱}\right)$$
$$=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}\times\lim_{x\to ۳}(-f(x)-۵)$$
$$=f'(۳)\times(-f(۳)-۵)=-\frac{۱}{۲}(-۱-۵)=۳$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۱۳۸۹- گزینهٔ ۳ از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱+\cos\pi x}{x^۳-x^۲-x+۱}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{-\sin\pi x\times\pi}{۳x^۲-۲x-۱}$$
$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{-\pi^۲\cos\pi x}{۶x-۲}=\frac{\pi^۲}{۴}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۱۳۹۰- گزینهٔ ۴ مخـرج کسـر را می‌توانیـم به‌صـورت $(\sqrt{x}-۲)^۲$ بنویسیم. حال از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۱-\cos\pi x}{(\sqrt{x}-۲)^۲}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۴}\frac{\pi\sin\pi x}{۲(\sqrt{x}-۲)\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}$$
$$=\pi\lim_{x\to ۴}\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x}-۲}\times\lim_{x\to ۴}\sqrt{x}=۲\pi\lim_{x\to ۴}\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x}-۲}$$
$$\xrightarrow{HOP}۲\pi\lim_{x\to ۴}\frac{\pi\cos\pi x}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=۸\pi^۲$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۳۹۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2)=3(x-2)(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(3,4)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۳۹۲- گزینهٔ ۱ تابع مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=-9x^2+9x-2 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}, x=\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ صعودی است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{3}$ است.

۱۳۹۳- گزینهٔ ۴ برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد باید $f'(x)\geq 0$.
مشتق توابع گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

گزینهٔ (۱) $y=x^3-x+1 \Rightarrow y'=3x^2-1 \Rightarrow \Delta=12>0$

گزینهٔ (۲) $y=x^3+x^2+1 \Rightarrow y'=3x^2+2x \Rightarrow \Delta=4>0$

گزینهٔ (۳) $y=x^3+x^2-x+1 \Rightarrow y'=3x^2+2x-1 \Rightarrow \Delta=16>0$

گزینهٔ (۴) $y=x^3+x^2+x-1 \Rightarrow y'=3x^2+2x+1 \Rightarrow \Delta=-8<0$

واضح است که مشتق تابع گزینهٔ (۴) یعنی عبارت $3x^2+2x+1$ همواره مثبت است و تابع صعودی است.

۱۳۹۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=x^2-4x+3 \Rightarrow f''(x)=2x-4$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f' روی بازهٔ $(3,5)$ اکیداً صعودی است و روی دیگر بازه‌ها اکیداً صعودی نیست.

۱۳۹۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که همواره $3x^2-x+1>0$، پس $D_f=\mathbb{R}$.

از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $(-\infty,\frac{1}{6})$ اکیداً نزولی است.

۱۳۹۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2\sqrt{2x}}{2x^2\sqrt{2x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2=2\sqrt{2x} \Rightarrow x^4=8x \Rightarrow x=0 , x=2$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(0,2]$ نزولی و روی بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۱۳۹۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-1,2]$ و

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{2-x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{x+1} \Rightarrow 2-x=x+1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	-1		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(0)>0$)

پس تابع f روی بازهٔ $[-1,\frac{1}{2}]$ صعودی و روی بازهٔ $[\frac{1}{2},2]$ نزولی است. در نتیجه حداکثر مقدار $b-a$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

۱۳۹۸- گزینهٔ ۱ مشتق تابع به‌صورت زیر است:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

پس $f'(x)>0$ و در نتیجه تابع همواره صعودی است.

۱۳۹۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$$

روی بازهٔ $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$،

$$x>0,\quad \sin x<0 \Rightarrow -x\sin x>0$$

پس تابع f' در این بازه مثبت است و تابع f روی این بازه صعودی است.

۱۴۰۰- گزینهٔ ۲ مشتق تابع به‌صورت $f'(x)=3x^2-2ax+3$ است.

برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن همواره نامنفی باشد. پس

$$\Delta=4a^2-36\leq 0 \Rightarrow a^2\leq 9 \Rightarrow -3\leq a\leq 3$$

۱۴۰۱- گزینهٔ ۲ به جدول تعیین علامت تابع f' توجه کنید:

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-1,1]$ صعودی است و حداکثر مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

۱۴۰۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x^3-4x^2+5x-2=x^2(x-1)-3x^2+5x-2=x^2(x-1)-(3x-2)(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)(x-1)(x-2)=(x-1)^2(x-2)$$

بنابراین $D_f=[2,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{3x^2-8x+5}{2\sqrt{x^3-4x^2+5x-2}}=\frac{(3x-5)(x-1)}{2\sqrt{x^3-4x^2+5x-2}}$$

بنابراین f' ریشه‌ای در بازهٔ $(2,+\infty)$ ندارد و روی این بازه همواره مثبت است. بنابراین f روی بازهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۱۴۰۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt[3]{x^4}-3}{3x^2}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^4}=3\Rightarrow x^4=27\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{27}$$

پس جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{27}$		0		$\sqrt[4]{27}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	ت‌ن	$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-\sqrt[4]{27}]$ و $[\sqrt[4]{27},+\infty)$ صعودی است و روی بازه‌های $[-\sqrt[4]{27},0)$ و $(0,\sqrt[4]{27}]$ نزولی است. بنابراین کمترین مقدار a برابر $\sqrt[4]{27}$ است.

۱۴۰۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-3,+\infty)$ و

$$f'(x)=2x-\frac{8}{2\sqrt{x+3}}=\frac{2x\sqrt{x+3}-4}{\sqrt{x+3}}$$

مخرج کسر فوق مثبت است، پس باید صورت آن را تعیین علامت کنیم تا علامت $f'(x)$ معلوم شود. بدین منظور ابتدا ریشه‌های صورت کسر فوق را به‌دست می‌آوریم:

$$2x\sqrt{x+3}-4=0\Rightarrow x\sqrt{x+3}=2\xrightarrow{x>0}x^2(x+3)=4$$
$$x^3+3x^2-4=0\Rightarrow x^3-1+3x^2-3=0$$
$$(x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)(x+1)=0$$
$$(x-1)(x^2+4x+4)=0\Rightarrow(x-1)(x+2)^2=0\Rightarrow x=1,\ x=-2\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین جدول تعیین علامت تابع f' به‌صورت زیر است:

x	-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

پس تابع f روی بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی است و کمترین مقدار a برابر ۱ است.

۱۴۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و برای هر $x>0$

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow\frac{1}{2^6}x^{-3}=\frac{1}{3^6}x^{-4}$$
$$3^{-6}x^3=2^{-6}x^4\Rightarrow x=\left(\frac{2}{3}\right)^6$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است.

x	0		$\left(\frac{2}{3}\right)^6$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

(برای تعیین علامت می‌توانید عددگذاری کنید، مثلاً $f'(1)>0$) بنابراین تابع روی بازهٔ $[0,(\frac{2}{3})^6]$ اکیداً نزولی است و حداکثر مقدار a برابر $(\frac{2}{3})^6$ است.

۱۴۰۶- گزینهٔ ۲ مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=3\sqrt[3]{x}-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1=\frac{1-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow 1=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

پس جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	ت‌ن	$+$	0	$-$	

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید، مثلاً $f'(\sqrt{8})=-\frac{1}{2}$)

پس تابع f روی بازه‌های $(-\infty,-1]$ و $[1,+\infty)$ نزولی و روی بازهٔ $[-1,1]$ صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۱۴۰۷- گزینهٔ ۳ تابع مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

با توجه به مثبت بودن مخرج کسر فوق، جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

بنابراین ابتدا تابع در بازهٔ $[0,1]$ صعودی، سپس در بازهٔ $[1,+\infty)$ نزولی است.

۱۴۰۸- گزینهٔ ۴ از روی شکل معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(1,3)$ مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است، بنابراین $f'(x)>0$. همچنین، مقادیر تابع f منفی‌اند، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست‌اند. در مورد گزینهٔ (۴) توجه کنید که $(f^2)'(x)=2f'(x)f(x)<0$. پس گزینهٔ (۴) درست نیست.

۱۴۰۹- گزینهٔ ۲ مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم و آن را در بازهٔ $[۰\,,\,۲\pi]$ تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=\cos ۲x-\cos x=۲\cos^۲ x-۱-\cos x=(\cos x-۱)(۲\cos x+۱)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۱\Rightarrow x=۰\,,\,x=۲\pi\\ \cos x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳}\,,\,x=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

x	۰		$\frac{۲\pi}{۳}$		$\frac{۴\pi}{۳}$		۲π
$f'(x)$	۰	−	۰	+	۰	−	۰

بنابراین تابع f روی بازهٔ $(\frac{۲\pi}{۳}\,,\,\frac{۴\pi}{۳})$ صعودی است.

۱۴۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x^۲+a^۲-۲x(x+a)}{(x^۲+a^۲)^۲}=\frac{-x^۲-۲ax+a^۲}{(x^۲+a^۲)^۲}$$

اگر مشتق تابع f نامنفی باشد، آن‌گاه تابع f اکیداً صعودی است. پس باید عبارت $-x^۲-۲ax+a^۲$ نامنفی باشد:

$$-x^۲-۲ax+a^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲+۲ax-a^۲\leq ۰\Rightarrow (x+a)^۲\leq ۲a^۲$$

$$-\sqrt{۲}a\leq x+a\leq \sqrt{۲}a\Rightarrow -(\sqrt{۲}+۱)a\leq x\leq (\sqrt{۲}-۱)a$$

پس باید $-(\sqrt{۲}+۱)a\leq ۰$ و $(\sqrt{۲}-۱)a\geq ۱$ تا تابع f روی بازهٔ $[۰,۱]$ اکیداً صعودی باشد که چون a عددی مثبت است، پس $-(\sqrt{۲}+۱)a\leq ۰$ برقرار است و در نتیجه

$$(\sqrt{۲}-۱)a\geq ۱\Rightarrow a\geq \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}\Rightarrow a\geq \sqrt{۲}+۱$$

۱۴۱۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۴x^۳-۱۲x^۲\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow ۴x^۲(x-۳)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=۳$$

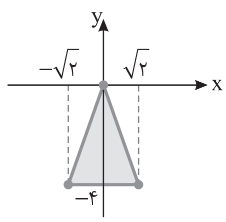
بنابراین تابع f در $x=۰$ و $x=۳$ نقطهٔ بحرانی دارد و مجموع مقادیر تابع f در این نقاط را باید حساب کنیم:

$$f(۰)=۱,\quad f(۳)=-۲۶,\quad f(۰)+f(۳)=-۲۵$$

۱۴۱۲- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۴x^۳-۸x=۴x(x^۲-۲)=۰\Rightarrow x=۰, x=\pm\sqrt{۲}$$

بنابراین $(۰,۰)$، $(\sqrt{۲},-۴)$ و $(-\sqrt{۲},-۴)$ نقاط بحرانی تابع هستند و مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با $\frac{۲\sqrt{۲}\times ۴}{۲}=۴\sqrt{۲}$.



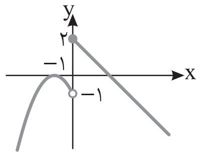
۱۴۱۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{(۲+\sin x)^۲},\quad f'(x)=۰\Rightarrow \cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}, x=\frac{۳\pi}{۲}$$

پس این تابع دو نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۱۴۱۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. تابع f در $x=۰$ پیوسته نیست، پس مشتق‌پذیر نیست و $f'(-۱)=۰$. بنابراین $(۰,۲)$ و $(-۱,۰)$ نقاط بحرانی تابع f هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(-۱-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{۵}$$



۱۴۱۵- گزینهٔ ۳ تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست (نقطهٔ گوشه‌ای دارد). عرض نقطهٔ بحرانی برابر است با $f(۰)=۳$.

۱۴۱۶- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x-۲ & x\geq ۱\\ -x & ۰<x<۱\\ x^۲+۲x & x\leq ۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۱ & x>۱\\ -۱ & ۰<x<۱\\ ۲x+۲ & x<۰\end{cases}$$

تابع f در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا

$$\begin{cases}f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(-۱)=-۱\\ f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(۲x+۲)=۲\end{cases}\Rightarrow f'_+(۰)\neq f'_-(۰)$$

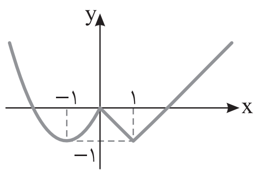
$$\begin{cases}f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}۱=۱\\ f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(-۱)=-۱\end{cases}\Rightarrow f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲x+۲=۰\Rightarrow x=-۱$$

بنابراین نقطه‌های $(۱,-۱)$، $(۰,۰)$ و $(-۱,-۱)$ نقطه‌های بحرانی تابع f هستند که مجموع عرض‌هایشان برابر -۲ است.

راه‌حل دوم نمودار تابع f به‌صورت زیر است و این تابع در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(-۱)=۰$. پس $(۰,۰)$، $(۱,-۱)$ و $(-۱,-۱)$ نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر -۲ است.



۱۴۱۷- گزینهٔ ۴ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۱-\frac{۲}{\sqrt{x+۱}}=\frac{\sqrt{x+۱}-۲}{\sqrt{x+۱}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \sqrt{x+۱}-۲=۰\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳$$

پس $x=۳$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع است که عرض آن برابر است با -۵.

۱۴۱۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$.

تابع f در $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۰)=۰$. پس تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

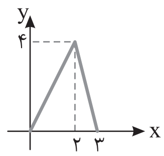
۱۴۱۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=|x^۲(x-۳)|=|x^۲||x-۳|=x^۲|x-۳|$$

$$f(x)=\begin{cases}x^۳-۳x^۲ & x\geq ۳\\ -x^۳+۳x^۲ & x\leq ۳\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^۲-۶x & x>۳\\ -۳x^۲+۶x & x<۳\end{cases},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=۲$$

همچنین تابع f در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست. پس $(۰,۰)$، $(۲,۴)$ و $(۳,۰)$ نقاط بحرانی تابع‌اند و مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند برابر است با



$$\frac{۳\times۴}{۲}=۶$$

۱۴۲۰- گزینهٔ ۳ تابع f در نقطه‌های $x=۰$، $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}-x+x^۲-۱ & x\leq -۱\\ -x-x^۲+۱ & -۱<x\leq ۰\\ x-x^۲+۱ & ۰<x\leq ۱\\ x+x^۲-۱ & x>۱\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-۱+۲x & x<-۱\\ -۱-۲x & -۱<x<۰\\ ۱-۲x & ۰<x<۱\\ ۱+۲x & x>۱\end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\,,\,x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع f پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۴۲۱- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

پس نقاط بحرانی تابع نقاط $(۱,-۱)$ و $(-۱,۳)$ هستند که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر ۲ است.

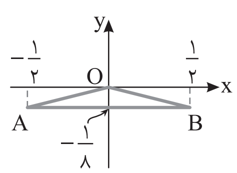
۱۴۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، طول نقاط بحرانی آن ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. از طرف دیگر

$$f'(x)=۸x^۳-۲x=۲x(۴x^۲-۱)\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=-\frac{۱}{۲}\,,\,x=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین نقطه‌های بحرانی تابع f نقطه‌های $O(۰,۰)$، $A(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۸})$ و $B(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۸})$ هستند. از روی شکل زیر معلوم است که

$$AB=۱,\quad OA=OB=\sqrt{\frac{۱}{۸^۲}+\frac{۱}{۲^۲}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۸}$$

بنابراین محیط مثلث OAB برابر است با $۱+۲\times\frac{\sqrt{۱۷}}{۸}=۱+\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$.



۱۴۲۳- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\sqrt{۱-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}=\frac{۱-۲x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین تابع دو نقطهٔ بحرانی به طول‌های $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ دارد.

۱۴۲۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید $D_f=(۲,+\infty)$ و اگر $x\in D_f$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{(x-۱)(x-۲)}}=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۳x+۲}}$$

بنابراین

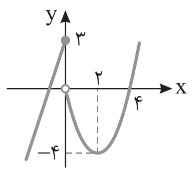
$$f'(x)=\frac{\frac{-(۲x-۳)}{۲\sqrt{x^۲-۳x+۲}}}{(x^۲-۳x+۲)}=-\frac{۲x-۳}{۲(x^۲-۳x+۲)^{\frac{۳}{۲}}},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

و چون $\frac{۳}{۲}$ در دامنهٔ تابع f نیست و تابع f در همهٔ نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد.

۱۴۲۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{۴-۲x}{۳\sqrt[۳]{(۴x-x^۲)^۲}}$. تابع f در $x=۰$ و $x=۴$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۲)=۰$. پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

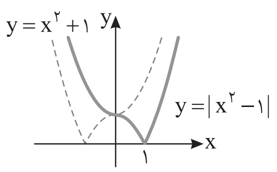
۱۴۲۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=۲x+\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$. تابع f در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۰)=۰$. پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۴۲۷- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و این تابع در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(۲)=۰$. پس $(۰,۳)$ و $(۲,-۴)$ نقاط بحرانی تابع هستند، که مجموع عرض‌های آن‌ها برابر -۱ است.



۱۴۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=\frac{\cos x}{۳\sqrt[۳]{\sin^۲ x}}$. تابع f در $x=۰$ مشتق ندارد (مشتق نامتناهی دارد). و در $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=-\frac{\pi}{۲}$ مشتق برابر صفر دارد. پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ دارد.

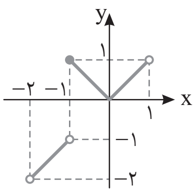
۱۴۲۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=|x^۲-۱|$ و اگر $x<۰$، آن‌گاه $f(x)=|-x^۲-۱|=x^۲+۱$. بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. پس تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و در نقطهٔ $x=۰$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع دو نقطهٔ بحرانی دارد.



۱۴۳۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases} x & -2<x<-1 \\ -x & -1\le x<0 \\ x & 0\le x<1 \end{cases}$$

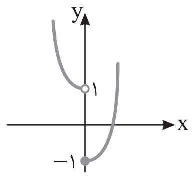
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و تابع f در $x=0$ و $x=-1$ نقطهٔ بحرانی دارد، زیرا در نقطهٔ $x=-1$ پیوسته نیست و مشتق‌پذیر هم نیست و در نقطهٔ $x=0$ مشتق چپ و مشتق راست نابرابر دارد، پس مشتق‌پذیر نیست.



۱۴۳۱- گزینهٔ ۱ تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=2$ به‌ترتیب ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد. بنابراین f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.

۱۴۳۲- گزینهٔ ۳ تابع f' در نقطه‌های ۴-، ۱-، ۲ و ۵ برابر صفر است و در نقطه‌های ۴-، ۱- و ۲ تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه، این نقطه‌ها، نقطه‌های اکسترمم نسبی تابع f هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۸ است.

۱۴۳۳- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که تابع فقط در نقطهٔ $x=0$ مینیمم نسبی دارد و در هیچ نقطه‌ای ماکزیمم نسبی ندارد.



۱۴۳۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

x	$-\infty$		۱		۲		۳		۴		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	−	۰	+	۰	+	

چون $f'(3)=0$ و تغییر علامت تابع f' در نقطهٔ $x=3$ از منفی به مثبت است، پس تابع f در نقطهٔ $x=3$ مینیمم نسبی دارد.

۱۴۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2=5x^2(x^2-3)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{3}$$

عبارت $f'(x)$ در $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد ولی در $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ تغییر علامت می‌دهد. پس تابع f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی به طول‌های $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ دارد و حاصل‌ضرب طول آن‌ها برابر ۳- است.

۱۴۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=0$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	

پس تابع f در $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و این ماکزیمم برابر $f(0)=-1$ است.

۱۴۳۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[-\sqrt{3},0]\cup[\sqrt{3},+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}}\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} x=1 & \text{(غ.ق.ق.)} \\ x=-1 \end{cases}$$

پس $x=-1$ طول اکسترمم نسبی تابع f است که با توجه به‌صورت مسئله طول ماکزیمم نسبی است. بنابراین $f(-1)=\sqrt{2}$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع است.

۱۴۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$$

پس $x=4$ طول اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(4)=-4$.

۱۴۳۹- گزینهٔ ۱ تابع f مشتق‌پذیر است، پس در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی آن باید مشتق تابع برابر صفر باشد:

$$f'(x)=-2\sin x\cos x-2\cos x=-2\cos x(1+\sin x)$$

$$f'(\frac{\pi}{6})\neq 0,\quad f'(\frac{\pi}{2})=0,\quad f'(-\frac{\pi}{2})=0,\quad f'(\frac{3\pi}{2})=0$$

پس $x=\frac{\pi}{6}$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f نیست.

۱۴۴۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=2\sin x\cos x+\sin x=\sin x(2\cos x+1)$$

بنابراین

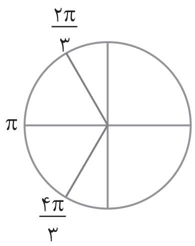
$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} \sin x=0\Rightarrow x=k\pi \xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\pi \\ \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x\in(0,2\pi)} x=\frac{2\pi}{3}, x=\frac{4\pi}{3}$$

از طرف دیگر،

x	۰		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	۰	−	

بنابراین تابع f در نقاط به طول $\frac{2\pi}{3}$، π و $\frac{4\pi}{3}$ اکسترمم نسبی دارد، که مجموع آن‌ها برابر 3π است.



۱۴۴۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

x	$-\infty$		۲-		۱-		۰		۳		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	+	

تابع f' در نقطه‌های ۲-، ۱- و صفر برابر صفر است و در این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین تابع f در نقطه‌های ۲-، ۱- و صفر اکسترمم نسبی دارد. مجموع طول این نقطه‌ها ۳- است.

۱۴۴۲- گزینهٔ ۱ ابتدا طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x^2-3x+2)=4x(x-1)(x-2)$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

پـس تابـع f در نقطه‌هـای $x=0$ و $x=2$ مینیمـم نسـبی و در نقطـهٔ $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد. مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر است با $f(1)=-1$.

۱۴۴۳- گزینهٔ ۴ ابتدا طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{x^2+3-2x(x+1)}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-3,\quad x=1$$

پس تابع f در نقاط $x=-3$ و $x=1$ اکسترمم نسبی دارد.

$$f(-3)f(1)=-\frac{2}{12}\times\frac{2}{4}=-\frac{1}{12}$$

۱۴۴۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{2x+x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}},\quad f'(x)=0\Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع f است و مقدار تابع در این نقطه مورد سؤال است که برابر است با $f(1)=-2$.

۱۴۴۵- گزینهٔ ۴ تابع f مشتق‌پذیر است، پس در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی آن، مشتق تابع برابر صفر است:

$$f'(x)=2\sin x\cos x-\cos x=\cos x(2\sin x-1)$$

$$f'(\frac{\pi}{6})=0,\quad f'(\frac{\pi}{2})=0,\quad f'(\frac{5\pi}{6})=0,\quad f'(\pi)\neq0$$

۱۴۴۶- گزینهٔ ۲ مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=-2\sin x\cos x+\sin x=\sin x(1-2\cos x)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\ (\text{غ.ق.ق})\\ \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		−	0	+	

(برای تعیین علامت می‌توانید از عددگذاری استفاده کنید. مثلاً $f'(\frac{\pi}{2})=1>0$)

پـس تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{3}$ مینیمم نسـبی دارد و مقدار مینیمم نسـبی برابر $f(\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{4}$ است.

۱۴۴۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=x^2+2ax+1$. ضریب x^2 در $f'(x)$ مثبت است، پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد، بنابراین برای اینکه تابع f اکسترمم نسبی نداشته باشد، باید $f'(x)\ge0$، یعنی

$$\Delta\le0\Rightarrow4a^2-4\le0\Rightarrow a^2\le1\Rightarrow-1\le a\le1$$

۱۴۴۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=7$ مشتق‌پذیر است و برای اینکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(7)=0$. پس

$$f'(x)=a-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}\Rightarrow f'(7)=0\Rightarrow a-\frac{1}{3\sqrt[3]{8^4}}=0\Rightarrow a=\frac{1}{48}$$

۱۴۴۹- گزینهٔ ۲ چون $(-1,-1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است و تابع f در نقطهٔ -1 مشـتق‌پذیر اسـت، پـس $f(-1)=-1$ و $f'(-1)=0$. از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$.

بنابراین

$$\begin{cases}f(-1)=-1\\ f'(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-a+b}{2}=-1\\ \frac{2a+2(-a+b)}{4}=0\end{cases}\Rightarrow a=2,\ b=0$$

پس $a+b=2$.

۱۴۵۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=(0,+\infty)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{k\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(kx+1)}{x}=\frac{2kx-(kx+1)}{2x\sqrt{x}}=\frac{kx-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow kx=1\Rightarrow x=\frac{1}{k}$$

پس طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f برابر $\frac{1}{k}$ است.

اکنون توجه کنید که

$$f(\frac{1}{k})=4\Rightarrow\frac{k\times\frac{1}{k}+1}{\sqrt{\frac{1}{k}}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{k}}}=4\Rightarrow2\sqrt{k}=4\Rightarrow k=4$$

۱۴۵۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2),\quad f'(x)=0\Rightarrow x=-1,x=2$$

چـون f' در نقطه‌هـای $x=-1$ و $x=2$ تغییـر علامت می‌دهـد، پس نقاط $(-1,-1)$ و $(2,-28)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(2+1)^2+(-28+1)^2}=\sqrt{738}$.

۱۴۵۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$$

پس تابع در نقاط $x=1$ و $x=-1$ اکسـترمم نسـبی دارد. حاصل‌جمع مقادیر $f(1)$ و $f(-1)$ را می‌خواهیم:

$$f(1)=2,f(-1)=\frac{2}{3}\Rightarrow f(1)+f(-1)=\frac{8}{3}$$

۱۴۵۳- گزینهٔ ۲ مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$1=\frac{1+a}{1+b}\Rightarrow a=b,\quad f(x)=\frac{x+a}{x^2+a}$$

از طرف دیگر چون تابع f در دامنه‌اش مشـتق‌پذیر اسـت، پس مشـتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی برابر صفر است:

$$f'(x)=\frac{x^2+a-2x(x+a)}{(x^2+a)^2}=\frac{-x^2-2ax+a}{(x^2+a)^2}$$

$$f'(1)=\frac{-1-a}{(a+1)^2}=0\Rightarrow a=-1$$

بنابراین $a=b=-1$ و در نتیجه $a+b=-2$.

۱۴۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا طول نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{۵x}{x^۲+k^۲}$$

$$f'(x)=\frac{۵(x^۲+k^۲-۲x^۲)}{(x^۲+k^۲)^۲}=\frac{۵(k^۲-x^۲)}{(x^۲+k^۲)^۲}\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm k$$

پس نقاط $A(k,\frac{۵}{۲k})$ و $B(-k,\frac{-۵}{۲k})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

اختلاف مقدار ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع برابر است با $|\frac{۵}{۲k}-\frac{-۵}{۲k}|$. بنابراین

$$|\frac{۵}{k}|=۱۰\Rightarrow |k|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow k=\pm\frac{۱}{۲}$$

۱۴۵۵- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f'(x)=۳ax^۲-b\Rightarrow f'(-۱)=۳a-b=۰$$

از طرف دیگر مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$f(-۱)=۴\Rightarrow -a+b+۲=۴\Rightarrow -a+b=۲$$

بنابراین $a=۱$ و $b=۳$، در نتیجه $ab=۳$.

۱۴۵۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۳a^۲x^۲+۴ax+۱$ و چون تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد و در این نقطه مشتق‌پذیر است، پس $f'(-۱)=۰$. در نتیجه

$$۳a^۲-۴a+۱=۰\Rightarrow a=۱,\quad a=\frac{۱}{۳}$$

اگر $a=۱$، آن‌گاه $f'(x)=۳x^۲+۴x+۱$ و

x	$-\infty$		-۱		$-\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ ماکزیمم نسبی دارد. اگر $a=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه

$f'(x)=\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۴}{۳}x+۱$ و

x	$-\infty$		-۳		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

پس تابع f در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ مینیمم نسبی دارد. بنابراین $a=۱$ تنها مقدار ممکن برای a است.

۱۴۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=[۳,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{x-۳}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲\sqrt{x-۳}=\sqrt{x}\Rightarrow ۴(x-۳)=x\Rightarrow x=۴$$

پس $x=۴$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(۴)=۳$.

۱۴۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۱-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}-۱}{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow (x+۲)^۲=۱\Rightarrow x=-۱\ ,\ x=-۳$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به شکل داده شده است.

x	$-\infty$		-۳		-۲		-۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	ت‌ن	−	۰	+	

بنابراین $x=-۳$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر $f(-۳)=۰$ است.

۱۴۵۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که تابع f در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ \cos x=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

پس جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

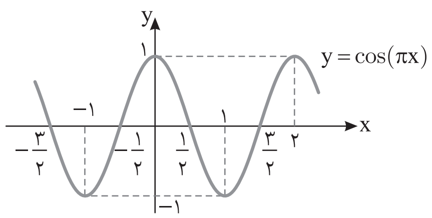
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{۲}$		۰		$\frac{\pi}{۲}$		π
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	۰	−	

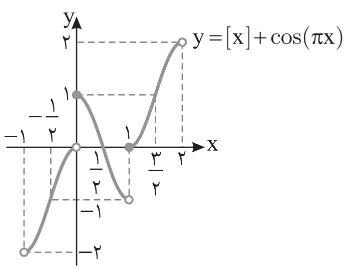
توجه کنید که مقدار $\cos x$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ مثبت و در بازه‌های $(-\pi,-\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ منفی است. پس تابع f در نقاط $x=-\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی دارد.

۱۴۶۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-۱+\cos(\pi x) & -۱<x<۰\\ \cos(\pi x) & ۰\le x<۱\\ ۱+\cos(\pi x) & ۱\le x<۲\end{cases}$$

اکنون نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=\cos(\pi x)$ رسم می‌کنیم:





بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد.

۱۴۶۱- گزینهٔ ۲ چون تابع f همه جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی تابع f جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند. توجه کنید که

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۹=۳(x-۱)(x-۳)$$

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

بنابراین تابع f در نقطهٔ ۱ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ ۳ مینیمم نسبی دارد. یعنی $a=۳$ و $b=۱$، پس $a-b=۲$.

۱۴۶۲- گزینهٔ ۱ چون تابع f روی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است، پس نقطه‌های اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. بنابراین $f'(1)=0$. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(2x-a)(x+1)-(1)(x^2-ax)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-a}{(x+1)^2}$$

$$f'(1)=0\Rightarrow\frac{1+2-a}{4}=0\Rightarrow a=3$$

۱۴۶۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است.

۱۴۶۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=[\frac{1}{2},+\infty)$ و

$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{2x-1}=1\Rightarrow 2x-1=1\Rightarrow x=1$$

پس $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم (مینیمم) نسبی تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با $f(1)=0$.

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$	

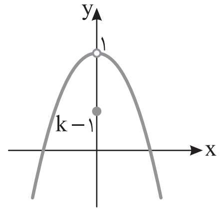
۱۴۶۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+36x=x(4x^2+3ax+36)$$

برای اینکه تابع f سه نقطهٔ اکسترمم نسبی داشته باشد باید علامت $f'(x)$ در سه نقطه تغییر کند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=0$ سه جواب داشته باشد. چون $x=0$ یک جواب این معادله است، پس باید معادلهٔ $4x^2+3ax+36=0$ دو جواب غیرصفر داشته باشد. پس

$$\Delta=9a^2-16\times36>0\Rightarrow a^2>\frac{36\times16}{9}\Rightarrow|a|>8$$

۱۴۶۶- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت زیر است که نقطهٔ $(0,k-1)$ هرجایی روی محور y می‌تواند باشد. چون تابع مینیمم نسبی دارد، پس این نقطه باید پایین‌تر از نقطهٔ $(0,1)$ باشد چون در غیر این صورت تابع در نقطهٔ $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و مینیمم نسبی ندارد. بنابراین



$$k-1<1\Rightarrow k<2$$

۱۴۶۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a\sin\frac{2\pi}{3}-b\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=a\sqrt{3}-\sqrt{3}\qquad(1)$$

از طرف دیگر، مقدار مشتق تابع در نقطهٔ اکسترمم نسبی در صورت وجود برابر صفر است:

$$f'(x)=2a\cos2x+b\sin x$$

$$f'(\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow2a\cos\frac{2\pi}{3}+b\sin\frac{\pi}{3}=0$$

$$-a+\frac{b\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow b=\frac{2}{\sqrt{3}}a\qquad(2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $b=2\sqrt{3}$ و $a=3$.

۱۴۶۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=1-4\sin x\cos x=1-2\sin2x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sin2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\2x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{12}\\x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
			max		min		max		min		

بنابراین تابع f در بازهٔ $(0,2\pi)$ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و دو نقطهٔ مینیمم نسبی دارد.

۱۴۶۹- گزینهٔ ۳ ابتدا طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\cos^2x-\cos x+1$$

$$f'(x)=-2\sin x\cos x+\sin x=\sin x(1-2\cos x)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow x=\pi\\\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			min نسبی		max نسبی		

پس تابع f در نقطهٔ $x=\pi$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی آن برابر $f(\pi)$، یعنی ۳ است.

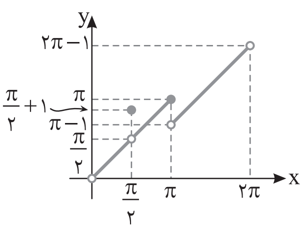
۱۴۷۰- گزینهٔ ۲ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$x\in(0,\pi]-\{\frac{\pi}{2}\}\Rightarrow0\le\sin x<1\Rightarrow[\sin x]=0\Rightarrow f(x)=x$$

$$x\in(\pi,2\pi)\Rightarrow-1\le\sin x<0\Rightarrow[\sin x]=-1\Rightarrow f(x)=x-1$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}+1$$

پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. واضح است که این تابع در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\pi$ ماکزیمم نسبی دارد ولی مینیمم نسبی ندارد.



۱۴۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)=0\Rightarrow x=0,\ x=4\ (\text{غ.ق.ق.})$$

پس برای مشخص کردن مقدار مینیمم مطلق باید مقادیر $f(0)$، $f(3)$ و $f(-1)$ را مقایسه کنیم: $f(0)=0$، $f(-1)=-7$ و $f(3)=-27$. پس مقدار مینیمم مطلق تابع برابر -27 است.

۱۴۷۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f همه جا مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm1$$

بنابراین باید مقادیر $f(1)$، $f(-1)$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(1)=k-2$، $f(-1)=k+2$ و $f(2)=k+2$.
پس $k+2$ ماکزیمم مطلق و $k-2$ مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[-1,2]$ هستند. بنابراین

$$k+2+k-2=4\Rightarrow k=2$$

۱۴۷۳- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1-2x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$$

پس باید مقادیر $f(2)$، $f(1)$ و $f(-1)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند: $f(1)=1$، $f(-1)=-1$ و $f(2)=\frac{4}{5}$. پس ماکزیمم مطلق تابع برابر ۱ و مینیمم مطلق آن برابر -1 است و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر -1 است.

۱۴۷۴- گزینهٔ ۴ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=5x^4-4x^3-9x^2=x^2(5x^2-4x-9)$$

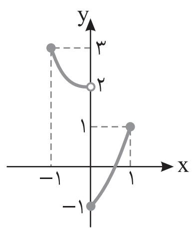
$$f'(x)=0\Rightarrow x=0\ ,\quad x=-1\ ,\quad x=\frac{9}{5}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین باید مقادیر $f(-2)$، $f(-1)$ و $f(1)$ را مقایسه کنیم تا مقدار ماکزیمم مطلق تابع معلوم شود (توجه کنید که چون f' در نقطهٔ $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد، مقدار $f(0)$ را حساب نمی‌کنیم):

$$f(-2)=-15\ ,\quad f(-1)=10\ ,\quad f(1)=6$$

بنابراین $(-1,10)$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-2,1]$ است. بنابراین $a=-1$، $b=10$ و $a+b=9$.

۱۴۷۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. از روی این شکل معلوم است که ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق تابع f برابر -1 است، پس مجموع آن‌ها برابر ۲ است.



راه‌حل دوم تابع $y=2-x^3$ روی بازه $[-1,0)$ اکیداً نزولی است $(y'=-3x^2<0)$ و مقادیرش در بازهٔ $(f(0),f(-1)]$ یعنی $(2,3]$ هستند.
تابع $y=x^2+x-1$ روی بازهٔ $[0,1]$ اکیداً صعودی است $(y'=2x+1>0)$ و مقادیرش در بازهٔ $[f(0),f(1)]$ یعنی $[-1,1]$ هستند. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۳ و مینیمم مطلق آن برابر -1 است، که مجموعشان می‌شود ۲.

۱۴۷۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x & 0\le x\le 1\\ x^3+3x & -1\le x\le 0\end{cases}\ ,\quad f'(x)=\begin{cases}3x^2-3 & 0<x<1\\ 3x^2+3 & -1<x<0\end{cases}$$

پس تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. بنابراین باید مقادیر $f(-1)$، $f(1)$ و $f(0)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع مشخص شوند:

$$f(0)=0,\quad f(1)=-2,\quad f(-1)=-4$$

پس ماکزیمم مطلق تابع برابر صفر و مینیمم مطلق آن برابر -4 است و مجموع این دو مقدار برابر -4 است.

۱۴۷۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}-(x^2+4x) & -1\le x<0\\ -(x^2-4x) & 0\le x\le 3\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-(2x+4) & -1<x<0\\ -(2x-4) & 0<x<3\end{cases}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=2$$

اکنون توجه کنید که $f(-1)=3$، $f(0)=0$، $f(2)=4$ و $f(3)=3$. بنابراین ماکزیمم مطلق تابع f برابر ۴ است.

۱۴۷۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[0,8]$ و تابع f روی بازهٔ $(0,8)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}=\frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{8-x}=\sqrt{x}\Rightarrow 8-x=x\Rightarrow x=4$$

پس باید مقادیر $f(0)$، $f(8)$ و $f(4)$ را مقایسه کنیم تا کمترین و بیشترین مقدار تابع معین شوند:

$$f(0)=\sqrt{8}\ ,\quad f(8)=\sqrt{8}\ ,\quad f(4)=4$$

بنابراین ۴ و $\sqrt{8}$ به‌ترتیب بیشترین و کمترین مقدار تابع هستند و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $8\sqrt{2}$ است.

۱۴۷۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-2,2]$ و تابع f روی بازهٔ $(-2,2)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=-x$$

$$\xrightarrow{x\le 0}4-x^2=x^2\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\ (\text{غ.ق.ق.})\\ x=-\sqrt{2}\end{cases}$$

بنابراین باید $f(-2)$، $f(2)$ و $f(-\sqrt{2})$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع در بازهٔ $[-2,2]$ مشخص شوند: $f(2)=2$، $f(-2)=-2$ و $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$. بنابراین $-2\sqrt{2}$ کمترین مقدار و ۲ بیشترین مقدار تابع است و نسبت آن‌ها برابر $-\sqrt{2}$ است.

۱۴۸۰- گزینهٔ ۱ f تابعی مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۲\cos ۲x+۲\cos x$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \cos ۲x+\cos x=۰\Rightarrow ۲\cos^{۲} x+\cos x-۱=۰$$

$$(\cos x+۱)(۲\cos x-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}\cos x=-۱ \ (\text{غ.ق.ق})\\ \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(-\frac{\pi}{۲})$ و $f(-\frac{\pi}{۳})$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ مشخص شود:

$$f(۰)=۰,\quad f(-\frac{\pi}{۲})=-۲,\quad f(-\frac{\pi}{۳})=-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

پس بیشترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ برابر صفر است.

۱۴۸۱- گزینهٔ ۲ تابع f در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۴x^{۳}+۳۲x,\quad f'(x)=۰\Rightarrow ۴x(x^{۲}+۸)=۰\Rightarrow x=۰$$

پس باید مقادیر $f(۱)$، $f(-۱)$ و $f(۰)$ را مقایسه کنیم تا اکسترمم‌های مطلق تابع را معین کنیم: $f(۰)=۱$، $f(۱)=۱۸$ و $f(-۱)=۱۸$. پس ماکزیمم مطلق تابع ۱۸ و مینیمم مطلق آن ۱ است که اختلاف آن‌ها برابر ۱۷ است.

۱۴۸۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f(x)=۲+\frac{x^{۲}}{x+۱}$، بنابراین

$$f'(x)=\frac{۲x(x+۱)-x^{۲}}{(x+۱)^{۲}}=\frac{x^{۲}+۲x}{(x+۱)^{۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\,,\ x=-۲\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین باید مقادیر $f(-\frac{۱}{۲})$، $f(۰)$ و $f(۲)$ را حساب کنیم:

$$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۵}{۲},\quad f(۰)=۲,\quad f(۲)=\frac{۱۰}{۳}$$

در نتیجه، کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[-\frac{۱}{۲},۲]$ برابر ۲ است.

۱۴۸۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=۳x^{۲}-۶x$. پس

$$۳x^{۲}-۶x=۰\Rightarrow x=۰\,,\ x=۲$$

پس برای پیدا کردن مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ باید مقادیر $f(۰)$، $f(۲)$ و $f(-۱)$ را مقایسه کنیم. چون $f(۰)=a$، $f(-۱)=a-۴$ و $f(۲)=a-۴$، بنابراین مقدار مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر $a-۴$ است. پس $a-۴=۴\Rightarrow a=۸$

۱۴۸۴- گزینهٔ ۲ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۱۰x^{۹}-۱۰=۱۰(x^{۹}-۱)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین باید مقادیر $f(۱)$، $f(-۱)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم تا مقدار مینیمم مطلق تابع معلوم شود: $f(۱)=-۸$، $f(-۱)=۱۲$ و $f(۲)=۱۰۰۵$. پس $(۱,-۸)$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[-۱,۲]$ است. بنابراین $a=۱$، $b=-۸$ و $a+b=-۷$.

۱۴۸۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۳mx^{۲}+۶mx$. چون

$$f''(x)=۶mx+۶m,\quad f''(x)=۰\Rightarrow x=-۱$$

پس تنها نقطهٔ بحرانی تابع f' نقطهٔ $x=-۱$ است و بیشترین مقدار تابع f' به‌ازای $x=-۱$ به‌دست‌می‌آید: $f'(-۱)=۱۲\Rightarrow ۳m-۶m=۱۲\Rightarrow m=-۴$

۱۴۸۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۳x+۲ & ۲\le x\le ۳\\ -x^{۲}+۳x-۲ & ۰\le x<۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x-۳ & ۲<x<۳\\ -۲x+۳ & ۰<x<۲\end{cases}$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(\frac{۳}{۲})=۰$. پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(۳)$، $f(۲)$ و $f(\frac{۳}{۲})$ را مقایسه کنیم تا مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع به‌دست آیند: $f(۰)=-۲$، $f(۳)=۲$، $f(۲)=۰$ و $f(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۴}$. بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۲ و مقدار مینیمم مطلق آن برابر ۲- است و اختلاف این دو مقدار برابر ۴ است.

۱۴۸۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[۰,۵]$ و تابع f روی بازهٔ $(۰,۵)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۵-x}}=\frac{۲\sqrt{۵-x}-\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\sqrt{۵-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲\sqrt{۵-x}=\sqrt{x}\Rightarrow ۴(۵-x)=x\Rightarrow x=۴$$

پس باید مقادیر $f(۰)$، $f(۴)$ و $f(۵)$ را با هم مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به‌دست آیند:

$$f(۰)=\sqrt{۵},\quad f(۴)=۵,\quad f(۵)=۲\sqrt{۵}$$

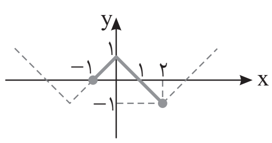
پس بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع به‌ترتیب برابر است با ۵ و $\sqrt{۵}$. بنابراین حاصل‌ضرب بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f برابر $۵\sqrt{۵}$ است.

۱۴۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f'(x)=۲x-\frac{۱۶}{x^{۲}}$، پس

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$، پس کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با $f(۲)=۱۲$.

۱۴۸۹- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است و حداکثر مقدار تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ برابر ۱ است.



۱۴۹۰- گزینهٔ ۴ تابع f مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=۲\sin x\cos x+\cos x=\cos x(۱+۲\sin x)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \cos x(۲\sin x+۱)=۰\Rightarrow x=-\frac{\pi}{۶}$$

پس باید مقادیر $f(-\frac{\pi}{۲})$، $f(۰)$ و $f(-\frac{\pi}{۶})$ را مقایسه کنیم تا کمترین مقدار تابع معین شود:

$$f(۰)=۰,\quad f(-\frac{\pi}{۲})=۰,\quad f(-\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۴}$$

پس $-\frac{۱}{۴}$ کمترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ است.

۱۴۹۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=۴-x$ و در نتیجه

$$xy=x(۴-x)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع $f(x)=۴x-x^۲$ روی بازهٔ $[۰,۱]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=۴-۲x\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۲\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

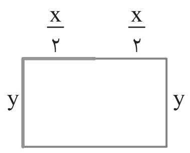
$$f(۰)=۰,\quad f(۱)=۳=f_{max}$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن xy برابر ۳ است.

۱۴۹۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول ضلع‌های باغچه x و y باشند (شکل را ببینید). در این صورت، طبق فرض $x+y+\frac{x}{۲}=۱۲۰$، یعنی $\frac{۳}{۲}x+y=۱۲۰$.

بنابراین $\text{مساحت باغچه}=xy=x(۱۲۰-\frac{۳}{۲}x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x(۱۲۰-\frac{۳}{۲}x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۱۲۰-۳x,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۴۰$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت باغچه به‌ازای $x=۴۰$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\text{مساحت باغچه}=۴۰\times۶۰=۲۴۰۰$$

۱۴۹۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید شعاع‌های دایره‌ها $r_۱$ و $r_۲$ باشد. در این صورت

$$\text{مجموع محیط‌ها}=۲\pi r_۱+۲\pi r_۲=۱۰\pi\Rightarrow r_۱+r_۲=۵$$

از طرف دیگر،

$$\text{مجموع مساحت‌ها}=\pi r_۱^۲+\pi r_۲^۲=\pi(r_۱^۲+(۵-r_۱)^۲)=\pi(۲r_۱^۲-۱۰r_۱+۲۵)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(r_۱)=۲r_۱^۲-۱۰r_۱+۲۵$ را پیدا کنیم. چون

$$f'(r_۱)=۴r_۱-۱۰,\quad f'(r_۱)=۰\Rightarrow r_۱=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f وقتی به‌دست می‌آید که $r_۱=\frac{۵}{۲}$ و برابر است با $\frac{۲۵}{۲}$. در نتیجه مجموع مساحت‌های دایره‌ها حداقل $\frac{۲۵\pi}{۲}$ است.

۱۴۹۴- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(۳x-x)^۲+(x+۶-۳)^۲}=\sqrt{۵x^۲+۶x+۹}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۵x^۲+۶x+۹}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که همواره $۵x^۲+۶x+۹>۰$ و

$$f'(x)=\frac{۱۰x+۶}{۲\sqrt{۵x^۲+۶x+۹}},\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۵}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{۳}{۵}$ به‌دست می‌آید.

۱۴۹۵- گزینهٔ ۲ مختصات نقطهٔ B به‌صورت $(x,x^۲)$ است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(x-۳)^۲+(x^۲-۰)^۲}=\sqrt{x^۴+x^۲-۶x+۹}$$

اگر $y=\sqrt{x^۴+x^۲-۶x+۹}$، آن‌گاه $y'=\frac{۲x^۳+x-۳}{\sqrt{x^۴+x^۲-۶x+۹}}$ و در نتیجه

$$y'=۰\Rightarrow ۲x^۳+x-۳=۰\Rightarrow ۲(x^۳-۱)+(x-۱)=۰$$

$$(x-۱)(۲x^۲+۲x+۳)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین کمترین مقدار تابع y به‌ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب، B نقطهٔ $(۱,۱)$ است.

۱۴۹۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که خط d از نقطه‌های $(۴,۰)$ و $(۰,۴)$ گذشته است، پس معادله‌اش به‌صورت $y=۴-x$ است. در نتیجه

$$x^۲+y^۲=x^۲+(۴-x)^۲=۲(x^۲-۴x+۸)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=۲(x^۲-۴x+۸)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۴x-۸\Rightarrow f'(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با ۸.

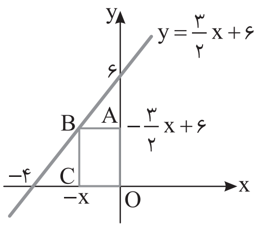
۱۴۹۷- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطهٔ B هم برابر $-x$ است. نقطهٔ B روی خطی است که از نقطه‌های $(-۴,۰)$ و $(۰,۶)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط $y=\frac{۳}{۲}x+۶$ است.

بنابراین عرض نقطهٔ B برابر $-\frac{۳}{۲}x+۶$ است. به این ترتیب،

$$\text{مساحت مستطیل } OABC=x(-\frac{۳}{۲}x+۶)$$

پس باید بیشترین مقدار تابع $y=x(-\frac{۳}{۲}x+۶)$ را پیدا کنیم. چون $y'=-۳x+۶$، اگر $y'=۰$، آن‌گاه $x=۲$. بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل OABC به‌ازای $x=۲$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$۲\times۳=۶$$



۱۴۹۸- گزینهٔ ۴ تابع هزینه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$C=۱۰۰(xl)+۶۰(۲xh+۲lh)=۱۰۰xl+۱۲۰h(x+l)$$

$$=۱۰۰x(۲x)+۱۲۰h(x+۲x)=۲۰۰x^۲+۳۶۰xh\quad(۱)$$

اکنون توجه کنید که

$$\text{حجم مخزن}=۱۰\Rightarrow x\times l\times h=۱۰\Rightarrow x(۲x)h=۱۰\Rightarrow h=\frac{۵}{x^۲}\quad(۲)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید

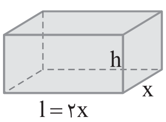
$$C(x)=۲۰۰x^۲+۳۶۰x(\frac{۵}{x^۲})=۲۰۰x^۲+\frac{۱۸۰۰}{x},\quad x\in(۰,+\infty)$$

نقطهٔ بحرانی تابع C را به‌دست می‌آوریم:

$$C'(x)=۰\Rightarrow ۴۰۰x-\frac{۱۸۰۰}{x^۲}=۰\Rightarrow\frac{۴۰۰x^۳-۱۸۰۰}{x^۲}=۰$$

$$۴۰۰x^۳-۱۸۰۰=۰\Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{۹}{۲}}$$

پس کمترین مقدار تابع C به ازای $x=\sqrt[۳]{\frac{۹}{۲}}$ به‌دست می‌آید.



۱۴۹۹- گزینهٔ ۴ اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، آن‌گاه

$C=۲۰۰۰t+(۴v^۲)t$: هزینهٔ t ساعت حرکت

$C=۲۰۰۰(\frac{x}{v})+۴v^۲(\frac{x}{v})$: هزینهٔ x کیلومتر حرکت

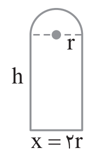
$C(v)=\frac{۲۰۰۰}{v}+۴v$: هزینهٔ ۱ کیلومتر حرکت

بنابراین

$$C'(v)=-\frac{۲۰۰۰}{v^۲}+۴\ ,\quad C'(v)=۰\Rightarrow v^۲=۵۰۰\Rightarrow v=۱۰\sqrt{۵}$$

۱۵۰۰- گزینهٔ ۴ باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{محیط}=۹\Rightarrow ۲h+x+\frac{۱}{۲}(۲\pi r)=۹\Rightarrow ۲h+۲r+\pi r=۹$$



$$h=\frac{۹}{۲}-r-\frac{\pi r}{۲}$$

مساحت نیم‌دایره+مساحت مستطیل=S : مساحت پنجره

$$S(r)=۲r(\frac{۹}{۲}-r-\frac{\pi r}{۲})+\frac{۱}{۲}\pi r^۲=-(\frac{\pi+۴}{۲})r^۲+۹r$$

$$S'(r)=-(\pi+۴)r+۹\ ,\quad S'(r)=۰\Rightarrow r=\frac{۹}{\pi+۴}$$

۱۵۰۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $y=\frac{۴}{x}$ و در نتیجه $x+y=x+\frac{۴}{x}$.

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{۴}{x}$ با دامنهٔ $[\frac{۱}{۲},۳]$ را می‌خواهیم:

$$f'(x)=۱-\frac{۴}{x^۲}\ ,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=۲,\ x=-۲\ (\text{غ.ق.ق})$$

پس برای پیدا کردن مینیمم مطلق تابع f روی بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۳]$ باید مقادیر $f(\frac{۱}{۲})$، $f(۳)$ و $f(۲)$ را مقایسه کنیم: $f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱۷}{۲}$، $f(۳)=\frac{۱۳}{۳}$ و $f(۲)=۴=f_{min}$.

پس کمترین مقدار $x+y$ برابر ۴ است.

۱۵۰۲- گزینهٔ ۲ چون $x-y=۲$، پس $y=x-۲$، در نتیجه

$$x^۳-y^۳=x^۳-(x-۲)^۳\Rightarrow f(x)=۶x^۲-۱۲x+۸\Rightarrow f'(x)=۱۲x-۱۲$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۱۲x-۱۲=۰\Rightarrow x=۱$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(۱)=۲$$

۱۵۰۳- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم طول ضلع زمین در امتداد شمال- جنوب برابر x و در امتداد شرق- غرب برابر y باشد. در این صورت، $xy=۱۰۰۰۰$ و هزینهٔ نرده‌کشی برابر است با

$$S=۱۵۰۰۰(۲x)+۶۰۰۰۰(۲y)=۳۰۰۰۰x+۱۲۰۰۰۰y=۳\times۱۰^۴x+\frac{۱۲\times۱۰^۸}{x}$$

بنابراین $S'=۳\times۱۰^۴-\frac{۱۲\times۱۰^۸}{x^۲}$ و اگر $S'=۰$، $x=۲۰۰$. بنابراین کمترین مقدار تابع S به‌ازای $x=۲۰۰$ به‌دست می‌آید. در این حالت، طول یک ضلع زمین برابر ۲۰۰ است و طول ضلع دیگر زمین برابر است با $\frac{۱۰۰۰۰}{۲۰۰}=۵۰$.

بنابراین محیط زمین برابر است با $۲(۲۰۰+۵۰)=۵۰۰$.

۱۵۰۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-۱$ و

$$x_۱x_۲=-(m^۲+m+۱)$$

بنابراین

$$x_۱^۳+x_۲^۳=(x_۱+x_۲)((x_۱+x_۲)^۲-۳x_۱x_۲)$$
$$=-(۱+۳(m^۲+m+۱))=-۳m^۲-۳m-۴$$

بنابراین باید بیشترین مقدار ممکن تابع $f(m)=-۳m^۲-۳m-۴$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(m)=-۶m-۳\ ,\quad f'(m)=۰\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{m\to-\infty}f(m)=\lim_{m\to+\infty}f(m)=-\infty$$

پس بیشترین مقدار تابع f به ازای $m=-\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱۳}{۴}$$

۱۵۰۵- گزینهٔ ۴ فرض کنید $OB=BC=x$. توجه کنید که با نمادگذاری شکل زیر $s=\alpha+t$، در نتیجه

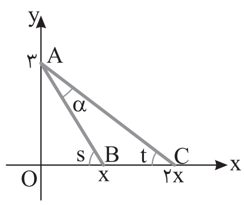
$$\tan s=\tan(\alpha+t)=\frac{\tan\alpha+\tan t}{۱-\tan\alpha\tan t}\Rightarrow\frac{۳}{x}=\frac{\tan\alpha+\frac{۳}{۲x}}{۱-\tan\alpha\times\frac{۳}{۲x}}$$

بنابراین اگر فرض کنیم $y=\frac{۳}{۲x}$، به‌دست می‌آید

$$۲y=\frac{\tan\alpha+y}{۱-\tan\alpha\times y}\Rightarrow ۲y-۲y^۲\tan\alpha=\tan\alpha+y\Rightarrow\tan\alpha=\frac{y}{۱+۲y^۲}$$

اگر فرض کنیم $f(y)=\frac{y}{۱+۲y^۲}$، آن‌گاه $f'(y)=\frac{۱-۲y^۲}{(۱+۲y^۲)^۲}$، بنابراین

$$f'(y)=۰\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

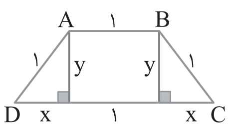


پس بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار $\tan\alpha$ به‌ازای $x=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ به‌دست می‌آید.

۱۵۰۶- گزینهٔ ۱ با نمادگذاری شکل زیر معلوم می‌شود که بنابر قضیهٔ فیثاغورس $y^۲+x^۲=۱$، پس $y=\sqrt{۱-x^۲}$. در نتیجه مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر برابر است با $\frac{۱}{۲}y(۱+۱+۲x)=y(۱+x)=\sqrt{۱-x^۲}(۱+x)$. بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}(۱+x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{-x(۱+x)}{\sqrt{۱-x^۲}}+\sqrt{۱-x^۲}=\frac{-۲x^۲-x+۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ ,\quad x=-۱\ (\text{غ.ق.ق})$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع f به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید و در این صورت

$$CD=۲$$

۱۵۰۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\text{حجم استوانه}=2lit=2000cm^3\Rightarrow \pi r^2h=2000\Rightarrow h=\frac{2000}{\pi r^2}$$

$$\text{مساحت کل استوانه}=S=\text{مساحت قاعده}+\text{سطح جانبی}$$

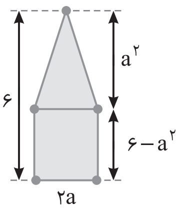
$$S(r)=\pi r^2+2\pi rh=\pi r^2+2\pi r\left(\frac{2000}{\pi r^2}\right)=\pi r^2+\frac{4000}{r}$$

پس

$$S'(r)=2\pi r-\frac{4000}{r^2}\ ,\quad S'(r)=0\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{2000}{\pi}}$$

۱۵۰۸- گزینهٔ ۳ این پنج‌ضلعی از یک مستطیل به ابعاد $2a$، $6-a^2$ و یک مثلث به ارتفاع a^2 و قاعدهٔ $2a$ تشکیل شده است. بنابراین مساحت آن برابر است با $S(a)=2a(6-a^2)+\frac{1}{2}a^2(2a)=12a-a^3$. بنابراین

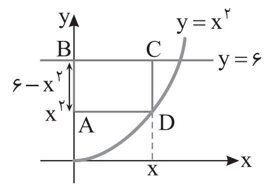
$$S'(a)=12-3a^2\ ,\quad S'(a)=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2\ ,\quad a=-2\ (\text{غ.ق.ق.})$$



پس نقطهٔ $(2,16)$، نقطهٔ ماکزیمم تابع S است و در نتیجه بیشترین مقدار مساحت پنج‌ضلعی برابر ۱۶ است.

۱۵۰۹- گزینهٔ ۱ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت، چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^2$ است، پس عرض آن برابر x^2 است. به این ترتیب عرض نقطهٔ A هم برابر x^2 است و در نتیجه $AB=6-x^2$. بنابراین $2(x+6-x^2)=$ محیط مستطیل $ABCD$. اگر $y=2(x+6-x^2)$، آن‌گاه $y'=2-4x$ و در نتیجه $y'=0$، پس $x=\frac{1}{2}$.

بنابراین بیشترین مقدار تابع y، یعنی بیشترین مقدار محیط مستطیل $ABCD$ به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $2(\frac{1}{2}+6-\frac{1}{4})=\frac{25}{2}$.



۱۵۱۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. در این صورت طول نقطهٔ C هم برابر x است و چون نقطهٔ C روی خط $y=-x+3$ است، پس عرض آن برابر $-x+3$ است. بنابراین عرض نقطهٔ B هم برابر $-x+3$ است و چون این نقطه روی خط $y=x+5$ است، پس طول نقطهٔ B برابر است با $-x+3-5$، یعنی $-x-2$. به این ترتیب، $BC=x-(-x-2)=2x+2$. در نتیجه

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD=BC\times CD=(2x+2)(-x+3)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $y=(2x+2)(-x+3)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$y'=2(-x+3)+(-1)(2x+2)=-4x+4\ ,\quad y'=0\Rightarrow x=1$$

بنابراین بیشترین مقدار ممکن تابع y، یعنی بیشترین مقدار ممکن مساحت مستطیل $ABCD$ به ازای $x=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با $4\times2=8$.

۱۵۱۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $y=4-x$ و چون $y<0$، پس $x>4$ و باید بیشترین مقدار تابع

$$f(x)=x^2+(4-x)^3\ ,\quad x\in(4,+\infty)$$

را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(x)=2x-3(4-x)^2=-3x^2+26x-48$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=6\ ,\ x=\frac{8}{3}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و چون

$$\lim_{x\to4^+}f(x)=16\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\ ,\quad f(6)=28$$

پس بیشترین مقدار ممکن تابع f برابر ۲۸ است.

۱۵۱۲- گزینهٔ ۳ چون $2x+y=8$، پس $y=8-2x$ و

$$xy^3=x(8-2x)^3=8x(4-x)^3$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=8x(4-x)^3$ را پیدا کنیم. توجه کنید که $f'(x)=8(4-x)^3-24x(4-x)^2=32(4-x)^2(1-x)$

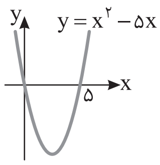
$$f'(x)=0\Rightarrow x=4, x=1$$

چون تابع f' در $x=4$ تغییر علامت نمی‌دهد، پس تابع f فقط در نقطهٔ $x=1$ اکسترمم نسبی دارد. همچنین، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

پس بیشترین مقدار تابع f به‌ازای $x=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$f(1)=216$$

۱۵۱۳- گزینهٔ ۳ فرض کنید P نقطهٔ (x,y) باشد. چون نقطهٔ P روی سهمی به معادلهٔ $y=x^2-5x$ است، پس P نقطهٔ (x,x^2-5x) است و مجموع مختصات P برابر است با $x+x^2-5x=x^2-4x$. البته چون P نقطه‌ای زیر محور x است، پس $0<x<5$.



به این ترتیب، باید کمترین مقدار تابع $f(x)=x^2-4x$ را روی بازهٔ $(0,5)$ پیدا کنیم. توجه کنید که $f'(x)=2x-4\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=2$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با $4-8=-4$.

۱۵۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{1}{2}(5-x)(12+x^2+8x+4)=\frac{1}{2}(5-x)(x^2+8x+16)$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{2}(5-x)(x^2+8x+16)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(x^2+8x+16)+(5-x)(x+4)=-\frac{3}{2}x^2-3x+12$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=2, x=-4\ (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که به‌ازای $x=-4$، طول قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ مورد نظر به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{2}(3)(36)=54$$

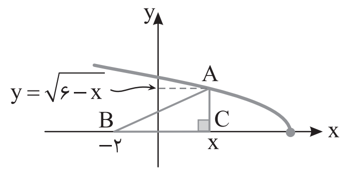
۱۵۱۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ A هم برابر x است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=\sqrt{6-x}$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر با $\sqrt{6-x}$ است. بنابراین $AC=\sqrt{6-x}$. از طرف دیگر، $BC=x+2$. به این ترتیب

$$\text{مساحت مثلث ABC}=\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{6-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{6-x}$ به‌ازای آن بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{6-x}+\frac{1}{2}(x+2)\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{6-x}=\frac{x+2}{4\sqrt{6-x}}\Rightarrow 6-x=\frac{x+2}{2}\Rightarrow x=\frac{10}{3}$$



۱۵۱۶- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ D برابر x باشد. چون نقطهٔ D روی نمودار تابع $y=x^2$ است، پس عرض نقطهٔ D برابر x^2 است. در نتیجه، عرض نقطهٔ A نیز برابر x^2 است. از طرف دیگر عرض نقطهٔ B برابر عرض نقطهٔ C است، پس عرض نقطهٔ B برابر ۹ است. به این ترتیب، $BA=9-x^2$. بنابراین

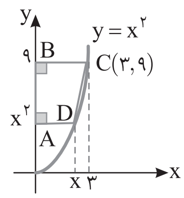
$$\text{مساحت ذوزنقهٔ ABCD}=\frac{1}{2}AB(BC+AD)=\frac{1}{2}(9-x^2)(3+x)$$

اگر $f(x)=\frac{1}{2}(9-x^2)(3+x)$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{3}{2}(3+x)(1-x)$، پس

$$f'(x)=0\Rightarrow x=1 \quad (\text{توجه کنید که } x>0)$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت ذوزنقهٔ ABCD به‌ازای $x=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{2}(9-1)(3+1)=16$$



۱۵۱۷- گزینهٔ ۱ فرض کنید طول ضلع‌های نظیر رأس قائمه در این مثلث x و y باشند. در این صورت $x^2+y^2=4$. از طرف دیگر،

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$$

بنابراین باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}$ را پیدا کنیم ($0<x<2$). توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \sqrt{4-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\Rightarrow 4-x^2=x^2\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

چون $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=0$، پس بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث مورد نظر به‌ازای $x=\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

۱۵۱۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید (x,y) نقطه‌ای روی خط $y=4x+2$ باشد. فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4x+2)^2}=\sqrt{17x^2+16x+4}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{17x^2+16x+4}$ را پیدا کنیم.

$$f'(x)=\frac{34x+16}{2\sqrt{17x^2+16x+4}},\quad f'(x)=0\Rightarrow x=-\frac{8}{17}$$

پس $y=4x+2=\frac{2}{17}$، یعنی نقطهٔ مورد نظر $\left(-\frac{8}{17},\frac{2}{17}\right)$ است.

۱۵۱۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ B برابر $-x$ باشد. در این صورت طول نقطهٔ A هم برابر $-x$ است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=x^3+8$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر است با $8-x^3$. بنابراین

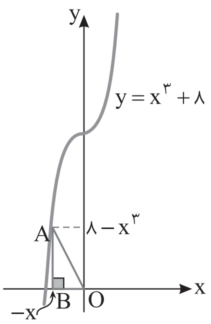
$$\text{مساحت مثلث OAB}=\frac{1}{2}x(8-x^3)$$

اگر $f(x)=\frac{1}{2}x(8-x^3)$، آن‌گاه $f(x)=4x-\frac{x^4}{2}$، پس $f'(x)=4-2x^3$. در نتیجه

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مثلث OAB وقتی به‌دست می‌آید که $x=\sqrt[3]{2}$ و برابر است با

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(6)=3\sqrt[3]{2}$$



۱۵۲۰- گزینهٔ ۳ از روی شکل معلوم است که زاویه‌های EAB و CBF هر دو متمم زاویهٔ ABE هستند، پس با هم برابرند: $E\hat{A}B=\alpha$. اکنون توجه کنید که

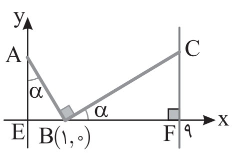
$$\triangle AEB:\sin\alpha=\frac{EB}{AB}\Rightarrow AB=\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\triangle BFC:\cos\alpha=\frac{BF}{BC}\Rightarrow BC=\frac{8}{\cos\alpha}$$

بنابراین $AB+BC=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{8}{\cos\alpha}$. بنابراین باید مشخص کنیم که وقتی تابع $f(x)=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{8}{\cos\alpha}$ کمترین مقدار ممکن است، مقدار $\tan\alpha$ چقدر است. توجه کنید که

$$f'(x)=-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{8\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{8\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{8}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{2}$$



۱۵۲۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین تابع f' روی بازهٔ $(-2,1)$ اکیداً نزولی است، در نتیجه جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-2,1)$ رو به پایین است. روی بقیهٔ بازه‌ها چنین نیست.

۱۵۲۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{2}{(x-2)^3}$$

پس جدول تعیین علامت $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	
f		$\cap$	ت ن	$\cup$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,2)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(2,+\infty)$ رو به بالاست.

۱۵۲۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f''(x)=6(x^2+2x-3)=6(x-1)(x+3)$،

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

از روی این جدول معلوم می‌شود که بیشترین مقدار a برابر -3 است.

۱۵۲۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f''(x)=12x^2-12x+2m$. برای اینکه همواره $f''(x)\geq 0$ باید $\Delta\leq 0\Rightarrow 12^2-4(2m)(12)\leq 0\Rightarrow m\geq\frac{3}{2}$

۱۵۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f''(x)=\frac{-18(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$. بنابراین

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-1,1)$ رو به بالاست.

۱۵۲۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{(4x-1)(x-1)-(2x^2-x+m)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+1-m}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x-4)(x-1)^2-2(x-1)(2x^2-4x+1-m)}{(x-1)^4}=\frac{2m+2}{(x-1)^3}$$

عبارت $(x-1)^3$ به‌ازای هر $x>1$ مقداری مثبت دارد. پس کافی است صورت کسر $f''(x)$ مثبت باشد تا $f''(x)$ برای هر $x>1$ مقداری مثبت داشته باشد و جهت تقعر نمودار تابع f به سمت بالا باشد: $2m+2>0\Rightarrow m>-1$

۱۵۲۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=x^2-2x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=2x-x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=2+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=2+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

پس به‌ازای هر x در بازهٔ $(0,+\infty)$ مقدار $f''(x)$ عددی مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(0,+\infty)$ رو به بالاست.

۱۵۲۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f''(x)=-\cos x$. برای آنکه جهت تقعر نمودار تابع f روبه‌بالا باشد، باید $f''(x)>0$، بنابراین

$$-\cos x>0\Rightarrow\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$$

در نتیجه جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ رو به بالاست.

۱۵۲۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=4x+3\cos x\Rightarrow f''(x)=4-3\sin x$$

با توجه به اینکه $-1\leq\sin x\leq 1$، می‌توان نوشت:

$$-1\leq\sin x\leq 1\Rightarrow -3\leq -3\sin x\leq 3\Rightarrow 1\leq 4-3\sin x\leq 7$$

بنابراین علامت $f''(x)$ همواره مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f همواره رو به بالاست و تغییر نمی‌کند.

۱۵۳۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=-\sin x-\cos x$، پس $f''(x)=-\cos x+\sin x$. اکنون توجه کنید که در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{4})$ مقدار $\sin x$ از $\cos x$ کمتر است، پس $-\cos x+\sin x<0\Rightarrow f''(x)<0$

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(0,\frac{\pi}{4})$ رو به پایین است.

(خودتان نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.)

۱۵۳۱- گزینهٔ ۲ اگر روی بازه‌ای $f''(x)>0$، جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به بالاست. بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(3,+\infty)$ رو به بالاست.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
f		$\cap$		$\cap$		$\cup$	

۱۵۳۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f''(x)=6x^2-7x+2=(2x-1)(3x-2)$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(\frac{2}{3},3)$ رو به بالاست.

۱۵۳۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f''(x)=x^2-4x-12=(x-6)(x+2)$$

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

از روی این جدول معلوم می‌شود که کمترین مقدار a برابر -2 و بیشترین مقدار b برابر ۶ است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۸ است.

۱۵۳۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-2x & x\geq 0\\ 3x^2+2x & x\leq 0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x-2 & x>0\\ 6x+2 & x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\circ$	$+$	ت ن	$-$	$\circ$	$+$	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f سه بار عوض می‌شود.

۱۵۳۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{ax+a^{۲}-ax+۱}{(x+a)^{۲}}=\frac{a^{۲}+۱}{(x+a)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{-۲(a^{۲}+۱)(x+a)}{(x+a)^{۴}}=\frac{-۲(a^{۲}+۱)}{(x+a)^{۳}}$$

علامت $f''(x)$ در $x=-a$ (ریشهٔ مخرج) تغییر می‌کند، پس جهت تقعر نمودار تابع f نیز در این نقطه تغییر می‌کند. بنابراین

$$-\frac{۱}{a}=-a\Rightarrow a^{۲}=۱\Rightarrow a=\pm ۱$$

توجه کنید که در هر دو حالت $a=۱$ و $a=-۱$ جهت تقعر نمودار تابع f همان چیزی است که در صورت سؤال آمده است.

$a=۱\Rightarrow$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	ت ن	$-$	

$a=-۱\Rightarrow$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	ت ن	$-$	

۱۵۳۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{\sqrt{x}}=x+x^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(x)=۱-\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۵}{۲}}=\frac{۳}{۴x^{۲}\sqrt{x}}$$

بنابراین مقدار مشتق دوم تابع f روی دامنه‌اش، یعنی $(۰,+\infty)$ مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به بالاست.

۱۵۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-۱,۱]$ و

$$f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}=\frac{-x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

$$f''(x)=\frac{-\sqrt{۱-x^{۲}}-\frac{x^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}{۱-x^{۲}}=\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}(۱-x^{۲})}$$

واضح است که مشتق دوم تابع f روی بازهٔ $(-۱,۱)$ منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f در این بازه رو به پایین است.

۱۵۳۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=[۰,۲]$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}-\frac{۱}{\sqrt{۲-x}}\Rightarrow f''(x)=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}-\frac{۱}{۲(۲-x)\sqrt{۲-x}}$$

$$f''(x)=-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{x\sqrt{x}}+\frac{۱}{(۲-x)(\sqrt{۲-x})}\right)$$

بنابراین مقدار $f''(x)$ به‌ازای هر x در بازهٔ $(۰,۲)$ عددی منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

۱۵۳۹- گزینهٔ ۳ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲\sin x\cos x+۲\cos x=\sin ۲x+۲\cos x$$

$$f''(x)=۲\cos ۲x-۲\sin x=۲(۱-۲\sin^{۲}x)-۲\sin x$$

$$=-۴\sin^{۲}x-۲\sin x+۲=(\sin x+۱)(-۴\sin x+۲)$$

$$=۲(۱+\sin x)(۱-۲\sin x)$$

چون عبارت $۲(۱+\sin x)$ نامنفی است، پس کافی است عبارت $۱-۲\sin x$ را روی بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ تعیین علامت کنیم تا علامت $f''(x)$ معین شود:

$$۱-۲\sin x=۰\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}$$

x	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۲}$
$f''(x)$		$+$	۰	$-$	

بنابراین روی بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۶})$ جهت تقعر نمودار f رو به بالاست و روی بازهٔ $(\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲})$ جهت تقعر نمودار f رو به پایین است.

۱۵۴۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=۲\tan x(۱+\tan^{۲}x)$$

$$f''(x)=۲(۱+\tan^{۲}x)^{۲}+۴\tan^{۲}x(۱+\tan^{۲}x)$$

$$=۲(۱+\tan^{۲}x)(۱+\tan^{۲}x+۲\tan^{۲}x)=۲(۱+\tan^{۲}x)(۱+۳\tan^{۲}x)$$

واضح است که مشتق دوم تابع f (هرجا که تعریف شده باشد) مقداری مثبت است و جهت تقعر نمودار تابع f رو به بالاست.

۱۵۴۱- گزینهٔ ۳ چون $f'(x)>۰$، پس تابع اکیداً صعودی است و چون $f''(x)>۰$، پس جهت تقعر نمودار تابع f رو به بالاست. بنابراین نمودار تابع f ممکن است به شکل گزینهٔ (۳) باشد.

۱۵۴۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f''(x)=۲۰x^{۲}(x-۳)$. بنابراین

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$-$	۰	$+$	
f		$\cap$		$\cap$		$\cup$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۳)$ رو به پایین است.

۱۵۴۳- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۸x^{۳}-۳mx^{۲}+۶x+۱\Rightarrow f''(x)=۲۴x^{۲}-۶mx+۶$$

برای اینکه جهت تقعر نمودار تابع همواره به سمت بالا باشد باید مشتق دوم تابع همواره نامنفی باشد:

$$۶(۴x^{۲}-mx+۱)\geq ۰\xrightarrow{\Delta\leq ۰}\Delta=m^{۲}-۱۶\leq ۰\Rightarrow m^{۲}\leq ۱۶\Rightarrow -۴\leq m\leq ۴$$

۱۵۴۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^{۲}+۱ & x>۰\\ ۳x^{۲}-۱ & x<۰\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۶x & x>۰\\ ۶x & x<۰\end{cases}$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	ت ن	$+$	

بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ رو به بالاست. پس جهت تقعر نمودار تابع f فقط یک بار عوض می‌شود.

۱۵۴۵- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x-\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f'(x)=۱+\frac{۲}{x^{۳}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{۶}{x^{۴}}$$

بنابراین به ازای هر $x\neq ۰$، مقدار مشتق دوم تابع f عددی منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ رو به پایین است.

۱۵۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=۳x^۲-\frac{۱}{۴}x^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(x)=۶x+\frac{۱}{۸}x^{-\frac{۳}{۲}}$$

$$f''(x)=۶-\frac{۳}{۱۶}x^{-\frac{۵}{۲}}=۳(\frac{۳۲\sqrt{x^۵}-۱}{۱۶\sqrt{x^۵}})$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow\sqrt{x^۵}=\frac{۱}{۳۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

x	۰		$\frac{۱}{۴}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	۰	+	
f		∩		∪	

پس جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(\frac{۱}{۴},+\infty)$ رو به بالاست و کمترین مقدار a برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

۱۵۴۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=x^۲+(۳x)^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=۲x+(۳x)^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$f''(x)=۲-۲(۳x)^{-\frac{۵}{۳}}=۲(\frac{\sqrt[۳]{(۳x)^۵}-۱}{\sqrt[۳]{(۳x)^۵}})$$

$$f''(x)=۰\Rightarrow(۳x)^{\frac{۵}{۳}}=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین علامت $f''(x)$ روی $\mathbb{R}-\{۰\}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	ت ن	−	۰	+	

پس جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(۰,\frac{۱}{۳})$ رو به پایین است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۱۵۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=۳x^{\frac{۱}{۳}}-x^۲\Rightarrow f'(x)=x^{-\frac{۲}{۳}}-۲x$$

$$f''(x)=-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}}-۲=-\frac{۲}{۳x\sqrt[۳]{x^۲}}-۲=-۲(۱+\frac{۱}{۳x\sqrt[۳]{x^۲}})$$

بنابراین به‌ازای هر x در بازهٔ $(۰,+\infty)$ مقدار $f''(x)$ عددی منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

۱۵۴۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=۲x-۲\cos x\Rightarrow f''(x)=۲+۲\sin x$$

با توجه به اینکه $-۱\le\sin x\le۱$، می‌توان نوشت:

$$-۱\le\sin x\le۱\Rightarrow-۲\le۲\sin x\le۲\Rightarrow۰\le۲+۲\sin x\le۴$$

بنابراین مشتق دوم تابع f همواره نامنفی است و جهت تقعر نمودار تابع f همواره رو به بالاست و تغییر نمی‌کند.

۱۵۵۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-۲\sin x=x\cos x-\sin x$$

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$$

به ازای هر $x\in(۰,\pi)$ مقدار $\sin x$ عددی مثبت و مقدار $-x$ عددی منفی است. پس $f''(x)$ روی این بازه منفی است و جهت تقعر نمودار تابع f روی این بازه رو به پایین است.

۱۵۵۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−		−	۰	+	
$f''(x)$		−		−	۰	+		+	

بنابراین

$$f''(-۲)f'(۰)>۰,\ f''(۲)f'(\frac{۱}{۲})<۰$$

$$f''(-۲)f'(۲)<۰,\ f''(-۴)f'(۴)<۰$$

پس فقط گزینهٔ (۳) درست نیست.

۱۵۵۲- گزینهٔ ۱ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس نقطه‌های عطف نمودار تابع f نقطه‌هایی هستند که جهت تقعر نمودار تابع f در آن‌ها عوض می‌شود. به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
f'		↘		↗		↘	
f		∩		∪		∩	

بنابراین طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f برابر -۲ و ۲ است، که مجموع آن‌ها صفر است.

۱۵۵۳- گزینهٔ ۲ جدول تعیین علامت $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		$+\infty$
$f''(x)$		+	۰	+	۰	−	۰	+	
f		∪		∪	نقطهٔ عطف	∩	نقطهٔ عطف	∪	

پس جهت تقعر نمودار تابع f در نقطه‌های $x=۰$ و $x=۲$ تغییر می‌کند و چون $f''(۰)$ و $f''(۲)$ وجود دارند، پس $f'(۰)$ و $f'(۲)$ نیز وجود دارند، در نتیجه خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول $x=۰$ و $x=۲$ وجود دارد. بنابراین $x=۰$ و $x=۲$ طول نقاط عطف نمودار تابع f هستند و این نمودار دو نقطهٔ عطف دارد.

۱۵۵۴- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=۰$ هستند (به شرطی که f'' در این جواب‌ها تغییر علامت بدهد).
توجه کنید که

$$f'(x)=۲x^۲-۴x+۶\Rightarrow f''(x)=۴x-۴,\quad f''(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

چون f'' در نقطهٔ $x=۱$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۱ است و چون نقطهٔ عطف روی نمودار تابع است، پس عرض آن برابر است با $f(۱)=\frac{۱۱}{۳}$.

۱۵۵۵- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطهٔ عطف نمودار آن جواب معادلهٔ $f''(x)=۰$ است. توجه کنید که

$$f'(x)=۳ax^۲-۸x+۴\Rightarrow f''(x)=۶ax-۸$$

$$f''(-۲)=۰\Rightarrow۶a(-۲)-۸=۰\Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}$$

۱۵۵۶- گزینهٔ ۲ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌هایی از معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2+x \Rightarrow f''(x)=x+1, \quad f''(x)=0 \Rightarrow x=-1$$

چون f'' در نقطهٔ -1 تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر -1 است. چون نقطهٔ عطف نمودار تابع روی خط $2x-3y+6=0$ است، پس عرض آن برابر با $\frac{4}{3}$ است. بنابراین نقطهٔ عطف نمودار تابع f نقطهٔ $(-1,\frac{4}{3})$ است. چون این نقطه روی نمودار تابع f است، پس $f(-1)=\frac{4}{3}$، در نتیجه

$$-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+a=\frac{4}{3} \Rightarrow a=1$$

۱۵۵۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & x\le -1 \\ -2x-2 & x>-1 \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} 2 & x<-1 \\ -2 & x>-1 \end{cases}$$

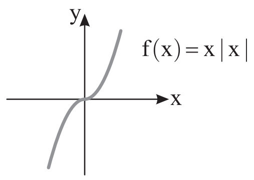
چون تابع f'' فقط در نقطهٔ $x=-1$ تغییر علامت می‌دهد و نمودار تابع f در این نقطه خط مماس دارد ($f'(-1)=0$)، پس طول تنها نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر -1 است.

۱۵۵۸- گزینهٔ ۱ تابع f به‌صورت زیر است و $x=0$ طول تنها نقطهٔ عطف آن است.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر است و جهت تقعر نمودار تابع f در این نقطه عوض می‌شود.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x\ge 0 \\ -2x & x<0 \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} 2 & x>0 \\ -2 & x<0 \end{cases}$$



۱۵۵۹- گزینهٔ ۴ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های عطف نمودار f، آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

به این ترتیب، f'' سه جواب دارد که در هر سه تای آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین نمودار تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

۱۵۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)$ و

$$f(x)=x^2+2x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=2x+x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x)=2-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 2=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow 4=\frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow x^3=\frac{1}{16} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$$

پس $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f است.

۱۵۶۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

x	-6		-3		0		3		6
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f''(x)$		−		−	0	+		+	

بنابراین جواب‌های صحیح نامعادلهٔ $f'(x)f''(x)<0$ در بازهٔ $(-6,6)$، عددهای صحیح در بازه‌های $(-6,-3)$ و $(0,3)$ هستند. این عددها -5، -4، 1 و 2 هستند و تعدادشان چهارتاست.

۱۵۶۲- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

x	$-\infty$		-5		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
f		$\cap$	نقطهٔ عطف	$\cup$	نقطهٔ عطف	$\cap$	نقطهٔ عطف	$\cup$	

بنابراین f'' فقط در نقطه‌های $x=-5$، $x=0$ و $x=1$ تغییر علامت می‌دهد، پس نمودار تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

۱۵۶۳- گزینهٔ ۴ از روی نمودار f'' معلوم است که $f''(0)=4$. از طرف دیگر،

$$f''(x)=12x-2a, \quad f''(0)=4 \Rightarrow -2a=4 \Rightarrow a=-2$$

بنابراین $f''(x)=12x+4$ و $f''(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

چون f'' در نقطهٔ $x=-\frac{1}{3}$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر $-\frac{1}{3}$ است.

۱۵۶۴- گزینهٔ ۱ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، طول نقطه‌های عطف نمودار آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند (به شرطی که f'' در این جواب‌ها تغییر علامت بدهد). توجه کنید که

$$f'(x)=7(x-3)^6 \Rightarrow f''(x)=42(x-3)^5, \quad f''(x)=0 \Rightarrow x=3$$

چون f'' در نقطهٔ $x=3$ تغییر علامت می‌دهد، طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۳ است. چون نقطهٔ عطف روی نمودار تابع است، پس عرض آن برابر است با $f(3)=-6$. یعنی نقطهٔ عطف نمودار تابع f نقطهٔ $(3,-6)$ است و مجموع مختصاتش برابر -3 است.

۱۵۶۵- گزینهٔ ۲ چون تابع f همه‌جا دوبار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع جواب معادلهٔ $f''(x)=0$ است. توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-12x+4 \Rightarrow f''(x)=6x-12$$

$$f''(a)=0 \Rightarrow 6a-12=0 \Rightarrow a=2$$

پس نقطهٔ عطف نمودار تابع f نقطهٔ $(2,-4)$ است و چون این نقطه روی نمودار تابع f است، پس $f(2)=-4$، در نتیجه $8-24+8+d=-4 \Rightarrow d=4$
بنابراین $a+d=6$.

۱۵۶۶- گزینهٔ ۱ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع جوابی از معادلهٔ $f''(x)=0$ است که f'' در آن جواب تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

$$f'(x)=6x^2+12x+1 \Rightarrow f''(x)=12x+12, \quad f''(x)=0 \Rightarrow x=-1$$

چون f'' در نقطهٔ $x=-1$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع برابر -1 است. اکنون توجه کنید که شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول -1 روی نمودار برابر است با $f'(-1)=-5$. چون شیب خط $y-ax+7=0$ برابر a است، پس $a=-5$.

۱۵۶۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-12x & x>0\\ 2x+6 & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x-12 & x>0\\ 2 & x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	ت ن	−		+	

جهت تقعـر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول $x=2$ تغییر می‌کند و نمودار تابع f در این نقطه خط مماس دارد. پس نمودار این تابع یک نقطهٔ عطف دارد.

۱۵۶۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}2x+a & x>1\\ -2x & x<1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x>1\\ -2 & x<1\end{cases}$$

پـس فقـط در $x=1$ جهت تقعر نمودار تابع f تغییر می‌کنـد. برای اینکه تابع f نقطهٔ عطف داشـته باشد، باید در $x=1$ مشـتق‌پذیر باشد تا $x=1$ طول نقطهٔ عطف باشد. برای مشتق‌پذیری لازم است که تابع پیوسته باشد. پس

$$f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)\Rightarrow 1+a=-1+b\Rightarrow b=a+2 \quad (1)$$

همچنین در نقطهٔ $x=1$ باید مشتق چپ و مشتق راست تابع با هم برابر باشند:

$$f'_+(1)=f'_-(1)\Rightarrow 2+a=-2\Rightarrow a=-4\xrightarrow{(1)}b=-2$$

پس $a+b=-6$.

۱۵۶۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^3+2x^2-x & x\ge0\\ x^3+2x^2+x & x\le0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+4x-1 & x>0\\ 3x^2+4x+1 & x<0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}6x+4 & x>0\\ 6x+4 & x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	ت ن	+	

پس $x=-\frac{2}{3}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f است و عرض آن برابر است با

$$f(-\frac{2}{3})=-\frac{2}{27}$$

۱۵۷۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ تابع صـدق می‌کنند. پـس $4=a+b$. از طرف دیگر تابع f در $x=1$ مشـتق دوم دارد، پس مشتق دوم آن در $x=1$ باید صفر باشد.

$$f(x)=ax^2+bx^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=2ax+\frac{b}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow f''(x)=2a-\frac{2b}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$f''(1)=2a-\frac{2b}{9}=0\Rightarrow a=\frac{b}{9}\xrightarrow{4=a+b}\frac{10b}{9}=4\Rightarrow b=\frac{36}{10}$$

پس $a=\frac{b}{9}=\frac{4}{10}$ و در نتیجه $a-b=-\frac{32}{10}=-\frac{16}{5}$.

۱۵۷۱- گزینهٔ ۴ طـول نقطه‌هـای عطـف آن جواب‌هایـی از معادلـهٔ $f''(x)=0$ هسـتند که f'' در آن‌هـا تغییر علامت می‌دهـد. جواب‌های f'' نقطه‌هـای -3، صفـر و 2 هسـتند، ولـی f'' در نقطـهٔ $x=2$ تغییـر علامت نمی‌دهـد. بنابرایـن طـول نقطه‌هـای عطف نمـودار تابع f برابـر صفر و -3 و مجموعشان -3 است.

۱۵۷۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f''(x)=3x^2(x-1)^2+2x^3(x-1)$$

$$=x^2(x-1)(3(x-1)+2x)=x^2(x-1)(5x-3)$$

پس جدول تعیین علامت $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	+	0	−	0	+	
f		$\cup$		$\cup$	نقطهٔ عطف	$\cap$	نقطهٔ عطف	$\cup$	

جهت تقعر نمودار تابع f در $x=1$ و $x=\frac{3}{5}$ تغییر می‌کند و تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر است، پس نمودار تابع f دو نقطهٔ عطف دارد.

۱۵۷۳- گزینهٔ ۱ چون تابع f همه جا دوبار مشـتق‌پذیر اسـت، طول نقطهٔ عطف نمودار آن جواب معادلهٔ $f''(x)=0$ است. توجه کنید که

$$f'(x)=2(x-2)(x+a)+(x-2)^2$$

$$f''(x)=2(x+a)+2(x-2)+2(x-2)$$

$$f''(1)=0\Rightarrow 2(1+a)+2(-1)+2(-1)=0\Rightarrow a=1$$

۱۵۷۴- گزینهٔ ۳ چـون تابـع f همه‌جا دوبار مشـتق‌پذیر اسـت، پس طول نقطهٔ عطف نمودار آن جواب معادلهٔ $f''(x)=0$ اسـت (به شـرطی که f'' در این جواب تغییر علامت دهد.) توجه کنید که

$$f'(x)=4x^3-3ax^2+a\Rightarrow f''(x)=12x^2-6ax$$

$$f''(2)=0\Rightarrow 48-12a=0\Rightarrow a=4$$

بنابرایـن $f(x)=x^4-4x^3+4x+7-b$. از طرف دیگـر، چون نقطهٔ عطف روی نمودار تابع است، پس $f(2)=1$، در نتیجه

$$16-32+8+7-b=1\Rightarrow b=-2$$

بنابراین $ab=-8$.

۱۵۷۵- گزینهٔ ۴ طـول نقطـهٔ عطـف نمـودار تابـع f جوابـی‌ای از معادلهٔ $f''(x)=0$ است که f'' در آن نقطه تغییر علامت می‌دهد. توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2-12x+a+2\Rightarrow f''(x)=6x-12$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 6x-12=0\Rightarrow x=2$$

چـون f'' در نقطه‌ای بـه طول $x=2$ تغییر علامت می‌دهـد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۲ اسـت. از طرف دیگر، شـیب خط $4x-y+12=0$ برابر ۴ است، در نتیجه شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ عطف آن برابر با ۴ است، یعنی $f'(2)=4$، در نتیجه

$$12-24+a+2=4\Rightarrow a=14$$

۱۵۷۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=x^3-3x^2+2ax\Rightarrow f''(x)=3x^2-6x+2a$$

بـرای اینکـه نمودار تابع f نقطهٔ عطف داشـته باشـد باید مشـتق دوم آن تغییر علامـت دهد. پس $f''(x)$ باید دو جواب داشـته باشـد، یعنـی معادلهٔ زیر دو جواب دارد:

$$3x^2-6x+2a=0$$

پس

$$\Delta=36-24a>0\Rightarrow a<\frac{3}{2}$$

۱۵۷۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-6 & x>0\\ 3x^2+6 & x<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x & x>0\\ 6x & x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	ت‌ن	$+$	

جهت تقعر نمودار تابع f در $x=0$ تغییر می‌کند ولی چون $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ پس خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه وجود ندارد و $x=0$ طول نقطهٔ عطف نیست. بنابراین نمودار تابع f نقطهٔ عطف ندارد.

۱۵۷۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x^4+x^2 & x\leq -1\\ x^4-x^2 & -1<x\leq 0\\ -x^4+x^2 & 0<x\leq 1\\ x^4-x^2 & x>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-4x^3+2x & x<-1\\ 4x^3-2x & -1<x<0\\ -4x^3+2x & 0<x<1\\ 4x^3-2x & x>1\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}-12x^2+2 & x<-1\\ 12x^2-2 & -1<x<0\\ -12x^2+2 & 0<x<1\\ 12x^2-2 & x>1\end{cases},\quad f''(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt6}$		0		$\frac{1}{\sqrt6}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	ت‌ن	$+$	0	$-$	ت‌ن	$+$	0	$-$	ت‌ن	$+$	

بنابراین f'' در نقطه‌های به طول ۱−، $-\frac{1}{\sqrt6}$، صفر، $\frac{1}{\sqrt6}$ و ۱ تغییر علامت می‌دهد، ولی فقط در نقطه‌های به طول $-\frac{1}{\sqrt6}$، صفر و $\frac{1}{\sqrt6}$ مماس بر نمودار تابع f وجود دارد. بنابراین نمودار تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

۱۵۷۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2x+4\sin x\Rightarrow f''(x)=2+4\cos x$$

$$f''(x)=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

مشتق دوم تابع در $x=\frac{2\pi}{3}$ صفر است و $f''(x)$ در این نقطه تغییر علامت می‌دهد. همچنین $f'(\frac{2\pi}{3})$ موجود است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه وجود دارد. بنابراین $x=\frac{2\pi}{3}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f در بازهٔ $(0,\pi)$ است.

۱۵۸۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f روی بازهٔ $(0,2\pi)$ دوبار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطه‌های عطف نمودار تابع f آن جواب‌هایی از معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند که f'' در آن‌ها تغییر علامت می‌دهد. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=-2\sin x\cos x+2\cos x=-\sin 2x+2\cos x$$
$$f''(x)=-2\cos 2x-2\sin x=-2(\cos 2x+\sin x)$$
$$=-2(1-2\sin^2 x+\sin x)=2(2\sin^2 x-\sin x-1)$$
$$=2\underbrace{(\sin x-1)}_{\leq 0}(2\sin x+1)$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

چون f'' فقط در دو جوابش تغییر علامت می‌دهد، پس نمودار تابع f دو نقطهٔ عطف دارد.

۱۵۸۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f'(x)=3x^2-4$ و $f''(x)=6x$.
بنابراین علامت $f'(x)$ و $f''(x)$ در اطراف نقطهٔ $x=3$ به‌صورت زیر است:

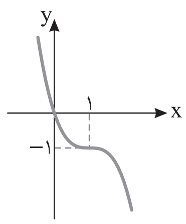
x			3		
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	

پس تابع در اطراف $x=3$ صعودی با تقعر رو به بالاست.

۱۵۸۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که مشتق تابع f همواره نامثبت است و این تابع نزولی است: $f(x)=-x^3+3x^2-3x$

$$f'(x)=-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x+1)=-3(x-1)^2$$

اکنون با توجه به $f(0)=0$ می‌توانیم نمودار تقریبی تابع را رسم کنیم. توجه کنید که $f'(1)=0$، پس نمودار تابع از ناحیه‌های دوم و چهارم عبور می‌کند و از ناحیه‌های اول و سوم عبور نمی‌کند. توجه کنید که



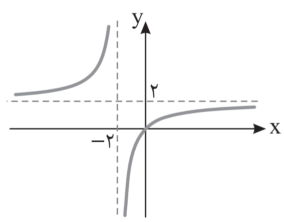
$$f(x)=-x^3+3x^2-3x=-(x^3-3x^2+3x-1)-1=-(x-1)^3-1$$

بنابراین می‌توان نمودار تابع f را با انتقال نمودار تابع $y=x^3$ نیز رسم کرد.

۱۵۸۳- گزینهٔ ۴ مجانب‌های نمودار تابع خطوط $x=-2$ و $y=2$ هستند و تابع روی بازه‌های $(-\infty,-2)$ و $(-2,+\infty)$ اکیداً صعودی است، زیرا

$$f'(x)=\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$$

واضح است که مشتق تابع روی بازه‌های بالا مثبت است. پس نمودار تابع به‌صورت مقابل است و از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.



۱۵۸۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(x-a)(x^2-1)=0\Rightarrow x=a\ ,\ x=\pm 1$$

چون $x=3$ یک جواب معادلهٔ $f(x)=0$ است، پس $a=3$ و در نتیجه $f(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x-b}$. با توجه به اینکه یک حفره در نمودار تابع f وجود دارد، پس b باید یکی از اعداد ۱، ۱− یا ۳ باشد. چون طول یکی از نقطه‌های برخورد نمودار با محور طول‌ها منفی و طول یکی از نقطه‌های برخورد ۳ است، پس باید $b=1$. در واقع ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x-1}=(x+1)(x-3)\ ,\quad x\neq 1$$

پس $a+b=4$.

۱۵۸۵- گزینهٔ ۱ نقطهٔ $(-۲,۵)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. پس $f(-۲)=۵$ و $f'(-۲)=۰$. همچنین $f'(x)=۳ax^۲+۲bx$. بنابراین

$$f(-۲)=-۸a+۴b+۱=۵\Rightarrow ۲a-b+۱=۰$$
$$f'(-۲)=۱۲a-۴b=۰\Rightarrow b=۳a$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $a=۱$، $b=۳$ و $b-a=۲$.

۱۵۸۶- گزینهٔ ۲ ضریب $x^۴$ مثبت است. پس نمودار تابع از ناحیهٔ دوم شروع و در ناحیهٔ اول پایان می‌یابد. بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(۴x^۴+۳x^۳-۲)=+\infty$$

برای تشخیص درستی گزینه‌های (۱)، (۲) یا (۳) به روش زیر می‌توانیم عمل کنیم:
نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۱۶x^۳+۹x^۲=x^۲(۱۶x+۹)$$

با توجه به اینکه $x=۰$ ریشهٔ مضاعف f' است، پس تنها نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع در $x=-\frac{۹}{۱۶}$ اتفاق می‌افتد که در گزینهٔ (۲) دیده می‌شود.

۱۵۸۷- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار معلوم است که $(۲,-۳)$ نقطهٔ برخورد مجانب‌های آن است. پس $x=۲$ و $y=-۳$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع هستند. از طرف دیگر مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{۲x-b}$ خط $x=\frac{b}{۲}$ و مجانب افقی آن خط $y=\frac{a}{۲}$ است. پس

$$\frac{b}{۲}=۲\Rightarrow b=۴\ ,\qquad \frac{a}{۲}=-۳\Rightarrow a=-۶$$

در نتیجه $ab=-۲۴$.

۱۵۸۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=-\sqrt{۳-x}+\frac{x}{۲\sqrt{۳-x}}=\frac{۳x-۶}{۲\sqrt{۳-x}}$$
$$f''(x)=\frac{۶\sqrt{۳-x}+\frac{۳x-۶}{\sqrt{۳-x}}}{(۲\sqrt{۳-x})^۲}=\frac{۱۲-۳x}{۴(۳-x)\sqrt{۳-x}}$$

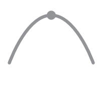
در همسایگی نقطهٔ $x=۰$ علامت $f'(x)$ منفی و علامت $f''(x)$ مثبت است. پس نمودار تابع اکیداً نزولی و جهت تقعر آن رو به بالا است.

۱۵۸۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{۲x(۱-x)+x^۲}{(۱-x)^۲}=\frac{۲x-x^۲}{(۱-x)^۲}=\frac{x(۲-x)}{(۱-x)^۲}$$

بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی $x=۲$ به‌صورت زیر است و $x=۲$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

x		۲	
$f'(x)$	+		−

پس نمودار تابع f در همسایگی $x=۲$ به‌صورت  است.

۱۵۹۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f'(x)=۲\sin x\cos x+۲\sin x=\sin ۲x+۲\sin x$$
$$f''(x)=۲\cos ۲x+۲\cos x=۴\cos^۲ x-۲+۲\cos x$$
$$=۲(۲\cos^۲ x+\cos x-۱)=۲(۲\cos x-۱)(\cos x+۱)$$

بنابراین در یک همسایگی نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۶}$ مشتق اول و مشتق دوم تابع مثبت هستند. پس در یک همسایگی نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۶}$ تابع f صعودی و جهت تقعر نمودار آن به سمت بالاست. توجه کنید که در محاسبهٔ مشتق اول و مشتق دوم تابع از اتحادهای $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ استفاده شده است.

۱۵۹۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=x^۲-۲x\ ,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+		−		+	
f	$-\infty$	↗	۰	↘	$-\frac{۴}{۳}$	↗	$+\infty$

بنابراین $(۰,۰)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f و $(۲,-\frac{۴}{۳})$ نقطهٔ مینیمم نسبی آن است و نمودار تابع به‌صورت گزینهٔ (۳) است.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(x)=x^۲(\frac{۱}{۳}x-۱)$. بنابراین صفرهای تابع f، $x=۰$ و $x=۳$ هستند. پس گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. از طرف دیگر مقادیر تابع f در یک همسایگی $x=۰$ منفی هستند. پس گزینهٔ (۴) هم رد می‌شود.

۱۵۹۲- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار معلوم است که $x=۰$ طول نقطهٔ عطف تابع است، پس گزینه‌های (۳) و (۴) جواب نیستند زیرا طول نقطهٔ عطف تابع گزینهٔ (۳)، $-\frac{b}{۳a}=\frac{۱}{۳}$ و طول نقطهٔ عطف تابع گزینهٔ (۴)، $-\frac{b}{۳a}=-\frac{۱}{۳}$ است. همچنین تابع همواره نزولی است و نقطهٔ اکسترمم نسبی ندارد. پس گزینهٔ (۱) هم جواب نیست زیرا تابع مشتق آن $y'=-۳x^۲+۱$ است. پس تابع گزینهٔ (۱)، دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. در تابع گزینهٔ (۲) هر دو شرط بالا وجود دارد.

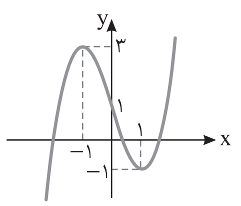
$$y=-x^۳-x+۲\Rightarrow y'=-۳x^۲-۱$$

۱۵۹۳- گزینهٔ ۲ تابع $g(x)=x^۳-۳x+۱$ را در نظر می‌گیریم و نمودار تقریبی آن را رسم می‌کنیم (شکل (۱) را ببینید):

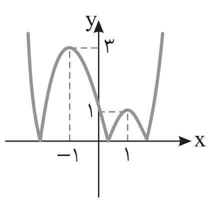
$$g'(x)=۳x^۲-۳,\quad g'(x)=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

x	$-\infty$		−۱		۱		$+\infty$
$g'(x)$		+		−		+	
g	$-\infty$	↗	۳	↘	−۱	↗	$+\infty$
			max نسبی		min نسبی		

پس نمودار تابع f به‌صورت شکل (۲) است.

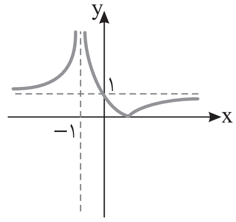


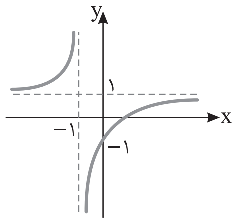
شکل (۱)



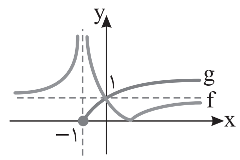
شکل (۲)

۱۵۹۴- گزینهٔ (۱) نمودار تابع $f(x)=|\frac{x-۱}{x+۱}|$ با استفاده از نمودار تابع $y=\frac{x-۱}{x+۱}$ قابل رسم است. توجه کنید که تابع $y=\frac{x-۱}{x+۱}$ در دو طرف مجانب قائم آن اکیداً صعودی است و خطوط $x=-۱$ و $y=۱$ مجانب‌های نمودار آن هستند.





پس مطابق شکل زیر نمودار تابع‌های f و g در یک نقطه متقاطع‌اند.



۱۵۹۵- گزینهٔ (۲) **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $x=a$ و $y=a$ مجانب‌های نمودار تابع هستند و با توجه به نمودار تابع معلوم است که $a>۰$. همچنین از روی نمودار تابع معلوم است که تابع در دو طرف مجانب قائم آن اکیداً صعودی است. پس روی بازه‌های $(-\infty, a)$ و $(a, +\infty)$ مشتق تابع f مثبت است. پس

$$f'(x)=\frac{-a^۲+۱}{(x-a)^۲}>۰ \Rightarrow a^۲<۱ \Rightarrow -۱<a<۱$$

چون $a>۰$، پس $۰<a<۱$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۰)=\frac{۱}{a}$. با توجه به نمودار $f(۰)>۰$، پس $a>۰$.

از طرف دیگر خط $y=a$ مجانب افقی نمودار تابع است و نقطهٔ $(۰,\frac{۱}{a})$ بالای مجانب افقی قرار دارد. بنابراین

$$\frac{۱}{a}>a \Rightarrow \frac{۱}{a}-a>۰ \Rightarrow \frac{۱-a^۲}{a}>۰ \xrightarrow{a>۰} ۱-a^۲<۰$$
$$-۱<a<۱ \xrightarrow{a>۰} ۰<a<۱$$

۱۵۹۶- گزینهٔ (۳) توجه کنید که محل برخورد مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{ax-۲}{bx-۴}$ نقطهٔ $(\frac{۴}{b},\frac{a}{b})$ است و نقطهٔ عطف نمودار تابع $g(x)=x^۳-۳x^۲+۲x+b$ نقطهٔ $(۱ , g(۱))$، یعنی $(۱ , b)$ است. پس

$$\frac{۴}{b}=۱ \Rightarrow b=۴ , \quad \frac{a}{b}=b \Rightarrow a=b^۲ \Rightarrow a=۱۶$$

بنابراین $a+b=۲۰$.

۱۵۹۷- گزینهٔ (۲) چون نمودار تابع بر محور طول‌ها مماس است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد:

$$x^۲+ax+b=۰, \quad \Delta=a^۲-۴b=۰ \Rightarrow b=\frac{a^۲}{۴}$$

بنابراین $f(x)=\frac{x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴}}{x^۲-x+۳}$. از طرف دیگر $x=-۱$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است. پس $f'(-۱)=۰$. بنابراین

$$f'(x)=\frac{(۲x+a)(x^۲-x+۳)-(۲x-۱)(x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴})}{(x^۲-x+۳)^۲}$$

$$f'(-۱)=۰ \Rightarrow (-۲+a)(۵)-(-۳)(۱-a+\frac{a^۲}{۴})=۰ \Rightarrow ۳a^۲+۸a-۲۸=۰$$

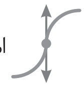
$$(۳a+۱۴)(a-۲)=۰ \Rightarrow a=-\frac{۱۴}{۳}, a=۲$$

اگر $a=۲$، آن‌گاه $b=۱$ و $f(۰)=\frac{۱}{۳}$ که قابل قبول نیست. زیرا مطابق شکل $f(۰)$ باید بزرگ‌تر از ۱ باشد. چون محل برخورد نمودار با محور عرض‌ها بالاتر از مجانب افقی تابع است. پس $a=-\frac{۱۴}{۳}$. توجه کنید که در این حالت $f(۰)=\frac{۴۹}{۲۷}>۱$.

۱۵۹۸- گزینهٔ (۱) توجه کنید که تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و

$$f'(x)=\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}, x\neq\pm۱, \quad f'(۱)=+\infty$$

x			۱		
$f'(x)$		+	ت ن	+	

بنابراین تابع f در هر دو همسایگی چپ و راست $x=۱$ صعودی است. بنابراین نمودار آن در همسایگی $x=۱$ به‌صورت  است.

۱۵۹۹- گزینهٔ (۱) توجه کنید که

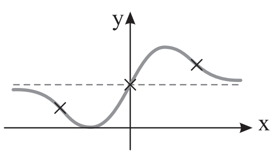
$$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$$

بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی نقطهٔ $x=۰$ به‌صورت زیر است و تابع f در $x=۰$ مینیمم نسبی دارد.

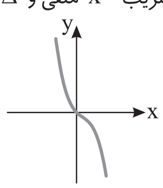
x		۰	
$f'(x)$	−	۰	+

این ویژگی در نمودار گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۱۶۰۰- گزینهٔ (۴) با توجه به نمودار تابع f، این تابع سه نقطهٔ عطف دارد (که مکان تقریبی آن‌ها را در شکل زیر با علامت × مشخص کرده‌ایم)، پس تابع f' سه نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. پس گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. همچنین با افزایش x از $-\infty$ به $+\infty$، تابع f ابتدا اکیداً نزولی، سپس اکیداً صعودی و سرانجام اکیداً نزولی است، پس f' باید ابتدا منفی، سپس مثبت و سرانجام منفی باشد که این شرایط در گزینهٔ (۴) برقرار است.



۱۶۰۱- گزینهٔ (۲) توجه کنید که $f'(x)=-۳x^۲+۲x-۱$. مشتق تابع همواره منفی است. زیرا در عبارت $-۳x^۲+۲x-۱$ ضریب $x^۲$ منفی و Δ منفی است. از طرف دیگر $f(۰)=۰$. بنابراین نمودار تابع تقریباً به‌صورت مقابل است. پس نمودار تابع فقط از دو ناحیهٔ دوم و چهارم عبور می‌کند.



۱۶۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنیـد که اگر $x>۰$، آن‌گاه $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}$. بنابراین

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x\Rightarrow f''(x)=۶x-۶,\quad f''(x)=۰\Rightarrow x=۱$$

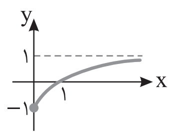
x	۰		۱		$+\infty$
$f''(x)$		−		+	

بنابرایـن جهـت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(۰,۱)$ به سـمت پایین و روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ به سمت بالاست. این شرایط فقط در نمودار گزینهٔ (۴) وجود دارد.

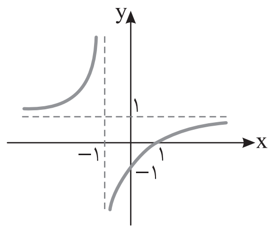
۱۶۰۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که نمودار تابع f دارای یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ مینیمم نسبی است. پس مشتق تابع باید در دو نقطه تغییر علامت دهد. پس معادلهٔ $f'(x)=۰$ باید دو جواب داشته باشد:

$$f'(x)=۳x^{۲}+۲x+a,\quad \Delta=۴-۱۲a>۰\Rightarrow a<\frac{۱}{۳}$$

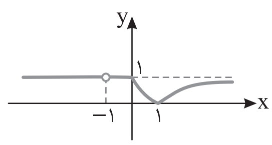
۱۶۰۴- گزینهٔ ۱ ابتـدا توجه کنید که اگر $x\geq ۰$، آن‌گاه $f(x)=\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right|$ و اگـر $x<۰$ و $x\neq -۱$، آن‌گاه $f(x)=\left|\frac{-x-۱}{x+۱}\right|=۱$. بنابراین به کمک نمودار تابع $y=\frac{x-۱}{x+۱}$ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.



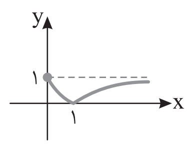
$y=\frac{x-۱}{x+۱},\quad x\geq ۰$



$y=\frac{x-۱}{x+۱}$



$f(x)=\left|\frac{|x|-۱}{x+۱}\right|$



$y=\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right|,\quad x\geq ۰$

۱۶۰۵- گزینهٔ ۳ از روی نمـودار تابع f مشـخص اسـت که تابـع f در دو طـرف مجانـب قائم آن، یعنـی روی بازه‌هـای $(-\infty,۳)$ و $(۳,+\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین

$$f'(x)=\frac{m(x-۳)-(mx+۱)}{(x-۳)^{۲}}=\frac{-۳m-۱}{(x-۳)^{۲}}\Rightarrow -۳m-۱>۰\Rightarrow m<-\frac{۱}{۳}$$

۱۶۰۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۷x+۱۲}{x^{۲}-۶x+۸}=\frac{(x-۳)(x-۴)}{(x-۴)(x-۲)}=\frac{x-۳}{x-۲},\quad x\neq ۴$$

بنابرایـن نمودار تابع یک مجانب قائم بـه معادلهٔ $x=۲$ و یک مجانب افقی به معادلـهٔ $y=۱$ دارد، پـس گزینه‌های (۲) و (۴) جواب نیسـتند. از طرف دیگر، $f'(x)=\frac{۱}{(x-۲)^{۲}}$. بنابراین تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۲)$ صعودی اسـت. پس گزینهٔ (۱) نیز جواب نیست و گزینهٔ (۳) جواب است.

۱۶۰۷- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$f'(x)=(۲x-۱)\sqrt[۳]{x}+\frac{x^{۲}-x}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}=\frac{۷x^{۲}-۴x}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}=\frac{x(۷x-۴)}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{(x^{۲}-x)\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}((x-۱)\sqrt[۳]{x})=۰$$

بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی $x=۰$ به‌صورت زیر است:

x		۰	
$f'(x)$	+		−

یعنی $x=۰$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسـبی تابع f است و نمودار تابع در همسایگی این نقطه به‌صورت  است.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۰)=۰$ و $f(x)=x(x-۱)\sqrt[۳]{x}$. پس همهٔ مقادیر تابع f در همسایگی $x=۰$ منفی هستند و $x=۰$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است.

۱۶۰۸- گزینهٔ ۱ با بررسی گزینه‌ها مشخص است که نمودارها در تعداد و نوع نقاط اکسـترمم نسـبی متفاوت هسـتند. پس نقاط اکسـترمم نسبی تابع را بررسـی می‌کنیم: $f'(x)=\frac{۲\sin x}{(۲\cos x-۱)^{۲}}$. واضح اسـت که همهٔ مقادیر تابع f' به‌ازای $x\in(۰,\frac{\pi}{۲})-\{\frac{\pi}{۳}\}$ مثبت هسـتند و تابع f نقطهٔ اکسـترمم نسـبی ندارد. فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی را دارد.

۱۶۰۹- گزینهٔ ۱ مقـدار تابـع f' در نقطه‌های به طول صفـر، ۱ و ۲ برابر صفر اسـت، پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول صفر، ۱ و ۲ مـوازی محور x اسـت. روی بازه‌هـای $(-\infty,۰)$ و $(۱,۲)$ علامت f' مثبت اسـت، پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً صعودی اسـت. روی بازه‌های $(۰,۱)$ و $(۲,+\infty)$ علامـت f' منفی اسـت، پس تابـع f روی این بازه‌ها اکیـداً نزولی است. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

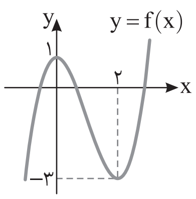
۱۶۱۰- گزینهٔ ۳ جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌ای شامل نقطهٔ صفر رو بـه بالا اسـت و در بقیهٔ جاها رو به پایین اسـت. بنابرایـن مقادیر تابع f'' روی بازه‌ای شـامل نقطهٔ صفر مثبت‌اند و در بقیـهٔ جاها منفی‌اند. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۳) این ویژگی‌ها را دارد.

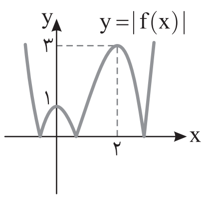
۱۶۱۱- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ را رسم می‌کنیم.

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰,\ x=۲$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+		−		+	
f	$-\infty$	↗	۱	↘	−۳	↗	$+\infty$

بنابراین نمودار تابع f و نمودار تابع $y=|f(x)|$ به‌صورت زیر است.

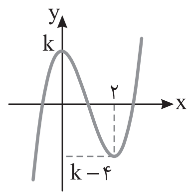




۱۶۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

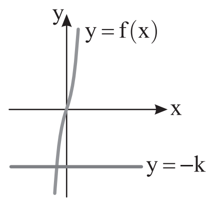
$$f'(x)=۳x^۲-۶x\,,\quad f'(x)=۰\Rightarrow x=۰\,,x=۲$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
f	$-\infty$	↗	k max نسبی	↘	$k-۴$ min نسبی	↗	$+\infty$



بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. برای اینکه نمودار تابع از ناحیهٔ چهارم عبور نکند، باید عرض نقطهٔ مینیمم نسبی آن منفی نباشد. یعنی $k-۴\geq۰$ و در نتیجه $k\geq۴$. پس حداقل مقدار k برابر ۴ است.

۱۶۱۳- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $۲x^۳+۳x=-k$ می‌نویسیم. اکنون نمودار تابع $f(x)=۲x^۳+۳x$ را رسم می‌کنیم و شرطی را پیدا می‌کنیم که با وجود آن شرط، خط $y=-k$ نمودار تابع f را فقط در یک نقطه با طول منفی قطع کند. تابع f اکیداً صعودی است. زیرا $f'(x)=۶x^۲+۳\Rightarrow f'(x)>۰$



با توجه به $f(۰)=۰$ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. واضح است که اگر $-k<۰$ طول نقطهٔ برخورد خط $y=-k$ با نمودار تابع f عددی منفی است، پس $k>۰$.

۱۶۱۴- گزینهٔ ۱ عرض نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۸ است و خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ عطف، افقی است. پس مشتق اول و مشتق دوم تابع در این نقطه برابر صفر است.

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax+b\Rightarrow f''(x)=۶x+۲a\,,\quad f''(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{a}{۳}$$

بنابراین $f'(-\frac{a}{۳})=۰$ و $f(-\frac{a}{۳})=۸$. پس

$$f'(-\frac{a}{۳})=۳(-\frac{a}{۳})^۲+۲a(-\frac{a}{۳})+b=۰\Rightarrow b=\frac{a^۲}{۳}$$

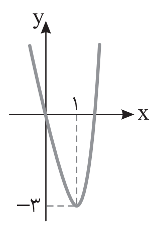
$$f(-\frac{a}{۳})=(-\frac{a}{۳})^۳+a(-\frac{a}{۳})^۲+b(-\frac{a}{۳})=۸$$

$$-\frac{a^۳}{۲۷}+\frac{a^۳}{۹}-\frac{a^۳}{۹}=۸\Rightarrow a^۳=-۸\times۲۷\Rightarrow a=-۶$$

بنابراین $b=۱۲$ و در نتیجه $a+b=۶$.

۱۶۱۵- گزینهٔ ۳ نمودار تقریبی تابع را به کمک تعیین نقاط اکسترمم نسبی رسم می‌کنیم. $f'(x)=۴x^۳-۴=۰\Rightarrow x=۱$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	
f	$+\infty$	↘	−۳	↗	$+\infty$



با توجه به نمودار تابع f برد این تابع بازهٔ $[-۳,+\infty)$ است.

۱۶۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x=-۳$ تنها مجانب قائم نمودار تابع f است. بنابراین پس از ساده کردن ضابطهٔ تابع f باید مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه داشته باشد و آن هم $x=-۳$ باشد:

$$x^۲-b=۰\xrightarrow{x=-۳}۹-b=۰\Rightarrow b=۹$$

$$f(x)=\frac{x^۲+ax+۳}{x^۲-۹}=\frac{x^۲+ax+۳}{(x-۳)(x+۳)}$$

بنابراین باید $x=۳$ ریشهٔ صورت کسر بالا باشد. پس

$$۹+۳a+۳=۰\Rightarrow a=-۴$$

پس $ab=-۳۶$.

۱۶۱۷- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{۳ax^۲-ax-x^۲-a}{۳x-۱}=\frac{(۳a-۱)x^۲-ax-a}{۳x-۱}$$

ضابطهٔ تابع هموگرافیک از تقسیم دو تابع چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌دست می‌آید. بنابراین صورت کسر ضابطهٔ تابع نباید عبارت درجهٔ دوم داشته باشد. پس

$$۳a-۱=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\frac{-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}}{۳x-۱}=\frac{-x-۱}{۹x-۳}$ است. پس نقطهٔ برخورد مجانب‌های نمودار تابع $A(\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۹})$ است که فاصلهٔ آن تا مبدأ مختصات برابر است با $OA=\sqrt{(\frac{۱}{۳})^۲+(-\frac{۱}{۹})^۲}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۹}$.

۱۶۱۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که نمودار تابع f فقط در یک نقطه با طول مثبت محور طول‌ها را قطع کرده است. از طرف دیگر

$$f(x)=۰\Rightarrow x^۲-۱=۰\Rightarrow x=۱\,,x=-۱$$

پس $x=-۱$ باید جواب معادلهٔ $x^۲+ax+۳=۰$ هم باشد. بنابراین $۱-a+۳=۰\Rightarrow a=۴$. در نتیجه ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۴x+۳}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x+۱)(x+۳)}=\frac{x-۱}{x+۳}\,,x\neq-۱$$

پس $x=-۳$ مجانب قائم نمودار تابع f است و در نتیجه $c=-۳$. از طرف دیگر b عرض نقطه‌ای است که تابع f در آن تعریف نشده ولی مجانب قائم نیز ندارد. یعنی $b=\lim_{x\to-۱}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{x-۱}{x+۳}=-۱$

پس $a+b+c=۰$.

۱۶۱۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $۱-\sin x\geq۰$، بنابراین مقادیر تابع $f(x)=\frac{۱}{۱-\sin x}$ همگی مثبت هستند. فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی را دارد.

۱۶۲۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f' دو بار محور طول‌ها را قطع می‌کند، یعنی در این نقاط مشتق برابر صفر است و تغییر علامت می‌دهد. پس f دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد. همچنین نمودار تابع f' در سه نقطه از حالت صعودی به حالت نزولی (یا برعکس) درمی‌آید. بنابراین تابع f سه نقطهٔ عطف دارد.

۱۶۲۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $x>۰$، آن‌گاه

$$f(x)=-x^۳+۳x^۲\Rightarrow f'(x)=-۳x^۲+۶x\Rightarrow f''(x)=-۶x+۶$$

x	۰		۱		$+\infty$
$f''(x)$		+	۰	−	

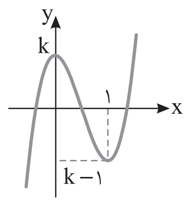
بنابراین جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(۰,۱)$ به سمت بالا و روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ به سمت پایین است. این شرایط فقط در نمودار گزینهٔ (۱) وجود دارد.

۱۶۲۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(x)=6x^2-6x\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$	$+\infty$
			max نسبی		min نسبی		

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. برای اینکه نمودار از چهار ناحیه عبور کند باید عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع مثبت باشد و عرض نقطهٔ مینیمم نسبی تابع منفی باشد. یعنی $k>0$ و $k-1<0$. بنابراین $0<k<1$.

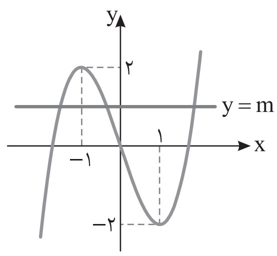


۱۶۲۳- گزینهٔ ۲ ابتدا نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم، سپس نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
			max نسبی		min نسبی		

با توجه به نمودار تابع f، اگر $m\geq2$ یا $m\leq-2$، آن‌گاه خط $y=m$ نمودار تابع f را در سه نقطه قطع نمی‌کند. پس m نمی‌تواند مقادیر صحیح صفر و ±1 باشد.



۱۶۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $(1\ ,-1)$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است. پس $f(1)=-1$ و $f'(1)=0$.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx\Rightarrow f(1)=1+a+b=-1$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow f'(1)=3+2a+b=0$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=-2\\2a+b=-3\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-1$ و $b=-1$.

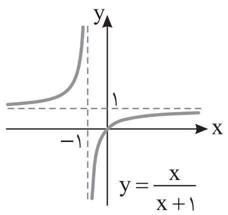
طول نقطهٔ عطف تابع برابر $\frac{-a}{3}$ است. پس $x=\frac{1}{3}$ طول نقطهٔ عطف است.

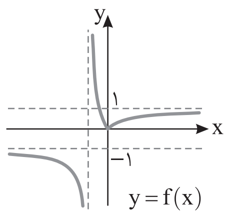
۱۶۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که جهت تقعر نمودار تابع f همواره به سمت بالاست. بنابراین مشتق دوم آن همواره نامنفی است:

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+1\Rightarrow f''(x)=12x^2+6ax=6x(2x+a)$$

اگر $a\neq0$، آن‌گاه $x=0$ و $x=-\frac{a}{2}$ جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند و جهت تقعر نمودار تابع f در دو نقطه عوض می‌شود. اگر $a=0$، آن‌گاه $f''(x)=12x^2$ و مشتق دوم تابع f همواره نامنفی است.

۱۶۲۶- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول چون $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1} & x\geq0\\ \dfrac{-x}{x+1} & x<0\end{cases}$، پس نمودار تابع f را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم. ابتدا نمودار تابع $y=\frac{x}{x+1}$ را رسم می‌کنیم. سپس روی بازهٔ $(-\infty\ ,0)$ نمودار این تابع را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\frac{-x}{x+1}$ رسم شود. بدین ترتیب نمودار تابع f رسم می‌شود. بنابراین $R_f=\mathbb{R}-[-1\ ,0)$.





راه‌حل دوم فرض کنید $f(x)=-\frac{1}{2}$. در این صورت

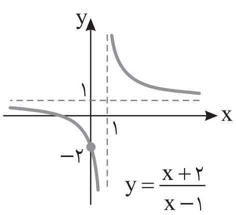
$$\frac{|x|}{x+1}=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2|x|=-x-1\Rightarrow 2|x|+x=-1$$

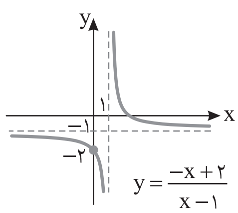
واضح است که اگر $x\geq0$، معادلهٔ بالا جواب ندارد. اگر $x<0$، آن‌گاه

$$-2x+x=-1\Rightarrow x=1\quad \text{(غ.ق.ق.)}$$

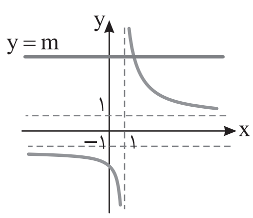
پس $-\frac{1}{2}$ در برد تابع قرار ندارد و فقط گزینهٔ (۴) به این صورت است.

۱۶۲۷- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x\geq0$ و $x\neq1$، آن‌گاه $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ و اگر $x<0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-x+2}{x-1}$. بنابراین ابتدا نمودار تابع $y=\frac{x+2}{x-1}$ را رسم می‌کنیم و قسمتی از آن را که سمت راست محور عرض‌ها قرار دارد انتخاب می‌کنیم. سپس نمودار تابع $y=\frac{-x+2}{x-1}$ را رسم می‌کنیم و قسمتی از آن را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد انتخاب می‌کنیم.





پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. اگر $-1\leq m\leq1$، آن‌گاه خط $y=m$ نمودار تابع f را قطع نمی‌کند.



۱۶۲۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که حد تابع f در $x=1$ برابر $-\infty$ است. پس $x=1$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $x^2+bx+c=0$ است. یعنی

$$x^2+bx+c=(x-1)^2=x^2-2x+1$$

پس $b=-2$، $c=1$ و $f(x)=\frac{x^2+ax}{(x-1)^2}$. از طرف دیگر $x=-2$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است، پس $f'(-2)=0$. بنابراین

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+ax)}{(x-1)^4}=\frac{(2x+a)(x-1)-2(x^2+ax)}{(x-1)^3}$$

$$f'(-2)=0\Rightarrow(-4+a)(-3)-2(4-2a)=0\Rightarrow a=-4$$

۱۶۲۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x=\frac{7\pi}{4}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است و $f'(\frac{7\pi}{4})=0$. پس

$$f'(x)=-\sin x+a\cos x$$

$$f'(\frac{7\pi}{4})=-(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{a\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow a=-1$$

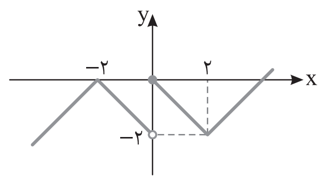
۱۶۳۰- گزینهٔ ۳ جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه‌ای شامل نقطهٔ صفر رو به پایین است و در بقیهٔ جاها رو به بالاست. بنابراین مقادیر تابع f'' روی بازه‌ای شامل نقطهٔ صفر منفی‌اند و در بقیه جاها مثبت‌اند. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۳) این ویژگی‌ها را دارد.

۱۶۳۱- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و صعودی است، پس مشتق آن همه‌جا نامنفی است. بنابراین $f'(x)=3ax^2-18x+3a\ge0$. در نتیجه

$$ax^2-6x+a\ge0\Rightarrow a>0,\quad \Delta=6^2-4a^2\le0\Rightarrow a\ge3 \text{ یا } a\le-3$$

پس $a\ge3$.

۱۶۳۲- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به شکل زیر است. این تابع در نقطه‌های $x=-2$ و $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=2$ مینیمم نسبی دارد.



۱۶۳۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=x(x^2+5x+4)=x(x+1)(x+4)$$

x	$-\infty$		-4		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

پس تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=-4$ مینیمم نسبی دارد و در نقطهٔ $x=-1$ ماکزیمم نسبی دارد.

۱۶۳۴- گزینهٔ ۱ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس نقاط اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ هستند. از طرف دیگر،

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

چون $f'(1)=0$ و f' در نقطهٔ $x=1$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس تابع f در نقطهٔ $x=1$ ماکزیمم نسبی دارد. طبق فرض $f(1)=-4$، پس

$$1-6+9+a=-4\Rightarrow a=-8$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

۱۶۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=(-5,+\infty)$ و

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x+5}-\frac{x^2-17}{2\sqrt{x+5}}}{x+5}=\frac{3x^2+20x+17}{2(x+5)\sqrt{x+5}}$$

تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. پس نقاط اکسترمم نسبی آن جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ است. پس

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+20x+17=0\Rightarrow x=-1,\quad x=-\frac{17}{3}\ (\text{غ.ق.ق})$$

پس $x=-1$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است و عرض این نقطه برابر است با $f(-1)=-8$.

۱۶۳۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=3(x-2)^2(x+2)+(x-2)^3=(x-2)^2(4x+4)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=2,\quad x=-1$$

اکنون مقادیر $f(-1)$، $f(2)$ و $f(-2)$ را مقایسه می‌کنیم:

$$f(-1)=-27,\quad f(2)=0,\quad f(-2)=0$$

بنابراین -27 مقدار مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[-2,2]$ است.

۱۶۳۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x=4-2y$ و باید کمترین مقدار ممکن تابع $f(y)=4-2y+y^2$ را پیدا کنیم. از طرف دیگر،

$$f'(y)=-2+2y,\quad f'(y)=0\Rightarrow y=1$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و

$$\lim_{y\to-\infty}f(y)=\lim_{y\to+\infty}f(y)=+\infty$$

پس کمترین مقدار تابع f به ازای $y=1$ به دست می‌آید و برابر است با $f(1)=3$.

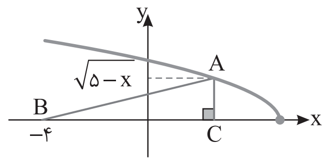
۱۶۳۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید طول نقطهٔ C برابر x باشد. در این صورت، طول نقطهٔ A هم برابر x است و چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=\sqrt{5-x}$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر با $\sqrt{5-x}$ است. بنابراین $AC=\sqrt{5-x}$. از طرف دیگر $BC=x+4$. به این ترتیب

$$\text{مساحت مثلث } ABC=\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$$

بنابراین باید x ای را پیدا کنیم که تابع $f(x)=\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{5-x}$ به‌ازای آن بیشترین مقدار ممکن است. توجه کنید که

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{5-x}+\frac{1}{2}(x+4)\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{2}\sqrt{5-x}=\frac{1}{4}\times\frac{x+4}{\sqrt{5-x}}\Rightarrow 10-2x=x+4\Rightarrow x=2$$



۱۶۳۹- گزینهٔ ۴ چون تابع f همه جا دوبار مشتق‌پذیر است، پس طول نقطه‌های عطف آن جواب‌های معادلهٔ $f''(x)=0$ هستند. (به شرطی که f'' در آن‌ها تغییر علامت بدهد.) توجه کنید که

$$f'(x)=8x^3+3ax^2+2bx$$

$$f''(x)=24x^2+6ax+2b$$

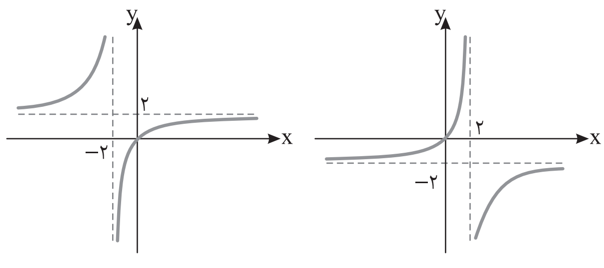
$$\begin{cases}f''(1)=0\\ f''(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}24+6a+2b=0\\ 24-6a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-12\end{cases}$$

بنابراین $f'(x)=8x^3-24x$ و طول نقاط اکسترمم نسبی جواب‌های معادلهٔ $8x^3-24x=0$ هستند. جواب‌های این معادله $x=0$، $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ هستند که مجموع آن‌ها برابر صفر است.

۱۶۴۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

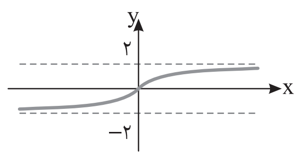
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x+2} & x\geq 0\\[2mm] \dfrac{2x}{-x+2} & x\leq 0\end{cases}$$

نمودار توابع $y=\frac{2x}{x+2}$ و $y=\frac{2x}{-x+2}$ به‌صورت زیر است.



$y=\frac{2x}{-x+2}$　　　$y=\frac{2x}{x+2}$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



برای اینکه خط $y=m$ نمودار تابع f را قطع نکند، لازم است که $|m|\geq 2$.

۱۶۴۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$ و

$$f'(x)=\frac{x^2-1-2x(x)}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	
f		↘	ت ن	↘	ت ن	↘	

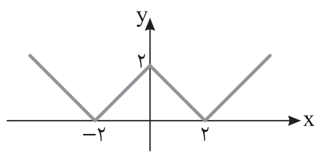
همچنین

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$$

بنابراین جدول تعیین جدول تغییرات تابع f به شکل بالاست و این تابع روی بازه‌های $(-\infty,-1)$، $(-1,1)$ و $(1,+\infty)$ نزولی است ولی روی دامنه‌اش غیر یکنواست.

۱۶۴۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f به شکل مقابل است. از روی این شکل معلوم است که تابع f دو نقطهٔ مینیمم نسبی و یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی دارد.



۱۶۴۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^5-5x^4+1\Rightarrow f'(x)=5x^4-20x^3=5x^3(x-4)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=4$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	max	↘	min	↗	

بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=0$ ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ $x=4$ مینیمم نسبی دارد.

۱۶۴۴- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا مشتق‌پذیر است، پس مشتق آن در نقطهٔ اکسترمم نسبی‌اش برابر صفر است:

$$f(x)=\frac{a}{3}x^3+2bx^2+4x-\frac{4}{3}\Rightarrow f'(x)=ax^2+4bx+4$$

$$f'(-1)=0\Rightarrow a-4b+4=0$$

از طرف دیگر، مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$f(-1)=2\Rightarrow -\frac{a}{3}+2b-4-\frac{4}{3}=2\Rightarrow -a+6b=22$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a-4b=-4\\ -a+6b=22\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=32$ و $b=9$ و در نتیجه $a-b=23$.

۱۶۴۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=2x\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x^2-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{8x^2-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و $f'(-\frac{1}{2})=0$ و $f'(\frac{1}{2})=0$. پس تابع f سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۱۶۴۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+a)}{x}=\frac{x-a}{2x\sqrt{x}},\quad f'(x)=0\Rightarrow x=a\notin[1,4]\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

پس باید بین مقادیر $f(1)$ و $f(4)$ دنبال ماکزیمم مطلق تابع بگردیم:

$f(1)=1+a$ و $f(4)=2+\frac{a}{2}$. چون a عددی از بازهٔ $(0,1)$ است، مقدار $2+\frac{a}{2}$ از مقدار $1+a$ بزرگ‌تر است، پس مقدار ماکزیمم مطلق تابع $2+\frac{a}{2}$ است. بنابراین $2+\frac{a}{2}=\frac{9}{4}$، در نتیجه $a=\frac{1}{2}$.

۱۶۴۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید طول نقطهٔ A برابر $-x$ باشد. چون نقطهٔ A روی نمودار تابع $y=x^2+1$ است، پس عرض نقطهٔ A برابر x^2+1 است. به این ترتیب، عرض نقطهٔ D هم برابر x^2+1 است و در نتیجه

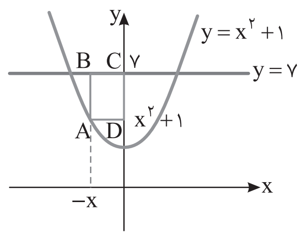
$$CD=7-(x^2+1)=6-x^2$$

بنابراین $x(6-x^2)=$ مساحت مستطیل ABCD.

اگر $f(x)=x(6-x^2)$، آن‌گاه $f(x)=6x-x^3$، در نتیجه $f'(x)=6-3x^2$.

پس $f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{2}$ (توجه کنید که $x>0$)

بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل ABCD به ازای $x=\sqrt{2}$ به دست می‌آید و برابر است با $\sqrt{2}\times 4=4\sqrt{2}$.



۱۶۴۸- گزینهٔ ۱ فرض کنید (x,x^3) نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=x^3$ باشد. فاصلهٔ این نقطه تا خط $y-3x+6=0$ برابر است با

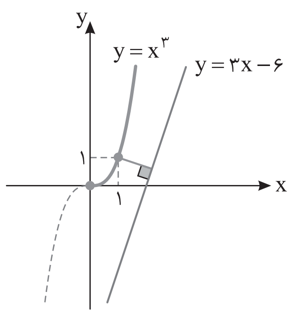
$$\frac{|x^3-3x+6|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|x^3-3x+6|}{\sqrt{10}}=\frac{x^3-3x+6}{\sqrt{10}}$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر جایی است که کمترین مقدار تابع $d=x^3-3x+6$ به‌دست می‌آید. توجه کنید که

$$d'=3x^2-3,\quad d'=0\Rightarrow x=1,\ x=-1\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

پس باید مقادیر $d(0)$ و $d(1)$ را مقایسه کنیم: $d(0)=6$ و $d(1)=4$.

بنابراین طول نزدیک‌ترین نقطه برابر ۱ است.

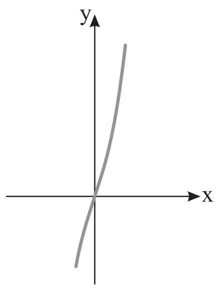


۱۶۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f''(x)=6ax-12$. طبق فرض مسئله، جدول تغییر علامت f'' به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	
f		∪		∩	

بنابراین -2 ریشهٔ f'' است. $6a(-2)-12=0\Rightarrow a=-1$

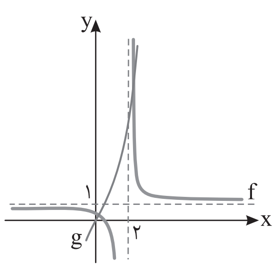
۱۶۵۰- گزینهٔ ۲ تابع g اکیداً صعودی است، زیرا $g'(x)=3x^2+3>0$، از طرف دیگر، $g(0)=0$ و نمودار تقریبی این تابع به‌صورت روبه‌رو است.



تابع $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ دو مجانب به معادله‌های $x=2$ و $y=1$ دارد و روی بازه‌های $(-\infty,2)$ و $(2,+\infty)$ نزولی است، زیرا

$$f'(x)=\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}<0$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است و دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.



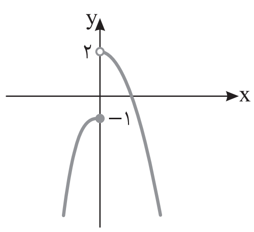
۱۶۵۱- گزینهٔ ۴ از روی نمودار تابع f معلوم است که این تابع روی بازهٔ $(-3,-1)$ مشتق‌پذیر و اکیداً نزولی است. بنابراین $f'(x)<0$. اکنون توجه کنید که چون مقادیر تابع f منفی‌اند، پس

$$y=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow y'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0,\quad x\in(-3,-1)$$

بنابراین تابع گزینهٔ (۴) اکیداً صعودی است.

مثال نقض برای گزینه‌های دیگر تابع $f(x)=-x^3-100$ است.

۱۶۵۲- گزینهٔ ۴ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. این تابع نه ماکزیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.



۱۶۵۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $f'(x)=\frac{3-3x^2}{3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}}$. تابع f در نقطه‌های $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق ندارد و در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ مشتق آن صفر است. جدول تغییرات تابع f به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	ت ن	−	0	+	ت ن	+	0	−	ت ن	−	
$f(x)$		↘		↘	min	↗		↗	max	↘		↘	

پس $x=1$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است و عرض این نقطه برابر $\sqrt[3]{2}$ است.

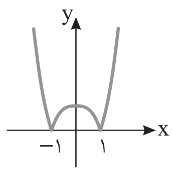
۱۶۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $D_f=[-2,2]$ و تابع f روی بازهٔ $(-2,2)$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}},\quad f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=x$$

$$\xrightarrow{x\geq 0} 4-x^2=x^2\Rightarrow x=\sqrt{2},\quad x=-\sqrt{2}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین باید $f(-2)$، $f(\sqrt{2})$ و $f(2)$ را مقایسه کنیم تا بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[-2,2]$ پیدا شود: $f(-2)=-2$، $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ و $f(2)=2$. بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر $2\sqrt{2}$ و کمترین مقدار آن برابر -2 است و نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار تابع برابر $-\sqrt{2}$ است.

۱۶۵۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که اگر $x\geq 0$، آن‌گاه $f(x)=|x^3-1|$ و اگر $x<0$، آن‌گاه $f(x)=|-x^3-1|=|x^3+1|$. بنابراین نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. پس در نقطه‌های $x=1$ و $x=-1$ تابع f مشتق ندارد (نقطهٔ گوشه‌ای) و در نقطهٔ $x=0$ مشتق تابع f برابر صفر است. پس این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.



۱۶۵۶- گزینهٔ ۲ چون $x+y=2$، پس $y=2-x$، در نتیجه

$$x^3+y^3=x^3+(2-x)^3=2(3x^2-6x+4)$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=2(3x^2-6x+4)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=2(6x-6)=12(x-1),\quad f'(x)=0\Rightarrow x=1$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. پس کمترین مقدار تابع f به‌ازای $x=1$ به‌دست می‌آید و برابر است با $f(1)=2$.

۱۶۵۷- گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطه‌های مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{(3x-x)^2+(x+6-4)^2}=\sqrt{5x^2+4x+4}$$

بنابراین باید کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{5x^2+4x+4}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=\frac{10x+4}{2\sqrt{5x^2+4x+4}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-\frac{2}{5}$$

چون تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد، پس کمترین مقدار آن به ازای $x=-\frac{2}{5}$ به‌دست می‌آید که برابر است با

$$f(-\frac{2}{5})=\sqrt{5(-\frac{2}{5})^2+4(-\frac{2}{5})+4}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

۱۶۵۸- گزینهٔ ۴ ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض قاعدهٔ آن را با l نمایش می‌دهیم. در این صورت $xl^2=$حجم. توجه کنید که

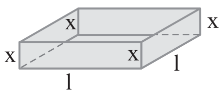
$$2x+l=30\Rightarrow l=30-2x\Rightarrow \text{حجم}=x(30-2x)^2$$

بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x(30-2x)^2$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f(x)=4x^3-120x^2+900x\Rightarrow f'(x)=12x^2-240x+900$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 12x^2-240x+900=0\Rightarrow x^2-20x+75=0$$

$$(x-5)(x-15)=0\Rightarrow x=5\ ,\ x=15$$



توجه کنید که به ازای $x=15$ حجم جعبه برابر صفر می‌شود، در نتیجه بیشترین مقدار تابع f به ازای $x=5$ به‌دست می‌آید.

۱۶۵۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(x)=x+(x-1)^{\frac{1}{3}}$، $f'(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$ و $f''(x)=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=+\infty$$

بنابراین نمودار تابع f در نقطهٔ به طول ۱ خط مماس قائم دارد و چون f'' در $x=1$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f برابر ۱ و عرض آن نیز برابر است با $f(1)=1$.

۱۶۶۰- گزینهٔ ۱ چون مقادیر f'' همه‌جا مثبت‌اند، پس جهت تقعر تابع f روی $\mathbb{R}$ رو به بالا است. توجه کنید که نمودارهای گزینه‌های (۲) و (۳) این ویژگی را ندارد. گزینهٔ (۴) نیز درست نیست چون مشتق دوم تابع خطی برابر صفر است. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۱۶۶۱- گزینهٔ ۱ از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=4x^3-12x+8=4(x-1)(x^2+x-2)=4(x-1)^2(x+2)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} x_1=1,\quad x_2=-2$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$+$	
f		↘	min	↗		↗	

با توجه به جدول بالا تابع فقط یک مینیمم نسبی دارد. خارج از کشور ریاضی – ۹۰

۱۶۶۲- گزینهٔ ۲ نقطهٔ $(1,-2)$ روی نمودار تابع است، پس $f(1)=-2$، درنتیجه $a+b=-2$. همچنین

$$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+2bx\xrightarrow{f'(1)=0}-a+2b=0\xrightarrow{a+b=-2}$$

$$3b=-2\Rightarrow b=-\frac{2}{3},\ a=-\frac{4}{3}$$

بنابراین $f'(x)=\frac{4}{3}(\frac{1-x^3}{x^2})$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
f		↗	max	↘	

پس نقطهٔ $(1,-2)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. ریاضی – ۸۹

۱۶۶۳- گزینهٔ ۱ ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2+2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}+2(x-1)\sqrt[3]{x^2}=\frac{2(x-1)^2+6x(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

اکنون معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=0\Rightarrow x=1\,,\ x=\frac{1}{4}$$

تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sqrt[3]{x}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	ت.ن	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

با توجه به جدول، $x=\frac{1}{4}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است. خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۱۶۶۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-1,2]$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین، $f(x)=|x||x^2-1|$. بنابراین نقطه‌های $x=0$ و $x=1$ نیز نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x & -1\le x\le 0\\ -x^3+x & 0\le x\le 1\\ x^3-x & 1\le x\le 2\end{cases}$$

، بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & -1<x<0\\ -3x^2+1 & 0<x<1\\ 3x^2-1 & 1<x<2\end{cases}$$

. در نتیجه $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

پس تابع f شش نقطهٔ بحرانی دارد. ریاضی - ۹۰

۱۶۶۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+5\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-9$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3(x^2-2x-3)=0\Rightarrow 3(x+1)(x-3)=0$$

$x=-1\,,\ x=3$ (غ.ق.ق.)

اکنون مقادیر $f(-2)$، $f(2)$ و $f(-1)$ را پیدا می‌کنیم تا بیشترین مقدار تابع f در بازهٔ $[-2,2]$ مشخص شود: $f(-2)=3$، $f(2)=-17$ و $f(-1)=10$.

پس بیشترین مقدار تابع f در این بازه برابر ۱۰ است. تجربی - ۹۲

۱۶۶۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f'(x)=-4x^3+12x^2\Rightarrow f''(x)=-12x^2+24x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0, x=3$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x=0, x=2$$

بنابراین جهت یکنوایی و تقعر نمودار f به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
f		$\nearrow\cap$		$\nearrow\cup$		$\nearrow\cap$		$\searrow\cap$	

روی بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(2,3)$ نمودار تابع f صعودی و تقعر آن رو به پایین است.

تجربی - ۹۱

۱۶۶۷- گزینهٔ ۳ مشتق اول و دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\Rightarrow f'(x)=x^2-2x-3\Rightarrow f''(x)=2x-2$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-1, x=3,\quad f''(x)=0\Rightarrow x=1$$

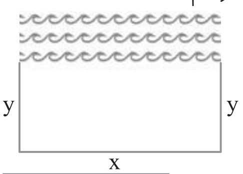
x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f		$\nearrow\cap$		$\searrow\cap$		$\searrow\cup$		$\nearrow\cup$	

پس روی بازهٔ $(1,3)$ نمودار تابع f نزولی و تقعر آن رو به بالاست.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۶۶۸- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر، $x+2y=88\Rightarrow x=88-2y$

می‌خواهیم مساحت مستطیل یعنی $S=xy$ ماکزیمم باشد:



$$S(y)=(88-2y)y=-2y^2+88y$$

$$S'(y)=-4y+88=0\Rightarrow y=22$$

$$S_{max}=968m^2$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۱۶۶۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$y=\begin{cases} x^3-4x^2 & x\ge 4 \text{ یا } x\le 0\\ -x^3+4x^2 & 0\le x\le 4\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases} 3x^2-8x & x>4 \text{ یا } x\le 0\\ -3x^2+8x & 0\le x<4\end{cases}$$

$$y''=\begin{cases} 6x-8 & x>4 \text{ یا } x<0\\ -6x+8 & 0<x<4\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		4		$+\infty$
y''		$-$	ت.ن	$+$	0	$-$	ت.ن	$+$	

جهت تقعر نمودار تابع در $x=0$، $x=\frac{4}{3}$ و $x=4$ تغییر می‌کند ولی فقط در $x=\frac{4}{3}$ و $x=0$ تابع مشتق‌پذیر است و خط مماس دارد. پس این دو طول نقاط عطف نمودار تابع هستند.

ریاضی - ۹۲

۱۶۷۰- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودار تابع f مشخص است که تابع فقط یک نقطهٔ اکسترمم نسبی به طول ۳ دارد. بنابراین $x=۳$ جواب معادلهٔ $f'(x)=۰$ است و $f'(x)$ در این نقطه تغییر علامت می‌دهد:

$$f(x)=ax^{۴}+۲x^{۳}+bx^{۲}$$

$$f'(x)=۴ax^{۳}+۶x^{۲}+۲bx=۲x(۲ax^{۲}+۳x+b)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۰,\quad ۲ax^{۲}+۳x+b=۰$$

پس $x=۳$ باید جواب معادلهٔ $۲ax^{۲}+۳x+b=۰$ باشد و این معادله نباید جواب دیگری غیر از $x=۰$ داشته باشد. بنابراین

$$x=۰\Rightarrow ۰+۰+b=۰\Rightarrow b=۰\,,\quad x=۳\Rightarrow ۱۸a+۹+۰=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

تجربی - ۹۲

۱۶۷۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f'(x)=۲x-\frac{a}{x^{۲}}=\frac{۲x^{۳}-a}{x^{۲}}\xrightarrow{f'(x)=۰}x_{۰}=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$$

$x=۰$ جزء دامنهٔ تابع نیست و تنها باید $x=x_{۰}$ را بررسی کنیم. در همسایگی این نقطه، علامت f' از منفی به مثبت تغییر می‌کند (به ازای همهٔ مقادیر a)، بنابراین همواره $x=x_{۰}$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است و تابع ماکزیمم نسبی ندارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۹

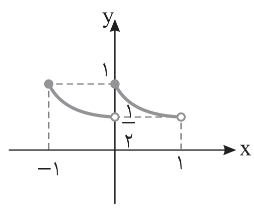
۱۶۷۲- گزینهٔ ۲ چون $۰\le x-[x]<۱$، پس $-۱<f(x)\le ۰$، بنابراین از اینکه تابع $g(x)=۲^{x}$ اکیداً صعودی است، نتیجه می‌شود

$$g(-۱)<g(f(x))\le g(۰)\Rightarrow \frac{۱}{۲}<(gof)(x)\le ۱$$

پس تابع gof مقدار ماکزیمم نسبی دارد و مقدار مینیمم نسبی ندارد. به نمودار تابع در بازهٔ $[-۱,۱)$ توجه کنید.

$$-۱\le x<۰\Rightarrow f(x)=-۱-x\Rightarrow (gof)(x)=۲^{-x-۱}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})^{x}$$

$$۰\le x<۱\Rightarrow f(x)=-x\Rightarrow (gof)(x)=۲^{-x}=(\frac{۱}{۲})^{x}$$



ریاضی - ۹۱

۱۶۷۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=۲x\sqrt[۳]{x}+\frac{x^{۲}-۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}=\frac{۶x^{۲}+x^{۲}-۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}=\frac{۷x^{۲}-۲۸}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

تابع f در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و در نقطه‌های $x=۲$ و $x=-۲$ مشتق آن صفر است. پس مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع f به‌صورت $\{-۲,۰,۲\}$ است.

تجربی - ۸۳

۱۶۷۴- گزینهٔ ۴ تابع f در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۲,۲]$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی هستند. همچنین تابع f در نقطه‌های $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست، پس این نقطه‌ها نیز نقطه‌های بحرانی هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}x^{۳}-x & -۲\le x\le -۱\\ -x^{۳}+x & -۱\le x\le ۱\\ x^{۳}-x & ۱\le x\le ۲\end{cases}$$

، بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^{۲}-۱ & -۲<x<-۱\\ -۳x^{۲}+۱ & -۱<x<۱\\ ۳x^{۲}-۱ & ۱<x<۲\end{cases}$$

در نتیجه

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس تابع f شش نقطهٔ بحرانی دارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۶۷۵- گزینهٔ ۲ طول نقاط بحرانی تابع روی بازهٔ $(-۴,۳)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۱۵x\Rightarrow f'(x)=x^{۲}-۲x-۱۵$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow (x-۵)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۳\,,\,x=۵$$

$x=۵$ در بازهٔ مورد نظر نیست. برای یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم، مقدار تابع را در نقاط زیر با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(-۴)=-\frac{۶۴}{۳}-۱۶+۶۰=-\frac{۶۴}{۳}+۴۴=\frac{۶۸}{۳}=۲۲/\overline{۶}$$

$$f(-۳)=-\frac{۲۷}{۳}-۹+۴۵=-۱۸+۴۵=۲۷$$

$$f(۳)=\frac{۲۷}{۳}-۹-۴۵=-۴۵$$

پس $f(-۳)=۲۷$ مقدار ماکزیمم مطلق و $f(۳)=-۴۵$ مینیمم مطلق تابع داده شده در بازهٔ مورد نظر است.

تجربی - ۹۵

۱۶۷۶- گزینهٔ ۲ باید مشتق دوم تابع را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۹}{x^{۲}+۱۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱۲-۹}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}\times ۲x=\frac{۶x}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۶(x^{۲}+۱۲)^{۲}-۲(x^{۲}+۱۲)۲x\times ۶x}{(x^{۲}+۱۲)^{۴}}=\frac{۱۸(۴-x^{۲})}{(x^{۲}+۱۲)^{۳}}$$

برای آنکه $f''(x)>۰$، باید $۴-x^{۲}>۰$، یعنی $-۲<x<۲$. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $۲-(-۲)=۴$.

ریاضی - ۸۸

۱۶۷۷- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع f را پیدا می‌کنیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=(x+۳)\sqrt{x}=x^{\frac{۳}{۲}}+۳x^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۳}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۳}{۴}x^{-\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۴}(\frac{۱}{\sqrt{x}}-\frac{۱}{x\sqrt{x}})=\frac{۳(x-۱)}{۴x\sqrt{x}}$$

x	۰		۱		$+\infty$
$f''(x)$		−	۰	+	
f		$\cap$		$\cup$	

پس جهت تقعر نمودار تابع f روی بازهٔ $(۰,۱)$ رو به پایین است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۱ است.

خارج از کشور تجربی - ۹۲

۱۶۷۸- گزینهٔ ۳ چون طول نقطهٔ عطف برابر ۱ است، پس

$$\frac{-(-1)}{3a}=1\Rightarrow 3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

در ضمن، مختصات نقطهٔ عطف در ضابطهٔ تابع صدق می‌کنند:

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+b\xrightarrow{(1,-3)}-3=\frac{1}{3}-1-3+b\Rightarrow b=\frac{2}{3}$$

بنابرایـن ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{2}{3}$ اسـت. برای یافتن نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع، مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y'=x^2-2x-3\xrightarrow{y'=0}(x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=-1,3$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

بنابراین نقطه‌ای به طول -1 نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع است. مقدار تابع در این نقطه برابر است با

$$y(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+\frac{2}{3}=\frac{-1}{3}-1+3+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$$

تجربی - ۹۶

۱۶۷۹- گزینهٔ ۱ بـا توجه به نمودار می‌توان گفـت تابع در نقطهٔ $x=-1$ ممـاس افقی دارد، پس $f'(-1)=0$. همچنین جهت تقعـر نمودار در این نقطه تغییر کرده است، پس $f''(-1)=0$. بنابراین

$$f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=4x^3-3x^2+2ax+b\\ f''(x)=12x^2-6x+2a\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'(-1)=-4-3-2a+b=0\\ f''(-1)=12+6+2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a+b=7\\ 2a+18=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-9\\ b=-11\end{cases}$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۱۶۸۰- گزینهٔ ۲ تابع روی بازهٔ $(-\infty,0)$ نزولی است، پـس روی این بازه $f'(x)<0$ و روی بازهٔ $(0,+\infty)$ صعودی است، پس روی این بازه $f'(x)>0$. در ضمن تابع دو نقطهٔ عطف دارد، پس f' دو نقطهٔ اکسـترمم نسـبی دارد. در نهایت $y=0$ مجانب افقی f' اسـت. تنها گزینه‌ای که تمام این شرایط را دارد گزینهٔ (۲) است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۶۸۱- گزینهٔ ۳ اگر تابع f در نقطهٔ c مشتق‌پذیر باشـد، مشـتق آن در این نقطه برابر صفر است، پس مشتق راست تابع نیز در این نقطه برابر صفر است. اگر تابع f در نقطهٔ c مشتق‌پذیر نباشد، مشتق راست آن در این نقطه مثبت است.

خارج از کشور ریاضی ۹۰

۱۶۸۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که تابع f در نقطه‌های $x=\pm\sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست، بنابراین این نقطه‌ها، نقطه‌های بحرانی تابع f هستند. از طرف دیگر،

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x & x\le-\sqrt{3}\\ -x^3+3x & -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\ x^3-3x & x\ge\sqrt{3}\end{cases}$$

پس $f'(x)=\begin{cases}3x^2-3 & x<-\sqrt{3}\\ -3x^2+3 & -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\\ 3x^2-3 & x>\sqrt{3}\end{cases}$. در نتیجه

$$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	ت ن	$-$	0	$+$	0	$-$	ت ن	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

پس تابع f در چهار نقطه اکسترمم نسبی دارد.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

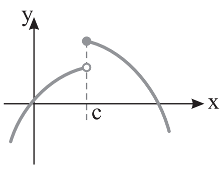
۱۶۸۳- گزینهٔ ۱ مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times x-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{x^2-(x^2+1)}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

پـس تابع f' ریشـه نـدارد و در همهٔ نقاط دامنهٔ f، تابع مشـتق‌پذیر اسـت، بنابراین تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد.

خارج از کشور ریاضی - ۹۰

۱۶۸۴- گزینهٔ ۴ بـا توجـه بـه شـکل مقابل هر سه گزینهٔ (۱)، (۲) و (۳) نادرست هسـتند. گزینـهٔ (۴) درسـت اسـت، زیرا با توجـه بـه اینکـه تابـع f در همسـایگی نقطهٔ $x=c$ تعریف شـده است، در این نقطه مقدار تابع f در تعریف اکسترمم نسبی صدق می‌کند.



ریاضی - ۸۸

۱۶۸۵- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=-\frac{2}{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{4(x^2+3)^2-2(x^2+3)\times2x\times4x}{(x^2+3)^4}=\frac{12(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$$

به ازای $-1<x<1$، $f''(x)>0$، پس تقعر نمودار تابع رو به بالا است.

ریاضی- ۹۰

۱۶۸۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم و محدوده‌ای را تعیین می‌کنیم که علامت آن منفی است:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & x\ge3\\ -x^3+3x^2 & x\le3\end{cases}$$

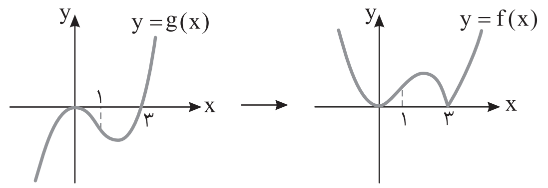
$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & x>3\\ -3x^2+6x & x<3\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}6x-6 & x>3\\ -6x+6 & x<3\end{cases}$$

$$f''(x)<0\Rightarrow\begin{cases}6x-6<0\Rightarrow x<1\xrightarrow{x>3}\text{غیرممکن}\\ -6x+6<0\Rightarrow x>1\xrightarrow{x<3}1<x<3\end{cases}$$

پس $\max(b-a)=3-1=2$.

راه‌حل دوم اگر $g(x)=x^3-3x^2$، برای رسم نمودار تابع مورد نظر کافی است نمودار g را در محدودهٔ $x>3$ نسبت به محور x قرینه کنیم.



چون طول نقطهٔ عطف تابع g برابر ۱ است، پس روی بازهٔ $(1,+\infty)$ تقعر نمودار تابع g رو به بالا است. به این ترتیب روی بازهٔ $(1,3)$ تقعر نمودار تابع f رو به پایین است.

خارج از کشور ریاضی – ۸۶

۱۶۸۷- گزینهٔ ۱ مشتق اول باید مثبت و مشتق دوم باید منفی باشد:

$$f'(x)=2\sin x\cos x-2\cos x=2\cos x(\sin x-1)>0$$

$$\cos x<0\Rightarrow \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$$

$$f''(x)=2\cos 2x+2\sin x=2(-2\sin^2 x+\sin x+1)$$
$$=2(\sin x-1)(-2\sin x-1)$$

$$f''(x)<0\Rightarrow -2\sin x-1>0\Rightarrow \sin x<-\frac{1}{2}$$

پس در بازهٔ $(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$ هر دو شرط برقرار است.

خارج از کشور ریاضی – ۹۶

۱۶۸۸- گزینهٔ ۳ ابتدا شرط صعودی بودن تابع را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=3x^2-2(m+2)x+3\xrightarrow{\Delta\le 0}4(m+2)^2-36\le 0$$

$$-3\le m+2\le 3\Rightarrow -5\le m\le 1$$

اکنون طول نقطهٔ عطف را پیدا می‌کنیم:

$$f''(x)=6x-2(m+2)=0\Rightarrow x=\frac{m+2}{3}$$

از شرط $-5\le m\le 1$ به‌دست می‌آید $-1\le\frac{m+2}{3}\le 1$.

تجربی – ۹۴

۱۶۸۹- گزینهٔ ۳ از تابع دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & x\ge -1\\ -13-\frac{9}{x} & x\le -1\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}3x^2-6x & x\ge -1\\ \frac{9}{x^2} & x\le -1\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}6x-6 & x>-1\\ -\frac{18}{x^3} & x<-1\end{cases}$$

توابع f و f' روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند. تابع f'' در دو نقطه تغییر علامت می‌دهد: $x=1$ و $x=-1$ (در نقطهٔ $x=1$ ضابطهٔ اول تابع f'' صفر می‌شود و در همسایگی راست نقطهٔ $x=-1$ علامت f'' منفی و در همسایگی چپ، علامت آن مثبت است). چون در هر دو نقطه f' وجود دارد، پس دو نقطهٔ عطف داریم.

ریاضی – ۸۹

۱۶۹۰- گزینهٔ ۴ با توجه به گزینه‌ها و اینکه مجانب قائم نمودار در سمت راست محور y است، می‌توان نتیجه گرفت $b=-4$. چون $f(0)=\frac{a}{4}$ و نمودار تابع، محور y را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است، پس $\frac{a}{4}>0\Rightarrow a>0$

تجربی – ۹۳

۱۶۹۱- گزینهٔ ۳ عبارات گزینه‌های (۲) و (۴) درست هستند. همچنین می‌دانیم اگر f' در نقطهٔ اکسترمم نسبی c موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$، پس گزینهٔ (۱) نیز عبارتی درست است. گزینهٔ (۳) نادرست است، زیرا هر نقطهٔ بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست، مانند $x=0$ در $f(x)=x^3$.

ریاضی – ۹۰

۱۶۹۲- گزینهٔ ۳ در تابع $f(x)=(x-1)|(x-1)(x+2)|$، $x=-2$ ریشهٔ ساده عبارت داخل قدرمطلق است، پس تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر نیست.

در $x=1$ نیز مشتق تابع برابر صفر است و به همین دلیل این نقطه نیز جزء نقاط بحرانی تابع است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2)\ge 0\\ -(x-1)^2(x+2) & (x-1)(x+2)<0\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow((x-1)^2(x+2))'=0$$

$$2(x-1)(x+2)+(x-1)^2=(x-1)(3x+3)=0\Rightarrow x=1,-1$$

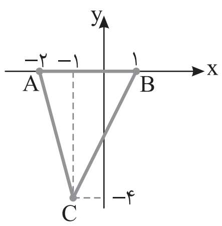
پس نقطهٔ بحرانی سوم، نقطه‌ای به طول $x=-1$ است. بنابراین

نقاط بحرانی: $A(-2,0)$

$B(1,0)\ ,\ C(-1,-4)$

در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{4\times 3}{2}=6$$



خارج از کشور ریاضی – ۹۲

۱۶۹۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}=\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$$

واضح است که برای هر x حقیقی $x^3-x^2\le x^3$، پس $\sqrt[3]{x^3-x^2}\le\sqrt[3]{x^3}$ و در نتیجه $f(x)\ge 0$. از طرف دیگر $f(0)=0$. پس کمترین مقدار تابع برابر صفر است.

ریاضی – ۹۲

۱۶۹۴- گزینهٔ ۴ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ به طول x برابر با $f'(x)$ است. بنابراین $m=f'(x)=-x^2+4x-1$.

بیشترین مقدار $f'(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m'=-2x+4\xrightarrow{m'=0}x=2\Rightarrow m=3$$

بنابراین خطی با شیب ۳ مورد نظر است که در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار تابع f مماس شده است. معادلهٔ این خط را می‌نویسیم:

$$y-f(2)=3(x-2)\Rightarrow y-\frac{10}{3}=3x-6$$

این خط محور y را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند:

$$x=0\Rightarrow y-\frac{10}{3}=0-6\Rightarrow y=-\frac{8}{3}$$

خارج از کشور ریاضی – ۹۷

۱۶۹۵- گزینهٔ ۱ مشتق دوم تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x\sqrt{x^۲+۲}$$

$$f'(x)=\sqrt{x^۲+۲}+\frac{۲x^۲}{۲\sqrt{x^۲+۲}}=\frac{۲x^۲+۲}{\sqrt{x^۲+۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۴x\sqrt{x^۲+۲}-\frac{۲x(۲x^۲+۲)}{۲\sqrt{x^۲+۲}}}{x^۲+۲}=\frac{۲x(x^۲+۳)}{(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۲}}$$

پس جدول تعیین علامت $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	۰	$+$	
f		$\cap$		$\cup$	

جهت تقعر نمودار تابع f روی بازه $(۰,+\infty)$ رو به بالاست. پس کمترین مقدار a برابر صفر است.

تجربی - ۹۲

۱۶۹۶- گزینهٔ ۲ مشتق اول و مشتق دوم تابع باید منفی باشند:

$$f'(x)<۰\ ,\ f''(x)<۰,\quad f(x)=(\cos x-۱)^۲-۱$$

$$f'(x)=-۲\sin x(\cos x-۱)=۲\sin x-\sin ۲x$$

$$f''(x)=۲\cos x-۲\cos ۲x=-۲(۲\cos^۲ x-\cos x-۱)$$
$$=-۲(۲\cos x+۱)(\cos x-۱)$$

$$f'(x)<۰\ ,\ f''(x)<۰$$

$$\begin{cases}\sin x<۰\\ \cos x<-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow \pi<x<\frac{۴\pi}{۳}$$

ریاضی - ۹۶

۱۶۹۷- گزینهٔ ۱ از تابع داده شده دوبار مشتق می‌گیریم:

$$y=۵x^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۵}{۳}}\Rightarrow y'=\frac{۱۰}{۳}x^{\frac{-۱}{۳}}-\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$y''=\frac{-۱۰}{۹}x^{\frac{-۴}{۳}}-\frac{۱۰}{۹}x^{\frac{-۱}{۳}}=\frac{-۱۰}{۹}x^{\frac{-۴}{۳}}(۱+x)$$

با حل معادلهٔ $y''=۰$ به‌دست می‌آید $x=-۱$. از طرف دیگر علامت y'' در این نقطه تغییر می‌کند، پس $x=-۱$ طول نقطهٔ عطف است.

ریاضی - ۹۵

۱۶۹۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم نقطهٔ مورد نظر $M(x,۰)$ باشد. می‌خواهیم $|AM-BM|$ بیشترین مقدار شود. پس

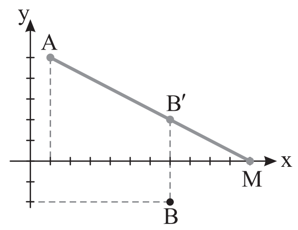
$$d=AM-BM=\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}-\sqrt{(x-۷)^۲+۴}$$

$$d'=\frac{۲(x-۱)}{۲\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}}-\frac{۲(x-۷)}{۲\sqrt{(x-۷)^۲+۴}}=۰$$

پس از حل معادلهٔ بالا به‌دست می‌آید $x=۱۱$. توجه کنید که در نقطهٔ $x=۱۱$ مقدار d چه ماکزیمم باشد چه مینیمم، مقدار $|AM-BM|$ ماکزیمم است.

راه‌حل دوم نقطهٔ مورد نظر را $M(x,۰)$ می‌گیریم. چون فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ $B(۷,-۲)$ دقیقاً به اندازهٔ فاصلهٔ آن از نقطهٔ $B'(۷,۲)$ است، با توجه به شکل، تفاضل فواصل مورد نظر سؤال زمانی بیشترین است که نقطهٔ M روی خط $B'A$ باشد. بنابراین

$$\frac{۵-۲}{۱-۷}=\frac{۲-۰}{۷-x}\Rightarrow ۲۱-۳x=-۱۲\Rightarrow ۳x=۳۳\Rightarrow x=۱۱$$



ریاضی - ۹۳

۱۶۹۹- گزینهٔ ۳ مجانب افقی تابع $y=a$ است. طبق شکل، نمودار از نقطهٔ برخورد مجانب و محور y عبور می‌کند، بنابراین $f(۰)=a$، در نتیجه $\frac{۲}{۱}=a$، پس $a=۲$. اکنون از اینکه نمودار در قسمت مثبت محور x بر آن مماس است، نتیجه می‌گیریم معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف مثبت دارد. پس

$$۲x^۲+bx+۲=۰\xrightarrow{\Delta=۰}b^۲=۱۶\xrightarrow[b<۰]{\text{ریشهٔ مضاعف مثبت}}b=-۴$$

ریاضی - ۹۱

۱۷۰۰- گزینهٔ ۳ بـه ازای ریشه‌های مخرج، تابع حفره دارد. بنابراین در ایـن نقـاط حد تابع موجود است. در نتیجه صورت و مخـرج باید به صفر میل کنند. بنابراین

$$\sin x+\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴}$$

پس

$$a(-۱)+b=۰\Rightarrow a=b$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{a\sin ۲x+a}{\sin x+\cos x}=\frac{a(۱+\sin ۲x)}{\sin x+\cos x}$$
$$=\frac{a(\sin x+\cos x)^۲}{\sin x+\cos x}=a(\sin x+\cos x)$$
$$f'(x)=a(\cos x-\sin x)=۰$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \sin x=\cos x\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

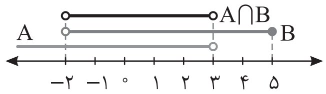
با توجه به نمودار مشـخص اسـت که مقدار تابع در اولین نقطهٔ اکسترمم نسبی سمت راست محور عرض‌ها برابر ۲ است. پس

$$f(\frac{\pi}{۴})=۲\Rightarrow a(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

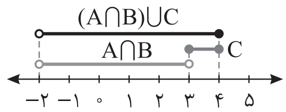
ریاضی - ۹۳

فصل ششم

۱۷۰۱- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ $A\cap B$ به کمک شکل زیر پیدا می‌شود:

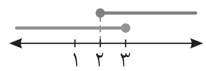


پس $A\cap B=(-2,3)$. اجتماع دو مجموعهٔ $A\cap B$ و C به شکل زیر است:



یعنی $(A\cap B)\cup C=(-2,4]$.

۱۷۰۲- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل زیر $\mathbb{R}=(-\infty,3)\cup[2,+\infty)$، بنابراین می‌خواهیم $\mathbb{R}-(1,4]$ را پیدا کنیم که حاصل آن $(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$ است.



۱۷۰۳- گزینهٔ ۲ عدد $\frac{1}{4}$ باید از $\frac{1}{n+3}$ بزرگ‌تر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+3}<\frac{1}{4}\Rightarrow n+3>4\Rightarrow n>1$$

عدد $\frac{1}{4}$ نباید از $\frac{1}{n+1}$ بیشتر باشد، یعنی

$$\frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{4}\Rightarrow n+1\le4\Rightarrow n\le3$$

بنابراین عدد طبیعی n می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد.

۱۷۰۴- گزینهٔ ۳ نقطهٔ وسط پاره‌خط، متناظر با میانگین ابتدا و انتهای بازه است، یعنی

$$\frac{2a^2+1+(-a^2)}{2}=\frac{a^2+1}{2}=5\Rightarrow a^2=9$$

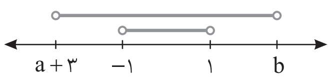
بنابراین بازهٔ مورد نظر $[-9,19]$ است و طول این بازه برابر است با

$$19-(-9)=28$$

۱۷۰۵- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم است که باید

$$\begin{cases}a+3\le-1\\ b\ge1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le-4\\ b\ge1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\ge4\\ b\ge1\end{cases}$$

بنابراین $b-a\ge1+4=5$. در ضمن اگر $a=-4$ و $b=1$، شرط داده شده در مسئله برقرار است.



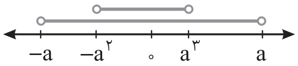
۱۷۰۶- گزینهٔ ۱ طول بازهٔ $(a,b+2)$ برابر است با $b+2-a=b-a+2$ و طول بازهٔ $(2a-1,2b+3)$ برابر است با

$$2b+3-(2a-1)=2(b-a+2)$$

بنابراین طول بازهٔ $(a,b+2)$ نصف طول بازهٔ $(2a-1,2b+3)$ است.

۱۷۰۷- گزینهٔ ۳ چون $0<a<1$، پس $a^3<a$ و $-a<-a^2$، بنابراین

$$(-a,a)\cap(-a^2,a^3)=(-a^2,a^3)$$



۱۷۰۸- گزینهٔ ۲ مجموعه‌های A_2، A_3، ... و A_{10} به شکل زیر هستند:

$$A_2=[\frac{1}{2},\frac{3}{2}],\quad A_3=[\frac{2}{3},\frac{4}{3}],\quad \dots,\quad A_{10}=[\frac{9}{10},\frac{11}{10}]$$

واضح است که مجموعهٔ A_2 شامل همهٔ مجموعه‌های دیگر است. یعنی همهٔ مجموعه‌های دیگر زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A_2 هستند. پس اجتماع همهٔ این مجموعه‌ها همان A_2 است.

۱۷۰۹- گزینهٔ ۴ از تساوی $(-1,1]\cap[a,b)=[0,1]$ معلوم می‌شود $a=0$ و $b\ge1$. از تساوی $(-1,1]\cup[a,b)=(-1,4)$ معلوم می‌شود $b=4$. بنابراین

$$a+b=4$$

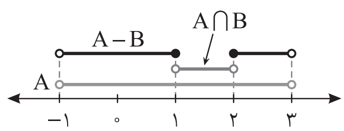
۱۷۱۰- گزینهٔ ۴ اشتراک این دو بازه فقط زمانی تک‌عضوی است که ابتدای بازهٔ $[-2a+1,+\infty)$ بر انتهای بازهٔ $(-\infty,a+4]$ منطبق باشد. در نتیجه

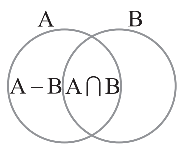
$$-2a+1=a+4\Rightarrow a=-1$$

۱۷۱۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم عضوهای A کوچک‌تر از یا مساوی با ۲ هستند و مجموعهٔ مورد نظر شامل اعضای A نیست، بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) رد می‌شوند. اکنون دقت کنید که $B-A=(0,4)-[-2,2]=(2,4)$.

۱۷۱۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$A-B=A-(A\cap B)=(-1,3)-(1,2)=(-1,1]\cup[2,3)$$





۱۷۱۳- گزینهٔ ۲ چون a عضو بازه است، پس $2a-1<a<3-3a$. از نابرابری $2a-1<a$ نتیجه می‌شود $a<1$ و از نابرابری $a<3-3a$ نتیجه می‌شود $a<\frac{3}{4}$. بنابراین باید $a<\frac{3}{4}$. اکنون توجه کنید که شرط اینکه $(2a-1,3-3a)$ بازه باشد این است که $2a-1<3-3a$، یعنی $a<\frac{4}{5}$، که اگر $a<\frac{3}{4}$، این شرط هم برقرار است. بنابراین مجموعهٔ مقادیر ممکن a بازهٔ $(-\infty,\frac{3}{4})$ است.

۱۷۱۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که طول بازهٔ $(a-5,2a+1)$ برابر است با $(2a+1)-(a-5)$. بنابراین $2a+1-a+5\le4$، پس $a\le-2$.

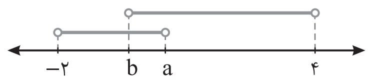
از طرف دیگر طول بازهٔ $(a-6,3a-1)$ برابر است با

$$(3a-1)-(a-6)=2a+5$$

چون $a\le-2$، پس $2a\le-4$ و در نتیجه $2a+5\le1$. پس حداکثر طول بازهٔ مورد نظر برابر ۱ است.

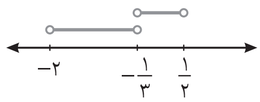
۱۷۱۵- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض مسئله و شکل زیر، نتیجه می‌شود

$$(b,۴)\cap[-۲,a)=(b,a)$$



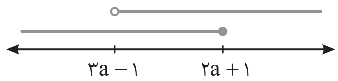
بنابراین $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-\frac{۱}{۳}$. اکنون می‌توان نوشت

$$(b,a)\cup(-۲a-۱,b)=(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲})\cup(-۲,-\frac{۱}{۳})=(-۲,\frac{۱}{۲})-\{-\frac{۱}{۳}\}$$



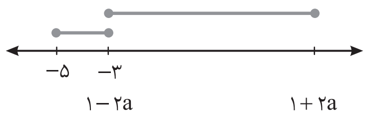
۱۷۱۶- گزینهٔ ۱ چون اشتراک دو بازه از عدد -۲ شروع می‌شود و $a<a+۲$، پس $-۲=a+۲$، یعنی $a=-۴$. بنابراین تساوی داده شده به‌صورت $[-۴,۲)\cap[-۲,b]=[-۲,۱]$ است. چون اشتراک در سمت چپ به عدد ۱ ختم شده است و $۱<۲$، پس $b=۱$. در نتیجه $a-b=-۵$.

۱۷۱۷- گزینهٔ ۳ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $(-\infty,۲a+۱]\cup(۳a-۱,+\infty)=\mathbb{R}$ وقتی برقرار است که $۳a-۱\le ۲a+۱$، یعنی $a\le ۲$.



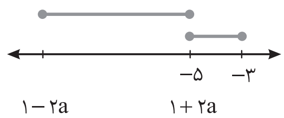
۱۷۱۸- گزینهٔ ۳ در دو حالت زیر، اشتراک دو بازه مجموعه‌ای تک‌عضوی می‌شود.

حالت اول



$$۱-۲a=-۳\Rightarrow a=۲$$

حالت دوم



$$۱+۲a=-۵\Rightarrow a=-۳$$

اکنون توجه کنید شرط اینکه $[۱-۲a,۱+۲a]$ بازه باشد این است که $۱-۲a<۱+۲a$، یعنی $a>۰$. بنابراین تنها مقدار قابل قبول برای a برابر ۲ است.

۱۷۱۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $I=(\frac{۱}{n},\frac{n+۲}{۲})$، بنابراین به ازای $n=۱$

$I=(۱,\frac{۳}{۲})\Rightarrow$ شامل هیچ عدد طبیعی‌ای نیست.

به‌ازای $n=۲$،

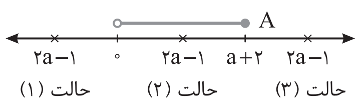
$$I=(\frac{۱}{۲},۲)\Rightarrow ۱\in I$$

به ازای $n=۳$،

$$I=(\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۲})\Rightarrow ۱,۲\in I$$

به این ترتیب به ازای $n\ge ۳$، بازهٔ I حداقل شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ است. پس فقط به ازای $n=۲$، بازهٔ داده شده فقط شامل یک عدد طبیعی است.

۱۷۲۰- گزینهٔ ۳ اگر به بازهٔ A دقت کنید معلوم می‌شود که $a+۲>۰$، پس $a>-۲$. از روی محور زیر، برحسب اینکه $۲a-۱$ در کدام ناحیه باشد، حاصل $A\cap B$ را به‌دست آورده‌ایم و در جدول زیر آن نوشته‌ایم.



	حالت (۱)	حالت (۲)	حالت (۳)
$A\cap B$	$(۰,a+۲]$	$(۲a-۱,a+۲]$	$\varnothing$

حالت (۱) قابل قبول نیست، زیرا در این حالت $A\cap B\not\subseteq(۱,۳]$. در حالت (۲) باید $۱\le ۲a-۱$ و $a+۲\le ۳$. از نابرابری اول به‌دست می‌آید $a\ge ۱$ و از نابرابری دوم به‌دست می‌آید $a\le ۱$ پس $a=۱$. در حالت (۳) باید $a+۲\le ۲a-۱$ و در نتیجه $a\ge ۳$. در این حالت اشتراک A و B برابر تهی است که زیرمجموعهٔ $(۱,۳]$ است. پس $a\in[۳,+\infty)\cup\{۱\}$.

۱۷۲۱- گزینهٔ ۴ چون A نامتناهی است و $A\subseteq B$، پس B هم نامتناهی است و اجتماع آن با هر مجموعهٔ دیگری نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ نامتناهی است.

۱۷۲۲- گزینهٔ ۱ B نامتناهی است، پس B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، ولی چون A متناهی است، پس $A\cap B'$ متناهی است. همچنین چون B نامتناهی است، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است. یعنی $A'\cup B$ و $A\cup B$ نامتناهی هستند. توجه کنید که چون B نامتناهی است، پس مجموعهٔ مرجع هم نامتناهی است. در نتیجه A' نامتناهی است. پس متناهی یا نامتناهی بودن $A'\cap B$ مشخص نیست.

۱۷۲۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$B=\{۳,۴,۶,۸,۹,۱۰,...\}\ ,\quad C=\{۱,۳,۴,۶,۷,۸,۹,...\}$$

بنابراین $B\cap C=\{۳,۴,۶,۸,۹,...\}$ و در نتیجه $A-(B\cap C)=\{۱,۵\}$.

۱۷۲۴- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$|x-۵|>۳\Rightarrow\begin{cases}x-۵>۳\\x-۵<-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۸\\x<۲\end{cases}$$

بنابراین $A=\{...,۰,۱,۹,۱۰,...\}$. در نتیجه $A'=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$.

یعنی $n(A')=۷$.

راه‌حل دوم چون $A=\{x\,|\,|x-۵|>۳\}$، پس $A'=\{x\,|\,|x-۵|\le ۳\}$.

از نابرابری $|x-۵|\le ۳$ نتیجه می‌شود

$$-۳\le x-۵\le ۳\Rightarrow ۲\le x\le ۸$$

مجموعهٔ مرجع $\mathbb{Z}$ است، پس $A'=\{۲,۳,...,۸\}$، بنابراین $n(A')=۷$.

۱۷۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\begin{cases}n(A)+n(B')=۱۷\\n(B)+n(A')=۱۳\end{cases}\Rightarrow n(A)+n(A')+n(B)+n(B')=۳۰$$

$$n(U)+n(U)=۳۰\Rightarrow n(U)=۱۵$$

بنابراین $n(C)+n(C')=n(U)=۱۵$.

۱۷۲۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

بنابراین

$$n(A\cup B)+n(A\cap B)=۲n(B)+n(B)\Rightarrow ۲۴=۳n(B)\Rightarrow n(B)=۸$$

۱۷۲۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

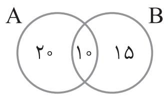
$$۱۶=۲۴-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۸$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$

$$۱۶=n(A-B)+۸+۳\Rightarrow n(A-B)=۱۶-۱۱=۵$$

۱۷۲۸- گزینهٔ ۲ تعداد محصولاتی که هر دو عیب را دارند برابر است با $30-20$، یعنی ۱۰ محصول. تعداد محصولاتی که عیب B را دارند برابر $45-20=25$ است، که ۱۰ تا از آن‌ها عیب A را نیز دارند. پس ۱۵ محصول فقط عیب B را دارند و ۲۰ تا از آن‌ها فقط عیب A را دارند. پس ۳۵ تا از محصولات فقط یک عیب دارند.



۱۷۲۹- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ بینندگان شبکهٔ ۱ را با A و مجموعهٔ بینندگان شبکهٔ ۲ را با B نشان می‌دهیم:

$$n(A)=65,\quad n(B)=45,\quad n(A\cap B)=20$$

در نتیجه $n(A\cup B)=65+45-20=90$. یعنی ۹۰ نفر حداقل یکی از شبکه‌ها را تماشا می‌کنند، پس ۱۰ نفر هیچ‌یک از این دو شبکه را تماشا نمی‌کنند.

۱۷۳۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=3k-1+3-(k-2)=2k+4$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cap B)\le n(B)\Rightarrow k-2\le 3\Rightarrow k\le 5$$

بنابراین $n(A\cup B)=2k+4\le 2\times 5+4=14$.

۱۷۳۱- گزینهٔ ۳ گزینهٔ (۳) ممکن است نادرست باشد. برای مثال، $A=(0,1]$ و $B=[1,2)$ نامتناهی هستند، اما $A\cap B=\{1\}$ متناهی است.

۱۷۳۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $A\cap B=\{3,5\}$، پس

$$(A\cap B)'=\{1,2,4,6\},\quad C\cap(A\cap B)'=\{1,2\}$$

۱۷۳۳- گزینهٔ ۴ ابتدا مجموعه‌های A'، B' و C' را پیدا می‌کنیم:

$$A'=(-\infty,1]\cup(2,+\infty),\quad B'=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty),\quad C'=[0,+\infty)$$

بنابراین $A'-B'=(-1,1]$ و در نتیجه $(A'-B')-C'=(-1,0)$.

۱۷۳۴- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول مجموعهٔ مرجع $\{1,2,3,\dots,9\}$ است، پس $B'=\{1,2,4,6,8,9\}$ و $C=\{2,3,7,8,9\}$. در نتیجه

$$A\cap B'=\{1,6\}\Rightarrow (A\cap B')\cup C=\{1,2,3,6,7,8,9\}$$

$n((A\cap B')\cup C)=7$، بنابراین مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$، هفت عضو دارد.

راه‌حل دوم توجه کنید که

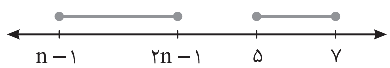
$$A\cap B'=A-B=\{1,6\},\quad C=\{2,3,7,8,9\}$$

بنابراین $(A\cap B')\cup C=\{1,6\}\cup\{2,3,7,8,9\}=\{1,2,3,6,7,8,9\}$.

پس مجموعهٔ $(A\cap B')\cup C$، هفت عضو دارد.

۱۷۳۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید برای اینکه $[n-1,2n-1]$ بازه باشد، باید $n>0$. اگر این دو مجموعه جدا از هم باشند، دو حالت زیر پیش می‌آید:

حالت اول



$$2n-1<5\Rightarrow n<3$$

حالت دوم

$$n-1>7\Rightarrow n>8$$

بنابراین n اعداد طبیعی ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ نمی‌تواند باشد.

۱۷۳۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

پس

$$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=24$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} n(A)+n(B)=24\\ n(A)-n(B)=4\end{cases}\Rightarrow n(B)=10$$

۱۷۳۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow n(A\cup B)=n(B)$$

طبق فرض $n(A\cup B)=9$، پس $n(B)=9$. از طرف دیگر،

$$n(A)+n(A')=n(B)+n(B')\Rightarrow n(A)+14=9+10\Rightarrow n(A)=5$$

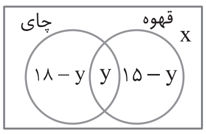
۱۷۳۸- گزینهٔ ۲ فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به هیچ کدام از این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$100-x=85+70-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=55+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد، باید $x=0$، بنابراین حداقل مقدار ممکن $n(A\cap B)$ برابر با ۵۵ است.

۱۷۳۹- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول فرض کنید x نفر نه چای دوست دارند، نه قهوه، بنابراین $30-x$ نفر یا چای دوست دارند یا قهوه و y نفر هم چای و هم قهوه دوست دارند. تعداد کسانی را که چای یا قهوه یا هر دو را دوست دارند در نمودار ون مقابل مشخص کرده‌ایم.



$$x+18-y+y+15-y=30\Rightarrow x=y-3$$

با توجه به اینکه تعداد افراد هیچ گروهی منفی نیست، می‌توان نوشت

$$x\ge 0,\ y\ge 0,\quad 15-y\ge 0\Rightarrow y\le 15\Rightarrow 0\le y\le 15$$

پس

$$0\le y-3\le 12\Rightarrow 0\le x\le 12$$

پس حداکثر ۱۲ نفر نه چای دوست دارند نه قهوه.

راه‌حل دوم فرض کنید A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که چای دوست ندارند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که قهوه دوست ندارند. در این صورت

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

$$=12+15-n(A\cup B)=27-n(A\cup B)$$

از طرف دیگر، $n(A\cup B)\ge n(B)=15$، بنابراین

$$n(A\cap B)=27-n(A\cup B)\le 27-15=12$$

بنابراین حداکثر ۱۲ دانش‌آموز ممکن است که نه چای دوست داشته باشند نه قهوه (توجه کنید که اگر $A\subseteq B$، این وضعیت پیش می‌آید).

۱۷۴۰- گزینهٔ ۳ چون $A\subseteq B$، پس $A\cup B=B$. از طرف دیگر،

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\le n(B)$$

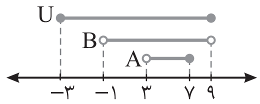
اکنون توجه کنید که $14=n(A)+2n(B)\le n(B)+2n(B)=3n(B)$

و چون $n(B)$ عددی طبیعی است، پس $n(B)\ge 5$. بنابراین

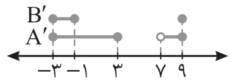
$$n(A\cup B)=n(B)\ge 5$$

۱۷۴۱- گزینهٔ ۲ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که

$$A'=[-۳,۳]\cup(۷,۹],\quad B'=[-۳,-۱]\cup\{۹\}$$

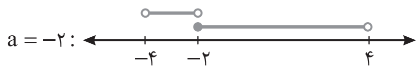


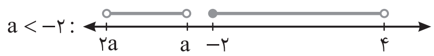
بنابراین از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A'-B'=(-۱,۳]\cup(۷,۹)$.



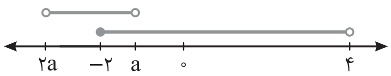
بنابراین، عددهای صحیح در مجموعهٔ $A'-B'$ عبارت‌اند از صفر، ۱، ۲، ۳ و ۸، که مجموعشان می‌شود ۱۴.

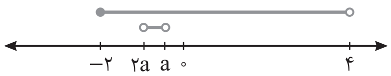
۱۷۴۲- گزینهٔ ۲ چون $(۲a,a)$ یک بازه است، پس $۲a<a$ و در نتیجه $a<۰$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $a\le -۲$ اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(۲a,a)$ تهی است:



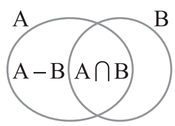


بنابراین $a>-۲$. از روی شکل‌های زیر معلوم است که اگر $-۲<a<۰$ ، اشتراک بازه‌های $[-۲,۴)$ و $(۲a,a)$ تهی نیست.

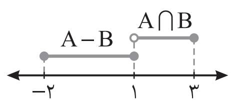




۱۷۴۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ (شکل زیر را ببینید).



از روی شکل زیر معلوم می‌شود که $A=[-۲,۳]$.



۱۷۴۴- گزینهٔ ۳ اگر از مجموعه‌ای نامتناهی تعدادی متناهی عضو حذف کنیم، مجموعه‌ای که به‌دست می‌آید نامتناهی است. پس $B-A$ نامتناهی است. بقیهٔ گزینه‌ها ممکن است متناهی باشند.

گزینهٔ ۱) اگر $U=\mathbb{N}$ ، $A=\{۱\}$ و $B=\{۲,۳,۴,\ldots\}$ ، آن‌گاه

$$A'-B=\varnothing$$

گزینهٔ ۲) چون A متناهی است، پس $A-B'$ نیز متناهی است.

گزینهٔ ۴) اگر $U=\mathbb{N}$ ، $A=\{۱\}$ و $B=\mathbb{N}$ ، آن‌گاه $B'-A'=\varnothing$.

۱۷۴۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} n(A)=۳n(A') \\ n(A)=۱۲ \end{cases} \Rightarrow n(A')=۴$$

در نتیجه،

$$n(U)=n(A)+n(A')=۱۲+۴=۱۶$$

اکنون توجه کنید که

$$n(U)=n(B)+n(B')\Rightarrow ۱۶=n(B)+۷\Rightarrow n(B)=۹$$

۱۷۴۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$n(A)+n(A')=n(U)\xrightarrow{n(A)=n(A')}۲n(A)=۲۶\Rightarrow n(A)=۱۳$$

از طرف دیگر،

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۱۴=۱۳+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(B)-n(A\cap B)=۱\Rightarrow n(B-A)=۱$$

۱۷۴۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$n(A-B)=۲n(B-A)\Rightarrow n(A)-n(A\cap B)=۲n(B)-۲n(A\cap B)$$

$$n(A)=۲n(B)-n(A\cap B)=۲n(B)-۵$$

بنابراین

$$\begin{cases} n(A)=۲n(B)-۵ \\ n(A)=n(B)+۳ \end{cases} \Rightarrow n(A)=۱۱,\ n(B)=۸$$

در نتیجه $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۱+۸-۵=۱۴$.

۱۷۴۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$n(A')=n(U)-n(A)=۲۳-۱۰=۱۳$$

$$n(B')=n(U)-n(B)=۲۳-۷=۱۶$$

اکنون توجه کنید که $n(A'\cap B')\le n(A')=۱۳$.

۱۷۴۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم تعداد دانش‌آموزان کلاس برابر x باشد. همچنین، فرض می‌کنیم A و B به‌ترتیب مجموعهٔ کسانی باشند که به فیزیک و ریاضیات علاقه دارند. در این صورت $n(A)=۰/۶x$ و $n(B)=۰/۷x$. از طرف دیگر، چون هر دانش‌آموز کلاس حداقل به یکی از درس‌های فیزیک یا ریاضی علاقه‌مند است، پس مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس برابر $A\cup B$ است، در نتیجه، $n(A\cup B)=x$. به این ترتیب،

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$x=۰/۶x+۰/۷x-۶\Rightarrow x=۲۰$$

۱۷۵۰- گزینهٔ ۳ فرض کنید A مجموعهٔ علاقه‌مندان به ریاضی و B مجموعهٔ علاقه‌مندان به فیزیک باشد. اگر تعداد کسانی که به این دو درس علاقه‌مند نیستند x باشد، آن‌گاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۱۲۰-x=۱۰۵+۹۵-n(A\cap B)\Rightarrow ۱۲۰-x=۲۰۰-n(A\cap B)$$

پس $n(A\cap B)=۸۰+x$. برای اینکه $n(A\cap B)$ حداقل باشد و با توجه به اینکه $x\ge ۰$ است، باید $x=۰$ ؛ پس حداقل مقدار $n(A\cap B)$ برابر با ۸۰ است.

۱۷۵۱- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۴ چوب کبریت است و هر شکل ۳ چوب کبریت بیشتر از قبلی دارد. پس شکل nاُم دارای $4+3(n-1)$ چوب کبریت است. یعنی $3n+1$ چوب کبریت دارد. پس شکل بیستم ۶۱ چوب کبریت دارد.

۱۷۵۲- گزینهٔ ۳ شکل اول دارای ۵ چوب کبریت است و در هر مرحله ۴ چوب کبریت به شکل مرحلهٔ قبل اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم $5+4(n-1)$ چوب کبریت وجود دارد. یعنی $4n+1$ چوب کبریت در شکل n اُم وجود دارد. پس در شکل پانزدهم، ۶۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۷۵۳- گزینهٔ ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحله nاُم به تعداد $4\times(n-1)$ نقطه به ۵ نقطهٔ شکل (۱) اضافه شده است: $4(n-1)+5=4n+1$، یعنی شکل n اُم، $4n+1$ نقطه دارد. پس شکل دهم ۴۱ نقطه دارد.

۱۷۵۴- گزینهٔ ۱ در شکل nاُم تعداد مثلث‌های رنگ شده برابر است با

$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

برای اینکه بدانیم در کدام شکل ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد، معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم: $\frac{n(n-1)}{2}=36\Rightarrow n^2-n-72=0\Rightarrow(n-9)(n+8)=0$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=9$، یعنی در شکل نهم ۳۶ مثلث رنگ شده وجود دارد.

۱۷۵۵- گزینهٔ ۴ در شکل n اُم، $(n+1)^2$ دایره وجود دارد که $(n+1)$ تای آن رنگ نشده است. پس تعداد دایره‌های رنگی $(n+1)^2-(n+1)$ است که برابر است با n^2+n.

۱۷۵۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_n=3n^2-n+2a_1\xrightarrow{n=1}a_1=3-1+2a_1\Rightarrow a_1=-2$$

بنابراین $a_4=3\times16-4+2(-2)=40$.

۱۷۵۷- گزینهٔ ۳ با حل معادلهٔ $a_n=\frac{1}{80}$ مقدار n را که شمارهٔ جملهٔ مورد نظر است، می‌یابیم:

$$\frac{n^2+1}{81n^2-1}=\frac{1}{80}\Rightarrow 80n^2+80=81n^2-1\Rightarrow n^2=81\Rightarrow n=9$$

بنابراین a_9 برابر $\frac{1}{80}$ است.

۱۷۵۸- گزینهٔ ۲ باید ببینیم نامعادلهٔ $a_n<3/9$ برای کدام مقادیر n درست است:

$$\frac{4n-1}{n+6}<\frac{39}{10}\Rightarrow 40n-10<39n+39\times6\Rightarrow n<244$$

بنابراین $n\le243$، یعنی ۲۴۳ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۳/۹ هستند.

۱۷۵۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$72<a_n<160\Rightarrow 72<n^2+2n-8<160$$

بنابراین

$$n^2+2n-8<160\Rightarrow(n-12)(n+14)<0\Rightarrow1\le n<12\Rightarrow1\le n\le11$$

$$n^2+2n-8>72\Rightarrow(n-8)(n+10)>0\Rightarrow n>8\Rightarrow n\ge9$$

در نتیجه n می‌تواند عددهای ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد.

۱۷۶۰- گزینهٔ ۱ عدد آخر دستهٔ اول ۵، عدد آخر دستهٔ دوم 3×5، عدد آخر دستهٔ سوم 5×5، ... و عدد آخر دستهٔ nاُم برابر $5\times(2n-1)$ است. پس عدد آخر دستهٔ چهل‌ونهم $5\times(2\times49-1)=485$ است. پس عدد اول دستهٔ پنجاهم، برابر ۴۸۷ خواهد بود.

۱۷۶۱- گزینهٔ ۳ شکل اول ۴ چوب کبریت دارد و برای ساختن هر شکل، ۹ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه می‌شود. پس در شکل nاُم، $4+9(n-1)$ یعنی $9n-5$ چوب کبریت وجود دارد. بنابراین در شکل چهاردهم ۱۲۱ چوب کبریت وجود دارد.

۱۷۶۲- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول تعداد نقاط شکل‌ها را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	...	n
تعداد نقاط	$1+3+1$	$2+4+2$	$3+5+3$	...	$n+(n+2)+n$

بنابراین در شکل nاُم، $3n+2$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

راه‌حل دوم اگر ۴ نقطه به چهار گوشهٔ شکل‌ها اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل nاُم برابر $3(n+2)$ خواهد بود. پس در شکل nاُم، $3(n+2)-4$ نقطه داریم. یعنی در شکل بیستم ۶۲ نقطه داریم.

۱۷۶۳- گزینهٔ ۳ تعداد مربع‌های رنگ‌شده در شکل nاُم برابر است با

$$1+2+3+\cdots+n$$

تعداد مربع‌های رنگ‌نشده در شکل nاُم برابر است با $0+1+2+\cdots+(n-1)$.
بنابراین تعداد مربع‌های رنگ شده در شکل nاُم، n تا بیشتر از تعداد مربع‌های رنگ نشدهٔ آن است. پس در شکل سی‌اُم، اختلاف مربع‌های رنگ‌شده و رنگ‌نشده برابر ۳۰ تا است.

۱۷۶۴- گزینهٔ ۲ تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

تعداد گوی‌های رنگی در شکل nاُم برابر است با

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین نسبت تعداد گوی‌های رنگی به تعداد کل گوی‌ها در شکل nاُم برابر است با $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\frac{n-1}{2n}$. به این ترتیب $\frac{n-1}{2n}=\frac{8}{17}$. پس $n=17$.

۱۷۶۵- گزینهٔ ۲ با توجه به الگو، در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها زوج است، نصف تعداد گوی‌ها یعنی $\frac{n^2}{2}$ رنگ می‌شود. در شکل‌هایی که شمارهٔ آن‌ها فرد است، تعداد گوی‌ها نیز فرد است. اگر گوی وسطی را کنار بگذاریم تعداد گوی‌ها n^2-1 خواهد بود که نصف آن‌ها را رنگ می‌کنیم و سپس گوی وسطی را نیز رنگ می‌کنیم. پس $\frac{n^2-1}{2}+1$ گوی رنگ می‌شود. توجه کنید که اگر n عددی زوج باشد، $\frac{n^2}{2}$ نیز عددی زوج است. پس در شکل‌های با شمارهٔ زوج، تعداد گوی‌های رنگ شده زوج است و در شکل‌هایی با شمارهٔ فرد، تعداد گوی‌های رنگ شده فرد است. چون ۱۱۳ گوی رنگی در شکل nاُم وجود دارد، پس n باید فرد باشد. بنابراین

$$\frac{n^2-1}{2}+1=113\Rightarrow n^2-1=224\Rightarrow n^2=225\Rightarrow n=15$$

۱۷۶۶- گزینهٔ ۳ چون همهٔ جمله‌های دنباله با هم برابرند، پس جمله‌های اول و دوم آن نیز با هم برابرند:

$$a_1=a_2\Rightarrow \frac{2-k}{8}=\frac{4-k}{13}\Rightarrow 26-13k=32-8k\Rightarrow 5k=-6\Rightarrow k=-\frac{6}{5}$$

توجه کنید که اگر $k=-\frac{6}{5}$، آن‌گاه $a_n=\frac{2}{5}$.

۱۷۶۷- گزینهٔ ۲ چند جملهٔ اول هر کدام از دنباله‌ها به شکل زیر است:

گزینهٔ (۱) $2,3,4,5,\dots$ گزینهٔ (۲) $2,3,10,15,\dots$

گزینهٔ (۳) $2,3,10,23,\dots$ گزینهٔ (۴) $2,3,8,17,\dots$

بنابراین فقط $n^2-(-1)^n$ می‌تواند جملهٔ عمومی دنباله باشد.

۱۷۶۸- گزینهٔ ۲ به چند جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},\quad a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

بنابراین با توجه به الگوی جملات می‌توان گفت $a_n=\frac{1}{n}$، پس $a_{100}=\frac{1}{100}$.

۱۷۶۹- گزینهٔ ۴ بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم $y=-3x^2+12x+c$ به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{-6}=2$ به‌دست می‌آید. بنابراین بزرگ‌ترین جملهٔ دنبالهٔ مورد نظر برابر a_2 است. در نتیجه

$$a_2=8\Rightarrow -3\times4+12\times2+c=8\Rightarrow c=-4$$

۱۷۷۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a_1=\log_2\frac{1}{2},\quad a_2=\log_2\frac{2}{3},\quad a_3=\log_2\frac{3}{4},\quad \dots$$

بنابراین مجموع n جملهٔ اول دنباله به‌صورت زیر است:

$$S_n=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{n-1}{n}+\log_2\frac{n}{n+1}$$

$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}\right)=\log_2\frac{1}{n+1}=-\log_2(n+1)$$

بنابراین

$$-\log_2(n+1)=-3\Rightarrow n+1=2^3=8\Rightarrow n=7$$

۱۷۷۱- گزینهٔ ۳ چون $a_{n+1}-a_n=-2$، پس دنبالهٔ مورد نظر دنباله‌ای حسابی است که قدرنسبت آن -2 است. چون جملهٔ اول برابر ۳ است، پس

$$a_{10}=a_1+9d=3+9(-2)=-15,\quad a_5=a_1+4d=3+4(-2)=-5$$

بنابراین $\frac{a_{10}}{a_5}=\frac{-15}{-5}=3$.

۱۷۷۲- گزینهٔ ۲ از رابطهٔ داده شده به‌دست می‌آید

$$3(a_1+3d)+4(a_1+4d)-7(a_1+8d)=124$$

پس $-31d=124$ و در نتیجه $d=-4$.

۱۷۷۳- گزینهٔ ۴ قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$3x-4-(3x-1)=-3$$

بنابراین

$$4x-2=(3x-4)-3\Rightarrow x=-5$$

بنابراین جملهٔ سوم دنباله برابر است با $4(-5)-2=-22$ و جملهٔ چهارم برابر است با $-22-3=-25$.

۱۷۷۴- گزینهٔ ۲ چون $a_1=-1$ و $d=2-(-1)=3$، پس

$$a_n=-1+3(n-1)$$

یعنی $a_n=3n-4$. بنابراین $a_k=3k-4=218$، پس $k=74$.

۱۷۷۵- گزینهٔ ۲ چون $a_1=2$ و $d=4$، پس جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $a_n=2+4(n-1)=4n-2$ است. برای اینکه جمله‌ها کوچک‌تر از ۵۰۰ باشند، باید $a_n<500$ باشد. یعنی

$$4n-2<500\Rightarrow n<\frac{502}{4}\Rightarrow n\le125$$

پس ۱۲۵ جملهٔ اول دنباله کمتر از ۵۰۰ هستند.

۱۷۷۶- گزینهٔ ۲ اندازهٔ زاویه‌های مثلث را به‌صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. مجموع اندازهٔ زاویه‌های مثلث برابر 180° است. پس

$$a-d+a+a+d=180^\circ\Rightarrow a=60^\circ$$

میانگین اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث همان a است که برابر 60° است.

۱۷۷۷- گزینهٔ ۴ زاویه‌های پنج‌ضلعی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$$

در نتیجه، چون مجموع اندازهٔ زاویه‌های پنج‌ضلعی برابر 540° است، پس

$$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=540^\circ$$

بنابراین $5a=540^\circ$ و در نتیجه $a=108^\circ$. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه 86° است، پس $a-2d=86^\circ$ و در نتیجه $d=11^\circ$. پس اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه یعنی $a+2d$ برابر است با $108^\circ+2\times11^\circ=130^\circ$.

۱۷۷۸- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول چون $a_1=\sqrt{3}-5$ و $a_6=\sqrt{3}+5$، پس

$$a_6=a_1+5d\Rightarrow\sqrt{3}+5=\sqrt{3}-5+5d\Rightarrow d=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، عدد $\sqrt{3}-5+2$ یا همان $\sqrt{3}-3$ است.

راه‌حل دوم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر است با

$$d=\frac{(\sqrt{3}+5)-(\sqrt{3}-5)}{4+1}=\frac{10}{5}=2$$

بنابراین کوچک‌ترین عددی که نوشته‌ایم، برابر است با

$$(\sqrt{3}-5)+2=\sqrt{3}-3$$

۱۷۷۹- گزینهٔ ۴ سه جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-d+a+a+d=15\Rightarrow 3a=15\Rightarrow a=5$$

از طرف دیگر،

$$(a-d)\times a\times(a+d)=45\Rightarrow a(a^2-d^2)=45$$

چون $a=5$، پس

$$5(25-d^2)=45\Rightarrow d^2=16\Rightarrow d=\pm4$$

۱۷۸۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر d باشد. در این صورت

$$a_1=d,\quad a_n=a_1+(n-1)d=d+(n-1)d=nd$$

به این ترتیب

$$a_1a_2a_3\dots a_9=10^8\times10!\Rightarrow d(2d)(3d)\cdots(9d)=10^8\times10!$$

$$d^9\times9!=10^9\times9!\Rightarrow d=10$$

بنابراین $a_{10}=10d=100$.

۱۷۸۱- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول با قرار دادن $n=۱$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۱=۱$. با قرار دادن $n=۲$ در جملهٔ عمومی به‌دست می‌آید $a_۲=\frac{۱}{۳}$.

بنابراین $d=a_۲-a_۱=-\frac{۲}{۳}$. پس $a_۱-d=۱+\frac{۲}{۳}=\frac{۵}{۳}$.

راه‌حل دوم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول $a_۱$ به‌صورت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ است، بنابراین $a_n=dn+(a_۱-d)=-\frac{۲}{۳}n+\frac{۵}{۳}$. پس

$$a_۱-d=\frac{۵}{۳}$$

۱۷۸۲- گزینهٔ ۲ از $a_۱+a_۳=۱۶$ نتیجه می‌شود

$$a_۱+a_۱+۲d=۱۶\Rightarrow a_۱+d=۸$$

چون $a_۲+a_۵+a_۸=۵۱$، پس

$$a_۱+d+a_۱+۴d+a_۱+۷d=۵۱\Rightarrow ۳a_۱+۱۲d=۵۱$$

از حل دستگاه $\begin{cases} a_۱+d=۸ \\ ۳a_۱+۱۲d=۵۱ \end{cases}$ به‌دست می‌آید $d=۳$.

۱۷۸۳- گزینهٔ ۱ چون دنباله حسابی است، پس

$$۲a-۱=\frac{a+۱-۳a}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $d=(۲a-۱)-a=a-۱=-\frac{۱}{۲}$. پس جملهٔ عمومی دنباله به شکل زیر است:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_n=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(n-۱)=۱-\frac{n}{۲}$$

۱۷۸۴- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c-(a+b)=(b+c)-(a+c)\Rightarrow c-b=b-a$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

راه‌حل دوم چون $a+b, a+c, b+c$ دنباله‌ای حسابی است، پس

$$a+c=\frac{a+b+b+c}{۲}\Rightarrow ۲(a+c)=a+۲b+c\Rightarrow a+c=۲b$$

در نتیجه a, b, c دنباله‌ای حسابی است.

۱۷۸۵- گزینهٔ ۳ جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت زیر است

$$a_n=۱۹۶-۴(n-۱)=۲۰۰-۴n$$

بنابراین $a_{۵۰}=۰$، در نتیجه، چون قدرنسبت دنباله برابر -۴ است، پس

$$a_{۴۷}=۱۲,\quad a_{۴۸}=۸,\quad a_{۴۹}=۴,\quad a_{۵۰}=۰$$

۱۷۸۶- گزینهٔ ۲ ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d=\frac{a_{۱۰}-a_۲}{۱۰-۲}=-\frac{۳۲}{۸}=-۴$$

بنابراین $a_۴=a_۱+۳d=a_۱-۱۲=۱۵$ و در نتیجه $a_۱=۲۷$. بنابراین جملهٔ عمومی دنباله می‌شود $a_n=۲۷-۴(n-۱)=۳۱-۴n$. اکنون توجه کنید که

$$a_n>۰\Rightarrow ۳۱-۴n>۰\Rightarrow n\le ۷$$

بنابراین هفت جملهٔ نخست دنباله مثبت هستند.

۱۷۸۷- گزینهٔ ۲ چون $x^۲-۸x+۱۲=(x-۶)(x-۲)$، پس جواب‌های معادلهٔ مورد نظر a، ۲ و ۶ هستند. حالت‌های مختلفی که این سه عدد دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، در زیر آمده است (توجه کنید که عدد وسط میانگین حسابی دو عدد دیگر است):

$$۲,۶,a\Rightarrow\frac{۲+a}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰,\quad ۶,۲,a\Rightarrow\frac{۶+a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲$$

$$۲,a,۶\Rightarrow\frac{۲+۶}{۲}=a\Rightarrow a=۴,\quad ۶,a,۲\Rightarrow\frac{۶+۲}{۲}=a\Rightarrow a=۴$$

$$a,۲,۶\Rightarrow\frac{a+۶}{۲}=۲\Rightarrow a=-۲,\quad a,۶,۲\Rightarrow\frac{a+۲}{۲}=۶\Rightarrow a=۱۰$$

بنابراین a ممکن است سه مقدار مختلف داشته باشد.

۱۷۸۸- گزینهٔ ۳ اضلاع مثلث را $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس،

$$(a-d)^۲+a^۲=(a+d)^۲\Rightarrow a^۲+d^۲-۲ad+a^۲=a^۲+d^۲+۲ad$$

$$a^۲=۴ad\Rightarrow a=۴d$$

چون وتر بلندترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس طول ضلع‌های زاویهٔ قائمه a و $a-d$ است، در نتیجه نسبت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a}{a-d}=\frac{۴d}{۴d-d}=\frac{۴d}{۳d}=\frac{۴}{۳}$$

۱۷۸۹- گزینهٔ ۳ چهار جملهٔ متوالی دنباله را به‌صورت $a-۳d, a-d, a+d, a+۳d$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$a-۳d+a-d+a+d+a+۳d=۰\Rightarrow ۴a=۰\Rightarrow a=۰$$

پس دنباله به‌صورت $-۳d, -d, d, ۳d$ است و

$$۹d^۲+d^۲+d^۲+۹d^۲=۸۰\Rightarrow d^۲=۴$$

بنابراین، حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد برابر است با

$$(۳d)(-۳d)=-۹d^۲=-۳۶$$

۱۷۹۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که m باید عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد. پس $m^۲+۴<m^۲+۳m+۴$.

اگر $m-۱$ عدد بین عددهای داده شده درج کنیم، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ حاصل، برابر است با

$$d=\frac{m^۲+۳m+۴-m^۲-۴}{(m-۱)+۱}=\frac{۳m}{m}=۳$$

۱۷۹۱- گزینهٔ ۱ دنبالهٔ a_n، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه

$$a_۳=a_۱r^۲\Rightarrow a_۳=a_۱(\frac{۳}{۲})^۲=۳\Rightarrow a_۱=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین $a_{۲۹}=a_۱(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۴}{۳}\times(\frac{۳}{۲})^{۲۸}=\frac{۳^{۲۷}}{۲^{۲۶}}$.

۱۷۹۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\sqrt[۴]{۲}$ واسطهٔ هندسی $\sqrt{a}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ است، پس

$$(\sqrt[۴]{۲})^۲=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}=\sqrt{a}\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}$$

از طرف دیگر، قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}}$، در نتیجه

$$a_{۱۳}=a_۱r^{۱۲}=\sqrt{a}(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۲}})^{۱۲}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}(\frac{۲^۴}{۲^۳})=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}\times۲=\frac{\sqrt[۶]{۲^۳}}{\sqrt[۶]{۲^۲}}(۲)=۲\sqrt[۶]{۲}$$

۱۷۹۳- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم جواب‌های معادله $x_۱$ و $x_۲$ باشند. در این صورت

$$\frac{x_۱+x_۲}{۲}=۴/۵\Rightarrow x_۱+x_۲=۹\ ,\qquad \sqrt{x_۱x_۲}=۱/۵=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x_۱x_۲=\frac{۹}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل $x^۲-۹x+\frac{۹}{۴}=۰$ است که اگر طرفین آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $۴x^۲-۳۶x+۹=۰$.

۱۷۹۴- گزینهٔ ۳ از تساوی $a_۱a_۶=۲۷$ نتیجه می‌شود

$$a_۱\times a_۱r^۵=۲۷\Rightarrow a_۱^۲r^۵=۲۷$$

از تساوی $a_۲a_۴=۹$ به‌دست می‌آید

$$a_۱r\times a_۱r^۳=۹\Rightarrow a_۱^۲r^۴=۹$$

از تقسیم طرفین دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$\frac{a_۱^۲r^۵}{a_۱^۲r^۴}=\frac{۲۷}{۹}\Rightarrow r=۳$$

با جای‌گذاری $r=۳$ در یکی از رابطه‌ها نتیجه می‌شود $a_۱=\pm\frac{۱}{۳}$. چون جملات دنباله مثبت هستند، پس $a_۱=\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه $a_۵=a_۱r^۴=\frac{۱}{۳}\times۳^۴=۲۷$.

۱۷۹۵- گزینهٔ ۲ مجموع جملات پنجم و هشتم برابر است با

$$a_۵+a_۸=a_۱r^۴+a_۱r^۷=a_۱r^۴(۱+r^۳)$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با

$$a_۷+a_۸=a_۱r^۶+a_۱r^۷=a_۱r^۶(۱+r)$$

بنابراین $\frac{a_۵+a_۸}{a_۷+a_۸}=\frac{a_۱r^۴(۱+r^۳)}{a_۱r^۶(۱+r)}=\frac{۱+r^۳}{r^۲(۱+r)}=\frac{۱-\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۴}(۱-\frac{۱}{۲})}=۷$.

۱۷۹۶- گزینهٔ ۳ این جملات را به‌صورت $\frac{a}{r^۲},\frac{a}{r},a,ar,ar^۲$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\frac{a}{r^۲}\times\frac{a}{r}\times a\times ar\times ar^۲=۱۰۲۴\Rightarrow a^۵=۲^{۱۰}=۴^۵$$

در نتیجه جملهٔ وسط برابر ۴ است.

۱۷۹۷- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** این اعداد به شکل زیر هستند:

$$\sqrt{۲},\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,۱۶\sqrt{۲}$$

پس $a_۱=\sqrt{۲}$ و $a_۹=۱۶\sqrt{۲}$. بنابراین

$$a_۱r^۸=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}r^۸=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow r^۸=۱۶\Rightarrow(r^۲)^۴=۲^۴\Rightarrow r^۲=۲$$

در نتیجه $a_۳=a_۱r^۲=۲\sqrt{۲}$.

راه‌حل دوم ابتدا قدرنسبت دنبالهٔ هندسی حاصل را به دست می‌آوریم:

$$r^{۷+۱}=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow r^۸=۱۶=۲^۴\Rightarrow r=\pm\sqrt{۲}$$

$$a_۳=a_۱r^۲=\sqrt{۲}\times(\pm\sqrt{۲})^۲=۲\sqrt{۲}$$

۱۷۹۸- گزینهٔ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ حسابی برابر است با $-\frac{۹۵}{۸}-(-۱۲)=\frac{۱}{۸}$. بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت $a_n=-۱۲+\frac{۱}{۸}(n-۱)$ است.

در نتیجه جملهٔ هشتادونهم این دنباله برابر است با $a_{۸۹}=-۱۲+\frac{۱}{۸}\times(۸۹-۱)=-۱$. اگر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را با r نشان دهیم، آن‌گاه $(۳r)^۵=۲۴۳r^۵=$ جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی. بنابراین

$$(۳r)^۵=-۱\Rightarrow ۳r=-۱\Rightarrow r=-\frac{۱}{۳}$$

۱۷۹۹- گزینهٔ ۱ چون ۸ واسطهٔ حسابی عددهای a و b است، پس

$$a+b=۱۶\Rightarrow b=۱۶-a$$

اگر ۴ واحد به b اضافه کنیم، ۸ واسطهٔ هندسی عددهای a و $b+۴$ می‌شود. بنابراین $۶۴=a(b+۴)=a(۱۶-a+۴)=۲۰a-a^۲$.

پس $a^۲-۲۰a+۶۴=۰$ و مجموع مقادیر ممکن a برابر مجموع جواب‌های این معادله، یعنی برابر ۲۰ است (توجه کنید در این معادله $\Delta>۰$).

۱۸۰۰- گزینهٔ ۴ جملات دوم، ششم و چهاردهم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب به‌صورت $a+d$، $a+۵d$ و $a+۱۳d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+۵d)^۲=(a+d)(a+۱۳d)\Rightarrow ۱۲d^۲=۴ad\Rightarrow a=۳d$$

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با $r=\frac{a+۵d}{a+d}=\frac{۳d+۵d}{۳d+d}=\frac{۸d}{۴d}=۲$.

۱۸۰۱- گزینهٔ ۲ چون $\frac{a_۸}{a_۶}=\sqrt{۲}$، پس $\frac{a_۱r^۷}{a_۱r^۵}=\sqrt{۲}$. در نتیجه $r^۲=\sqrt{۲}$. بنابراین $\frac{a_۷}{a_۳}=\frac{a_۱r^۶}{a_۱r^۲}=r^۴=(r^۲)^۲=\sqrt{۲}^۲=۲$.

۱۸۰۲- گزینهٔ ۳ چون $۴^{۳x}$ واسطهٔ هندسی $۲^{x-۴}$ و $۸^{۲-۳x}$ است، پس

$$(۴^{۳x})^۲=۲^{x-۴}\times۸^{۲-۳x}\Rightarrow ۲^{۱۲x}=۲^{x-۴}\times۲^{۶-۹x}\Rightarrow ۲^{۱۲x}=۲^{۲-۸x}$$

بنابراین $۱۲x=۲-۸x$، یعنی $x=\frac{۱}{۱۰}$.

۱۸۰۳- گزینهٔ ۲ قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با

$$r=\frac{\log_{۱۶}a}{\log_۴ a}=\frac{\frac{\log a}{\log ۱۶}}{\frac{\log a}{\log ۴}}=\frac{\log ۴}{\log ۱۶}=\frac{\log ۴}{۲\log ۴}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$a_۷=a_۱r^۶\Rightarrow\frac{۱}{۳۲}=\log_۴ a\times\frac{۱}{۶۴}\Rightarrow\log_۴ a=۲\Rightarrow a=۴^۲=۱۶$$

۱۸۰۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_۵-a_۱=۱۳۰\Rightarrow a_۱r^۴-a_۱=۱۳۰\Rightarrow a_۱(r^۴-۱)=۱۳۰$$

$$a_۴-a_۲=۲۵\Rightarrow a_۱r^۳-a_۱r=۲۵\Rightarrow a_۱r(r^۲-۱)=۲۵$$

اگر این دو تساوی را بر هم تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{r^۴-۱}{r(r^۲-۱)}=\frac{۱۳۰}{۲۵}\Rightarrow\frac{(r^۲-۱)(r^۲+۱)}{r(r^۲-۱)}=\frac{۲۶}{۵}\Rightarrow\frac{r^۲+۱}{r}=\frac{۲۶}{۵}$$

$$۵(r^۲+۱)=۲۶r\Rightarrow ۵r^۲-۲۶r+۵=۰\Rightarrow r=۵\ ,\ r=\frac{۱}{۵}\ (\text{غ.ق.})$$

به این ترتیب، $a_۱r(r^۲-۱)=۲۵\Rightarrow a_۱\times۵\times۲۴=۲۵\Rightarrow a_۱=\frac{۵}{۲۴}$

در نتیجه $a_۲=a_۱r=\frac{۲۵}{۲۴}$.

۱۸۰۵- گزینهٔ ۳ در حالتی که پنج واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r^6=\frac{b}{a}$.

در حالتی که چهار واسطهٔ هندسی درج می‌کنیم، $r'^5=(2r)^5=\frac{b}{a}$. بنابراین

$$r^6=(2r)^5\Rightarrow r^6=32r^5\Rightarrow r=32$$

۱۸۰۶- گزینهٔ ۳ این سه عدد را به‌صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم.

پس
$$\frac{a}{r}\times a\times ar=64\Rightarrow a^3=64\Rightarrow a=4$$

از طرف دیگر،

$$\frac{a}{r}+a+ar=14\Rightarrow a\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=14$$

$$4\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=14\Rightarrow 2r^2-5r+2=0\Rightarrow r=\frac{1}{2}, r=2$$

بنابراین سه جملهٔ مورد نظر به ازای $r=\frac{1}{2}$، به‌صورت ۸,۴,۲ و به ازای $r=2$، به‌صورت ۲,۴,۸ هستند. در هر دو حالت اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این اعداد برابر ۶ است.

۱۸۰۷- گزینهٔ ۲ طول اضلاع مثلث را a، ar و ar^2 در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ فیثاغورس، $a^2+(ar)^2=(ar^2)^2$. بنابراین

$$a^2(1+r^2)=a^2r^4\Rightarrow r^4-r^2-1=0\Rightarrow r^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

۱۸۰۸- گزینهٔ ۱ تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است. بنابراین

$$\begin{cases}2y+x=2x+y\Rightarrow y=x\\ 2y+x=x+4\Rightarrow 2y=4\Rightarrow y=2\end{cases}$$

پس $x=y=2$، بنابراین $x+2y=6$.

۱۸۰۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a_3=a-3,\quad a_5=a-5,\quad a_6=a-6$$

بنابر فرض، $(a-5)^2=(a-3)(a-6)$. بنابراین

$$a^2-10a+25=a^2-9a+18\Rightarrow a=7$$

در نتیجه $a_{10}=7-10=-3$.

۱۸۱۰- گزینهٔ ۳ جملات سوم، پنجم و هشتم دنبالهٔ حسابی را به‌ترتیب $a+2d$، $a+4d$ و $a+7d$ در نظر می‌گیریم. چون این جملات یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس

$$(a+4d)^2=(a+2d)(a+7d)\Rightarrow 2d^2=ad\Rightarrow a=2d$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی به‌صورت $4d, 6d, 9d, \dots$ است که جملهٔ چهارم آن $\frac{27}{2}d$ است زیرا $r=\frac{3}{2}$ و $9d\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2}d$. همچنین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به‌صورت زیر است:

$$a_n=a+(n-1)d=2d+(n-1)d=(n+1)d$$

به این ترتیب $a_{12}=13d$ و نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{27}{2}d}{13d}=\frac{27}{26}$.

۱۸۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_9+4=3a_7\Rightarrow a_1+8d+4=3(a_1+6d)\Rightarrow 4=2a_1+10d$$

چون $d=-3$، پس $a_1=17$. بنابراین

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\Rightarrow S_{12}=\frac{12}{2}(2\times17+11\times(-3))=6$$

۱۸۱۲- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول مجموع شش جملهٔ نخست دنبالهٔ مورد نظر برابر است با $3(200+5d)$. شش جملهٔ بعدی، یعنی جمله‌های a_7، a_8، ... و a_{12} دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول a_7 و قدرنسبت d تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع آن‌ها برابر است با

$$3(2a_7+5d)=3(200+12d+5d)=3(200+17d)$$

به این ترتیب، با توجه به فرض،

$$3(200+5d)=5(3(200+17d))\Rightarrow 200+5d=1000+85d\Rightarrow d=-10$$

راه‌حل دوم مجموع شش جملهٔ دوم برابر اختلاف مجموع دوازده جملهٔ اول و شش جملهٔ اول است. طبق فرض،

$$S_6=5(S_{12}-S_6)=5S_{12}-5S_6\Rightarrow 6S_6=5S_{12}$$

بنابراین

$$6\times3\times(2a_1+5d)=5\times6\times(2a_1+11d)\Rightarrow 6a_1+15d=10a_1+55d$$

$$-4a_1=40d\Rightarrow d=-\frac{1}{10}a_1=-\frac{1}{10}(100)=-10$$

۱۸۱۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$d=\frac{a_{21}-a_{15}}{a_{27}-a_{19}}=\frac{a_1+20d-(a_1+14d)}{a_1+26d-(a_1+18d)}=\frac{6d}{8d}=\frac{3}{4}$$

بنابراین قدرنسبت دنباله برابر $\frac{3}{4}$ است. از طرف دیگر،

$$a_5=13\Rightarrow a_1+4d=13\Rightarrow a_1=13-4\times\frac{3}{4}=13-3=10$$

به این ترتیب $S_{17}=\frac{17}{2}(2\times10+16\times\frac{3}{4})=272$.

۱۸۱۴- گزینهٔ ۴

$$S_1=a_1=4-3=1$$

$$S_2=a_1+a_2=4\times2^2-3\times2=10\xrightarrow{a_1=1}a_2=9$$

پس

$$d=a_2-a_1=9-1=8$$

بنابراین جملهٔ عمومی این دنباله برابر است با

$$a_n=1+(n-1)\times8=8n-7$$

۱۸۱۵- گزینهٔ ۱ فرض کنید بین عددهای a و b تعداد $2n$ واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. به این ترتیب، دنباله‌ای حسابی با $2n+2$ جمله داریم که جمله‌های اول و آخر آن a و b هستند و مجموع جمله‌های آن برابر است با $\frac{2n+2}{2}(a+b)=\frac{13}{6}(n+1)$. اکنون توجه کنید که مجموع $2n$ واسطه‌ای که درج کرده‌ایم برابر است با $\frac{13}{6}(n+1)-(a+b)$، که بنابر فرض برابر است با $2n+1$، یعنی

$$\frac{13}{6}(n+1)-\frac{13}{6}=2n+1\Rightarrow 13n+13-13=12n+6\Rightarrow n=6$$

۱۸۱۶- گزینهٔ ۲ جملهٔ اول دنباله $a_1=\sqrt{2}$ و قدرنسبت دنباله $q=2$ است. پس $S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{\sqrt{2}(2^{10}-1)}{2-1}=1023\sqrt{2}$.

۱۸۱۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=a_1(1+q+q^2)$$

بنابراین

$$104=8(1+q+q^2)\Rightarrow q^2+q-12=0$$

$$(q+4)(q-3)=0\Rightarrow q=-4,\ q=3\ \text{(غ.ق.)}$$

۱۸۱۸- گزینهٔ ۳ مجموع سمت چپ معادله را حساب می‌کنیم:

$$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+\cdots+2^{x+5}=2^x(1+2^1+2^2+\cdots+2^5)$$

$$=2^x\left(\frac{2^6-1}{2-1}\right)=2^x\times 63$$

بنابراین معادله به‌صورت $2^x\times 63=504$ است و در نتیجه

$$2^x=\frac{504}{63}=8=2^3\Rightarrow x=3$$

۱۸۱۹- گزینهٔ ۱ جملهٔ اول دنباله ۶ و قدرنسبت آن $\frac{1}{2}$ است. بنابراین مجموع n جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{6((\frac{1}{2})^n-1)}{\frac{1}{2}-1}=12(1-(\frac{1}{2})^n)$$

در نتیجه

$$S_n>\frac{248}{21}\Rightarrow 12(1-(\frac{1}{2})^n)>\frac{248}{21}\Rightarrow(\frac{1}{2})^n<\frac{1}{63}\Rightarrow n\geq 6$$

۱۸۲۰- گزینهٔ ۱ اگر مساحت مثلث اولیه برابر S باشد، در مرحلهٔ اول $\frac{3}{4}S$ و در مرحلهٔ دوم $\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}S$ رنگ می‌شود و همین‌طور ادامه می‌یابد.

بنابراین مساحت قسمت‌های رنگ شده دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ است. بنابراین

$$\frac{3}{4}S+\frac{1}{4}(\frac{3}{4}S)+(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4}S)+\cdots+(\frac{1}{4})^{n-1}(\frac{3}{4}S)>\frac{999}{1000}S$$

$$\frac{3}{4}S\left(\frac{(\frac{1}{4})^n-1}{\frac{1}{4}-1}\right)>\frac{999}{1000}S\Rightarrow 1-\frac{1}{4^n}>\frac{999}{1000}\Rightarrow\frac{1}{4^n}<\frac{1}{1000}\Rightarrow n\geq 5$$

۱۸۲۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\Rightarrow 120=\frac{n}{2}(-6+30)\Rightarrow n=10$$

۱۸۲۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با

$$\frac{n-3}{2n}-\frac{n-2}{2n}=-\frac{1}{2n}$$

بنابراین مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ مورد نظر برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}\left(\frac{n-2}{n}-\frac{1}{2n}(n-1)\right)=\frac{n}{2}\left(\frac{n-3}{2n}\right)=\frac{n-3}{4}$$

راه‌حل دوم به‌ازای $n=1$، سه جملهٔ اول دنباله $-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2}$ هستند. مجموع n جملهٔ نخست دنباله همان جملهٔ اول، یعنی $-\frac{1}{2}$ است. فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $n=1$ برابر $-\frac{1}{2}$ است.

۱۸۲۳- گزینهٔ ۳ مجموع n جملهٔ نخست دنباله برابر است با

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

چون $a_1=50$ و $d=-4$، پس

$$S_n=\frac{n}{2}(100-4(n-1))=52n-2n^2$$

حداکثر مقدار عبارت درجهٔ دوم $-2n^2+52n$ به ازای $n=\frac{52}{4}=13$ به‌دست می‌آید، پس بیشترین مقدار بین S_nها برابر است با

$$S_{13}=338$$

۱۸۲۴- گزینهٔ ۱ اگر جملهٔ اول دنباله a_1 و قدرنسبت آن d باشد، آن‌گاه

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9d)=10a_1+45d$$

اگر ۲ واحد از قدرنسبت کم کنیم و k واحد به جملهٔ اول اضافه کنیم، مجموع ده جملهٔ اول می‌شود

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2(a_1+k)+9(d-2))=10a_1+10k+45d-90$$

چون قرار است مجموع ده جملهٔ اول ثابت بماند، پس باید

$$10k-90=0\Rightarrow k=9$$

۱۸۲۵- گزینهٔ ۳ مجموع سمت چپ معادله، مجموع جملات دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت ۳ است. فرض کنید تعداد عددهای سمت چپ معادله n باشد. در این صورت

$$\frac{n}{2}(2+3(n-1))=145\Rightarrow 3n^2-n-290=0$$

$$(n-10)(3n+29)=0\Rightarrow n=10,\ n=-\frac{29}{3}\ \text{(غ.ق.)}$$

بنابراین جملهٔ دهم دنباله برابر x است و $x=a_{10}=a_1+9d=1+27=28$.

۱۸۲۶- گزینهٔ ۱ مجموع n جملهٔ نخست برابر است با

$$S_n=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}=a_1(2^n-1)=a_1 2^n-a_1=2(a_1 2^{n-1})-a_1=2a_n-a_1$$

۱۸۲۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a_2=3\Rightarrow a_1q=3,\quad a_7=96\Rightarrow a_1q^6=96$$

در نتیجه

$$\frac{a_1q}{a_1q^6}=\frac{3}{96}\Rightarrow q^5=32\Rightarrow q=2$$

بنابراین $a_1=\frac{3}{q}=\frac{3}{2}$، پس

$$S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{3}{2}\times\frac{2^{10}-1}{2-1}=\frac{3}{2}(2^{10}-1)=\frac{3069}{2}$$

۱۸۲۸- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a,aq,aq^۲,\dots$ برابر است با $S_n=\frac{a(q^n-۱)}{q-۱}$. مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $a,\frac{a}{q},\frac{a}{q^۲},\dots$ برابر است با

$$S'_n=\frac{a((\frac{۱}{q})^n-۱)}{\frac{۱}{q}-۱}=\frac{\frac{a(۱-q^n)}{q^n}}{\frac{۱-q}{q}}=\frac{aq(۱-q^n)}{(۱-q)q^n}=\frac{a(q^n-۱)}{q^{n-۱}(q-۱)}$$

بنابراین

$$\frac{S_n}{S'_n}=\frac{\frac{a(q^n-۱)}{q-۱}}{\frac{a(q^n-۱)}{q^{n-۱}(q-۱)}}=q^{n-۱}$$

راه‌حل دوم کافی است $n=۱$ را در نظر بگیریم و نسبت جملهٔ اول دنبالهٔ اول به جملهٔ اول دنبالهٔ دوم را به‌دست آوریم که ۱ می‌شود. فقط مقدار گزینهٔ (۲) به‌ازای $n=۱$ برابر ۱ است.

۱۸۲۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون دنبالهٔ مورد نظر غیرثابت است، پس $q\neq۱$ و چون جمله‌های آن مثبت‌اند، پس q مثبت است. از طرف دیگر،

$$S_۶=۲۱S_۲\Rightarrow\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}=۲۱\times\frac{a_۱(۱-q^۲)}{۱-q}\Rightarrow ۱-q^۶=۲۱(۱-q^۲)$$

$$(۱-q^۲)(۱+q^۲+q^۴)=۲۱(۱-q^۲)\Rightarrow q^۴+q^۲-۲۰=۰$$

$$(q^۴-۴)(q^۲+۵)=۰\Rightarrow q^۲=۴\Rightarrow q=۲$$

۱۸۳۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\begin{cases}S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}\\ S_۵=\frac{a_۱(q^۵-۱)}{q-۱}\end{cases}\Rightarrow\frac{S_{۱۰}}{S_۵}=\frac{\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}}{\frac{a_۱(q^۵-۱)}{q-۱}}=۳۳$$

در نتیجه

$$۳۳=\frac{q^{۱۰}-۱}{q^۵-۱}=q^۵+۱\Rightarrow q^۵=۳۲\Rightarrow q=۲$$

بنابراین $\frac{a_۵}{a_۱}=\frac{a_۱q^۴}{a_۱}=q^۴=۱۶$.

۱۸۳۱- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$a_۷+a_{۱۴}=a_۱+۶d+a_۱+۱۳d=۲a_۱+۱۹d=۶۰$$

بنابراین $S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)=\frac{۲۰}{۲}\times۶۰=۶۰۰$.

راه‌حل دوم چون $۷+۱۴=۱+۲۰$، پس $a_۷+a_{۱۴}=a_۱+a_{۲۰}$، بنابراین

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a_۱+a_{۲۰})=۱۰\times۶۰=۶۰۰$$

۱۸۳۲- گزینهٔ ۳ قدرنسبت دنباله برابر ۴ و جملهٔ اول آن ۳ است. پس مجموع n جملهٔ اول آن برابر است با

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲\times۳+۴(n-۱))=n(۲n+۱)=۲n^۲+n$$

بنابراین $۲n^۲+n>۳۰۰\Rightarrow ۲n^۲+n-۳۰۰>۰$

می‌توان نامعادلهٔ فوق را حل کرد که جواب آن به‌صورت $n>\frac{-۱+\sqrt{۲۴۰۱}}{۴}=۱۲$ می‌شود، یعنی $n\geq۱۳$.

۱۸۳۳- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با $a_۲-a_۱=۴$. از طرف دیگر،

$$S_n-a_n=۵۶\Rightarrow\frac{n}{۲}(-۱۴+۴(n-۱))-(-۷+۴(n-۱))=۵۶$$

$$-۷n+۲n(n-۱)+۷-۴(n-۱)=۵۶$$

$$۲n^۲-۱۳n-۴۵=۰\Rightarrow(۲n+۵)(n-۹)=۰\Rightarrow n=۹$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $d=a_۲-a_۱=۴$، از طرف دیگر،

$$S_n-a_n=S_{n-۱}=۵۶$$

بنابراین

$$\frac{n-۱}{۲}(۲a_۱+(n-۲)d)=۵۶\Rightarrow\frac{n-۱}{۲}(۲(-۷)+۴(n-۲))=۵۶$$

$$(n-۱)(۲n-۱۱)=۵۶\Rightarrow ۲n^۲-۱۳n-۴۵=۰$$

$$(۲n+۵)(n-۹)=۰\Rightarrow n=۹$$

۱۸۳۴- گزینهٔ ۱ مجموع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر را حساب می‌کنیم:

$$a_۱+a_۲+a_۳+a_{n-۲}+a_{n-۱}+a_n=۱۰+۸۰$$

$$(a_۱+a_n)+(a_۲+a_{n-۱})+(a_۳+a_{n-۲})=۹۰$$

با توجه به تساوی $a_{k+۱}+a_{n-k}=a_۱+a_n$ به‌دست می‌آید

$$(a_۱+a_n)+(a_۱+a_n)+(a_۱+a_n)=۹۰$$

$$۳(a_۱+a_n)=۹۰\Rightarrow a_۱+a_n=۳۰$$

از طرف دیگر،

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=۳۰۰\Rightarrow ۳۰\times\frac{n}{۲}=۳۰۰\Rightarrow n=۲۰$$

۱۸۳۵- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که مجموع $k+۱$ جملهٔ با ردیف فرد برابر است با $\frac{(k+۱)(a_۱+a_{۲k+۱})}{۲}$. همچنین مجموع k جملهٔ با ردیف زوج برابر است با $\frac{k(a_۲+a_{۲k})}{۲}$. (توجه کنید $\frac{a_۲+a_{۲k}}{۲}=\frac{a_۱+a_{۲k+۱}}{۲}$)، بنابراین نسبت مورد نظر برابر با $\frac{k+۱}{k}$ است.

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم دنباله سه‌جمله‌ای باشد $(k=۱)$ و جملات آن به صورت $a_۱,a_۲,a_۳$ باشند. در این صورت نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{a_۱+a_۳}{a_۲}=\frac{۲a_۲}{a_۲}=۲$. فقط گزینهٔ (۴) به‌ازای $k=۱$ برابر ۲ می‌شود.

۱۸۳۶- گزینهٔ ۲ اگر از مجموع پنج جملهٔ اول دنباله، مجموع چهار جملهٔ اول را کم کنیم، جملهٔ پنجم به‌دست می‌آید:

$$a_۵=S_۵-S_۴=\frac{۴}{۳}(۳^۵-۱)-\frac{۴}{۳}(۳^۴-۱)=\frac{۴}{۳}(۳^۵-۳^۴)=۲۱۶$$

۱۸۳۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $q=\sqrt[۳]{۳}$. مجموع شش جملهٔ دوم برابر اختلاف مجموع دوازده جملهٔ اول و شش جملهٔ اول است. پس

$$\frac{S_{۱۲}-S_۶}{S_۶}=\frac{S_{۱۲}}{S_۶}-۱=\frac{\frac{۱\times(q^{۱۲}-۱)}{q-۱}}{\frac{۱\times(q^۶-۱)}{q-۱}}-۱=\frac{q^{۱۲}-۱}{q^۶-۱}-۱=q^۶=(\sqrt[۳]{۳})^۶=۹$$

۱۸۳۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_n=S_n-S_{n-۱}=(۲^n-۱)-(۲^{n-۱}-۱)=۲^{n-۱}$$

در نتیجه $a_n^۲=۲^{۲n-۲}=۴^{n-۱}$. بنابراین

$$a_۱^۲+\cdots+a_n^۲=۴^۰+۴^۱+\cdots+۴^{n-۱}=\frac{۴^n-۱}{۴-۱}=\frac{۴^n-۱}{۳}$$

۱۸۳۹- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به‌صورت $a_۱,a_۲,\dots,a_{۲n}$ باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با $S_{۲n}=\frac{a_۱(q^{۲n}-۱)}{q-۱}$. از طرف دیگر جمله‌های با ردیف زوج به‌صورت $a_۲,a_۴,\dots,a_{۲n}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $q^۲$ و جملهٔ اول $a_۲$ تشکیل می‌دهند. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\frac{a_۲(۱-(q^۲)^n)}{۱-q^۲}$ است. پس

$$\frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q}=۳\times\frac{a_۲(۱-q^{۲n})}{(۱-q)(۱+q)}\Rightarrow a_۱=۳\times\frac{a_۱q}{۱+q}\Rightarrow ۳q=۱+q\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم فرض می‌کنیم تعداد جمله‌های دنباله ۲تا باشد، یعنی دنباله به صورت $a_۱,a_۲$ باشد. طبق فرض $a_۱+a_۲=۳a_۲$، بنابراین

$$a_۱=۲a_۲\Rightarrow a_۱=۲a_۱q\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

۱۸۴۰- گزینهٔ ۲ صورت کسر مجموع دوازده جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t و مخرج کسر مجموع چهار جملهٔ نخست دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $t^۳$ است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱\times\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t}}{۱\times\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t^۳}}=\frac{۱-t^۳}{۱-t}=۱+t+t^۲$$

و حاصل آن به‌ازای $t=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ می‌شود

$$۱+\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۶-۲\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۴+۲-۲\sqrt{۵}+۶-۲\sqrt{۵}}{۴}=۳-\sqrt{۵}$$

۱۸۴۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $a_۱=۸$ و $S_{۱۳}=-۵۲$. بنابراین

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow -۵۲=\frac{۱۳}{۲}(۲(۸)+۱۲\times d)\Rightarrow d=-۲$$

۱۸۴۲- گزینهٔ ۳ قدرنسبت دنبالهٔ مورد نظر برابر است با $۱۵-۱۸=-۳$.
بنابراین اگر مجموع n جملهٔ نخست این دنباله برابر با ۴۵ باشد،

$$\frac{n}{۲}(۲\times۱۸-۳(n-۱))=۴۵\Rightarrow ۳n^۲-۳۹n+۹۰=۰$$

$$(n-۳)(n-۱۰)=۰\Rightarrow n=۳\ ,\ n=۱۰$$

بنابراین مجموع سه جملهٔ نخست و همین‌طور مجموع ده جملهٔ نخست دنبالهٔ مورد نظر برابر ۴۵ است. در نتیجه حداکثر ده جمله از ابتدای دنباله را می‌توان جمع کرد تا مجموعشان برابر ۴۵ شود.

۱۸۴۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$S_{۱۷}-S_{۱۶}=a_{۱۷}\Rightarrow a_{۱۷}=۲۶\ ,\quad S_{۳۰}-S_{۲۹}=a_{۳۰}\Rightarrow a_{۳۰}=۰$$

از طرف دیگر،

$$a_{۳۰}=a_{۱۷}+۱۳d\Rightarrow ۰=۲۶+۱۳d\Rightarrow d=-۲$$

۱۸۴۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$a_۷=a_۱+۶d=۱۶\quad(۱)$$

$$S_{۱۲}=\frac{۱۲}{۲}(۲a_۱+۱۱d)=۱۲a_۱+۶۶d=۱۷۴\quad(۲)$$

اگر دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) را حل کنیم، معلوم می‌شود که $a_۱=-۲$ و $d=۳$. اکنون دقت کنید که $a_۲,a_۴,a_۶,a_۸,a_{۱۰}$ دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست $a_۲$ و قدرنسبت $۲d$ است. بنابراین مجموع جملات آن برابر می‌شود با

$$a_۲+a_۴+\cdots+a_{۱۰}=\frac{۵}{۲}(۲(a_۱+d)+۴\times۲d)$$

$$=\frac{۵}{۲}(۲a_۱+۱۰d)=۵a_۱+۲۵d=-۱۰+۷۵=۶۵$$

۱۸۴۵- گزینهٔ ۱ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن بیست و چهار دستهٔ نخست از $۱+۲+۳+\cdots+۲۴$ عدد طبیعی استفاده شده است. چون $۱+۲+\cdots+۲۴=\frac{۲۴\times۲۵}{۲}=۳۰۰$، پس برای نوشتن بیست و چهار دستهٔ نخست، از ۳۰۰ عدد طبیعی نخست استفاده شده است. در نتیجه، جملهٔ نخست دستهٔ بیست و پنجم برابر با ۳۰۱ است. بنابراین عددهای دستهٔ بیست و پنجم، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۳۰۱ و قدرنسبت ۱ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ۲۵تا است. به این ترتیب مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{۲۵}{۲}(۲\times۳۰۱+(۲۵-۱)(۱))=۷۸۲۵$.

۱۸۴۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$(\sqrt{a^۲+۱})^۲=a(a+۱)\Rightarrow a^۲+۱=a(a+۱)\Rightarrow a=۱$$

بنابراین دنبالهٔ هندسی مورد نظر به‌صورت $۱,\sqrt{۲},۲,\dots$ است. قدرنسبت این دنباله $\sqrt{۲}$ و جملهٔ نخست آن ۱ است. بنابراین

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}=\frac{(\sqrt{۲})^{۱۰}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{۳۱}{\sqrt{۲}-۱}=۳۱(۱+\sqrt{۲})$$

۱۸۴۷- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$S_{۹۹}-S_{۹۰}=۸۱\Rightarrow\frac{a_۱(۳^{۹۹}-۱)}{۳-۱}-\frac{a_۱(۳^{۹۰}-۱)}{۳-۱}=۸۱$$

$$\frac{a_۱\times۳^{۹۹}-a_۱-a_۱\times۳^{۹۰}+a_۱}{۳-۱}=۸۱$$

$$\frac{a_۱\times۳^{۹۰}(۳^۹-۱)}{۳-۱}=۸۱\Rightarrow\frac{a_۱(۳^۹-۱)}{۳-۱}=\frac{۸۱}{۳^{۹۰}}$$

بنابراین $S_۹=\frac{۸۱}{۳^{۹۰}}=\frac{۳^۴}{۳^{۹۰}}=۳^{-۸۶}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $S_{۹۹}-S_{۹۰}=a_{۹۱}+a_{۹۲}+\cdots+a_{۹۹}$. بنابراین

$$a_۱q^{۹۰}+a_۱q^{۹۱}+\cdots+a_۱q^{۹۸}=۸۱$$

$$q^{۹۰}(a_۱+a_۱q+\cdots+a_۱q^۸)=۸۱$$

$$q^{۹۰}(a_۱+a_۲+\cdots+a_۹)=۸۱$$

در نتیجه

$$S_۹=a_۱+\cdots+a_۹=\frac{۸۱}{q^{۹۰}}=\frac{۸۱}{۳^{۹۰}}=۳^{-۸۶}$$

۱۸۴۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\begin{cases} a_۳-a_۱=a_۱q^۲-a_۱=a_۱(q^۲-۱)=۳۲ \\ a_۴-a_۲=a_۱q^۳-a_۱q=a_۱q(q^۲-۱)=۹۶ \end{cases} \Rightarrow q=۳$$

بنابراین $a_۱(۳^۲-۱)=۳۲$. در نتیجه $a_۱=۴$. اکنون توجه کنید که

$$S_n=\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}=\frac{۴(۳^n-۱)}{۲}=۲(۳^n-۱)=۱۶۰$$

در نتیجه $۳^n-۱=۸۰\Rightarrow ۳^n=۸۱\Rightarrow n=۴$

۱۸۴۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$S_n=\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}=۳,\quad S_{۳n}=\frac{a_۱(q^{۳n}-۱)}{q-۱}=۳۹$$

در نتیجه

$$\frac{S_{۳n}}{S_n}=۱+q^n+q^{۲n}=۱۳\Rightarrow q^{۲n}+q^n-۱۲=۰\Rightarrow (q^n-۳)(q^n+۴)=۰$$

پس $q^n=-۴$ یا $q^n=۳$، که چون جمله‌های دنباله مثبت‌اند، پس $q^n=۳$.
اکنون توجه کنید که

$$S_{۴n}=\frac{a_۱(q^{۴n}-۱)}{q-۱},\quad \frac{S_{۴n}}{S_n}=\frac{q^{۴n}-۱}{q^n-۱}=q^{۳n}+q^{۲n}+q^n+۱$$

بنابراین $S_{۴n}=S_n(q^{۳n}+q^{۲n}+q^n+۱)=۳(۲۷+۹+۳+۱)=۱۲۰$.

۱۸۵۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{S_n}{a_{n+۱}-a_۱}=\frac{\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}}{a_۱q^n-a_۱}=\frac{۱}{q-۱}$$

از طرف دیگر، $-۱\le q\le -\frac{۱}{۲}\Rightarrow -۲\le q-۱\le -\frac{۳}{۲}\Rightarrow -\frac{۲}{۳}\le\frac{۱}{q-۱}\le -\frac{۱}{۲}$

بنابراین مجموع بیشترین و کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$-\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۷}{۶}$$

۱۸۵۱- گزینهٔ ۲ تعداد نقاط روی شکل (۱) برابر ۵ است و در هر مرحله ۴ نقطه به نقاط شکل قبل اضافه می‌شود. پس در مرحلهٔ n اُم به تعداد $۴\times(n-۱)$ نقطه به ۵ نقطهٔ شکل (۱) اضافه شده است: $۴(n-۱)+۵=۴n+۱$، یعنی شکل n اُم $۴n+۱$ نقطه دارد. پس شکل پانزدهم ۶۱ نقطه دارد.

۱۸۵۲- گزینهٔ ۲ از شرط $a_n>۰$ مقادیری از n را پیدا می‌کنیم که به‌ازای آن‌ها a_n مثبت است:

$$a_n>۰\Rightarrow ۹۵n-n^۲>۰\Rightarrow n(۹۵-n)>۰$$

چون $n>۰$، پس $۹۵-n>۰$، در نتیجه $n<۹۵$، یعنی $n\le ۹۴$. بنابراین ۹۴ جملهٔ دنباله مثبت هستند.

۱۸۵۳- گزینهٔ ۴ فرض کنید قدرنسبت این دنباله d باشد. بنابراین

$$a_۵=۲a_{۱۰}\Rightarrow a_۱+۴d=۲(a_۱+۹d)\Rightarrow a_۱+۱۴d=۰\Rightarrow a_{۱۵}=۰\Rightarrow ۱۵a_{۱۵}=۰$$

۱۸۵۴- گزینهٔ ۳ جملهٔ وسط، واسطهٔ حسابی دو جملهٔ دیگر است:

$$\log_۲ a+\log_۲(۱۶a)=۲\log_۲(۳a+۴)\Rightarrow \log_۲(a(۱۶a))=\log_۲(۳a+۴)^۲$$

$$۱۶a^۲=(۳a+۴)^۲\Rightarrow ۱۶a^۲=۹a^۲+۲۴a+۱۶$$

$$۷a^۲-۲۴a-۱۶=۰\Rightarrow a=۴, a=-\frac{۴}{۷}$$ (غ.ق.ق)

۱۸۵۵- گزینهٔ ۳ جمله‌های اول و دوم دنبالهٔ $a_n=۲-۳n$ به‌ترتیب برابر ۱- و ۴- است. پس قدرنسبت آن برابر $-۴-(-۱)=-۳$ است. اگر جملهٔ اول را ۴ واحد کاهش دهیم، به ۵- تبدیل می‌شود و اگر قدرنسبت را ۶ واحد افزایش دهیم، به ۳ تبدیل می‌شود. پس دنبالهٔ حسابی جدید $-۵,-۲,۱,\ldots$ است که جملهٔ عمومی آن به‌صورت $b_n=-۵+۳(n-۱)=۳n-۸$ است، پس جملهٔ بیست‌ویکم دنبالهٔ جدید $b_{۲۱}=۳\times۲۱-۸=۵۵$ است.

۱۸۵۶- گزینهٔ ۴ چون $a_۱=\frac{۱}{۲}$ و $r=۱\div\frac{۱}{۲}=۲$، حاصل‌ضرب پانزده جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$P=a_۱\times a_۱r\times\cdots\times a_۱r^{۱۴}=a_۱^{۱۵}\times r^{۱+۲+\cdots+۱۴}$$

$$=a_۱^{۱۵}r^{\frac{۱۴\times۱۵}{۲}}=a_۱^{۱۵}r^{۷\times۱۵}$$

$$=(\frac{۱}{۲})^{۱۵}۲^{۷\times۱۵}=(\frac{۱}{۲})^{۱۵}\times۲^{۱۰۵}=۲^{۹۰}$$

۱۸۵۷- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر دنباله‌ای هم حسابی و هم هندسی باشد جمله‌های آن با هم برابرند، پس هر سه جمله باید برابر باشند. در نتیجه

$$y-۹=۲x+۳=۳x-۱$$

بنابراین

$$x=۴,\quad y=۲۰$$

پس

$$x+y=۲۴$$

۱۸۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر قدرنسبت دنباله r و جملهٔ اول آن $a_۱$ باشد، آن‌گاه

$$a_۵-a_۳=۹۶\Rightarrow a_۱r^۴-a_۱r^۲=۹۶\Rightarrow a_۱r^۲(r^۲-۱)=۹۶ \quad (۱)$$

$$a_۸-a_۶=۱۲\Rightarrow a_۱r^۷-a_۱r^۵=۱۲\Rightarrow a_۱r^۵(r^۲-۱)=۱۲ \quad (۲)$$

طرفین تساوی (۲) را بر طرفین تساوی (۱) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_۱r^۵(r^۲-۱)}{a_۱r^۲(r^۲-۱)}=\frac{۱۲}{۹۶}\Rightarrow r^۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}$$

پس

$$a_۱r^۲(r^۲-۱)=۹۶\Rightarrow a_۱(\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۴}-۱)=۹۶\Rightarrow a_۱=-۵۱۲$$

بنابراین

$$a_۵=a_۱r^۴=-۵۱۲(\frac{۱}{۲})^۴=-۳۲$$

۱۸۵۹- گزینهٔ ۳ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست از $۱+۲+۳+\cdots+۲۹$ عدد استفاده شده است. چون $۱+۲+۳+\cdots+۲۹=\frac{۲۹\times۳۰}{۲}=۴۳۵$. پس برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جملهٔ اول دستهٔ سی‌اُم، ۴۳۶اُمین عدد فرد و جملهٔ آخر آن (۴۳۶+۲۹)اُمین عدد فرد است. از طرف دیگر، جملهٔ عمومی عددهای فرد به‌صورت $a_n=۲n-۱$ است، پس

$$a_{۴۶۵}+a_{۴۳۶}=۲(۴۶۵)-۱+۲(۴۳۶)-۱=۲(۴۶۵+۴۳۶-۱)=۲(۹۰۰)=۱۸۰۰$$

۱۸۶۰- گزینهٔ ۴ اگر جملهٔ اول دنباله را a_1 و قدرنسبت را q فرض کنیم، آن‌گاه

$$S_5=\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}=8,\quad S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=264$$

پس

$$\frac{\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}}{\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}}=\frac{264}{8}\Rightarrow\frac{q^{10}-1}{q^5-1}=33\Rightarrow\frac{(q^5-1)(q^5+1)}{q^5-1}=33$$

$$q^5=32\Rightarrow q=2$$

بنابراین

$$S_5=\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}=8\Rightarrow\frac{a_1(32-1)}{2-1}=8\Rightarrow a_1=\frac{8}{31}$$

در نتیجه $a_7=a_1q^6=\frac{8}{31}\times2^6=\frac{512}{31}$.

۱۸۶۱- گزینهٔ ۴ با استفاده از رابطهٔ $a_n=2a_{n-1}+1$ و جملهٔ اول $a_1=1$، جملهٔ هشتم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_2=2\times1+1=3,\quad a_3=2\times3+1=7,\quad a_4=2\times7+1=15$$
$$a_5=2\times15+1=31,\quad a_6=2\times31+1=63$$
$$a_7=2\times63+1=127,\quad a_8=2\times127+1=255$$

تجربی - ۹۵

۱۸۶۲- گزینهٔ ۱ عدد $4\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی 2^a و 2^b است، پس

$$(4\sqrt{2})^2=2^a\times2^b\Rightarrow2^5=2^{a+b}\Rightarrow a+b=5$$

واسطهٔ حسابی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{2}$، یعنی $\frac{5}{2}$=۲/۵ است. ریاضی - ۸۷

۱۸۶۳- گزینهٔ ۳ طبق فرض،

$$\begin{cases}a_{12}-a_{10}=5\\ a_{12}+a_{10}=25\end{cases}\Rightarrow a_{12}=15,\ a_{10}=10\Rightarrow d=\frac{a_{12}-a_{10}}{12-10}=\frac{5}{2}$$

از طرف دیگر،

$$d=\frac{a_{21}-a_{10}}{21-10}\Rightarrow a_{21}=a_{10}+11d=10+11\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{75}{2}=37/5$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۴

۱۸۶۴- گزینهٔ ۴ جملات را به‌صورت $a, a+3d, a+10d$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$(a+3d)^2=a(a+10d)\Rightarrow a^2+9d^2+6ad=a^2+10ad$$

$$9d^2=4ad\Rightarrow d=\frac{4}{9}a$$

بنابراین جملات دنبالهٔ هندسی $a, \frac{7}{3}a, \frac{49}{9}a$ هستند و قدرنسبت این دنباله برابر است با $r=\frac{\frac{7}{3}a}{a}=\frac{7}{3}$.

تجربی - ۹۲

۱۸۶۵- گزینهٔ ۱ جملات a_4، a_6 و a_{12} از دنبالهٔ حسابی، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، پس جملهٔ ششم واسطهٔ هندسی جملات چهارم و دوازدهم است:

$$a_6^2=a_4\times a_{12}\Rightarrow(a_1+5d)^2=(a_1+3d)(a_1+11d)$$

$$a_1^2+10a_1d+25d^2=a_1^2+14a_1d+33d^2$$

$$4a_1d=-8d^2\Rightarrow a_1=-2d$$

بنابراین $r=\frac{a_6}{a_4}=\frac{a_1+5d}{a_1+3d}=\frac{-2d+5d}{-2d+3d}=3$.

ریاضی - ۸۱

۱۸۶۶- گزینهٔ ۳ بنابر فرض‌های مسئله،

$$a_1+a_3=1\Rightarrow a_1+a_1q^2=1\Rightarrow a_1(1+q^2)=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{q^2+1}$$

$$S_4=\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{q^4-1}{(q^2+1)(q-1)}=\frac{(q^2+1)(q-1)(q+1)}{(q^2+1)(q-1)}=q+1=3$$

$$q=2,\ a_1=\frac{1}{5}$$

بنابراین

$$S_6=\frac{a_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{\frac{1}{5}(2^6-1)}{2-1}=\frac{63}{5}=12/6$$

ریاضی - ۸۸

۱۸۶۷- گزینهٔ ۲ بنابر فرض مسئله،

$$S_{20}=3S_{12}\Rightarrow\frac{20}{2}(2a_1+19d)=3\times\frac{12}{2}(2a_1+11d)$$

$$20a_1+190d=36a_1+198d\Rightarrow16a_1=-8d\Rightarrow d=-2a_1$$

از طرف دیگر،

$$a_3=6\Rightarrow a_1+2d=6\Rightarrow a_1-4a_1=6\Rightarrow a_1=-2,\ d=4$$

بنابراین

$$a_{10}=a_1+9d=-2+9\times4=34$$

ریاضی - ۹۰

۱۸۶۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** مجموع پنج جملهٔ دوم برابر اختلاف مجموع ده جملهٔ اول و مجموع پنج جملهٔ اول است. پس

$$S_5=\frac{1}{3}(S_{10}-S_5)\Rightarrow\frac{4}{3}S_5=\frac{1}{3}S_{10}\Rightarrow S_{10}=4S_5$$

$$\frac{10}{2}(2a_1+9d)=4\times\frac{5}{2}(2a_1+4d)\Rightarrow2a_1+9d=4a_1+8d\Rightarrow d=2a_1$$

بنابراین $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$.

راه‌حل دوم با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت

$$3(a_1+a_2+\cdots+a_5)=a_6+a_7+\cdots+a_{10}$$

$$2(a_1+a_2+\cdots+a_5)=(a_6-a_1)+(a_7-a_2)+\cdots+(a_{10}-a_5)$$

$$2\left(\frac{5}{2}(2a_1+4d)\right)=5d+5d+5d+5d+5d$$

$$10a_1+20d=25d\Rightarrow5d=10a_1\Rightarrow d=2a_1$$

بنابراین $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$.

خارج از کشور تجربی - ۹۱

۱۸۶۹- گزینهٔ ۱ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن نوزده دستهٔ نخست از $1+2+3+\cdots+19$ عدد استفاده شده است. چون $1+2+\cdots+19=\frac{19\times20}{2}=190$

پس برای نوشتن نوزده دستهٔ نخست، از ۱۹۰ عدد طبیعی نخست استفاده شده است. در نتیجه، جملهٔ نخست دستهٔ بیستم برابر با ۱۹۱ است. بنابراین عددهای دستهٔ بیستم، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ نخست ۱۹۱ و قدرنسبت ۱ تشکیل می‌دهند و تعداد آن‌ها ۲۰ تا است. به این ترتیب مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{20}{2}(2\times191+(20-1)(1))=10\times401=4010$.

خارج از کشور تجربی - ۹۴

۱۸۷۰- گزینهٔ ۳ صورت کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-t$ و مخرج کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-t^3$ است. بنابراین

$$1-t+t^2-t^3+\dots+t^8=\frac{a_1(q^9-1)}{q-1}=\frac{1-(-t)^9}{1-(-t)}=\frac{1+t^9}{1+t}$$

$$1-t^3+t^6=\frac{1-(-t^3)^3}{1+t^3}=\frac{1+t^9}{1+t^3}$$

در نتیجه

$$\frac{t^8-t^7+t^6-\dots-t+1}{t^6-t^3+1}=\frac{\frac{1+t^9}{1+t}}{\frac{1+t^9}{1+t^3}}=\frac{1+t^3}{1+t}=\frac{(1+t)(1-t+t^2)}{1+t}=1-t+t^2$$

پس حاصل عبارت مورد نظر به‌ازای $t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ برابر است با

$$1-\frac{1+\sqrt{17}}{2}+\frac{1+2\sqrt{17}+17}{4}=\frac{4-2-2\sqrt{17}+18+2\sqrt{17}}{4}=\frac{20}{4}=5$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۳

۱۸۷۱- گزینهٔ ۴ در این دنباله، هر جمله از دو برابر جملهٔ قبل، دو واحد کمتر است، پس هشت جملهٔ اول برابر است با

$a_1=3,\quad a_2=2\times3-2=4,\quad a_3=2\times4-2=6$

$a_4=2\times6-2=10,\quad a_5=2\times10-2=18,\quad a_6=2\times18-2=34$

$a_7=2\times34-2=66,\quad a_8=2\times66-2=130$

بنابراین $a_8-a_7=130-66=64$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۱۸۷۲- گزینهٔ ۴ شرط اینکه سه عدد a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند این است که $2b=a+c$. بنابراین

$$2(3p+4)=(2p+3)+(5p-1)\Rightarrow p=6$$

$$d=3p+4-2p-3=p+1\xrightarrow{p=6}d=7$$

ریاضی - ۸۴

۱۸۷۳- گزینهٔ ۲ سه جمله را به‌صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ فرض می‌کنیم، در این صورت

$$\frac{a}{r}\times a\times ar=216\Rightarrow a^3=216\Rightarrow a=6$$

$$\frac{a}{r}+a+ar=19\Rightarrow\frac{6}{r}+6+6r=19\Rightarrow 6r^2-13r+6=0$$

$$(3r-2)(2r-3)=0\Rightarrow\begin{cases}r=\frac{2}{3}\Rightarrow \text{سه جملهٔ متوالی: } 9,6,4\\ r=\frac{3}{2}\Rightarrow \text{سه جملهٔ متوالی: } 4,6,9\end{cases}$$

در هر دو صورت تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله برابر ۵ است.

تجربی - ۹۰

۱۸۷۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$a_5^2=a_1a_{11}\Rightarrow(a_1+4d)^2=a_1(a_1+10d)$$

$$a_1^2+8a_1d+16d^2=a_1^2+10a_1d\Rightarrow16d^2=2a_1d\Rightarrow a_1=8d$$

$$a_5=a_1+4d=12d,\ a_{11}=a_1+10d=18d\Rightarrow r=\frac{a_{11}}{a_5}=\frac{18d}{12d}=\frac{3}{2}$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۱۸۷۵- گزینهٔ ۲ فرض کنید t_3، t_7 و t_9 جملات دنبالهٔ حسابی و a_1، a_2 و a_3 جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند. در این صورت

$$a_2^2=a_1a_3\Rightarrow t_7^2=t_3t_9\Rightarrow(t_1+6d)^2=(t_1+2d)(t_1+8d)$$

$$t_1^2+12t_1d+36d^2=t_1^2+8dt_1+2t_1d+16d^2$$

$$2t_1d+20d^2=0\Rightarrow2d(t_1+10d)=0\xrightarrow{d\neq0}t_1+10d=0$$

بنابراین جملهٔ یازدهم دنبالهٔ حسابی برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۱۸۷۶- گزینهٔ ۴ بنابر فرض مسئله،

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{153}{136}\Rightarrow136S_6=153S_3$$

$$136a_1\left(\frac{q^6-1}{q-1}\right)=153a_1\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)\Rightarrow136(q^3-1)(q^3+1)=153(q^3-1)$$

$$136(q^3+1)=153\Rightarrow q^3=\frac{153}{136}-1=\frac{17}{136}=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

بنابراین $a_5=a_1q^4=\frac{1}{16}a_1\Rightarrow a_1=16a_5$

ریاضی - ۸۹

۱۸۷۷- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول به بیست جملهٔ اول دنباله توجه کنید:

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d,\dots,a_1+18d,a_1+19d$$

جملات ردیف فرد یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند و جملات ردیف زوج یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1+d و قدرنسبت $2d$ تشکیل می‌دهند. پس

$$\begin{cases}S_{\text{فردها}}=\frac{10}{2}(a_1+a_1+18d)=135\\ S_{\text{زوجها}}=\frac{10}{2}(a_1+d+a_1+19d)=150\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_1+18d=27\\ a_1+10d=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\ d=\frac{3}{2}\end{cases}$$

راه‌حل دوم طبق فرض،

$$\begin{cases}a_2+a_4+\dots+a_{20}=150\\ a_1+a_3+\dots+a_{19}=135\end{cases}$$

اگر طرفین معادلات فوق را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\dots+(a_{20}-a_{19})=15\Rightarrow10d=15\Rightarrow d=\frac{3}{2}$$

اگر طرفین معادلات فوق را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_{19}+a_{20}=285$$

$$\frac{20}{2}(2a_1+19d)=285\Rightarrow10\left(2a_1+\frac{57}{2}\right)=285\Rightarrow a_1=0$$

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۱۸۷۸- گزینهٔ ۳ چون تعداد جمله‌های هر دسته برابر شمارهٔ آن دسته است، برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست از ۱+۲+۳+…+۲۹ عدد استفاده شده است. چون

$$1+2+3+\dots+29=\frac{29\times30}{2}=435$$

پس برای نوشتن ۲۹ دستهٔ نخست، از نخستین ۴۳۵ عدد فرد استفاده شده است. پس جملهٔ اول دستهٔ سی‌اُم، ۴۳۶ اُمین عدد فرد و جملهٔ آخر آن (۲۹+۴۳۶) اُمین عدد فرد است. از طرف دیگر، جملهٔ عمومی عددهای فرد به‌صورت $a_n=2n-1$ است، پس

$$a_{465}+a_{436}=2(465)-1+2(436)-1=2(465+436-1)=2(900)=1800$$

تجربی - ۹۴

۱۸۷۹- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به‌صورت $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ باشند، در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با

$$S_{2n} = \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$$

از طرف دیگر جمله‌های با ردیف فرد به‌صورت $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^2 و جملهٔ اول a_1 است. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2}$ است. بنابراین

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q} = 3 \times \frac{a_1(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow \frac{3}{1+q} = 1 \Rightarrow q = 2$$

ریاضی - ۹۴

۱۸۸۰- گزینهٔ ۱ صورت کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t و مخرج کسر مجموع جمله‌های دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t^3 است. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{1 \times \frac{1-t^{12}}{1-t}}{1 \times \frac{1-t^{12}}{1-t^3}} = \frac{1-t^3}{1-t} = \frac{(1-t)(1+t+t^2)}{1-t} = 1+t+t^2$$

و حاصل آن به ازای $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ می‌شود

$$1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{4-2+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4} = 2$$

ریاضی - ۹۳

فصل هشتم

۱۸۸۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $۰<a<b$، آن‌گاه $\sqrt{a}<\sqrt{b}$. بنابراین

$$۵<۹\Rightarrow\sqrt{۵}<\sqrt{۹}\Rightarrow\sqrt{۵}<۳\Rightarrow\sqrt{۵}-۳<۰$$

در نتیجه $\sqrt{(\sqrt{۵}-۳)^۲}=|\sqrt{۵}-۳|=-(\sqrt{۵}-۳)=۳-\sqrt{۵}$. از طرف دیگر، $\sqrt[۳]{(\sqrt{۳}-۲)^۳}=\sqrt{۳}-۲$. همین‌طور

$$۴<۵\Rightarrow\sqrt{۴}<\sqrt{۵}\Rightarrow ۲<\sqrt{۵}\Rightarrow\sqrt{۵}-۲>۰$$

بنابراین $\sqrt[۴]{(\sqrt{۵}-۲)^۴}=|\sqrt{۵}-۲|=\sqrt{۵}-۲$. به این ترتیب عبارت مورد نظر برابر است با $۳-\sqrt{۵}+\sqrt{۳}-۲+\sqrt{۵}-۲=\sqrt{۳}-۱$.

۱۸۸۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[۷]{۸\sqrt[۴]{۴}}=\sqrt[۷]{۲^۳\sqrt[۴]{۲^۲}}=\sqrt[۷]{۲^۳\sqrt{۲}}=۲^{\frac{۳}{۷}}\times۲^{\frac{۱}{۱۴}}=۲^{\frac{۳}{۷}+\frac{۱}{۱۴}}=۲^{\frac{۷}{۱۴}}=\sqrt{۲}$$

۱۸۸۳- گزینهٔ ۴ به کمک مخرج مشترک گیری عبارت ساده می‌شود:

$$\frac{\sqrt[۳]{۹}}{\sqrt[۵]{۲۷}}-\frac{\sqrt[۵]{۹}}{\sqrt[۳]{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۹}\times\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۵]{۹}\times\sqrt[۵]{۲۷}}{\sqrt[۵]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۲۷}-\sqrt[۵]{۳^۵}}{\sqrt[۵]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۳}}=\frac{۳-۳}{\sqrt[۵]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۳}}=۰$$

۱۸۸۴- گزینهٔ ۳ صورت و مخرج کسر را به شکل اعداد توان‌دار با نمای گویا می‌نویسیم:

$$۳\sqrt{۲\sqrt{۳\sqrt{۲}}}=۳^۱\times۲^{\frac{۱}{۲}}\times۳^{\frac{۱}{۴}}\times۲^{\frac{۱}{۸}}=۳^{\frac{۵}{۴}}\times۲^{\frac{۵}{۸}}$$

$$۲\sqrt{۳\sqrt{۲\sqrt{۳}}}=۲^۱\times۳^{\frac{۱}{۲}}\times۲^{\frac{۱}{۴}}\times۳^{\frac{۱}{۸}}=۲^{\frac{۵}{۴}}\times۳^{\frac{۵}{۸}}$$

بنابراین $A=\frac{۳^{\frac{۵}{۴}}\times۲^{\frac{۵}{۸}}}{۲^{\frac{۵}{۴}}\times۳^{\frac{۵}{۸}}}=\frac{۳^{\frac{۵}{۸}}}{۲^{\frac{۵}{۸}}}=(\frac{۳}{۲})^{\frac{۵}{۸}}=\sqrt[۸]{(\frac{۳}{۲})^۵}$.

۱۸۸۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}\times\sqrt[۳]{x\sqrt[۴]{x}}\times\sqrt[۴]{x\sqrt[۵]{x}}=x^{\frac{۱}{۲}}x^{\frac{۱}{۶}}x^{\frac{۱}{۳}}x^{\frac{۱}{۱۲}}x^{\frac{۱}{۴}}x^{\frac{۱}{۲۰}}$$

$$=x^{\frac{۳۰+۱۰+۲۰+۵+۱۵+۳}{۶۰}}=x^{\frac{۸۳}{۶۰}}=x^{۱+\frac{۲۳}{۶۰}}=x\sqrt[۶۰]{x^{۲۳}}$$

۱۸۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[n]{۹}\times\sqrt[۲n]{۳}=۹^{\frac{۱}{n}}\times۳^{\frac{۱}{۲n}}=۳^{\frac{۲}{n}}\times۳^{\frac{۱}{۲n}}=۳^{\frac{۵}{۲n}}=\sqrt{۳}=۳^{\frac{۱}{۲}}$$

پس

$$\frac{۵}{۲n}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow n=۵$$

در نتیجه $\sqrt[n]{۳۷-n}=\sqrt[۵]{۳۷-۵}=\sqrt[۵]{۳۲}=۲$.

۱۸۸۷- گزینهٔ ۴ چون x عددی مثبت است، تساوی داده شده را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt[۳]{x\sqrt{x}}=۳\Rightarrow\sqrt[۳]{\sqrt{x^۲\times x}}=۳\Rightarrow\sqrt[۶]{x^۳}=۳\Rightarrow\sqrt{x}=۳$$

بنابراین $x=۹$ و در نتیجه

$$\sqrt{x\sqrt[۳]{x}}=\sqrt{۹\sqrt[۳]{۹}}=\sqrt{۹}\sqrt{\sqrt[۳]{۹}}=۳\sqrt[۶]{۳^۲}=۳\sqrt[۳]{۳}$$

۱۸۸۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$x^{\frac{۵}{۲}}=۳۲\Rightarrow(x^{\frac{۵}{۲}})^{\frac{۲}{۵}}=(۲^۵)^{\frac{۲}{۵}}\Rightarrow x=۲^۲$$

بنابراین

$$x^{\frac{۲}{۳}}=(۲^۲)^{\frac{۲}{۳}}=۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^{۱+\frac{۱}{۳}}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

۱۸۸۹- گزینهٔ ۳ ابتدا x، y و z را ساده‌تر می‌کنیم:

$$x=a^{\frac{۳}{۴}},\quad y=a^{\frac{۴}{۳}},\quad z=a^{\frac{۱۰}{۱۲}}=a^{\frac{۵}{۶}}$$

از طرف دیگر، $\frac{۳}{۴}<\frac{۵}{۶}<\frac{۴}{۳}$ و چون $۰<a<۱$، پس

$$a^{\frac{۴}{۳}}<a^{\frac{۵}{۶}}<a^{\frac{۳}{۴}}\Rightarrow y<z<x$$

۱۸۹۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** اولاً واضح است که $\sqrt[۴]{۰}=۰$ و ریشهٔ چهارم عدد صفر در بازهٔ مورد نظر قرار دارد. اکنون فرض می‌کنیم a عددی مثبت باشد که ریشهٔ چهارم مثبت آن در بازهٔ $(۰,۴)$ قرار دارد. یعنی

$$۰<\sqrt[۴]{a}<۴\Rightarrow۰<(\sqrt[۴]{a})^۴<۴^۴\Rightarrow۰<a<۲۵۶$$

همچنین فرض می‌کنیم b عددی مثبت باشد که ریشهٔ چهارم منفی آن در بازهٔ $(-۳,۰)$ قرار دارد. یعنی

$$-۳<-\sqrt[۴]{b}<۰\Rightarrow۰<\sqrt[۴]{b}<۳\Rightarrow۰<(\sqrt{b})^۴<۳^۴\Rightarrow۰<b<۸۱$$

بنابراین a می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۲۵۵ و b می‌تواند اعداد صحیح ۱ تا ۸۰ باشد. اگر عدد صفر را هم در نظر بگیریم، می‌توان گفت اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ... و ۲۵۵ حداقل یک ریشهٔ چهارم در بازهٔ $(-۳,۴)$ دارند. تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶تاست.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$-۳<\sqrt[۴]{x}<۴\Rightarrow-\sqrt[۴]{۸۱}<\sqrt[۴]{x}<\sqrt[۴]{۲۵۶}\Rightarrow۰\le x<۲۵۶$$

پس تعداد این اعداد صحیح ۲۵۶تاست.

۱۸۹۱- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $x<۰$.

$$\sqrt[۴]{-x^۵}=\sqrt[۴]{(-x)x^۴}=\sqrt[۴]{-x}\times\sqrt[۴]{x^۴}=\sqrt[۴]{-x}\times|x|=-x\sqrt[۴]{-x}$$

راه‌حل دوم چون $x<۰$، حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-۱$ می‌یابیم:

$$\sqrt[۴]{-x^۵}=\sqrt[۴]{۱}=۱$$

فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $x=-۱$ برابر ۱ است.

۱۸۹۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{۸۱}}=\sqrt[۴\times۵]{۸۱}=\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{۸۱}}=\sqrt[۵]{۳}$$

$$\sqrt[۵]{۹۶}=\sqrt[۵]{۲^۵\times۳}=\sqrt[۵]{۲^۵}\times\sqrt[۵]{۳}=۲\sqrt[۵]{۳}$$

$$\frac{۳}{\sqrt[۵]{۸۱}}=\frac{۳}{\sqrt[۵]{۳^۴}}\times\frac{\sqrt[۵]{۳}}{\sqrt[۵]{۳}}=\frac{۳\times\sqrt[۵]{۳}}{\sqrt[۵]{۳^۵}}=\frac{۳\sqrt[۵]{۳}}{۳}=\sqrt[۵]{۳}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[۵]{۳}-۲\sqrt[۵]{۳}-\sqrt[۵]{۳}=-۲\sqrt[۵]{۳}$.

۱۸۹۳- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول فرض کنید $a=\sqrt[6]{2}$، در این صورت

$$\sqrt[6]{2}=a\Rightarrow 2^{\frac{1}{6}}=a\Rightarrow (2^{\frac{1}{6}})^{3}=a^{3}\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}}=a^{3}\Rightarrow \sqrt{2}=a^{3}$$

و

$$\sqrt[6]{2}=a\Rightarrow 2^{\frac{1}{6}}=a\Rightarrow (2^{\frac{1}{6}})^{2}=a^{2}\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}}=a^{2}\Rightarrow \sqrt[3]{2}=a^{2}$$

بنابراین $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[6]{2}}=\frac{a^{3}+a^{2}}{1+a}=\frac{a^{2}(a+1)}{1+a}=a^{2}=\sqrt[3]{2}$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[6]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[6]{2}+1)}{1+\sqrt[6]{2}}=\sqrt[3]{2}$$

۱۸۹۴- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$x\sqrt[7]{\frac{1}{x^{8}}-\frac{1}{x^{7}}}=\sqrt[7]{x^{7}\left(\frac{1}{x^{8}}-\frac{1}{x^{7}}\right)}=\sqrt[7]{\frac{x^{7}}{x^{8}}-\frac{x^{7}}{x^{7}}}=\sqrt[7]{\frac{1}{x}-1}$$

در نتیجه $\sqrt[7]{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{2}$، پس

$$\frac{1}{x}-1=\frac{1}{128}\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{129}{128}\Rightarrow x=\frac{128}{129}$$

راه‌حل دوم از تساوی داده شده نتیجه می‌شود

$$x\sqrt[7]{\frac{1}{x^{7}}\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{1}{2}\Rightarrow x\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt[7]{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x}-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{1}{128}\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{129}{128}\Rightarrow x=\frac{128}{129}$$

۱۸۹۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که x مثبت است. می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[3]{3\sqrt{x}}\Rightarrow \sqrt[4]{3}=\sqrt[3]{\sqrt{9x}}=\sqrt[6]{9x}\Rightarrow (\sqrt[4]{3})^{12}=(\sqrt[6]{9x})^{12}$$

$$3^{3}=(9x)^{2}\Rightarrow 3\sqrt{3}=9x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۸۹۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x>0$. می‌توان نوشت

$$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3^{2}}}}$$

$$x^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{1}{12}}\times x^{\frac{1}{24}}=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{6}}\times (3^{2})^{\frac{1}{24}}\Rightarrow x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$$

$$x^{\frac{9}{24}}=3^{\frac{9}{12}}\Rightarrow x^{\frac{1}{24}}=3^{\frac{1}{12}}\Rightarrow (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{12}}=3^{\frac{1}{12}}\Rightarrow x^{\frac{1}{2}}=3\Rightarrow x=9$$

۱۸۹۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\sqrt[6]{9^{3x-6}}=\sqrt[6]{(3^{2})^{3(x-2)}}=3^{\frac{6(x-2)}{6}}=3^{x-2}$$

$$\sqrt[3]{27^{4x-2}}=\sqrt[3]{3^{3(4x-2)}}=3^{\frac{3(4x-2)}{3}}=3^{4x-2}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{3^{x-2}}{3^{4x-2}}=27\Rightarrow 3^{x-2-(4x-2)}=3^{3}\Rightarrow 3^{-3x}=3^{3}\Rightarrow -3x=3\Rightarrow x=-1$$

۱۸۹۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $a>0$. در تساوی داده شده اعداد را با نمای گویا می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{5}}\times a^{\frac{1}{20}}}=3\Rightarrow \frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}}}=3\Rightarrow \frac{a^{1}}{a^{\frac{1}{2}}}=3\Rightarrow a^{\frac{1}{2}}=3\Rightarrow (a^{\frac{1}{2}})^{2}=3^{2}$$

بنابراین $a=9$.

۱۸۹۹- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{6}}\ ,\quad \sqrt[3]{b\sqrt{a}}=b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}$$

بنابراین

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\times\sqrt[3]{b\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{6}}\times b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{4}{6}}\times b^{\frac{3}{6}}=(a^{4})^{\frac{1}{6}}\times (b^{3})^{\frac{1}{6}}$$

$$=(a^{4}b^{3})^{\frac{1}{6}}=(27)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{3}{6}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

راه‌حل دوم فرض کنید $a=1$ و $b=3$. در این صورت

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\times\sqrt[3]{b\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{3}}\,\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{6}}=\sqrt{3}$$

۱۹۰۰- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول چون $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$، پس $0<a<1$ و در نتیجه واضح است که $\sqrt[4]{a}>\sqrt{a}$ و $\sqrt{a}>a$. همچنین از فرض $0<a<1$ نتیجه می‌شود $a^{8}>a^{9}$ و در نتیجه $\sqrt[12]{a^{8}}>\sqrt[12]{a^{9}}$، یعنی $\sqrt[3]{a^{2}}>\sqrt[4]{a^{3}}$.
ولی $\sqrt{a^{3}}>\sqrt[3]{a^{2}}$ درست نیست، زیرا

$$0<a<1\Rightarrow a^{9}<a^{4}\Rightarrow \sqrt[6]{a^{9}}<\sqrt[6]{a^{4}}\Rightarrow \sqrt{a^{3}}<\sqrt[3]{a^{2}}$$

راه‌حل دوم چون $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$، پس $a^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{2}}$ و چون $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$، پس $0<a<1$.
بررسی گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

گزینهٔ (۱) $\frac{1}{4}<1\Rightarrow a^{\frac{1}{4}}>a\Rightarrow \sqrt[4]{a}>a$

گزینهٔ (۲) $\frac{1}{2}<1\Rightarrow a^{\frac{1}{2}}>a\Rightarrow \sqrt{a}>a$

گزینهٔ (۳) $\frac{3}{2}>\frac{2}{3}\Rightarrow a^{\frac{3}{2}}<a^{\frac{2}{3}}\Rightarrow \sqrt{a^{3}}<\sqrt[3]{a^{2}}$

گزینهٔ (۴) $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}>a^{\frac{3}{4}}\Rightarrow \sqrt[3]{a^{2}}>\sqrt[4]{a^{3}}$

بنابراین گزینهٔ (۳) نادرست است.

۱۹۰۱- گزینهٔ ۴ طرفین رابطهٔ $x+y=4$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^{2}+y^{2}+2xy=16$$

چون $xy=2$، پس

$$x^{2}+y^{2}+4=16\Rightarrow x^{2}+y^{2}=12$$

حال، طرفین رابطهٔ اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^{4}+y^{4}+2x^{2}y^{2}=144\Rightarrow x^{4}+y^{4}+2(xy)^{2}=144$$

$$x^{4}+y^{4}+2\times 4=144\Rightarrow x^{4}+y^{4}=136$$

۱۹۰۲- گزینهٔ ۳ اعداد $14+6\sqrt{5}$ و $14-6\sqrt{5}$ مربع کامل هستند. زیرا $(3+\sqrt{5})^{2}=3^{2}+\sqrt{5}^{2}+2(3\sqrt{5})=9+5+2\times 3\sqrt{5}=14+6\sqrt{5}$.
به همین ترتیب $(3-\sqrt{5})^{2}=14-6\sqrt{5}$. بنابراین

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$$

۱۹۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که بنابر اتحاد مزدوج،

$$(\sqrt{x+11}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3})=(x+11)-(x+3)=8$$

بنابراین

$$\sqrt{2}(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+3})=8\Rightarrow \sqrt{x+11}+\sqrt{x+3}=4\sqrt{2}$$

۱۹۰۴- گزینهٔ ۱ ابتدا عبارت را به‌صورت $\frac{\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}}-\frac{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}}{\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}$ می‌نویسیم. اکنون با مخرج مشترک‌گیری و استفاده از اتحاد مزدوج نتیجه می‌شود که عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(\sqrt{۲۴}-۴)-(\sqrt{۲۴}+۴)}{\sqrt{\sqrt{۲۴}+۴}\times\sqrt{\sqrt{۲۴}-۴}}=\frac{-۸}{\sqrt{(\sqrt{۲۴})^۲-۴^۲}}=\frac{-۸}{\sqrt{۸}}=-\sqrt{۸}=-۲\sqrt{۲}$$

۱۹۰۵- گزینهٔ ۴ به کمک اتحاد مربع مجموع سه جمله عبارت را ساده می‌کنیم:

$$(a+b-c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc$$

$$(a-b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲-۲ab+۲ac-۲bc$$

بنابراین

$$A=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc-۳a^۲-۳b^۲-۳c^۲$$
$$+۶ab-۶ac+۶bc+۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲$$
$$=۸ab-۸ac+۴bc=۴(۲ab-۲ac+bc)$$

۱۹۰۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(x^۲-۲x)^۳-۲x^۴=x^۶-۶x^۵+۱۲x^۴-۸x^۳-۲x^۴$$
$$=x^۶-۶x^۵+۱۰x^۴-۸x^۳$$

بنابراین ضریب $x^۴$ برابر ۱۰ است.

۱۹۰۷- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف تساوی $\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{۴}$ را به توان سه برسانیم، از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله نتیجه می‌شود

$$a-b-۳\sqrt[۳]{a}\sqrt[۳]{b}(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})=۴\Rightarrow a-b-۳\sqrt[۳]{ab}(\sqrt[۳]{۴})=۴$$

$$a-b-۳\sqrt[۳]{۲}\sqrt[۳]{۴}=۴\Rightarrow a-b-۳(۲)=۴\Rightarrow a-b=۱۰$$

۱۹۰۸- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{b^۲})=۴(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{b^۲})\quad (۱)$$

از طرف دیگر، $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}=(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})^۲+\frac{۲}{ab}=۴^۲+\frac{۲}{۳}$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=۴(۱۶+\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳})=۶۸$$

راه‌حل دوم توجه کنید که اگر طرفین رابطهٔ $\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=۴$ را به توان سه برسانیم.

$$(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})^۳=۴^۳\Rightarrow\frac{۱}{a^۳}-\frac{۳}{a^۲b}+\frac{۳}{ab^۲}-\frac{۱}{b^۳}=۶۴$$

$$\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}-\frac{۳}{ab}(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b})=۶۴$$

$$\xrightarrow{ab=۳,\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=۴}\frac{۱}{a^۳}-\frac{۱}{b^۳}=۶۴+\frac{۳}{۳}\times۴=۶۸$$

۱۹۰۹- گزینهٔ ۴ اگر از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{۵}{(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۳}^۲-\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲}^۲)}=\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳}^۳+\sqrt[۳]{۲}^۳}=\frac{۵}{۳+۲}=\frac{۵}{۵}=۱$$

۱۹۱۰- گزینهٔ ۳ به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=x(x-۱)(x+۱)(x-۲)+۱=(x^۲-x)(x^۲-x-۲)+۱$$
$$=(x^۲-x)((x^۲-x)-۲)+۱=(x^۲-x)^۲-۲(x^۲-x)+۱$$

اکنون به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A=(x^۲-x-۱)^۲$$

۱۹۱۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^۲+\frac{۴}{۹x^۲}=(x+\frac{۲}{۳x})^۲-۲(x)(\frac{۲}{۳x})$$
$$=(x+\frac{۲}{۳x})^۲-\frac{۴}{۳}=۳^۲-\frac{۴}{۳}=\frac{۲۳}{۳}$$

بنابراین $۳x^۲+\frac{۴}{۳x^۲}=۳(x^۲+\frac{۴}{۹x^۲})=۳\times\frac{۲۳}{۳}=۲۳$.

۱۹۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\frac{۱}{a}=۲+|a|>۰$، در نتیجه $a>۰$.

بنابراین، فرض مسئله به شکل $\frac{۱}{a}-a=۲$ درمی‌آید. اکنون توجه کنید که $a+\frac{۱}{a}=|a|+\frac{۱}{a}>۰$. از طرف دیگر، $(a+\frac{۱}{a})^۲-(a-\frac{۱}{a})^۲=۴$. بنابراین

$$(a+\frac{۱}{a})^۲=۴+۴=۸\xrightarrow{a+\frac{۱}{a}>۰}a+\frac{۱}{a}=۲\sqrt{۲}$$

۱۹۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $۳-۲\sqrt{۲}=(\sqrt{۲}-۱)^۲$. بنابراین

$$(\sqrt{۲}-۱)(۳-۲\sqrt{۲})=(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}-۱)^۲=(\sqrt{۲}-۱)^۳$$

و در نتیجه

$$\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-۱)(۳-۲\sqrt{۲})}=\sqrt{۲}-۱$$

۱۹۱۴- گزینهٔ ۲ فرض کنید $A=(۳^{\frac{۱}{۸}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$.

دو طرف این تساوی را در $۳^{\frac{۱}{۸}}-۱$، که همان a است، ضرب می‌کنیم:

$$(۳^{\frac{۱}{۸}}-۱)A=(۳^{\frac{۱}{۸}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۸}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$
$$=((۳^{\frac{۱}{۸}})^۲-۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)=(۳^{\frac{۱}{۴}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۴}}+۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)$$
$$=(۳^{\frac{۱}{۲}}-۱)(۳^{\frac{۱}{۲}}+۱)=۳-۱=۲$$

بنابراین $A=\frac{۲}{۳^{\frac{۱}{۸}}-۱}=\frac{۲}{a}$.

۱۹۱۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(a-b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲-۲ab-۲bc+۲ac$$

بنابراین

$$۱۰^۲=۶۶-۲(ab+bc-ca)\Rightarrow۳۴=-۲(ab+bc-ca)$$

پس $ab+bc-ca=-۱۷$.

۱۹۱۶- گزینهٔ ۴ بنابر اتحاد مکعب مجموع دو جمله،

$$(a-b)^۳-a^۳+b^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳-a^۳+b^۳$$
$$=-۳ab(a-b)=-۳ab(\frac{۳}{ab})=-۹$$

۱۹۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$a^3+b^3=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)$$

از طرف دیگر،

$$a+b=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{3}}{3-2}=2\sqrt{3}$$

$$ab=\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{1}{3-2}=1$$

بنابراین $a^3+b^3=2\sqrt{3}(4\times 3-3)=18\sqrt{3}$.

۱۹۱۸- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\Rightarrow 25=17-2ab\Rightarrow ab=-4$$

بنابراین، طبق اتحاد چاق و لاغر،

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)=5(17-4)=65$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $a=4$ و $b=-1$ در تساوی‌های داده شـده صدق می‌کنند، در این صورت $a^3-b^3=65$.

۱۹۱۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=7\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=7\xrightarrow{ab=1}a^2+b^2=7$$

از طرف دیگر،

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=7+2=9$$

چـون a و b عددهایـی منفی‌انـد، پـس $a+b$ نیـز منفـی اسـت، در نتیجـه $a+b=-3$. به این ترتیب، بنابر اتحاد چاق و لاغر،

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=(-3)(7-1)=-18$$

۱۹۲۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)(a^{10}+a^5+1)=(a^5-1)(a^{10}+a^5+1)$$

$$=(a^5-1)\left((a^5)^2+a^5\times 1+1\right)=(a^5)^3-1=a^{15}-1$$

$$=(\sqrt[5]{3})^{15}-1=3^3-1=26$$

۱۹۲۱- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+2\times\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=8^2+2=66$$

۱۹۲۲- گزینهٔ ۳ ابتدا دو طرف تساوی داده شده را با ۱ جمع می‌کنیم:

$$a+\frac{1}{a+1}=4\Rightarrow a+1+\frac{1}{a+1}=5$$

اکنون دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$\left(a+1+\frac{1}{a+1}\right)^2=5^2\Rightarrow(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}+2(a+1)\times\frac{1}{a+1}=25$$

$$(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}+2=25\Rightarrow(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}=25-2=23$$

۱۹۲۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا مقدار $(a-b)^2$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-b)^2=\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}-2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=6-2=4$$

بنابراین

$$(a-b)^6=\left((a-b)^2\right)^3=4^3=64$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$$

$$b=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$$

پس $(a-b)^6=(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)^6=(-2)^6=64$.

۱۹۲۴- گزینهٔ ۳ طرفین تسـاوی‌های داده شـده را در هـم ضرب می‌کنیم $(\sqrt{x-a}+\sqrt{x})(\sqrt{x-a}-\sqrt{x})=a+1$. بنابراین

$$x-a-x=a+1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

۱۹۲۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2(bc-ab-ac)$$

پس $(a-b-c)^2=28+2(4)=36$. بنابراین $a-b-c=\pm 6$.

۱۹۲۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

دو طرف تساوی داده شده را به توان سه می‌رسانیم:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}\right)^3$$

$$+3\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\,\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}\right)$$

$$=\sqrt{3}-2+\sqrt{3}+2+3\sqrt[3]{3-4}(x)=2\sqrt{3}-3x$$

بنابراین $x^3+3x=2\sqrt{3}$.

۱۹۲۷- گزینهٔ ۲ اگر تسـاوی دوم را یک بار با تساوی اول جمع و بار دیگر از آن کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$a^3+3ab^2+b^3+3a^2b=125\Rightarrow(a+b)^3=125\Rightarrow a+b=5$$

$$a^3+3ab^2-b^3-3a^2b=27\Rightarrow(a-b)^3=27\Rightarrow a-b=3$$

بنابراین $\frac{a+b}{a-b}=\frac{5}{3}$.

۱۹۲۸- گزینهٔ ۳ بنابر فرض،

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید

$$a+\frac{1}{a}-2=2\Rightarrow a+\frac{1}{a}=4$$

و اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به‌دست می‌آید

$$a^3+\frac{1}{a^3}+3a+\frac{3}{a}=64$$

به این ترتیب $a^3+\frac{1}{a^3}=64-3(4)=52$.

۱۹۲۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[3]{2\times 9}+\sqrt[3]{2\times 15}+\sqrt[3]{2\times 25}=\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)$$

$$=\sqrt[3]{2}\left((\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2\right)$$

در نتیجه، از اتحاد چاق و لاغر نتیجه می‌شود:

$$ab=(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5})\left((\sqrt[3]{3})^2+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2\right)(\sqrt[3]{2})$$

$$=\left((\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{5})^3\right)(\sqrt[3]{2})=(3-5)\sqrt[3]{2}=-2\sqrt[3]{2}$$

۱۹۳۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$A=(x-۲y)(x^۴+۲x^۳y+۴x^۲y^۲+۸xy^۳+۱۶y^۴)$$
$$=(x-۲y)(x^۴+x^۳(۲y)+x^۲(۲y)^۲+x(۲y)^۳+(۲y)^۴)$$
$$=x^۵-(۲y)^۵=x^۵-۳۲y^۵$$

بنابراین به‌ازای $x=۲\sqrt[۵]{۲}$ و $y=\sqrt[۵]{۴}$ مقدار A برابر است با

$$A=(۲\sqrt[۵]{۲})^۵-۳۲(\sqrt[۵]{۴})^۵=۳۲\times۲-۳۲\times۴=-۶۴$$

۱۹۳۱- گزینهٔ ۲ مقدار عبارت $\frac{a+b}{a-b}$ مثبت است، بنابراین این عبارت را می‌توان به‌صورت $\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^۲}$ نوشت. به این ترتیب

$$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{(\frac{a+b}{a-b})^۲}=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲+۲ab}{a^۲+b^۲-۲ab}}=\sqrt{\frac{۸ab+۲ab}{۸ab-۲ab}}=\sqrt{\frac{۱۰ab}{۶ab}}=\sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

۱۹۳۲- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول با توجه به اینکه $x\neq ۰$، دو طرف تساوی داده شده را معکوس می‌کنیم و مقدار $x+\frac{۱}{x}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x^۲+۱}{x}=۴\Rightarrow\frac{x^۲}{x}+\frac{۱}{x}=۴\Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۴$$

برای محاسبهٔ مقدار $\frac{x^۲}{x^۴+۱}$، ابتدا مقدار معکوس آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{x^۴+۱}{x^۲}=\frac{x^۴}{x^۲}+\frac{۱}{x^۲}=x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲=۴^۲-۲=۱۴$$

بنابراین $\frac{x^۲}{x^۴+۱}=\frac{۱}{۱۴}$.

راه‌حل دوم از تساوی $\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۴}$ نتیجه می‌شود

$$x^۲+۱=۴x\Rightarrow x^۲=۴x-۱$$

دو طرف این تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $x^۴=۱۶x^۲-۸x+۱$. به جای $x^۲$ قرار می‌دهیم $۴x-۱$:

$$x^۴=۱۶(۴x-۱)-۸x+۱=۶۴x-۸x-۱۵=۵۶x-۱۵$$

بنابراین $\frac{x^۲}{x^۴+۱}=\frac{۴x-۱}{۵۶x-۱۴}=\frac{۴x-۱}{۱۴(۴x-۱)}=\frac{۱}{۱۴}$.

۱۹۳۳- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\sqrt{\sqrt{۵}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۵}-۲}$$
$$=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳}\times\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}-۲)^۲}\times\sqrt[۶]{\sqrt{۵}-۲}$$
$$=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳(\sqrt{۵}-۲)^۲(\sqrt{۵}-۲)}=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳(\sqrt{۵}-۲)^۳}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}=\sqrt{(\sqrt{۵})^۲-۲^۲}=\sqrt{۵-۴}=۱$$

۱۹۳۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول فرض کنید

$$\sqrt{۳+\sqrt{۸}}+\sqrt{۳-\sqrt{۸}}=a$$

طرفین این تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^۲=۳+\sqrt{۸}+۳-\sqrt{۸}+۲\sqrt{(۳+\sqrt{۸})(۳-\sqrt{۸})}=۶+۲\sqrt{۹-۸}=۸$$

بنابراین $a=\sqrt{۸}$. از طرف دیگر، می‌دانیم

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt[۶]{۲^۳}=\sqrt{۲}$$

پس مقدار عبارت داده شده برابر $\sqrt{۸}\times\sqrt{۲}$ یا همان ۴ است.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{۳+\sqrt{۸}}=\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^۲}=\sqrt{۲}+۱$$
$$\sqrt{۳-\sqrt{۸}}=\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}=\sqrt{۲}-۱$$
$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt{۲}$$

پس $(\sqrt{۳+\sqrt{۸}}+\sqrt{۳-\sqrt{۸}})\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=(\sqrt{۲}+۱+\sqrt{۲}-۱)\sqrt{۲}=۴$.

۱۹۳۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})^۲=\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}+۲(\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{bc}+\frac{۱}{ca})$$

از طرف دیگر،

$$a+b+c=۶abc\Rightarrow\frac{a+b+c}{abc}=۶\Rightarrow\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{bc}+\frac{۱}{ca}=۶$$

بنابراین $۵^۲=\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}+۲(۶)$. در نتیجه $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=۱۳$.

۱۹۳۶- گزینهٔ ۴ ابتدا دو طرف تساوی را به توان سه می‌رسانیم و از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$۱=(\sqrt[۳]{a+۵}-\sqrt[۳]{a-۵})^۳=a+۵-(a-۵)-۳\sqrt[۳]{a^۲-۲۵}(\underbrace{\sqrt[۳]{a+۵}-\sqrt[۳]{a-۵}}_{۱})$$

در نتیجه $۱=۱۰-۳\sqrt[۳]{a^۲-۲۵}$. بنابراین $\sqrt[۳]{a^۲-۲۵}=۳$ و در نتیجه

$$a^۲-۲۵=۲۷$$

۱۹۳۷- گزینهٔ ۲ ابتدا به کمک اتحاد $(a-\frac{۱}{a})^۲=a^۲+\frac{۱}{a^۲}-۲$ مقدار $a-\frac{۱}{a}$ را حساب می‌کنیم:

$$(a-\frac{۱}{a})^۲=۱۸-۲=۱۶\Rightarrow a-\frac{۱}{a}=\pm۴$$

از $۰<a<۱$ نتیجه می‌شود $a<\frac{۱}{a}$. بنابراین $a-\frac{۱}{a}=-۴$ درست است. اکنون با استفاده از اتحاد $(a-\frac{۱}{a})^۳=a^۳-\frac{۱}{a^۳}-۳(a-\frac{۱}{a})$ مقدار $a^۳-\frac{۱}{a^۳}$ را حساب می‌کنیم:

$$(-۴)^۳=a^۳-\frac{۱}{a^۳}-۳(-۴)\Rightarrow a^۳-\frac{۱}{a^۳}=-۷۶$$

۱۹۳۸- گزینهٔ ۳ طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت

$$(\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳})(\underbrace{(\sqrt[۳]{۵})^۲-\sqrt[۳]{۳}\times\sqrt[۳]{۵}+(\sqrt[۳]{۳})^۲}_{a})=(\sqrt[۳]{۵})^۳+(\sqrt[۳]{۳})^۳=۵+۳=۸$$

بنابراین $\frac{۸}{a}=\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۳}$.

۱۹۳۹- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(a^۲-۲ab+b^۲)(a^۲+ab+b^۲)^۲=(a-b)^۲(a^۲+ab+b^۲)^۲$$
$$=((a-b)(a^۲+ab+b^۲))^۲=(a^۳-b^۳)^۲$$

اگر تساوی‌های داده شده را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید

$$۵a^۳-۵b^۳=۱۵\Rightarrow a^۳-b^۳=۳$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر ۹ است.

۱۹۴۰- گزینهٔ ۲ با توجه به اینکه $x\neq\pm 1$، دو طرف معادلهٔ داده شده را در x^2-1 ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌شود

$$(x^2-1)(1+x+\cdots+x^5)=x^6+x^7-x^2+1$$
$$(x+1)(x-1)(1+x+\cdots+x^5)=x^6+x^7-x^2+1$$
$$(x+1)(x^6-1)=x^6+x^7-x^2+1$$
$$x^7+x^6-x-1=x^6+x^7-x^2+1\Rightarrow x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=2\ ,\ \ x=-1$$ (غ.ق.ق.)

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۱۹۴۱- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول عبارت مورد نظر را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$6x^2+7x-3=6x^2-2x+9x-3=2x(3x-1)+3(3x-1)$$
$$=(3x-1)(2x+3)$$

پس عامل $3x-1$ در تجزیهٔ عبارت وجود دارد.

راه‌حل دوم عبارت مورد نظر را A می‌نامیم و آن را به کمک اتحاد جملهٔ مشترک به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$A=6x^2+7x-3\Rightarrow 6A=36x^2+42x-18=(6x-2)(6x+9)$$
$$=2\times 3(3x-1)(2x+3)$$

بنابراین $A=(3x-1)(2x+3)$ و عامل $3x-1$ در تجزیهٔ وجود دارد.

۱۹۴۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^2-2x+4y-y^2-3=x^2-2x+1-(y^2-4y+4)=(x-1)^2-(y-2)^2$$
$$=(x-1-(y-2))(x-1+y-2)=(x-y+1)(x+y-3)$$

بنابراین $x-y+1$ عاملی از عبارت است.

۱۹۴۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^4+16x^2+100=(x^4+20x^2+100)-4x^2=(x^2+10)^2-4x^2$$
$$=(x^2+10-2x)(x^2+10+2x)$$

بنابراین $x^2-2x+10$ عامل x^4+16x^2+100 است.

۱۹۴۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$x^3+2x^2+2x+1=(x^3+1)+2x^2+2x$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2-x+1+2x)=(x+1)(x^2+x+1)$$

بنابراین x^2+x+1 عامل x^3+2x^2+2x+1 است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$x^3+2x^2+2x+1=(x^3+x^2)+(x^2+2x+1)$$
$$=x^2(x+1)+(x+1)^2=(x+1)(x^2+x+1)$$

بنابراین x^2+x+1 عامل x^3+2x^2+2x+1 است.

۱۹۴۵- گزینهٔ ۳ ابتدا به کمک اتحاد مربع مجموع دو جمله، عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$A=x^4+y^4+x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+x^2y^2=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$

اکنون به کمک اتحاد مزدوج، عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$A=(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل x^2+y^2-xy وجود دارد.

۱۹۴۶- گزینهٔ ۱ صورت و مخرج کسر دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$2x^2+3x-5=2x^2+5x-2x-5=x(2x+5)-(2x+5)=(2x+5)(x-1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{x^2+x+1}{x(2x+5)}\times\frac{(2x+5)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}$.

۱۹۴۷- گزینهٔ ۱ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^3+x}=\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{x^2+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}$$

۱۹۴۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{a^6-a^4+a^2-1}{-a^2+a^4}=\frac{a^5(a-\frac{1}{a})+a(a-\frac{1}{a})}{a^3(a-\frac{1}{a})}=\frac{a^5+a}{a^3}$$
$$=a^2+\frac{1}{a^2}=(a-\frac{1}{a})^2+2=3^2+2=11$$

۱۹۴۹- گزینهٔ ۲ ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$a^6-a^4-a^2+1=a^4(a^2-1)-(a^2-1)=(a^2-1)(a^4-1)$$
$$a^3-a^2-a+1=a^2(a-1)-(a-1)=(a-1)(a^2-1)$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{(a^4-1)(a^2-1)}{(a-1)(a^2-1)}=\frac{a^4-1}{a-1}$. چون $a^4=(\sqrt{2})^4=4$، پس عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{4-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{3}{\sqrt{2}-1}=\frac{3}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=3\sqrt{2}+3$$

۱۹۵۰- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $A=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$. در این صورت، بنابر اتحاد مکعب تفاضل دو جمله،

$$A^3=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3=a-b-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$$
$$=76-3\sqrt[3]{ab}(A)=76-3A$$

بنابراین

$$A^3+3A-76=0\Rightarrow A^3-64-12+3A=0\Rightarrow A^3-4^3+3(A-4)=0$$
$$(A-4)(A^2+4A+16)+3(A-4)=0\Rightarrow (A-4)(A^2+4A+19)=0$$

چون $A^4+4A+19=(A+2)^2+15\neq 0$. پس $A-4=0$، در نتیجه $A=4$.

۱۹۵۱- گزینهٔ ۳ عبارت را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$2a^2-3ab-2b^2=(2a^2-4ab)+(ab-2b^2)=2a(a-2b)+b(a-2b)$$
$$=(a-2b)(2a+b)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $a-2b$ وجود دارد.

۱۹۵۲- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول فرض کنید $x^2-x=A$. در این‌صورت

$$(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24=A^2-14A+24=(A-2)(A-12)$$

اکنون توجه کنید که

$$A-2=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$
$$A-12=x^2-x-12=(x-4)(x+3)$$

بنابراین $x+1$، $x-2$، $x-4$ و $x+3$ عامل‌های عبارت مورد نظر هستند. اکنون توجه کنید که

$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)\,,\quad x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)\,,\quad x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$$

بنابراین x^2-2x-3 عامل عبارت مورد نظر نیست.

راه‌حل دوم با توجه به عامل‌های عبارت‌های ذکر شده در گزینه‌ها، که در راه‌حل اول نوشته‌ایم، کافی است بررسی کنیم که کدام‌یک از عبارت‌های $x+1$، $x+3$، $x-3$، $x-2$ و $x-4$ عامل عبارت داده شده در صورت سؤال نیست.

فرض کنید $P(x)=(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$. در این‌صورت

$$P(-1)=4-28+24=0\,,\quad P(-3)=144-168+24=0$$

$$P(3)=36-84+24=-24\neq 0$$

پس $x-3$ عامل عبارت مورد نظر نیست. در نتیجه گزینهٔ (۲) عامل عبارت مورد نظر نیست.

۱۹۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$4x^4+3x^2+1=(4x^4+4x^2+1)-x^2=(2x^2+1)^2-x^2$$

$$=(2x^2+1-x)(2x^2+1+x)$$

بنابراین عامل‌های $4x^4+3x^2+1$ عبارت‌های $2x^2-x+1$ و $2x^2+x+1$ هستند، یعنی مقادیر ممکن a عددهای ۱- و ۱ هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱- است.

۱۹۵۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$4x^4-16x^2y^2+9y^4=4x^4-12x^2y^2+9y^4-4x^2y^2$$

$$=(2x^2-3y^2)^2-4x^2y^2$$

طبق اتحاد مزدوج این عبارت به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(2x^2-2xy-3y^2)(2x^2+2xy-3y^2)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $2x^2-2xy-3y^2$ وجود دارد.

۱۹۵۵- گزینهٔ ۱ عبارت را ابتدا به کمک فاکتورگیری و سپس به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$3a^3-3ab^2-2a^2b+2b^3=3a(a^2-b^2)-2b(a^2-b^2)$$

$$=(a^2-b^2)(3a-2b)=(a-b)(a+b)(3a-2b)$$

بنابراین در تجزیهٔ عبارت، عامل $3a-2b$ وجود دارد.

۱۹۵۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)\,,\quad x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)}\times\frac{(x+3)(x-1)}{x^2-x+1}=x+3$$

۱۹۵۷- گزینهٔ ۳ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2-(x-1)-(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2-2x}{(x-1)(x+1)}=-\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{2}{x+1}$$

۱۹۵۸- گزینهٔ ۱ به کمک مخرج مشترک‌گیری عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt{x}-2}-\frac{2}{\sqrt{x}+2}-\frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{2(\sqrt{x}+2)-2(\sqrt{x}-2)-2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{8-2x}{x-4}=-\frac{2(x-4)}{x-4}=-2$$

۱۹۵۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}=\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}\,,\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{a^2+b^2+ab}{ab}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{a^3-b^3}{a^2b^2}\div\frac{a^2+b^2+ab}{ab}=\frac{a^3-b^3}{(a^2+b^2+ab)ab}=\frac{(a-b)(a^2+b^2+ab)}{(a^2+b^2+ab)ab}$$

$$=\frac{a-b}{ab}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=-2\sqrt{2}$$

۱۹۶۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2$$

$$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{(a-1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}=a^3-1=5-1=4$$

راه‌حل دوم اگر صورت و مخرج عبارت داده شده را در $(a+1)$ ضرب کنیم، می‌توان نوشت

$$\frac{(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)}{(a+1)(a^2-a+1)}=\frac{(a^2-1)(a^4+a^2+1)}{a^3+1}$$

$$=\frac{a^6-1}{a^3+1}=\frac{(a^3-1)(a^3+1)}{(a^3+1)}=a^3-1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر به ازای $a=\sqrt[3]{5}$ برابر است با $(\sqrt[3]{5})^3-1=4$.

۱۹۶۱- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}{2}=\frac{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})}{4}}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

۱۹۶۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا مخرج کسرها را گویا می‌کنیم، سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\frac{7}{3-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}+\frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}+\frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}=-1-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}=2$$

راه‌حل دوم ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}}+\frac{7}{3-\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{2}+7-7\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{10-8\sqrt{2}}{5-4\sqrt{2}}=\frac{2(5-4\sqrt{2})}{(5-4\sqrt{2})}=2$$

۱۹۶۳- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt{2}-1}=\sqrt[4]{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[4]{2}+1-\sqrt[4]{2}=1$.

راه‌حل دوم با مخرج مشترک گیری می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}-\sqrt[4]{2}=\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt[4]{2}(\sqrt[4]{2}-1)}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}=1$$

۱۹۶۴- گزینهٔ ۲ صورت و مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$ را در $\sqrt[4]{2}-1$ ضرب می‌کنیم: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}\times\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1}=\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1}$. بنابراین

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}+1}=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$$

۱۹۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{8\sqrt{5}-8}{\sqrt{5}+1}=8\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=8\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\times\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{8(\sqrt{5}-1)^2}{4}=2(\sqrt{5}-1)^2$$
$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\times\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{5-4}=(\sqrt{5}-2)^2$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$2(\sqrt{5}-1)^2-(\sqrt{5}-2)^2=2(6-2\sqrt{5})-(9-4\sqrt{5})=3$$

۱۹۶۶- گزینهٔ ۲ ابتدا مخرج کسر $\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ را گویا می‌کنیم. برای این کار صورت و مخرج را در $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

بنابراین $x=1+\sqrt{2}$ و در نتیجه $(x-1)^2=(\sqrt{2})^2=2$.

۱۹۶۷- گزینهٔ ۲ برای گویا کردن مخرج کسر، صورت و مخرج آن را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2-(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{4+2\sqrt{4-3}}{2\sqrt{3}}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

۱۹۶۸- گزینهٔ ۳ چون در مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ ریشهٔ سوم وجود دارد، برای گویا کردن مخرج این کسر از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

به این ترتیب، صورت و مخرج این کسر را در $\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$$

به این ترتیب، عبارت مورد نظر برابر است با

$$\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}-(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4})=2\sqrt[3]{4}$$

۱۹۶۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$$

بنابراین

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}-\frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}-\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$$

اکنون با استفاده از اتحاد چاق و لاغر مخرج کسرها را گویا کرده و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}-\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2}+1)}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1}-\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2})^3+1}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1}-\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{2+1}$$
$$=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1-\sqrt[3]{2}-1=\sqrt[3]{4}$$

۱۹۷۰- گزینهٔ ۳ چون $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1=\sqrt[3]{3}^2+1\times\sqrt[3]{3}+1^2$. برای اینکه مخرج کسر اول را گویا کنیم (با استفاده از اتحاد چاق و لاغر)، صورت و مخرج آن را در $\sqrt[3]{3}-1$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}+1^2}\times\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}$$
$$=\frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{\sqrt[3]{3}^3-1^3}=\frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{3-1}=\sqrt[3]{3}-1$$

به همین ترتیب،

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{2}+1}\times\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{2}^3+1^3}=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{2+1}=\sqrt[3]{2}+1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{2}+1=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$.

۱۹۷۱- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ برابر است با $P(-3)=3(-3)^4+9(-3)^3+(-3)^2-1=8$.

۱۹۷۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $P(x)=(x-1)^3+7$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-\sqrt[3]{3}-1$ برابر است با

$$P(\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3}+1-1)^3+7=3+7=10$$

۱۹۷۳- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-4$ برابر با $P(4)$ است، و چون بنابر فرض این باقی‌مانده ۱۶ است، پس $P(4)=16$. در نتیجه

$$P(x)=ax^{13}+bx^{97}-5 \Rightarrow P(4)=a(4)^{13}+b(4)^{97}-5$$

$$16=4^{13}a+4^{97}b-5 \Rightarrow 4^{13}a+4^{97}b=21 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر با $P(-4)$ است. اکنون توجه کنید که

$$P(-4)=-4^{13}a-4^{97}b-5 \xrightarrow{\text{بنابر تساوی (۱)}} P(-4)=-21-5=-26$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر -26 است.

۱۹۷۴- گزینهٔ ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ بخش‌پذیر است، پس $P(-3)=0$، در نتیجه $P(-3)=(-3)^8+3(-3)^7+a(-3)^2-9=0$. بنابراین $9a-9=0$، پس $a=1$ و $P(x)=x^8+3x^7+x^2-9$. از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر است با $P(2-1)=P(1)$. اکنون توجه کنید که $P(1)=1+3+1-9=-4$.

۱۹۷۵- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-2$ برابر با ۴ است، پس $P(2)=4$. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(6x)$ بر $3x-1$ برابر است با $P(6\times\frac{1}{3})=P(2)=4$.

۱۹۷۶- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-3$ برابر است با $P(3+1)=P(4)$. از طرف دیگر،

$$P(x-2)=x^2-3x+2 \xrightarrow{x=6} P(4)=(6)^2-3(6)+2=20$$

۱۹۷۷- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+4$ برابر است با $P(-4)$. اکنون اگر در تساوی $P^2(x)-8xP(x)=-16x^2$ قرار دهیم $x=-4$، به‌دست می‌آید

$$P^2(-4)+32P(-4)+16^2=0 \Rightarrow (P(-4)+16)^2=0 \Rightarrow P(-4)=-16$$

۱۹۷۸- گزینهٔ ۲ بنابر فرض مسئله،

$$x^4-3x^3+4x^2+1=(x-1)Q(x)+3 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $Q(x)$ بر $x-3$ برابر با $Q(3)$ است. اکنون توجه کنید که اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=3$، به‌دست می‌آید $3^4-3(3)^3+4(3)^2+1=(3-1)Q(3)+3$. در نتیجه

$$81-81+36+1=2Q(3)+3 \Rightarrow Q(3)=17$$

۱۹۷۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$P(x)=(x+3)^3Q(x)+2x-5 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ برابر است با $P(-3)$. اکنون اگر در تساوی (۱) قرار دهیم $x=-3$، به‌دست می‌آید

$$P(-3)=2(-3)-5=-11$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر -11 است.

۱۹۸۰- گزینهٔ ۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P^2(x)$ بر $x+3$ برابر است با $P^2(-3)$. از طرف دیگر، چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+3)^3$ برابر x^2-x-3 است، از قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها نتیجه می‌شود $P(x)=(x+3)^3Q(x)+x^2-x-3$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-3$، به‌دست می‌آید $P(-3)=(-3)^2-(-3)-3=9$. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P^2(x)$ بر $x+3$ برابر است با

$$P^2(-3)=9^2=81$$

۱۹۸۱- گزینهٔ ۳ اگر چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، $P(-1)=0$. بنابراین

$$P(x)=2x^{14}-ax^5-3 \Rightarrow P(-1)=2(-1)^{14}-a(-1)^5-3=0 \Rightarrow a=1$$

۱۹۸۲- گزینهٔ ۴ چون چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+2)^2$ بخش‌پذیر است، پس بر $x+2$ نیز بخش‌پذیر است، بنابراین

$$P(-2)=0 \Rightarrow -32+48+2a+16=0 \Rightarrow a=-16$$

۱۹۸۳- گزینهٔ ۱ چون ۱، ۲ و -2 ریشه‌های $P(x)$ هستند، پس $x-1$، $x-2$ و $x+2$ عامل‌های $P(x)$ هستند. از طرف دیگر، چون $P(x)$ درجهٔ سوم است، پس عامل دیگری ندارد. بنابراین می‌توان نوشت

$$P(x)=a(x-1)(x-2)(x+2)$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x=-1$، چون $P(-1)=24$، به‌دست می‌آید

$$24=a(-2)(-3)(1) \Rightarrow a=4$$

به این ترتیب، $P(x)=4(x-1)(x-2)(x+2)$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+3$ برابر است با

$$P(-3)=4(-3-1)(-3-2)(-3+2)=-80$$

۱۹۸۴- گزینهٔ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-3)$ بر $x-5$ برابر است با $P(5-3)=P(2)$. بنابراین $P(2)=-3$. اگر در تساوی $P(x+3)=x^3-mx^2+mx+2$ قرار دهیم $x=-1$، به دست می‌آید

$$P(2)=(-1)^3-m(-1)^2+m(-1)+2=-3 \Rightarrow m=2$$

۱۹۸۵- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر ۱۲ است، پس $P(2-1)=12$، یعنی $P(1)=12$. در نتیجه

$$P(1)=1+a+6+b+10=12 \Rightarrow a+b=-5$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+2)$ بر $x+3$ برابر است با $P(-3+2)=P(-1)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-1)=1-a+6-b+10=17-(a+b)$$

$$\xrightarrow{a+b=-5} P(-1)=17-(-5)=22$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۲۲ است.

۱۹۸۶- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌های $P(x+1)$ و $Q(x+1)$ بر $x-2$ به‌ترتیب برابر ۳ و ۵ است، پس

$$P(2+1)=3 \Rightarrow P(3)=3, \quad Q(2+1)=5 \Rightarrow Q(3)=5$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)Q(x-1)$ بر $x-4$ برابر است با $P(3)Q(3)=3\times5=15$.

۱۹۸۷- گزینهٔ ۴ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-3$ و $x+3$ به‌ترتیب برابر با a و b است، پس $P(3)=a$ و $P(-3)=b$. از طرف دیگر، بنابر فرض مسئله، $P(x)=(x^2-9)Q(x)+3x-1$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=3$ و $x=-3$، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} P(3)=3\times3-1 \\ P(-3)=3(-3)-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-10 \end{cases}$$

بنابراین $a-b=18$.

۱۹۸۸- گزینهٔ ۳ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۲)$ بر $x-۳$ برابر ۵ است، پس $P(۳-۲)=۵$، یعنی $P(۱)=۵$. چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-۱)$ بر x برابر ۳ است، پس $P(۰-۱)=۳$، یعنی $P(-۱)=۳$. از طرف دیگر، چون درجهٔ $x^۲-۱$ برابر ۲ است، بنابر قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها، درجهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲-۱$ حداکثر برابر ۱ است. فرض کنید این باقی‌مانده $ax+b$ باشد. در این صورت $P(x)=(x^۲-۱)Q(x)+ax+b$. اگر در این تساوی قرار دهیم $x=۱$ و $x=-۱$، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} P(۱)=a+b \\ P(-۱)=-a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵=a+b \\ ۳=-a+b \end{cases} \Rightarrow a=۱\,,\ b=۴$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر $x+۴$ است.

۱۹۸۹- گزینهٔ ۲ بنابرفرض‌های مسئله،

$$P(x)=(x-۲)Q(x)-۳ \qquad (۱)$$

$$Q(x)=(x+۱)S(x)+۵ \qquad (۲)$$

اگر در تساوی (۱) به جای $Q(x)$ مقدار به‌دست آمده از تساوی (۲) را قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} P(x)&=(x-۲)((x+۱)S(x)+۵)-۳ \\ &=(x-۲)(x+۱)S(x)+۵(x-۲)-۳ \\ &=(x^۲-x-۲)S(x)+۵x-۱۳ \end{aligned}$$

بنابراین، از قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها نتیجه می‌شود که باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر $۵x-۱۳$ است.

۱۹۹۰- گزینهٔ ۲ چندجمله‌ای $P(x)$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} P(x)&=ax^۳+۴x^۲+۱۴x+۱۰+a=a(x^۳+۱)+۴x^۲+۱۴x+۱۰ \\ &=a(x+۱)(x^۲-x+۱)+(x+۱)(۴x+۱۰) \\ &=(x+۱)(ax^۲+(۴-a)x+a+۱۰) \end{aligned}$$

برای اینکه چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x+۱)^۲$ بخش‌پذیر باشد، باید چندجمله‌ای $Q(x)=ax^۲+(۴-a)x+a+۱۰$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد. پس

$$Q(-۱)=۰\Rightarrow a-(۴-a)+a+۱۰=۰\Rightarrow a=-۲$$

۱۹۹۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\sqrt{\sqrt{۵}+۲}=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\sqrt{۵}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt[۶]{\sqrt{۵}+۲}}&=\frac{\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۳}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}}{\sqrt[۶]{\sqrt{۵}+۲}} \\ &=\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}+۲)^۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}=\sqrt[۳]{\sqrt{۵}+۲}\times\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲} \\ &=\sqrt[۳]{(\sqrt{۵}+۲)(\sqrt{۵}-۲)}=\sqrt[۳]{۵-۴}=۱ \end{aligned}$$

۱۹۹۲- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$a=۲^{\frac{۱}{۲}}\,,\quad b=۴^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۳}}\,,\quad c=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}$$

اکنون توجه کنید که $c=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}<۲^{\frac{۱}{۳}}\times۴^{\frac{۱}{۶}}=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۲^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۳}}=b$. از طرف دیگر، $b>a$، بنابراین باید a و c را مقایسه کنیم. توجه کنید که

$$c=۲^{\frac{۱}{۳}}\times۳^{\frac{۱}{۶}}>۲^{\frac{۱}{۳}}\times۲^{\frac{۱}{۶}}=۲^{\frac{۳}{۶}}=۲^{\frac{۱}{۲}}=a$$

بنابراین $a<c<b$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$a=۲^{\frac{۱}{۲}}\,,\quad b=۴^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۲}{۳}}\,,\quad c=(۲\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۳}}$$

هر سه عدد را به توان شش می‌رسانیم (مخرج مشترک توان‌ها):

$$a^۶=(۲^{\frac{۱}{۲}})^۶=۲^۳=۸\,,\quad b^۶=(۲^{\frac{۲}{۳}})^۶=۲^۴=۱۶$$

$$c^۶=((۲\sqrt{۳})^{\frac{۱}{۳}})^۶=(۲\sqrt{۳})^۲=۱۲$$

پس $a^۶<c^۶<b^۶$ و چون a، b و c مثبت هستند، پس $a<c<b$.

۱۹۹۳- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$a^۲+ab+bc+ca=a^۲+a(b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{cases} a+b=۸ \\ b-c=۱۱ \end{cases}\Rightarrow(a+b)-(b-c)=۸-۱۱\Rightarrow a+c=-۳$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $۸\times(-۳)=-۲۴$.

راه‌حل دوم فرض کنید $b=۰$. در این صورت

$$\begin{cases} a+b=۸\Rightarrow a=۸ \\ b-c=۱۱\Rightarrow c=-۱۱ \end{cases}$$

بنابراین $a^۲+ab+bc+ca=۶۴-۸۸=-۲۴$.

۱۹۹۴- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$a-b+\sqrt{c}=۶\Rightarrow a-(b-\sqrt{c})=۶$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}})(\sqrt{a}+\sqrt{b-\sqrt{c}})=۶$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}})(۳)=۶\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}}=۲$$

به این ترتیب

$$\begin{cases} \sqrt{a}+\sqrt{b-\sqrt{c}}=۳ \\ \sqrt{a}-\sqrt{b-\sqrt{c}}=۲ \end{cases}\Rightarrow۲\sqrt{a}=۵\Rightarrow a=\frac{۲۵}{۴}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $a-b+\sqrt{c}=۶\Rightarrow b-\sqrt{c}=a-۶$

به‌جای $b-\sqrt{c}$ در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم $a-۶$:

$$\sqrt{a}+\sqrt{a-۶}=۳\Rightarrow\sqrt{a-۶}=۳-\sqrt{a}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}a-۶=۹-۶\sqrt{a}+a$$

$$۶\sqrt{a}=۱۵\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=\frac{۲۵}{۴}$$

۱۹۹۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$a^۲+\frac{۱}{a^۲}=(a+\frac{۱}{a})^۲-۲=۹-۲=۷$$

$$a^۳+\frac{۱}{a^۳}=(a+\frac{۱}{a})^۳-۳a(\frac{۱}{a})(a+\frac{۱}{a})=۲۷-۳\times۳=۱۸$$

اکنون می‌توان نوشت

$$(a^۲+\frac{۱}{a^۲})(a^۳+\frac{۱}{a^۳})=a^۵+\frac{۱}{a}+a+\frac{۱}{a^۵}$$

$$۷\times۱۸=a^۵+۳+\frac{۱}{a^۵}\Rightarrow a^۵+\frac{۱}{a^۵}=۱۲۳$$

۱۹۹۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}=23\Rightarrow\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)^2-2=23$$

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)^2=25\xrightarrow{a>0}\frac{a}{2}+\frac{2}{a}=5$$

اکنون اگر دو طرف این تساوی را به توان سه برسانیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{a^3}{8}+\frac{8}{a^3}+3\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{a}\right)=5^3$$

$$\frac{a^3}{8}+\frac{8}{a^3}+3\times5=125\Rightarrow\frac{a^3}{8}+\frac{8}{a^3}=110$$

۱۹۹۷- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $y=x^2+x+1$، آن‌گاه

$$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=y(y+1)-12=y^2+y-12=(y-3)(y+4)$$

از طرف دیگر،

$$y-3=x^2+x-2=(x-1)(x+2),\quad y+4=x^2+x+5$$

چون $y+4$ درجهٔ دوم است و ریشه‌ای ندارد، پس تجزیه نمی‌شود. بنابراین عامل‌های عبارت مورد نظر $x-1$ ، $x+2$ و x^2+x+5 هستند.

۱۹۹۸- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم $A=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)\sqrt{4+\sqrt{7}}$. در این صورت،

$$A^2=\frac{1}{9}(\sqrt{7}-1)^2(4+\sqrt{7})=\frac{1}{9}(7+1-2\sqrt{7})(4+\sqrt{7})$$

$$=\frac{2}{9}(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})=\frac{2}{9}(16-7)=2$$

چون A عددی مثبت است، $A=\sqrt{2}$.

۱۹۹۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{2}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}=\frac{2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1-3)(1-2)}=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})$$

۲۰۰۰- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x-1)$ بر $x-2$ برابر ۱۲ است، پس $P(2-1)=12$ ، یعنی $P(1)=12$. در نتیجه

$$P(1)=1+a+6+b+10=12\Rightarrow a+b=-5$$

از طرف دیگر، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x+2$ برابر است با $P(-2+1)=P(-1)$. اکنون توجه کنید که

$$P(-1)=1-a+6-b+10=17-(a+b)=17-(-5)=22$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ مورد نظر برابر ۲۲ است.

۲۰۰۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $x=\sqrt[7]{3\sqrt[3]{3}}=3^{\frac{1}{7}}\times3^{\frac{1}{21}}=3^{\frac{4}{21}}$ ، بنابراین

$$\sqrt[4]{x^{21}}=x^{\frac{21}{4}}=\left(3^{\frac{4}{21}}\right)^{\frac{21}{4}}=3$$

۲۰۰۲- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}=2^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{1}{12}}\times4^{\frac{1}{36}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}}\times2^{\frac{1}{18}}=2^{\frac{5}{9}}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}\times\sqrt[9]{16}=2^{\frac{5}{9}}\times2^{\frac{4}{9}}=2$$

۲۰۰۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\sqrt{\frac{a}{b^3}}=\sqrt{ab^{-3}}=a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^5}}=\sqrt[3]{b^2a^{-5}}=b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[12]{a^{14}b^{10}}=a^{\frac{14}{12}}b^{\frac{10}{12}}=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{5}{3}}a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\frac{7}{6}}\times b^{-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}=a^0b^0=1$$

۲۰۰۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$3^{x-1}+3^{-x-1}=2\Rightarrow\frac{3^x}{3}+\frac{3^{-x}}{3}=2\Rightarrow3^x+3^{-x}=6$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، به‌دست می‌آید

$$3^{2x}+3^{-2x}+2\times3^x\times3^{-x}=36\Rightarrow9^x+9^{-x}+2=36$$

$$9^x+9^{-x}=34$$

۲۰۰۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$b=(a+b)-a=\sqrt{17}-\frac{\sqrt{17}+3}{2}=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$$

بنابراین $a-b=3$ و $ab=2$. به این ترتیب،

$$a^3-b^3+9ab=(a-b)\left((a-b)^2+3ab\right)+9ab=3(9+6)+18=63$$

۲۰۰۶- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف تساوی داده شده را در $1-\sqrt[8]{2}$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$(1+\sqrt{2})(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt[8]{2})(1-\sqrt[8]{2})=\frac{1-\sqrt[8]{2}}{x^3-1}$$

$$(1+\sqrt{2})(1+\sqrt[4]{2})(1-\sqrt[4]{2})=\frac{1-\sqrt[8]{2}}{x^3-1}$$

$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=\frac{1-\sqrt[8]{2}}{x^3-1}\Rightarrow1-2=\frac{1-\sqrt[8]{2}}{x^3-1}$$

$$-1=\frac{1-\sqrt[8]{2}}{x^3-1}\Rightarrow x^3-1=\sqrt[8]{2}-1\Rightarrow x^3=\sqrt[8]{2}$$

$$(x^3)^{16}=(\sqrt[8]{2})^{16}\Rightarrow x^{48}=2^2=4$$

۲۰۰۷- گزینهٔ ۱ ابتدا همهٔ ریشه‌ها را به ریشهٔ ششم تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\times\sqrt[6]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^3}\times\sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)^2}\times\sqrt[6]{\sqrt{2}-1}$$

$$=\sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^3(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^3(\sqrt{2}-1)^3}$$

$$=\sqrt[6]{\left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right)^3}$$

$$=\sqrt[6]{(2-1)^3}=\sqrt[6]{1}=1$$

۲۰۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{3+2+2\sqrt{6}-1}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{6}+2)}\times\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{2(6-4)}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-2)}{4}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{4}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{4}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{2}$$

۲۰۰۹- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$x^2y^2-x^2-y^2-4xy+1=x^2y^2-2xy+1-(x^2+y^2+2xy)$$

$$=(xy-1)^2-(x+y)^2=(xy-1-x-y)(xy-1+x+y)$$

۲۰۱۰- گزینهٔ ۳ چون چندجمله‌ای $P(x+1)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است، پس $P(2+1)=P(3)=0$. اکنون اگر در تساوی $P(1-x)=ax^2-x+2a$ قرار دهیم $x=-2$، به‌دست می‌آید

$$P(3)=a(-2)^2-(-2)+2a=0\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

۲۰۱۱- گزینهٔ ۳ چون معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس $\Delta=۰$. در نتیجه

$$\Delta=b^۲-۴ac=۰\Rightarrow ۲^۲-۴\times۲\times(k-۲)=۰\Rightarrow ۴-۸(k-۲)=۰\Rightarrow k=\frac{۵}{۲}$$

۲۰۱۲- گزینهٔ ۴ دلتای معادله باید مثبت باشد:

$$\Delta=۴k^۲-k=k(۴k-۱)>۰\Rightarrow k>\frac{۱}{۴}\ \text{یا}\ k<۰$$

بنابراین k متعلق به مجموعهٔ $\mathbb{R}-[۰,\frac{۱}{۴}]$ است.

۲۰۱۳- گزینهٔ ۳ چون معادلهٔ $x^۲-۴x+k-۱=۰$ جواب حقیقی ندارد، پس

$$\Delta=۱۶-۴(k-۱)<۰\Rightarrow k-۱>۴\Rightarrow k>۵$$

در معادلهٔ $x^۲+۲x-k+۶=۰$ مقدار Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta=۴-۴(-k+۶)=۴k-۲۰=۴(k-۵)$$

چون $k>۵$، پس $۴(k-۵)>۰$ و در نتیجه این معادله دو جواب حقیقی دارد.

۲۰۱۴- گزینهٔ ۱ معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم:

$$(x-\sqrt{۲})(x-\sqrt{۵})=۰\xrightarrow{x_۱<x_۲}x_۱=\sqrt{۲}\ ,\ x_۲=\sqrt{۵}$$

بنابراین $x_۱^۲+x_۲^۴=(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۵})^۴=۲+۲۵=۲۷$.

۲۰۱۵- گزینهٔ ۱ چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است و دیگری $\frac{-\sqrt{۱۲}}{۳}$. چون $x_۱<x_۲$، بنابراین

$$x_۱=-\frac{\sqrt{۱۲}}{۳},\ \ x_۲=۱\Rightarrow ۳x_۱+x_۲=۱-\sqrt{۱۲}$$

۲۰۱۶- گزینهٔ ۳ چون a جواب معادلهٔ $x^۲-x-۵=۰$ است، پس در این معادله صدق می‌کند، یعنی

$$a^۲-a-۵=۰\Rightarrow a^۲-a=۵$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود $b^۲-b=۵$. بنابراین

$$(a^۲-a-۲)(b^۲-b+۲)=(۵-۲)(۵+۲)=۲۱$$

۲۰۱۷- گزینهٔ ۱ اگر اندازهٔ طول مستطیل را y و اندازهٔ عرض آن را x فرض کنیم، اندازهٔ قطر آن می‌شود $\sqrt{x^۲+y^۲}$. پس $y=۴+x$ و $x^۲+y^۲=۳۰$. در نتیجه

$$x^۲+(۴+x)^۲=۳۰\Rightarrow x^۲+۱۶+۸x+x^۲=۳۰$$

$$x^۲+۴x-۷=۰\Rightarrow x=-۲+\sqrt{۱۱}\ ,\ x=-۲-\sqrt{۱۱}$$

اگر $x=-۲-\sqrt{۱۱}$، x عددی منفی می‌شود، بنابراین قابل قبول نیست. پس $x=-۲+\sqrt{۱۱}$ و در نتیجه $y=۴+(-۲+\sqrt{۱۱})=۲+\sqrt{۱۱}$. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با

$$S=xy=(\sqrt{۱۱}-۲)(\sqrt{۱۱}+۲)=۱۱-۴=۷$$

۲۰۱۸- گزینهٔ ۱ دو عدد را x و y می‌نامیم. پس $\frac{y}{x}=۴$ و $xy=x+y+۶$. بنابراین $y=۴x$ و

$$x(۴x)=x+۴x+۶\Rightarrow ۴x^۲-۵x-۶=۰$$

$$\Delta=۲۵+۹۶=۱۲۱\Rightarrow x=\frac{۵\pm۱۱}{۸}\Rightarrow x_۱=۲,\ x=-\frac{۳}{۴}\ \text{(غ.ق.ق)}$$

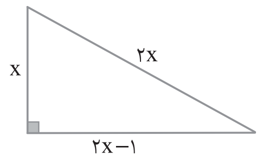
بنابراین $y=۸$ و در نتیجه $y-x=۶$.

۲۰۱۹- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر و بنابر قضیهٔ فیثاغورس، معادلهٔ $(۲x)^۲=x^۲+(۲x-۱)^۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$۴x^۲=x^۲+۴x^۲-۴x+۱\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow x=۲-\sqrt{۳},x=۲+\sqrt{۳}$$

چون $۲x-۱$ اندازهٔ یکی از ضلع‌های مثلث است، پس $۲x-۱>۰$، یعنی $x>\frac{۱}{۲}$. بنابراین $x=۲-\sqrt{۳}$ قابل قبول نیست و در نتیجه $x=۲+\sqrt{۳}$. از طرف دیگر محیط مثلث برابر است با

$$P=x+۲x+۲x-۱=۵x-۱=۵(۲+\sqrt{۳})-۱=۹+۵\sqrt{۳}$$



۲۰۲۰- گزینهٔ ۲ این دو عدد را x و $x+۲$ در نظر می‌گیریم. بنابراین تساوی $(x+۲)^۳-x^۳=۴۸۸$ برقرار است. پس

$$x^۳+۶x^۲+۱۲x+۸-x^۳=۴۸۸\Rightarrow ۶x^۲+۱۲x-۴۸۰=۰$$

$$x^۲+۲x-۸۰=۰\Rightarrow (x-۸)(x+۱۰)=۰\Rightarrow x=۸\ ,\ x=-۱۰$$

چون عددها طبیعی و زوج هستند، پس $x=-۱۰$ قابل قبول نیست. بنابراین $x=۸$ و دو عدد مورد نظر ۸ و ۱۰ هستند و تفاضل مربعات آن‌ها برابر $۱۰^۲-۸^۲=۱۰۰-۶۴$، یعنی ۳۶ است.

۲۰۲۱- گزینهٔ ۲ دلتای معادله باید برابر با صفر باشد:

$$\Delta=۴(m+۱)^۲-۴m(m+۱)=۴(m+۱)(m+۱-m)=۴(m+۱)=۰$$

بنابراین $m=-۱$.

۲۰۲۲- گزینهٔ ۲ اگر معادله حداکثر یک جواب حقیقی داشته باشد، باید $\Delta\le۰$. پس

$$\Delta=۳۶-۴\times۴(k-۲)\le۰\Rightarrow ۶۸-۱۶k\le۰\Rightarrow k\ge\frac{۱۷}{۴}$$

پس حداقل مقدار k برابر $\frac{۱۷}{۴}$ است.

۲۰۲۳- گزینهٔ ۲ چون معادلهٔ $x^۲+۲x+b=۰$ دو جواب حقیقی دارد، پس $\Delta=۴-۴b>۰$. اکنون دلتای معادلهٔ $x^۲-۶x+b+۸=۰$ را حساب می‌کنیم $\Delta=۳۶-۴(b+۸)=۴-۴b>۰$. بنابراین، معادلهٔ اخیر نیز دو جواب دارد.

۲۰۲۴- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول

$$x^۲+(m-۱)x+m-۲m^۲=۰$$

$$\Delta=(m-۱)^۲-۴(m-۲m^۲)=m^۲-۲m+۱-۴m+۸m^۲$$

$$=۹m^۲-۶m+۱=(۳m-۱)^۲$$

$$x=\frac{(۱-m)\pm\sqrt{(۳m-۱)^۲}}{۲}=\frac{(۱-m)\pm(۳m-۱)}{۲}\Rightarrow x_۱=۱-۲m, x_۲=m$$

حالت اول

$$x_۱=۱-۲m<۰\Rightarrow m>\frac{۱}{۲}, x_۲=m<۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}<m<۲$$

حالت دوم

$$x_1=1-2m<2\Rightarrow m>-\frac{1}{2},\ x_2=m<0\Rightarrow -\frac{1}{2}<m<0$$

پس می‌توان گفت $m\in(-\frac{1}{2},0)\cup(\frac{1}{2},2)$.

راه‌حل دوم اگر معادله را به‌صورت $x^2+(m-1)x-m(2m-1)=0$ بنویسیم، به کمک تجزیه می‌توانیم آن را حل کنیم. در واقع به دنبال دو عدد هستیم که حاصل‌ضربشان $-m(2m-1)$ و حاصل‌جمعشان $m-1$ باشد. پس یکی از این دو عدد $2m-1$ و دیگر $-m$ است. بنابراین $(x-m)(x+2m-1)=0$. پس جواب‌های معادله $x_1=1-2m$ و $x_2=m$ هستند. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت اول $x_1=1-2m<0\Rightarrow m>\frac{1}{2},\quad x_2=m<2\Rightarrow \frac{1}{2}<m<2$

حالت دوم $x_1=1-2m<2\Rightarrow m>-\frac{1}{2},\quad x_2=m<0\Rightarrow -\frac{1}{2}<m<0$

بنابراین $m\in(-\frac{1}{2},0)\cup(\frac{1}{2},2)$.

۲۰۲۵- گزینهٔ ۱ مجموع ضرایب معادله برابر است با $2-m+m-2=0$. پس یکی از جواب‌های معادله برابر ۱ است.

۲۰۲۶- گزینهٔ ۲ در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ اگر $a-b+c=0$، آن‌گاه جواب‌های معادله $x=-1$ و $x=-\frac{c}{a}$ هستند.

در معادلهٔ $(\sin^2\alpha)x^2+x+\cos^2\alpha=0$،

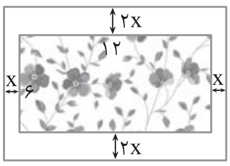
$$a=\sin^2\alpha,\ b=1,\ c=\cos^2\alpha\Rightarrow a-b+c=\cos^2\alpha-1+\sin^2\alpha=0$$

بنابراین $x_1=-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-\cot^2\alpha$ و $x_2=-1$. توجه کنید که چون $0^\circ<\alpha<45^\circ$، پس $\cot\alpha>1$ و در نتیجه $-\cot^2\alpha<-1$. بنابراین

$$x_2^2-x_1=(-1)^2-(-\cot^2\alpha)=1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

۲۰۲۷- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل واضح است که ابعاد قاب $12+2x$ و $6+4x$ است. بنابراین مساحت قاب برابر است با $(12+2x)(6+4x)$. پس

$$(6+4x)(12+2x)=104\Rightarrow 2x^2+15x-8=0\Rightarrow x=\frac{1}{2},\ x=-8$$



$x=-8$ قابل قبول نیست. پس $x=\frac{1}{2}$ و محیط قاب برابر است با

$$P=2(6+4x+12+2x)=2(6x+18)=42cm$$

۲۰۲۸- گزینهٔ ۱ سن کنونی مریم را x و سن کنونی برادرش را y در نظر می‌گیریم. در این صورت $x-2=7(y-2)$ و $x=y^2$. اگر در معادلهٔ اول به جای x قرار دهیم y^2، به‌دست می‌آید:

$$y^2-2=7(y-2)\Rightarrow y^2-7y+12=0\Rightarrow (y-3)(y-4)=0\Rightarrow y=3,4$$

اگر $y=3$، آن‌گاه $x=9$ یعنی مریم و برادرش در مجموع ۱۲ سال دارند که در گزینه‌ها نیست. اگر $y=4$، آن‌گاه $x=16$. یعنی مریم و برادرش در مجموع ۲۰ سال دارند که در گزینهٔ (۱) آمده است.

۲۰۲۹- گزینهٔ ۳ اگر طول ضلع مربع x باشد، اندازهٔ مساحت آن x^2 و طول قطر آن $\sqrt{2}x$ است. بنابراین طول ضلع مربع را از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+\sqrt{2}x=\frac{7}{2}\Rightarrow x^2+\sqrt{2}x-\frac{7}{2}=0$$

$$x=2-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

محیط مربع $4x$ است که می‌شود $8-2\sqrt{2}$.

۲۰۳۰- گزینهٔ ۳ طول یک تکه را x بگیرید. در این صورت طول تکهٔ دیگر $20-x$ است. بنابراین طول هر ضلع مربع نظیر تکهٔ اول $\frac{x}{4}$ و طول هر ضلع مربع نظیر تکهٔ دوم $\frac{20-x}{4}$ است. در نتیجه، مساحت این مربع‌ها $(\frac{x}{4})^2$ و $(\frac{20-x}{4})^2$ است. به این ترتیب،

$$(\frac{x}{4})^2+(\frac{20-x}{4})^2=13\Rightarrow x^2-20x+96=0\Rightarrow x=12,\ x=8$$

چون $20=8+12$، پس، طول یکی از تکه‌ها ۱۲ سانتی‌متر و طول تکهٔ دیگر ۸ سانتی‌متر و اختلاف اندازه‌های آن‌ها برابر ۴ سانتی‌متر است.

۲۰۳۱- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=m+1=5\Rightarrow m=4$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر است با $\alpha\beta=-2m-1=-9$.

۲۰۳۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_1x_2=-5$ و $x_1+x_2=3$. در نتیجه

$$x_1(x_2-2)+x_2(x_1-2)=2x_1x_2-2(x_1+x_2)=2(-5)-2(3)=-16$$

۲۰۳۳- گزینهٔ ۴ جواب‌های معادلهٔ $x^2-2x-5=0$ را با α و β نشان می‌دهیم. در نتیجه باید حاصل $(2-\beta)(2-\alpha)=(\beta-2)(\alpha-2)$ را بیابیم. برای این کار می‌توانیم یکی از روش‌های زیر را به کار ببریم.

راه‌حل اول دقت کنید که $(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$. از طرف دیگر، $\alpha+\beta=2$ و $\alpha\beta=-5$. بنابراین $(\alpha-2)(\beta-2)=-5-4+4=-5$، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

راه‌حل دوم می‌دانیم $x^2-2x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$. اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم ۲، به دست می‌آید $(2-\alpha)(2-\beta)=-5$. چون $\alpha\beta=-5$، پس حاصل‌ضرب جواب‌ها تغییر نکرده است.

۲۰۳۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$x_1+x_2=-(k+1)=-1-k,\quad x_1x_2=8$$

بنابراین

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{-1-k}{8}=-\frac{3}{4}$$

بنابراین $k=5$.

۲۰۳۵- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\frac{2}{\beta}$ و در نتیجه $\alpha\beta=2$. بنابراین

$$\frac{m-1}{2}=2\Rightarrow m-1=4\Rightarrow m=5$$

۲۰۳۶- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha=\beta^2$. از طرف دیگر،

$$\alpha\beta=-\frac{27}{8}\Rightarrow\beta^3=-\frac{27}{8}\Rightarrow\beta=-\frac{3}{2}$$

پس $\alpha=\frac{9}{4}$، همچنین $\alpha+\beta=-\frac{m}{8}$. بنابراین $\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{m}{8}\Rightarrow m=-6$

۲۰۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)\qquad(1)$$

از طرف دیگر، $x_1+x_2=2$ و $x_1x_2=k$. در نتیجه، از تساوی (۱) و اینکه $x_1^3+x_2^3=6$ به‌دست می‌آید $8=6+6k$. بنابراین $k=\frac{1}{3}$.

۲۰۳۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_1+x_2=3k$ و $x_1x_2=9$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=6\Rightarrow(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2=6^2$$

$$x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=36\Rightarrow 3k-2\sqrt{9}=36\Rightarrow k=14$$

۲۰۳۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\alpha+\beta=3\Rightarrow(\alpha+\beta)^2=9,\quad |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{13}\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=13$$

پس معادله‌ای مورد نظر است که جواب‌های آن ۹ و ۱۳ باشند. چون مجموع این جواب‌ها برابر ۲۲ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۱۷ است، پس معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-22x+117=0$$

۲۰۴۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا جواب‌های معادلهٔ $2x^2+3x-9=0$ را می‌یابیم:

$$2x^2+3x-9=0\Rightarrow(2x-3)(x+3)=0\Rightarrow x_1=\frac{3}{2},\ x_2=-3$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ $9x^2-ax+b=0$ به صورت زیر هستند:

$$\alpha=\frac{1}{x_1^2}-3=\frac{4}{9}-3=-\frac{23}{9},\quad \beta=\frac{1}{x_2^2}-3=\frac{1}{9}-3=-\frac{26}{9}$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{a}{9}$. بنابراین $\frac{a}{9}=-\frac{49}{9}\Rightarrow a=-49$

راه‌حل دوم جواب‌های معادلهٔ $2x^2+3x-9=0$ را با α و β نشان می‌دهیم. اگر جواب‌های معادلهٔ $9x^2-ax+b=0$ را با z و t نشان دهیم، آن‌گاه $z=\frac{1}{\alpha^2}-3$ و $t=\frac{1}{\beta^2}-3$.

توجه کنید که $z+t=\frac{a}{9}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-6=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}-6$. چون $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$ و $\alpha\beta=-\frac{9}{2}$، پس $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{9}{4}+9=\frac{45}{4}$. بنابراین

$$\frac{a}{9}=\frac{\frac{45}{4}}{\frac{81}{4}}-6=\frac{5}{9}-6\Rightarrow a=-49$$

۲۰۴۱- گزینهٔ ۴ β جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2-\beta-7=0\Rightarrow 2\beta^2=\beta+7$$

از طرف دیگر، $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$. بنابراین $\alpha+2\beta^2=\alpha+\beta+7=\frac{1}{2}+7=\frac{15}{2}$.

۲۰۴۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که مجموع جواب‌های معادله برابر $\frac{3}{2}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $-\frac{5}{2}$ است. بنابراین

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}=-\frac{15}{4}$$

۲۰۴۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ و $\alpha\beta=-\frac{5}{2}$. بنابراین

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{1}{4}-2(-\frac{5}{2})}{-\frac{5}{2}}=-\frac{21}{10}$$

۲۰۴۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. بنابراین

$$3=\frac{\sqrt{5^2-4(k+1)(-2)}}{|-2|}\Rightarrow 6=\sqrt{8k+33}$$

$$6^2=8k+33\Rightarrow 8k=3\Rightarrow k=\frac{3}{8}$$

۲۰۴۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_1+x_2=1$ و

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{1-4(2k-3)}=\sqrt{13-8k}$$

از طرف دیگر،

$$x_1^2-x_2^2=6\Rightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2)=6\Rightarrow\ x_1-x_2=6$$

پس $x_1-x_2>0$، در نتیجه

$$\sqrt{13-8k}=6\Rightarrow 13-8k=36\Rightarrow k=-\frac{23}{8}$$

۲۰۴۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_1+x_2=15$ و $x_1x_2=9$. بنابراین $x_1,x_2>0$ و

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}^2+\sqrt{x_2}^2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{15}{\sqrt{9}}=5$$

۲۰۴۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $x_1+x_2=-(\frac{-6}{3})=2$ و $x_1x_2=-\frac{4}{3}$.

از طرف دیگر،

$$S=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_1x_2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2=4$$

$$P=(x_1^2+x_1x_2)(x_2^2+x_1x_2)=(x_1(x_1+x_2))(x_2(x_1+x_2))$$

$$=x_1x_2(x_1+x_2)^2=-\frac{4}{3}\times4=-\frac{16}{3}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر $x^2-4x-\frac{16}{3}=0$ یا $3x^2-12x-16=0$ است.

۲۰۴۸- گزینهٔ ۱ اگر جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x-5=0$ را α و β بنامیم، آن‌گاه $\alpha+\beta=3$ و $\alpha\beta=-5$. جواب‌های معادلهٔ مورد نظر α^3 و β^3 هستند. بنابراین

$$S=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=27-3\times(-5)\times3=72$$

$$P=\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=(-5)^3=-125$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-72x-125=0$$

۲۰۴۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=-۱$ و $\alpha\beta=-۳$، بنابراین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$S=\alpha^۲+\frac{۱}{\beta}+\beta^۲+\frac{۱}{\alpha}=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=۱+۶+\frac{-۱}{-۳}=\frac{۲۲}{۳}$$

$$P=(\alpha^۲+\frac{۱}{\beta})(\beta^۲+\frac{۱}{\alpha})=(\alpha\beta)^۲+\alpha+\beta+\frac{۱}{\alpha\beta}=۹-۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲۳}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۲۲}{۳}x+\frac{۲۳}{۳}=۰\Rightarrow ۳x^۲-۲۲x+۲۳=۰$$

۲۰۵۰- گزینهٔ ۳ اگر دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}(x_۱+x_۲)+x_۱x_۲=-۱\\(x_۱+x_۲)-x_۱x_۲=-۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S+P=-۱\\S-P=-۱۱\end{cases}$$

را حل کنیم، به‌دست می‌آید $S=-۶$ و $P=۵$. بنابراین $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۶x+۵=۰$ هستند.

۲۰۵۱- گزینهٔ ۲ کافی است در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ نابرابری $\frac{c}{a}<۰$ برقرار باشد تا معادله دو جواب داشته باشد که یکی مثبت و یکی منفی است. پس $\frac{m-۴}{m+۲}<۰$ در نتیجه $-۲<m<۴$. پس m می‌تواند مقادیر صحیح ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد.

۲۰۵۲- گزینهٔ ۲ اگر $a=۰$، آن‌گاه معادله فقط یک جواب دارد که قابل قبول نیست. اگر $a\neq۰$، آن‌گاه حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با $\frac{۱-a^۲}{a^۲}$ که باید منفی باشد. پس $\frac{۱-a^۲}{a^۲}<۰\Rightarrow ۱-a^۲<۰\Rightarrow a^۲>۱\Rightarrow |a|>۱$

۲۰۵۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\Delta=۴m^۲+۴m+۴\Rightarrow(۲m+۱)^۲+۳>۰$$

پس معادله حتماً دو جواب دارد. برای اینکه جواب‌ها هم‌علامت باشند، کافی است حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد، پس $\frac{c}{a}>۰\Rightarrow -m-۱>۰\Rightarrow m<-۱$

۲۰۵۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $a=۰$، آن‌گاه معادله به صورت $-۸x+۹=۰$ درمی‌آید که فقط یک جواب دارد. با شرط $a\neq۰$ باید دلتای معادله مثبت باشد:

$$\Delta=۱۶(a+۲)^۲-۱۶a\times۹=۱۶((a+۲)^۲-۹a)=۱۶(a^۲-۵a+۴)$$
$$=۱۶(a-۱)(a-۴)>۰$$

بنابراین $a\in(-\infty,۰)\cup(۰,۱)\cup(۴,+\infty)$. همچنین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها باید مثبت باشند: $\frac{a+۲}{a}>۰$ و $\frac{۹}{۴a}>۰$. پس $a>۰$، در نتیجه $a\in(۰,۱)\cup(۴,+\infty)$، یعنی a مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را نمی‌تواند داشته باشد.

۲۰۵۵- گزینهٔ ۱ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، باید شرط‌های $\Delta>۰$، $\alpha\beta>۰$ و $\alpha+\beta<۰$ برقرار باشند تا معادله دو جواب منفی داشته باشد. در نتیجه

$$\Delta=m^۲-۸(m-۲)>۰\Rightarrow m^۲-۸m+۱۶>۰\Rightarrow(m-۴)^۲>۰\Rightarrow m\neq۴$$

$$\alpha+\beta<۰\Rightarrow\frac{-m}{۲}<۰\Rightarrow m>۰,\quad \alpha\beta>۰\Rightarrow\frac{m-۲}{۲}>۰\Rightarrow m>۲$$

بنابراین $m\in(۲,+\infty)-\{۴\}$.

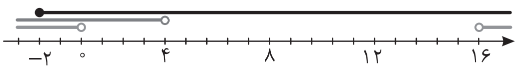
۲۰۵۶- گزینهٔ ۲ برای اینکه معادله دو جواب داشته باشد باید

$$\Delta>۰\Rightarrow(m-۴)^۲-۴(۲m+۴)>۰\Rightarrow m^۲-۱۶m>۰\Rightarrow m<۰ \text{ یا } m>۱۶$$

برای اینکه دو جواب معادله نامنفی باشند، باید مجموع آن‌ها مثبت و حاصل‌ضربشان نامنفی باشد:

$$\frac{c}{a}\geq۰\Rightarrow۲m+۴\geq۰\Rightarrow m\geq-۲,\quad -\frac{b}{a}>۰\Rightarrow۴-m>۰\Rightarrow m<۴$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک جواب‌های به‌دست آمده برای m به‌صورت $-۲\leq m<۰$ است و در نتیجه m می‌تواند مقادیر صحیح ۲- و ۱- را داشته باشد.



۲۰۵۷- گزینهٔ ۳ معادلهٔ مورد نظر همواره دو جواب دارد $(\Delta=m^۲+۸>۰)$. اگر معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع آن‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. بنابراین

$$m-۲<۰\Rightarrow m<۲,\quad -(m+۱)>۰\Rightarrow m<-۱$$

پس $m<-۱$.

۲۰۵۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\Delta=(۲m+۱)^۲$. چون معادله دو جواب دارد، باید $m\neq-\frac{۱}{۲}$. چون قدرمطلق جواب منفی از جواب مثبت کوچک‌تر است، پس مجموع جواب‌ها مثبت است و چون جواب‌ها مختلف‌العلامت هستند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها منفی است. بنابراین

$$x_۱+x_۲=-\frac{۲m-۱}{m}>۰\Rightarrow۰<m<\frac{۱}{۲},\quad x_۱x_۲=-\frac{۲}{m}<۰\Rightarrow m>۰$$

بنابراین $۰<m<\frac{۱}{۲}$.

۲۰۵۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $\Delta\geq۰$، پس

$$۴-۴m+۸\geq۰\Rightarrow m\leq۳$$

از طرف دیگر، اگر معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، آن‌گاه

$$\frac{c}{a}\leq۰\Rightarrow m-۲\leq۰\Rightarrow m\leq۲$$

همچنین، ممکن است معادله دو جواب نامثبت داشته باشد، که در این صورت باید مجموع آن‌ها نامثبت باشد، یعنی $-\frac{b}{a}\leq۰$، که ممکن نیست، زیرا $-\frac{b}{a}=۲$.
بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۲ است.

۲۰۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\Delta=۴m^۲+۴m+۸=(۲m+۱)^۲+۷>۰$$

بنابراین معادله حتماً دو جواب دارد. از طرف دیگر، برای اینکه معادله دو جواب منفی داشته باشد، باید مجموع جواب‌ها منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت باشد. یعنی باید

$$-\frac{b}{a}<۰\Rightarrow۲m<۰\Rightarrow m<۰,\quad \frac{c}{a}>۰\Rightarrow-m-۲>۰\Rightarrow m<-۲$$

پس اگر $m<-۲$، معادله دو جواب منفی دارد. اکنون توجه کنید که اگر $m=-۲$، معادله به‌صورت $x^۲+۴x=۰$ درمی‌آید که یک جواب آن $x=۰$ و جواب دیگر $x=-۴$ است. پس در این حالت نیز معادله جواب مثبت ندارد. بنابراین اگر $m>-۲$، معادله یا دو جواب مثبت، یا دو جواب مختلف‌العلامت دارد، که در هر صورت یکی از جواب‌ها مثبت است.

۲۰۶۱- گزینهٔ ۳ چون $x=\frac{۱}{۳}$ و $x=-۱$ جواب‌های معادله هستند، پس

$$\begin{cases}۶(\frac{۱}{۲۷})-۵(\frac{۱}{۹})+a(\frac{۱}{۳})+b=۰\\ ۶(-۱)-۵\times۱-a+b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+۳b=۱\\ a-b=-۱۱\end{cases}$$

بنابراین $a=-۸$ و $b=۳$. پس معادله به شکل $۶x^۳-۵x^۲-۸x+۳=۰$ در می‌آید که چون $\frac{۱}{۳}$ و -۱ جواب‌های آن هستند، پس $۳x-۱$ و $x+۱$ عامل‌های عبارت سمت چپ معادله هستند و به کمک تقسیم می‌توان نوشت $(x+۱)(۳x-۱)(۲x-۳)=۰$. بنابراین جواب دیگر معادله $x=\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه $k=\frac{۳}{۲}$ و $\frac{ab}{k}=\frac{(-۸)\times۳}{\frac{۳}{۲}}=-۱۶$.

۲۰۶۲- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۳+۸+x^۲-۵x-۱۴=۰\Rightarrow(x+۲)(x^۲-۲x+۴)+(x+۲)(x-۷)=۰$$

$$(x+۲)(x^۲-۲x+۴+x-۷)=۰\Rightarrow(x+۲)(x^۲-x-۳)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲,\quad x^۲-x-۳=۰\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

پس حاصل‌ضرب جواب‌های منفی معادله برابر است با

$$(\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲})(-۲)=\sqrt{۱۳}-۱$$

۲۰۶۳- گزینهٔ ۴ واضح است که $x=-۱$ جواب معادله است. پس $x+۱$ عامل عبارت سمت چپ معادله است

$$x^۳+x^۲+x^۲-mx-m-۱=۰\Rightarrow x^۲(x+۱)+(x+۱)(x-m-۱)=۰$$

$$(x+۱)(x^۲+x-(m+۱))=۰$$

برای اینکه معادله سه جواب داشته باشد، باید معادلهٔ $x^۲+x-(m+۱)=۰$ دو جواب داشته باشد و هیچ یک از این جواب‌ها برابر -۱ نباشند. بنابراین

$$\Delta=۱+۴(m+۱)>۰\Rightarrow۵+۴m>۰\Rightarrow m>-\frac{۵}{۴}$$

$$(-۱)^۲-۱-(m+۱)\neq۰\Rightarrow m\neq-۱$$

پس $m\in(-\frac{۵}{۴},+\infty)-\{-۱\}$.

۲۰۶۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر فرض کنیم $t=x^۲\geq۰$، معادله به‌صورت $t^۲-۵t-۳=۰$ در می‌آید که جواب‌های آن $t=\frac{۵\pm\sqrt{۳۷}}{۲}$ هستند.

جواب $\frac{۵-\sqrt{۳۷}}{۲}$ قابل قبول نیست چون عددی منفی است. بنابراین

$$x^۲=\frac{۵+\sqrt{۳۷}}{۲}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۵+\sqrt{۳۷}}{۲}}$$

یعنی معادله دو جواب دارد.

راه‌حل دوم اگر فرض کنیم $t=x^۲\geq۰$، معادله به‌صورت $t^۲-۵t-۳=۰$ در می‌آید، که در آن $\frac{c}{a}<۰$ است. پس معادله دو جواب مختلف العلامت دارد. که با توجه به فرض $t\geq۰$، جواب منفی غیرقابل قبول و جواب مثبت قابل قبول خواهد بود و $x=\pm\sqrt{t}$. پس معادلهٔ داده شده دو جواب دارد.

۲۰۶۵- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود $t^۲-۴t-۱۲=۰$، پس

$$t^۲-۴t-۱۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t+۲)=۰$$

$$t=-۲\quad(\text{غ.ق.ق}),\quad t=۶\Rightarrow x^۲=۶\Rightarrow x=\pm\sqrt{۶}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -۶ است.

۲۰۶۶- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $x^۲=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر می‌شود $t^۲+(۲m-۱)t-۲m=۰$. چون معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد، پس این معادلهٔ درجهٔ دوم دو جواب مثبت دارد. بنابراین

$$\Delta>۰\Rightarrow(۲m-۱)^۲+۸m>۰\Rightarrow(۲m+۱)^۲>۰\Rightarrow m\neq-\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{c}{a}>۰\Rightarrow-۲m>۰\Rightarrow m<۰$$

$$-\frac{b}{a}>۰\Rightarrow-(۲m-۱)>۰\Rightarrow۲m-۱<۰\Rightarrow m<\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مجموعهٔ مقادیر m به‌صورت $(-\infty,۰)-\{-\frac{۱}{۲}\}$ است.

۲۰۶۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، به معادلهٔ $t^۲-kt+\frac{۳-۲k}{۴}=۰$ می‌رسیم. اگر این معادله فقط یک جواب مثبت مانند $t_۱$ داشته باشد، معادلهٔ اصلی دو جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t_۱}$ دارد:

$$\begin{cases}\Delta=۰\\ t_۱=-\frac{b}{۲a}>۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^۲-(۳-۲k)=۰\\ \frac{k}{۲}>۰\Rightarrow k>۰\end{cases}$$

$$k^۲+۲k-۳=۰\Rightarrow k=-۳\ (\text{غ.ق.ق}),\ k=۱$$

همچنین اگر معادلهٔ درجهٔ دوم یک جواب منفی و یک جواب مثبت داشته باشد، جواب منفی قابل‌قبول نیست، چون $x^۲$ نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین معادلهٔ اصلی دو جواب به‌صورت $x=\pm\sqrt{t}$ دارد، پس

$$\frac{c}{a}<۰\Rightarrow\frac{۳-۲k}{۴}<۰\Rightarrow۳-۲k<۰\Rightarrow k>\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $k>\frac{۳}{۲}$ یا $k=۱$ جواب مسئله است.

۲۰۶۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $x^۲=t$، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$، $t\geq۰$ و معادله به شکل زیر در می‌آید

$$t^۲-۲mt+m^۲-۴=۰\quad(*)$$

در این معادله $\Delta=۴m^۲-۴(m^۲-۴)=۱۶>۰$. بنابراین معادلهٔ (*) به ازای هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادلهٔ اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت. بنابراین اگر $t_۱$ و $t_۲$ جواب‌های معادلهٔ (*) باشند، باید

$$t_۱+t_۲<۰\Rightarrow۲m<۰\Rightarrow m<۰$$

$$t_۱t_۲>۰\Rightarrow m^۲-۴>۰\Rightarrow m<-۲\ \text{یا}\ m>۲$$

بنابراین کافی است $m<-۲$ تا معادلهٔ اولیه جواب حقیقی نداشته باشد.

۲۰۶۹- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $x^۲+x=t$. در این صورت

$$t^۲-۱۸t+۷۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t-۱۲)=۰$$

$$t=۶\Rightarrow x^۲+x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

$$(x-۲)(x+۳)=۰\Rightarrow x_۱=۲,\quad x_۲=-۳$$

$$t=۱۲\Rightarrow x^۲+x=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰$$

$$(x-۳)(x+۴)=۰\Rightarrow x_۳=۳,\quad x_۴=-۴$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=-۲$$

۲۰۷۰- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $x^۲-۷x+۱۱=t$. در نتیجه $t^۲=۳t+۴$. بنابراین $t=-۱,۴$، پس به معادله‌های زیر می‌رسیم

$$x^۲-۷x+۱۱=-۱\Rightarrow x^۲-۷x+۱۲=۰\Rightarrow x=۳,۴$$

$$x^۲-۷x+۱۱=۴\Rightarrow x^۲-۷x+۷=۰\Rightarrow x=\frac{۷\pm\sqrt{۲۱}}{۲}$$

پس معادلهٔ مورد نظر چهار جواب دارد.

۲۰۷۱- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$x^۲+۱=۲(x+۱)\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$$

جواب‌های معادلهٔ بالا $x=۱+\sqrt{۲}$ و $x=۱-\sqrt{۲}$ هستند. پس جواب بزرگ‌تر معادله $۱+\sqrt{۲}$ است.

۲۰۷۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل $\frac{x}{x^۴-x^۲-۲x+۱}=\frac{۱}{x^۳-۱}$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^۴-x=x^۴-x^۲-۲x+۱\Rightarrow x^۲+x-۱=۰\Rightarrow\frac{c}{a}=-۱$$

۲۰۷۳- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را در $(x-۱)(x+۱)$ ضرب و آن را ساده می‌کنیم:

$$x+۱+۲(x-۱)=۲(x-۱)(x+۱)\Rightarrow ۳x-۱=۲x^۲-۲\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۱=۰$$

معادلهٔ بالا دو جواب دارد که ۱ و ۱- از آن‌ها نیستند و مجموع آن‌ها برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۲۰۷۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید $x_۱$ جواب دیگر معادله باشد. ابتدا معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{۵x-۲-۴a}{x^۲-(a+۲)x+۲a}=۱\Rightarrow x^۲-(a+۷)x+۶a+۲=۰\quad(۱)$$

چون $x=۵$ جواب معادله است، پس

$$۲۵-۵(a+۷)+۶a+۲=۰\Rightarrow a=۸$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر $a+۷$ است، پس

$$a+۷=۵+x_۱\Rightarrow ۱۵=۵+x_۱\Rightarrow x_۱=۱۰$$

یعنی جواب دیگر معادله ۱۰ است که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نمی‌کند و قابل قبول است.

۲۰۷۵- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{۲x-۲a+x+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴\Rightarrow\frac{۳x-۲a+۳}{(x+۳)(x-a)}=۴$$

$$۳x-۲a+۳=۴x^۲+(۱۲-۴a)x-۱۲a\Rightarrow ۴x^۲+(۹-۴a)x-۱۰a-۳=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-۱۰a-۳}{۴}$ است. پس

$$\frac{-۱۰a-۳}{۴}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow-۱۰a=۱۰\Rightarrow a=-۱$$

۲۰۷۶- گزینهٔ ۲ دو طرف معادله را در $x^۲-۱$ ضرب می‌کنیم:

$$x-۱-۲=a(x^۲-۱)\Rightarrow ax^۲-x+۳-a=۰\quad(۱)$$

اگر در معادلهٔ (۱) شرط $\Delta<۰$ برقرار باشد، معادله جواب ندارد. بنابراین

$$\Delta=۱-۴a(۳-a)<۰\Rightarrow ۴a^۲-۱۲a+۱<۰\Rightarrow\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۲}<a<\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۲}$$

پس به ازای اعداد طبیعی $a=۱$ و $a=۲$ معادله جواب ندارد.
توجه کنید که در حالت‌های زیر هم معادلهٔ اصلی جواب ندارد ولی این حالت‌ها در این مسئله اتفاق نمی‌افتند.

۱) $x=۱$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱) باشد.
۲) $x=-۱$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۲) باشد.
۳) $x=۱$ و $x=-۱$ هر دو جواب‌های معادلهٔ (۱) باشند.

۲۰۷۷- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $\frac{۲x+۱}{x}=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$t+\frac{-۶}{t}=۵\Rightarrow t^۲-۵t-۶=۰\Rightarrow t=-۱,t=۶$$

بنابراین

$$t=-۱\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x}=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$

$$t=۶\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x}=۶\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

از آنجایی که هیچ کدام از این دو مقدار باعث صفر شدن مخرج‌ها در معادلهٔ اصلی نمی‌شوند، هر دو قابل قبول هستند. بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $-\frac{۱}{۱۲}$.

۲۰۷۸- گزینهٔ ۱ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $x+\frac{۱}{x}=۴$. بنابراین

$$x^۲+۱=۴x\Rightarrow x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۳}$$

بنابراین دو عدد $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ شرط مورد نظر را دارند که $۲-\sqrt{۳}$ کوچک‌ترین عددی است که این شرط را دارد.

۲۰۷۹- گزینهٔ ۲ فرض کنید زمان رفت برابر t و سرعت رفت برابر v باشد. در این صورت زمان برگشت برابر $t+\frac{۴}{۹}$ و سرعت برگشت برابر $v-۵$ است. چون فاصلهٔ دو شهر برابر ۲۰۰ کیلومتر است، پس تساوی‌های $vt=۲۰۰$ و $(v-۵)(t+\frac{۴}{۹})=۲۰۰$ برقرارند. بنابراین

$$v=\frac{۲۰۰}{t}\Rightarrow ۲۰۰=(\frac{۲۰۰}{t}-۵)(t+\frac{۴}{۹})\Rightarrow ۲۰۰=۲۰۰+\frac{۸۰۰}{۹t}-۵t-\frac{۲۰}{۹}$$

$$۸۰۰-۴۵t^۲-۲۰t=۰\Rightarrow ۹t^۲+۴t-۱۶۰=۰$$

$$(۹t+۴۰)(t-۴)=۰\Rightarrow t=۴ \text{ ساعت}$$

بنابراین زمان رفت ۴ ساعت است.

۲۰۸۰- گزینهٔ ۱ نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ است. اگر طول این مستطیل برابر x و عرض آن برابر y باشد، آن‌گاه

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\Rightarrow x=(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})y$$

از طرف دیگر نسبت محیط به مساحت مستطیل برابر $۳-\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{۲(x+y)}{xy}=۳-\sqrt{۵}\Rightarrow ۲((\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲})y+y)=(۳-\sqrt{۵})xy$$

$$۲(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}+۱)=(۳-\sqrt{۵})x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳-\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}+۳}{۳-\sqrt{۵}}\times\frac{۳+\sqrt{۵}}{۳+\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{(۳+\sqrt{۵})^۲}{۹-۵}=\frac{۷+۳\sqrt{۵}}{۲}$$

۲۰۸۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(x-۱)(\frac{۱}{x-۳}+\frac{۱}{x-۵})=۰\Rightarrow (x-۱)(\frac{x-۵+x-۳}{(x-۳)(x-۵)})=۰$$

$$(x-۱)(\frac{۲x-۸}{(x-۳)(x-۵)})=۰\Rightarrow \frac{۲(x-۱)(x-۴)}{(x-۳)(x-۵)}=۰$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ مورد نظر ۱ و ۴ هستند و مجموع آن‌ها ۵ است.

۲۰۸۲- گزینهٔ ۱ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{x-۱۲}{x^۲+۳x}=\frac{۲}{x}+\frac{۵}{x+۳}=\frac{۲x+۶+۵x}{x^۲+۳x}=\frac{۷x+۶}{x^۲+۳x}$$

در نتیجه، با فرض $x\neq ۰,-۳$،

$$x-۱۲=۷x+۶\Rightarrow ۶x=-۱۸\Rightarrow x=-۳$$

که قابل قبول نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۰۸۳- گزینهٔ ۳ معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم

$$\frac{۳x-۲-۲a}{x^۲-(a+۲)x+۲a}=۱\Rightarrow x^۲-(a+۵)x+۴a+۲=۰ \qquad (۱)$$

چون $x=۶$ جواب معادله است، پس

$$۳۶-۶(a+۵)+۴a+۲=۰\Rightarrow -۲a+۸=۰\Rightarrow a=۴$$

چون مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر $a+۵=۹$ است، پس جواب دیگر معادلهٔ مورد نظر برابر ۳ است.

۲۰۸۴- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** دو طرف معادلهٔ داده شده را در $(x^۲-x+۱)(x-۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-۱)(x^۲+x+۱)=\frac{a}{a+۱}(x+۱)(x^۲-x+۱)$$

$$x^۳-۱=\frac{a}{a+۱}(x^۳+۱)\Rightarrow (a+۱)x^۳-a-۱=ax^۳+a$$

$$x^۳=۲a+۱\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲a+۱}$$

اگر $\sqrt[۳]{۲a+۱}$ ریشهٔ مخرج کسر در معادلهٔ اصلی باشد، قابل قبول نیست. در غیر این صورت قابل قبول است و معادله یک جواب دارد. ریشهٔ مخرج کسر $x=۱$ است، پس $\sqrt[۳]{۲a+۱}=۱\Rightarrow ۲a+۱=۱\Rightarrow a=۰$

توجه کنید که اگر $a=۰$، آن‌گاه معادله به‌صورت $x^۲+x+۱=۰$ درمی‌آید که جواب ندارد. همچنین اگر $a=-۱$، آن‌گاه سمت راست معادله تعریف نمی‌شود. بنابراین برای $a\in\mathbb{R}-\{۰,-۱\}$ معادله همواره یک جواب دارد.

راه‌حل دوم چون $a+۱$ در مخرج کسر است، پس $a\neq -۱$. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. برای یافتن گزینهٔ صحیح کافی است $a=۰$ را امتحان کنیم.

به ازای $a=۰$ معادله می‌شود $\frac{x^۲+x+۱}{x^۲-x+۱}=۰$ که جواب ندارد. پس $a\neq ۰$.

۲۰۸۵- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۵}{(x-۱)(x+۴)}-\frac{۳}{(x+۱)(x+۴)}=k$$

$$\frac{۵(x+۱)-۳(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)(x+۴)}=k\Rightarrow \frac{۲(x+۴)}{(x-۱)(x+۱)(x+۴)}=k$$

$$k(x^۲-۱)=۲\Rightarrow kx^۲-k-۲=۰$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر $\frac{-k-۲}{k}$ است. پس

$$\frac{-k-۲}{k}=-۴\Rightarrow ۴k=k+۲\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}$$

۲۰۸۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=(x+\frac{۲}{x})^۲$، معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^۲-۹t-۱۰=۰\Rightarrow t=-۱,\ t=۱۰$$

چون $t>۰$، پس $t=-۱$ غیرقابل قبول است. اگر $t=۱۰$، آن‌گاه

$$\begin{cases} x+\frac{۲}{x}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow x^۲-\sqrt{۱۰}x+۲=۰, & \Delta=۲ \\ x+\frac{۲}{x}=-\sqrt{۱۰}\Rightarrow x^۲+\sqrt{۱۰}x+۲=۰, & \Delta=۲ \end{cases}$$

هر کدام از معادله‌های بالا دو جواب غیرصفر دارند و جواب‌های معادلهٔ اول قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ دوم هستند. پس معادلهٔ اصلی چهار جواب دارد.

۲۰۸۷- گزینهٔ ۴ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{۲۱}{x^۲+۴x+۱۰}-(x^۲+۴x+۱۰)+۱۰=۶$$

اگر فرض کنیم $x^۲+۴x+۱۰=t$، این معادله می‌شود

$$\frac{۲۱}{t}-t+۴=۰\xrightarrow{\text{ضرب در } t}۲۱-t^۲+۴t=۰$$

$$t^۲-۴t-۲۱=۰\Rightarrow (t-۷)(t+۳)=۰\Rightarrow t=-۳,\ t=۷$$

بنابراین

$t=-۳\Rightarrow x^۲+۴x+۱۰=-۳\Rightarrow x^۲+۴x+۱۳=۰$ جواب ندارد. $(\Delta<۰)$

$$t=۷\Rightarrow x^۲+۴x+۱۰=۷\Rightarrow x^۲+۴x+۳=۰$$

$$(x+۱)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۱,\ x=-۳$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -۴ است.

۲۰۸۸- گزینهٔ ۲ اگر طول ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ مثلث را a و b و طول وتر آن را c فرض کنیم، آن‌گاه

$$\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow b=\frac{۴}{۳}a$$

بنابراین طول وتر برابر است با

$$c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{a^۲+\frac{۱۶}{۹}a^۲}=\sqrt{\frac{۲۵}{۹}a^۲}=\frac{۵}{۳}a$$

بنابراین

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۴۷}{۳۰}\Rightarrow \frac{۱}{a}+\frac{۱}{\frac{۴}{۳}a}+\frac{۱}{\frac{۵}{۳}a}=\frac{۴۷}{۳۰}\Rightarrow \frac{۱}{a}+\frac{۳}{۴a}+\frac{۳}{۵a}=\frac{۴۷}{۳۰}$$

دو طرف معادله را در $۶۰a$ ضرب می‌کنیم

$$۶۰+۴۵+۳۶=۹۴a\Rightarrow a=\frac{۱۴۱}{۹۴}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{b=\frac{۴}{۳}a}b=۲$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با $S=\frac{۱}{۲}ab=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times۲=\frac{۳}{۲}$.

۲۰۸۹- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم تعداد افراد کلاس، n نفر باشند، در نتیجه هزینهٔ سرانهٔ اولیه برابر $\frac{700}{n}$ (برحسب هزارتومان) است. با افزودن پنج نفر از دانش‌آموزان کلاس دیگر هزینهٔ سرانه برابر با $\frac{700}{n}-7$ می‌شود. در نتیجه

$(\frac{700}{n}-7)(n+5)=700$. بنابراین

$$(\frac{700-7n}{n})(n+5)=700\Rightarrow(700-7n)(n+5)=700n$$

$$n^2+5n-500=0\Rightarrow(n+25)(n-20)=0\Rightarrow n=-25, n=20$$

فقط جواب $n=20$ قابل قبول است.

۲۰۹۰- گزینهٔ ۱ ۲۰ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۸۰ کیلوگرم آن آب است. اگر نیمی از آب را تبخیر کنیم، ۴۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، جرم شکر $x+20$ و جرم محلول $x+60$ می‌شود. پس

$$\frac{20+x}{60+x}=\frac{40}{100}\Rightarrow\frac{20+x}{60+x}=\frac{2}{5}\Rightarrow 100+5x=120+2x\Rightarrow 3x=20\Rightarrow x=\frac{20}{3}$$

۲۰۹۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$y=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت y به صورت زیر است.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

۲۰۹۲- گزینهٔ ۱ چون عبارت یک ریشه دارد و در دو طرف ریشه علامت آن متفاوت است، پس باید عبارت از درجهٔ اول باشد. یعنی ضریب x^2 باید صفر باشد:

$$m^2-4=0\Rightarrow m=\pm 2$$

اگر $m=2$، عبارت به‌صورت $y=2nx+2$ است. چون $x=4$ ریشهٔ عبارت است، پس

$$0=2n\times 4+2\Rightarrow n=-\frac{1}{4}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2$$

در این صورت جدول تعیین علامت عبارت به‌صورت زیر است و این حالت قابل قبول نیست.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	

اگر $m=-2$، عبارت به‌صورت $y=-2nx-2$ است. چون $x=4$ ریشهٔ عبارت است، پس $-2n\times 4-2=0$. در نتیجه $n=-\frac{1}{4}$، بنابراین $mn=\frac{1}{2}$.

۲۰۹۳- گزینهٔ ۱ با توجه به جدول، $x=1$ و $x=2$ ریشه‌های عبارت هستند:

$$x=1\Rightarrow m+2-(m+2)^2+n=0 \quad (*)$$

$$x=2\Rightarrow 4(m+2)-2(m+2)^2+n=0$$

دو طرف تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$(m+2)^2-3(m+2)=0\Rightarrow\begin{cases}m+2=0\Rightarrow m=-2\\ m+2=3\Rightarrow m=1\end{cases}$$

به ازای $m=-2$ نتیجه می‌شود $y=n$ که در این صورت علامت y ثابت است و به ازای $m=1$ از معادلهٔ $(*)$ مقدار n به‌دست می‌آید

$$3-9+n=0\Rightarrow n=6$$

۲۰۹۴- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول ابتدا نامعادله‌ها را به‌صورت‌های زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$x-x^3>0\Rightarrow x(1-x)(1+x)>0\ ,\quad x-x^2<0\Rightarrow x(1-x)<0\Rightarrow\begin{cases}x>1\\ x<0\end{cases}$$

در نتیجه مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، با فرض $x>1$ یا $x<0$ با مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $1+x<0$ که بازهٔ $(-\infty,-1)$ است، برابر است. اشتراک مجموعه‌های $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ و $(-\infty,-1)$ برابر $(-\infty,-1)$ است که مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ مورد نظر مسئله است.

راه‌حل دوم عدد $-\frac{1}{2}$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی عدد -2 در آن صدق می‌کند پس گزینهٔ (۱) جواب است.

۲۰۹۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که می‌خواهیم نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x(x^2-4x-5)^2(x^2-1)<0$$

$$x^2-4x-5=(x-5)(x+1),\quad x^2-1=(x-1)(x+1)$$

در نتیجه طرف چپ نامعادلهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y=x(x+1)^3(x-5)^2(x-1)$$

با تشکیل جدول تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		0		1		5		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله برابر است با $(-\infty,-1)\cup(0,1)$. پس $a=-1$، $b=0$ و در نتیجه $a+b=-1$.

۲۰۹۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. دلتای عبارت x^2-x+1 منفی است $(\Delta=-3)$. در نتیجه همواره $x^2-x+1>0$. بنابراین مسئله به یافتن مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $y=\frac{x+1}{(x-2)(x-4)}\leq 0$ تبدیل می‌شود. جدول تعیین علامت y به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
y		$-$	0	$+$	ت ن	$-$	ت ن	$+$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-\infty,-1]\cup(2,4)$ است. پس $a=-1$ و $b=4$ و در نتیجه $a+b=3$.

۲۰۹۷- گزینهٔ ۲ نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^4-x^2-2<0\Rightarrow(x^2+1)(x^2-2)<0$$

چون مقدار عبارت x^2+1 همواره مثبت است، پس

$$x^2-2<0\Rightarrow-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به صورت $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ است. در نتیجه

$$a=-\sqrt{2}\ ,b=\sqrt{2}\Rightarrow ab=-2$$

۲۰۹۸- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که اگر فرض کنیم $P(x)=x^2+(a-1)x+2a-6$ جدول تعیین علامت باید به‌صورت زیر باشد

x	$-\infty$		x_1		-3		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

پس باید $P(x)$ به ازای $x=-3$ منفی باشد. بنابراین

$$P(-3)=(-3)^2-3(a-1)+2a-6<0\Rightarrow a>6$$

راه‌حل دوم ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2+(a-1)x+2(a-3)=(x+a-3)(x+2)=0$$

$$\begin{cases} x+2=0\Rightarrow x=-2 \\ x+a-3=0\Rightarrow x=3-a \end{cases}$$

$$x_1<-3<x_2\Rightarrow x_1=3-a,\ x_2=-2$$

$$x_1=3-a<-3\Rightarrow a>6$$

۲۰۹۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که اگر $m=0$، آن‌گاه عبارت برابر $-2x$ خواهد بود که همواره مثبت نیست. اگر $m\neq 0$، آن‌گاه باید ضریب x^2 مثبت و Δ منفی باشد. پس $m>0\ ,\ 4-4m^2<0\Rightarrow m^2>1\Rightarrow m>1$

۲۱۰۰- گزینهٔ ۳ می‌خواهیم به ازای هر مقدار x نابرابری $mx^2-2mx+2>-6$ برقرار باشد، یعنی $mx^2-2mx+8>0$. بنابراین اگر $m\neq 0$، باید $m>0$ و $\Delta<0$. پس

$$\Delta=(-2m)^2-32m<0\Rightarrow m(m-8)<0$$

با توجه به جدول زیر، باید $0<m<8$.

m	$-\infty$		0		8		$+\infty$
$m(m-8)$		+	0	−	0	+	

از طرف دیگر، اگر $m=0$، آن‌گاه عبارت به‌صورت $y=2$ است که از -6 بزرگ‌تر است. بنابراین $0\le m<8$. پس m می‌تواند هشت مقدار صحیح داشته باشد.

۲۱۰۱- گزینهٔ ۱ عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$y=x^4-3x^2-4=(x^2+1)(x^2-4)$$

چون x^2+1 همواره مثبت است، پس کافی است x^2-4 را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y		+	0	−	0	+	

۲۱۰۲- گزینهٔ ۱ ریشهٔ عبارت را به‌دست می‌آوریم:

$$m^2x+|m|=0\Rightarrow x=\frac{-|m|}{m^2}=\frac{-|m|}{|m|^2}=\frac{-1}{|m|}$$

ضریب x عددی مثبت است، پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\lvert m\rvert}$		$+\infty$
y		−	0	+	

۲۱۰۳- گزینهٔ ۲ باید نامعادله‌های $x^3-3x^2\le 0$ و $x^3-3x^2\ge -4$ را حل کنیم و بین مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$x^3-3x^2\le 0\Rightarrow x^2(x-3)\le 0\Rightarrow x\le 3$$

$$x^3-3x^2+4\ge 0\Rightarrow (x+1)(x^2-4x+4)\ge 0$$

$$(x+1)(x-2)^2\ge 0\Rightarrow x\ge -1$$

بنابراین $-1\le x\le 3$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های مورد نظر است. پس $a=-1$ و $b=3$ و در نتیجه $a+b=2$. توجه کنید که

$$x^3-3x^2+4=x^3+1-3x^2+3=(x^3+1)-3(x^2-1)$$

$$=(x+1)(x^2-x+1)-3(x-1)(x+1)=(x+1)(x^2-4x+4)$$

۲۱۰۴- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(x^2-2x-4)^2-4(x^2-2)^2\ge 0$$

$$(x^2-2x-4+2x^2-4)(x^2-2x-4-2x^2+4)\ge 0$$

$$(3x^2-2x-8)(-x^2-2x)\ge 0\Rightarrow -x(3x+4)(x-2)(x+2)\ge 0$$

$$y=x(3x+4)(x-2)(x+2)\le 0$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		0		2		$+\infty$
y		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

با توجه به جدول تعیین علامت بالا، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $[-2,-\frac{4}{3}]\cup[0,2]$ است که اعداد صحیح ۲، ۱، ۰ و ۲− را شامل می‌شود.

۲۱۰۵- گزینهٔ ۳ عبارت را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-3}{x+2},\quad x\neq 2$$

بنابراین جدول تعیین علامت عبارت به شکل زیر است:

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
y		+	ت ن	−	ت ن	−	0	+	

بنابراین y به‌ازای هر x که در مجموعهٔ $(-2,3)-\{2\}$ باشد، منفی است. پس $a=-2$ ، $b=3$ و $c=2$. در نتیجه $\frac{a+b}{c}=\frac{1}{2}$.

۲۱۰۶- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $ax-b>0$ به یکی از دو صورت $(\frac{b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{b}{a})$ است. با توجه به فرض مسئله،

$$a>0,\ \frac{b}{a}=2\Rightarrow 2a=b$$

بنابراین $\frac{ax+b}{x-2}=a(\frac{x+2}{x-2})$. چون $a>0$، کافی است مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x+2}{x-2}<0$ را بیابیم که بازهٔ $(-2,2)$ است.

۲۱۰۷- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{9}{x+3}+5-x<0\Rightarrow \frac{9+(5-x)(x+3)}{x+3}<0$$

$$\frac{-x^2+2x+24}{x+3}<0\Rightarrow \frac{(x-6)(x+4)}{x+3}>0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-4,-3)\cup(6,+\infty)$ است.

x	$-\infty$		-4		-3		6		$+\infty$
y		−	0	+	ت ن	−	0	+	

پس $a=-4$ و $b=6$ و در نتیجه $a+b=2$.

۲۱۰۸- گزینهٔ ۴ اولاً باید ضریب x^2 منفی باشد. پس $m<0$، ثانیاً باید $\Delta<0$. پس

$$1-4m^2<0\Rightarrow m^2>\frac{1}{4}\Rightarrow |m|>\frac{1}{2}\Rightarrow m>\frac{1}{2}\ \text{یا}\ m<-\frac{1}{2}$$

بنابراین نتیجه می‌شود $m<-\frac{1}{2}$.

۲۱۰۹- گزینهٔ ۲ می‌خواهیم به‌ازای هر مقدار x نابرابری $mx^2-2mx+2>-2$ برقرار باشد، یعنی $mx^2-2mx+4>0$. بنابراین اگر $m\neq 0$، باید $m>0$ و $\Delta<0$. پس

$$\Delta=(-2m)^2-16m<0\Rightarrow m(m-4)<0$$

با توجه به جدول زیر، باید $0<m<4$.

m	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$m(m-4)$		+	0	−	0	+	

از طرف دیگر، اگر $m=0$ آن‌گاه عبارت به‌صورت $y=2$ است که از -2 بزرگ‌تر است. بنابراین $0\le m<4$.

۲۱۱۰- گزینهٔ ۳ نابرابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^2+mx+m}{x^2-x+1}-3\le 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+(m+3)x+m-3}{x^2-x+1}\le 0$$

چون به ازای هر x نابرابری $x^2-x+1>0$ برقرار است، پس کافی است نامعادلهٔ $-2x^2+(m+3)x+m-3\le 0$ برای هر x برقرار باشد. بنابراین

$$\Delta=(m+3)^2+8(m-3)\le 0 \Rightarrow m^2+14m-15\le 0$$

$$(m-1)(m+15)\le 0\Rightarrow -15\le m\le 1$$

پس حداقل مقدار m برابر ۱۵- است.

۲۱۱۱- گزینهٔ ۱ دو طرف معادله را به توان چهار می‌رسانیم:

$$2x+1=(2x-1)^2\Rightarrow 2x+1=4x^2+1-4x$$

$$4x^2-6x=0\Rightarrow x=0,\ x=\frac{3}{2}$$

واضح است که $x=0$ قابل قبول نیست، زیرا در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند ولی $x=\frac{3}{2}$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۱۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که باید $\frac{1}{2}x+1\ge 0$ و در نتیجه $x\ge -2$. همچنین باید $4-x^2\ge 0$ و در نتیجه $-2\le x\le 2$. اکنون دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4-x^2=(\frac{1}{2}x+1)^2\Rightarrow 4-x^2=\frac{1}{4}x^2+x+1$$

$$5x^2+4x-12=0\Rightarrow (x+2)(5x-6)=0\Rightarrow x=-2,\ x=\frac{6}{5}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. پس مجموع جواب‌های معادله برابر $-\frac{4}{5}$ است.

۲۱۱۳- گزینهٔ ۲ اگر دو طرف معادلهٔ مورد نظر را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود

$$4-3x-x^2=x^2+8x+16\Rightarrow 2x^2+11x+12=0\Rightarrow x=-4,\ x=-\frac{3}{2}$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۶ است.

۲۱۱۴- گزینهٔ ۲ دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^4+2x-5=(1+x)^2\Rightarrow x^4-x^2-6=0\Rightarrow (x^2-3)(x^2+2)=0$$

چون $x^2+2\neq 0$، پس $x^2-3=0$ بنابراین $x=\pm\sqrt{3}$.
$x=\sqrt{3}$ در معادله صدق می‌کند، اما $x=-\sqrt{3}$ در معادله صدق نمی‌کند، زیرا به ازای $x=-\sqrt{3}$ سمت راست معادله منفی است و سمت چپ آن مثبت است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۱۵- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2x-1}=2-2\sqrt{x}\quad (*)$$

سپس دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$2x-1=4+4x-8\sqrt{x}\Rightarrow 2x+5=8\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4x^2+20x+25=64x\Rightarrow 4x^2-44x+25=0$$

$$x=\frac{11-4\sqrt{6}}{2},\ x=\frac{11+4\sqrt{6}}{2}$$

در معادلهٔ $(*)$ طرف راست باید نامنفی باشد، پس

$$2-2\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}\le 1\Rightarrow 0\le x\le 1$$

بنابراین جواب $\frac{11+4\sqrt{6}}{2}$ قابل قبول نیست و $\frac{11-4\sqrt{6}}{2}$ جواب معادله است.

۲۱۱۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x=8$ در معادله صدق می‌کند:

$$\sqrt{8-4a}+\sqrt{8+a}=\sqrt{24+a}\quad (1)$$

دو طرف معادلهٔ بالا را به توان دو می‌رسانیم:

$$8-4a+8+a+2\sqrt{(8-4a)(8+a)}=24+a$$

$$2\sqrt{64-24a-4a^2}=4a+8\Rightarrow \sqrt{64-24a-4a^2}=2a+4$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$64-24a-4a^2=4a^2+16+16a$$

$$8a^2+40a-48=0\Rightarrow a^2+5a-6=0\Rightarrow a=1,\ a=-6$$

جواب $a=-6$ قابل قبول نیست چون در معادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند. پس a فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

۲۱۱۷- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت $(\sqrt[3]{x})^4-5(\sqrt[3]{x})^2+4=0$ می‌نویسیم و فرض می‌کنیم $a=(\sqrt[3]{x})^2$. در این صورت

$$a^2-5a+4=0\Rightarrow (a-4)(a-1)=0$$

$$\begin{cases} a=1\Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1\\ a=4\Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2=4\Rightarrow x^2=64\Rightarrow x=\pm 8\end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۶۴ است.

۲۱۱۸- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$t+\frac{1}{t}=2\Rightarrow t^2+1=2t\Rightarrow t^2-2t+1=0$$

تنها جواب معادلهٔ بالا $t=1$ است. بنابراین

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1}=1\Rightarrow x=\sqrt{x}+1\Rightarrow x-1=\sqrt{x}\quad (1)$$

$$x^2-2x+1=x\Rightarrow x^2-3x+1=0\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$ (غ.ق.ق.)

با توجه به معادلهٔ (۱) باید $x>1$ و در نتیجه $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ جواب معادله نیست.

پس فقط $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ جواب معادله است.

۲۱۱۹- گزینهٔ ۳ اگر این عدد x باشد، آن‌گاه $\sqrt{x}=\frac{4}{x}$. بنابراین

$$x=\frac{16}{x^2}\Rightarrow x^3=16\Rightarrow x=\sqrt[3]{16}$$

۲۱۲۰- گزینهٔ ۴ زمانی را که محسن روی خشکی مسیر AD را طی می‌کرده با t_1 و زمان طی کردن مسیر DB روی آب را با t_2 نشان می‌دهیم. در نتیجه اگر $CD=x$، آن‌گاه

$$t_1=\frac{AD}{v_1}=\frac{\sqrt{x^2+16}}{5},\quad t_2=\frac{DB}{v_2}=\frac{8-x}{3}$$

در نتیجه $t_1+t_2=\frac{\sqrt{x^2+16}}{5}+\frac{8-x}{3}=\frac{8}{3}$، بنابراین

$$\frac{\sqrt{x^2+16}}{5}=\frac{x}{3}\Rightarrow 3\sqrt{x^2+16}=5x\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}$$

$$9(x^2+16)=25x^2\Rightarrow 16x^2=9\times 16\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=3$$

پس $CD=3km$.

۲۱۲۱- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^{۲}+۷=(x+۲)^{۲}\Rightarrow x^{۲}+۷=x^{۲}+۴x+۴$$

$$۴x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

با توجه به اینکه $x=\frac{۳}{۴}$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند، پس جواب معادله در بازهٔ $(\frac{۱}{۲},۱)$ قرار دارد.

۲۱۲۲- گزینهٔ ۱ برای حل معادلهٔ $۲x+۱=\sqrt{۱۱x-۲}$، دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$(۲x+۱)^{۲}=(\sqrt{۱۱x-۲})^{۲}\Rightarrow ۴x^{۲}+۴x+۱=۱۱x-۲$$

$$۴x^{۲}-۷x+۳=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}\ ,\ x=۱$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند. پس قدرمطلق تفاضل دو جواب برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

۲۱۲۳- گزینهٔ ۲ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$۱+۳x-x^{۲}=۱-۶x-x^{۲}+x^{۳}\Rightarrow x^{۳}=۹x\Rightarrow x(x^{۲}-۹)=۰$$

$$x=۰,\ x=۳,\ x=-۳$$

جواب $x=-۳$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند. بنابراین معادله دو جواب دارد.

۲۱۲۴- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$x^{۳}+۲=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱\Rightarrow ۳x^{۲}+۳x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۱}}{۶}$$

پس جواب کوچک‌تر معادله $\frac{-۳-\sqrt{۲۱}}{۶}$ است.

۲۱۲۵- گزینهٔ ۱ معادله را به شکل $\sqrt{x-۲}=\sqrt{x+۱}-۱$ می‌نویسیم و دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x-۲=x+۱+۱-۲\sqrt{x+۱}\Rightarrow\sqrt{x+۱}=۲\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳$$

$x=۳$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند. بنابراین معادله یک جواب دارد.

۲۱۲۶- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\sqrt{۳x-۲}=۲-۲\sqrt{x}\qquad(*)$$

و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم

$$۳x-۲=۴+۴x-۸\sqrt{x}\Rightarrow x+۶=۸\sqrt{x}$$

مجدداً دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$x^{۲}+۳۶+۱۲x=۶۴x\Rightarrow x^{۲}-۵۲x+۳۶=۰$$

$$x=۲۶-۸\sqrt{۱۰}\ ,\ x=۲۶+۸\sqrt{۱۰}$$

در معادلهٔ (*) طرف چپ معادله نامنفی است، پس طرف راست آن نیز نامنفی است، بنابراین

$$۳x-۲\ge۰\ ,\ ۲-۲\sqrt{x}\ge۰\Rightarrow\frac{۲}{۳}\le x\le۱$$

بنابراین جواب $۲۶+۸\sqrt{۱۰}$ قابل قبول نیست و $x=۲۶-۸\sqrt{۱۰}$ جواب معادله است.

۲۱۲۷- گزینهٔ ۲ یک جواب معادله $x=۲$ است، پس $x=۲$ باید در معادله صدق کند

$$\sqrt{۲-۱}+\sqrt{a-۲}=۳\Rightarrow\sqrt{a-۲}=۲\Rightarrow a-۲=۴\Rightarrow a=۶$$

بنابراین معادله به‌صورت $\sqrt{x-۱}+\sqrt{۶-x}=۳$ است و در نتیجه

$$\sqrt{x-۱}-۳=-\sqrt{۶-x}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}}x-۱+۹-۶\sqrt{x-۱}=۶-x$$

$$x+۱=۳\sqrt{x-۱}\Rightarrow x^{۲}+۲x+۱=۹x-۹\Rightarrow x^{۲}-۷x+۱۰=۰$$

$$(x-۲)(x-۵)=۰\Rightarrow x=۲,\ x=۵$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۲۱۲۸- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت $x^{۲}+۱+۶=۵\sqrt{x^{۲}+۱}$ می‌نویسیم. اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x^{۲}+۱}$، معادله به‌صورت $t^{۲}+۶=۵t$ درمی‌آید که اگر آن را به صورت $t^{۲}-۵t+۶=(t-۲)(t-۳)=۰$ بنویسیم، جواب‌های آن $t=۲$ و $t=۳$ هستند. بنابراین

$$\sqrt{x^{۲}+۱}=۲\Rightarrow x^{۲}+۱=۴\Rightarrow x^{۲}=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{x^{۲}+۱}=۳\Rightarrow x^{۲}+۱=۹\Rightarrow x^{۲}=۸\Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۴ است.

۲۱۲۹- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $t=x+\sqrt{x}$، معادله به‌صورت $t^{۲}+t=۲$ درمی‌آید که اگر آن را به صورت $t^{۲}+t-۲=(t-۱)(t+۲)=۰$ بنویسیم، $t=۱$ و $t=-۲$ جواب‌های آن هستند. بنابراین

$$x+\sqrt{x}=-۲\ (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x+\sqrt{x}=۱\Rightarrow\sqrt{x}=۱-x\qquad(۱)$$

$$x=x^{۲}+۱-۲x\Rightarrow x^{۲}-۳x+۱=۰$$

$$x=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲},\qquad x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\ (\text{غ.ق.ق.})$$

توجه کنید که معادلهٔ $x+\sqrt{x}=-۲$ جواب ندارد، زیرا عبارت $x+\sqrt{x}$ همواره نامنفی است. همچنین $x=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ جواب معادله نیست زیرا در معادلهٔ (۱) باید $۰\le x\le۱$، ولی $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ بزرگ‌تر از ۱ است.

۲۱۳۰- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$x^{۳}+k=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱\Rightarrow ۳x^{۲}-۳x+k+۱=۰$$

برای اینکه معادلهٔ بالا دو جواب داشته باشد، باید

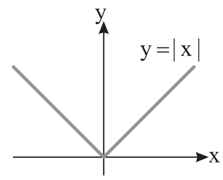
$$\Delta>۰\Rightarrow ۹-۱۲(k+۱)>۰\Rightarrow k<-\frac{۱}{۴}$$

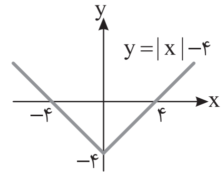
۲۱۳۱- گزینهٔ ۴ چون دو سهمی نقطهٔ مشترک ندارند، معادلهٔ $-x^{۲}+kx=x^{۲}-k$ جواب ندارد. یعنی معادلهٔ $۲x^{۲}-kx-k=۰$ جواب ندارد. پس

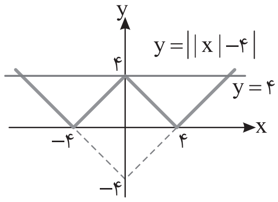
$$\Delta=k^{۲}+۸k<۰\Rightarrow k(k+۸)<۰$$

با تعیین علامت عبارت $k(k+۸)$ مشخص می‌شود که $-۸<k<۰$.

۲۱۳۲- گزینهٔ ۴ تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر، تعداد نقطه‌های برخورد نمودار تابع‌های $y=||x|-4|$ و $y=4$ است. برای رسم کردن نمودار $y=||x|-4|$، ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم. بعد آن را ۴ واحد پایین می‌آوریم تا نمودار $y=|x|-4$ به‌دست بیاید و در نهایت تصویر قسمتی از آن را که زیر محور x است رسم می‌کنیم و قسمت زیر محور x را حذف می‌کنیم تا نمودار $y=||x|-4|$ به‌دست بیاید.

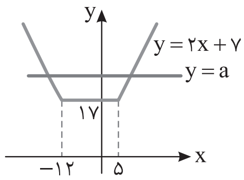






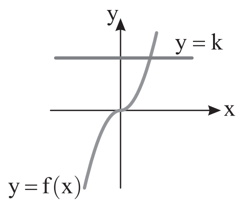
از روی شکل معلوم است که تعداد جواب‌های معادلهٔ مورد نظر سه تا است.

۲۱۳۳- گزینهٔ ۳ به نمودار تابع $f(x)=|x+12|+|x-5|$ توجه کنید. اگر $a=17$، خط $y=a$ بر قسمتی از نمودار تابع f که یک پاره‌خط افقی است، منطبق می‌شود و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=a$ نامتناهی می‌شود.

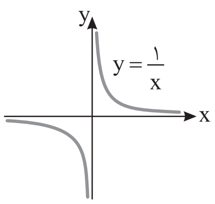


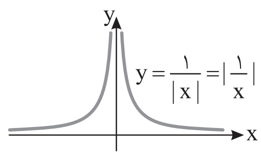
۲۱۳۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$.

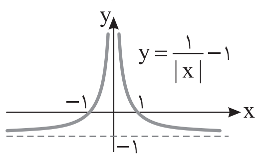
نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=k$ را رسم می‌کنیم. واضح است که k هر چه باشد، دو نمودار یک نقطهٔ مشترک دارند و معادلهٔ $f(x)=k$ یک جواب دارد.

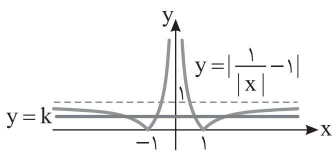


۲۱۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=\left|\frac{1}{|x|}-1\right|$ را رسم می‌کنیم.



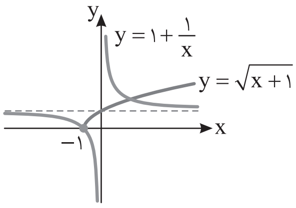




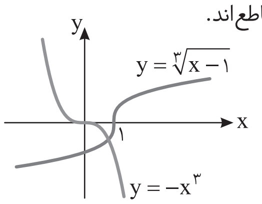


اگر $0<k<1$، آن‌گاه خط $y=k$ نمودار تابع $y=\left|\frac{1}{|x|}-1\right|$ را در چهار نقطه قطع می‌کند و معادلهٔ مورد نظر چهار جواب دارد.

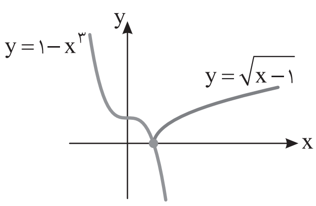
۲۱۳۶- گزینهٔ ۲ به نمودار تابع‌های $y=\sqrt{x+1}$ و $y=1+\frac{1}{x}$ توجه کنید. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند، بنابراین معادلهٔ موردنظر دو جواب دارد.



۲۱۳۷- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $\sqrt[3]{x-1}=-x^3$ می‌نویسیم. برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم و برای رسم نمودار تابع $y=-x^3$ کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم. با توجه به شکل زیر نمودار دو تابع در یک نقطه متقاطع‌اند.

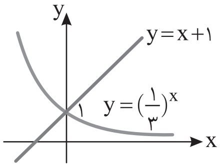


۲۱۳۸- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول معادله را به‌صورت $\sqrt{x-1}=1-x^3$ می‌نویسیم. برای رسم نمودار تابع $y=\sqrt{x-1}$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست منتقل کنیم و برای رسم نمودار تابع $y=1-x^3$ کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم و یک واحد به بالا انتقال دهیم. با توجه به شکل زیر نمودار دو تابع در یک نقطه متقاطع‌اند.

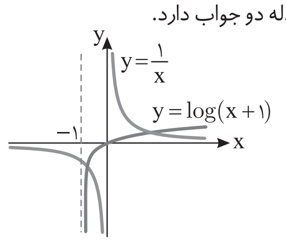


راه‌حل دوم معادله را به‌صورت $\sqrt{x-1}=1-x^3$ می‌نویسیم. برای اینکه عبارت $\sqrt{x-1}$ بامعنی باشد باید $x\ge 1$. از طرف دیگر باید $1-x^3\ge 0$ و در نتیجه $x^3\le 1$. پس $x\le 1$. بنابراین فقط $x=1$ می‌تواند جواب معادله باشد. واضح است که $x=1$ در معادله صدق می‌کند و جواب معادله است. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۳۹- گزینهٔ ۱ معلوم است که $x=0$ جواب معادلهٔ مورد نظر است. اکنون اگر نمودار تابع‌های $y=(\frac{1}{3})^x$ و $y=x+1$ را رسم کنیم معلوم می‌شود که معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد: $x=0$.



۲۱۴۰- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $\log(x+۱)=\frac{۱}{x}$ می‌نویسیم. نمودار دو تابع $y=\frac{۱}{x}$ و $y=\log(x+۱)$ را رسم می‌کنیم. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند، پس معادله دو جواب دارد.



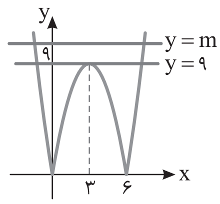
۲۱۴۱- گزینهٔ ۳ طول این نقطهٔ مشترک جواب معادلهٔ زیر است:

$$x^۲+۲ax+۶b=x^۲+۲bx+۶a$$

$$۲(a-b)x=۶(a-b)\Rightarrow x=\frac{۶(a-b)}{۲(a-b)}=۳$$

توجه کنید که $a\neq b$، زیرا اگر $a=b$، دو سهمی برهم منطبق می‌شوند و مجموعهٔ نقطه‌های مشترک آن‌ها نامتناهی است.

۲۱۴۲- گزینهٔ ۴ به نمودار تابع‌های $y=|x^۲-۶x|$ و $y=m$ توجه کنید. واضح است که اگر $m=۹$، خط $y=m$ و نمودار تابع $y=|x^۲-۶x|$ سه نقطهٔ مشترک دارند و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $|x^۲-۶x|=m$ سه‌عضوی است.

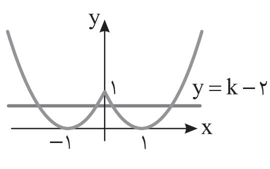


۲۱۴۳- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $x^۲-۲|x|+۱=k-۲$ می‌نویسیم. کافی است نمودار $y=x^۲-۲|x|+۱$ را رسم کنیم و با خط $y=k-۲$ قطع دهیم:

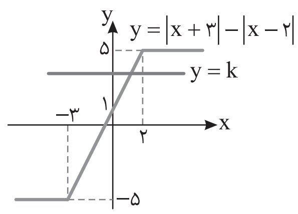
$$x^۲-۲|x|+۱=\begin{cases}x^۲-۲x+۱ & x\geq ۰\\ x^۲+۲x+۱ & x\leq ۰\end{cases}$$

در نتیجه نمودار $y=x^۲-۲|x|+۱$ به شکل زیر است. از روی شکل نتیجه می‌گیریم معادلهٔ مورد نظر فقط وقتی چهار جواب دارد که

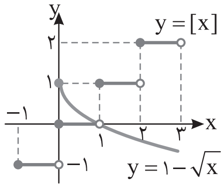
$$۰<k-۲<۱\Rightarrow ۲<k<۳$$



۲۱۴۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع‌های $y=|x+۳|-|x-۲|$ و $y=k$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل زیر اگر $۱<k<۵$، آن‌گاه معادله دقیقاً یک جواب مثبت دارد. بنابراین k می‌تواند ۲، ۳ و ۴ باشد.

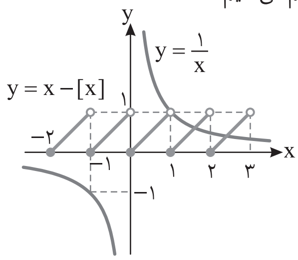


۲۱۴۵- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $[x]=۱-\sqrt{x}$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=۱-\sqrt{x}$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم.



نمودارها تقاطع ندارند، پس معادله جواب ندارد.

۲۱۴۶- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه $x=۰$ جواب معادله نیست، طرفین معادله را بر x تقسیم می‌کنیم: $x-[x]=\frac{۱}{x}$. نمودار تابع‌های $y=\frac{۱}{x}$ و $y=x-[x]$ را رسم می‌کنیم.

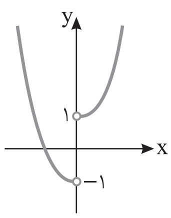


نمودار دو تابع در هیچ نقطه‌ای با طول منفی تقاطع ندارند ولی در هر یک از بازه‌های $[۱,۲)$، $[۲,۳)$، $[۳,۴)$، ... و $[k,k+۱)$ که $k\in\mathbb{N}$ یک‌بار تقاطع دارند. پس معادله جواب منفی ندارد ولی مجموعهٔ جواب‌های مثبت معادله، نامتناهی است.

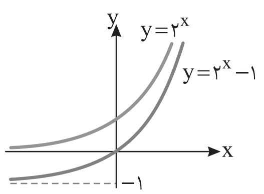
۲۱۴۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

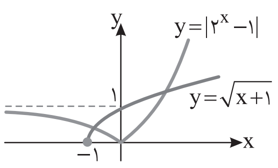
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}(x^۳+۱) & x>۰\\ \frac{x}{-x}(x^۳+۱) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۳+۱ & x>۰\\ -x^۳-۱ & x<۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این نمودار معلوم می‌شود که اگر نمودار تابع f خط $y=k$ را در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه $-۱<k\leq ۱$.

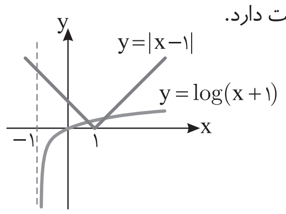


۲۱۴۸- گزینهٔ ۳ نمودار توابع $y=|۲^x-۱|$ و $y=\sqrt{x+۱}$ را رسم می‌کنیم. نمودار دو تابع در دو نقطه متقاطع‌اند که طول یکی از نقاط مثبت و طول دیگری منفی است. پس معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.





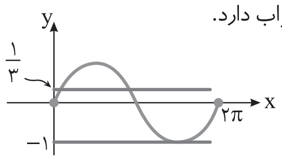
۲۱۴۹- گزینهٔ ۴ نمودار توابع $y=\log(x+۱)$ و $y=|x-۱|$ را رسم می‌کنیم. نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند که طول آن‌ها مثبت است. پس معادله دو جواب مثبت دارد.



۲۱۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$۳\sin^۲ x+۲\sin x-۱=۰\Rightarrow(۳\sin x-۱)(\sin x+۱)=۰$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ مورد نظر جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{۳}$ و $\sin x=-۱$ هستند. براساس نمودار زیر معلوم است که معادلهٔ موردنظر روی بازهٔ $[۰,۲\pi)$ سه جواب دارد.



۲۱۵۱- گزینهٔ ۳ اگر $m=۰$، معادله به‌صورت $-۲x=۰$ در می‌آید که یک جواب دارد. اگر $m\neq۰$، باید مقدار دلتای معادله برابر صفر باشد، یعنی

$$\Delta=۴-۱۶m^۲=۰\Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

بنابراین به‌ازای سه مقدار m، معادله فقط یک جواب دارد.

۲۱۵۲- گزینهٔ ۳ فرض کنید α عدد بزرگ‌تر و β عدد کوچک‌تر باشد. در این صورت $\alpha+\beta=۴$ و $\alpha\beta=-۲$. بنابراین α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۴x-۲=۰$ هستند. در نتیجه $\alpha=۲+\sqrt{۶}$ و $\beta=۲-\sqrt{۶}$.

بنابراین
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{۲+\sqrt{۶}}{۲-\sqrt{۶}}=\frac{(۲+\sqrt{۶})^۲}{(۲-\sqrt{۶})(۲+\sqrt{۶})}=\frac{۱۰+۴\sqrt{۶}}{۴-۶}=-۵-۲\sqrt{۶}$$

۲۱۵۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $x_۱+x_۲=-۸$ و $x_۱x_۲=-۱۳$. پس

$$\frac{۱}{x_۱+۲}+\frac{۱}{x_۲+۲}=\frac{(x_۱+x_۲)+۴}{x_۱x_۲+۲(x_۱+x_۲)+۴}=\frac{-۸+۴}{-۱۳-۱۶+۴}=\frac{۴}{۲۵}$$

۲۱۵۴- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha+\beta=۸$ و $\alpha=۲\beta+۴$. از حل دستگاه معادله‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\alpha=\frac{۲۰}{۳}$ و $\beta=\frac{۴}{۳}$. از طرف دیگر $\alpha\beta=m$، پس $m=\frac{۸۰}{۹}$.

۲۱۵۵- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $x^۲-۴=t$، آن‌گاه معادلهٔ مورد نظر می‌شود $\frac{۴}{t}+\frac{۵}{t+۱}=۲$. اگر دو طرف این معادله را در $t(t+۱)$ ضرب کنیم، آن‌گاه

$$۴(t+۱)+۵t=۲t(t+۱)\Rightarrow ۴t+۴+۵t=۲t^۲+۲t$$

$$۲t^۲-۷t-۴=۰\Rightarrow t=-\frac{۱}{۲},\ t=۴$$

اگر $t=-\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه

$$x^۲-۴=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x^۲=\frac{۷}{۲}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۷}{۲}}$$

اگر $t=۴$، آن‌گاه

$$x^۲-۴=۴\Rightarrow x^۲=۸\Rightarrow x=\pm\sqrt{۸}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر ۲۸ است.

۲۱۵۶- گزینهٔ ۲ ۲۵ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۷۵ کیلوگرم آن آب است. اگر یک‌سوم از آب را تبخیر کنیم، ۵۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، وزن شکر $۲۵+x$ و وزن محلول $۷۵+x$ می‌شود. پس

$$\frac{۲۵+x}{۷۵+x}=\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۵۰+۲x=۷۵+x\Rightarrow x=۲۵$$

یعنی باید ۲۵ کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم.

۲۱۵۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $۲\sqrt{x-۱}=۲+\sqrt{x-۲}$ می‌نویسیم و دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴x-۴=۴+x-۲+۴\sqrt{x-۲}\Rightarrow ۳x-۶=۴\sqrt{x-۲}$$

دوباره دو طرف معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۹x^۲+۳۶-۳۶x=۱۶x-۳۲\Rightarrow ۹x^۲-۵۲x+۶۸=۰$$

$$(x-۲)(۹x-۳۴)=۰\Rightarrow x=۲,\ x=\frac{۳۴}{۹}$$

هر دو جواب به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

۲۱۵۸- گزینهٔ ۱ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$۲x-۱+x^۲+۲x\sqrt{۲x-۱}=۳x-۱\Rightarrow ۲x\sqrt{۲x-۱}=x-x^۲$$

چون $x=۰$ جواب معادلهٔ اصلی نیست، پس $۲\sqrt{۲x-۱}=۱-x \qquad (۱)$

دوباره طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$۴(۲x-۱)=۱+x^۲-۲x\Rightarrow x^۲-۱۰x+۵=۰\Rightarrow x=۵+۲\sqrt{۵},\ x=۵-۲\sqrt{۵}$$

با توجه به تساوی (۱) باید $\frac{۱}{۲}\le x\le ۱$ تا هم عبارت زیر رادیکال منفی نشود و هم حاصل عبارت رادیکالی منفی نشود. بنابراین $x=۵+۲\sqrt{۵}$ قابل قبول نیست و $x=۵-۲\sqrt{۵}$ تنها جواب معادله است.

۲۱۵۹- گزینهٔ ۲ با توجه به اینکه در $x=۱$ و $x=۳$، $P(x)=۰$، پس

$$P(۱)=۰\Rightarrow m+(m^۲-۱۲)-m-۲n=۰\Rightarrow m^۲-۲n-۱۲=۰$$

$$P(۳)=۰\Rightarrow ۹m+۳(m^۲-۱۲)-m-۲n=۰\Rightarrow ۳m^۲+۸m-۲n-۳۶=۰$$

اگر طرفین معادلهٔ (۱) را از معادلهٔ (۲) کم کنیم، نتیجه می‌شود

$$۲m^۲+۸m-۲۴=۰\Rightarrow m^۲+۴m-۱۲=۰$$

$$(m+۶)(m-۲)=۰\Rightarrow m=۲,\ m=-۶$$

اگر $m=۲$، آن‌گاه ضریب $x^۲$ در $P(x)$ مثبت است و جدول تعیین علامت آن نمی‌تواند به‌صورت داده شده باشد. اگر $m=-۶$، آن‌گاه

$$m^۲-۲n-۱۲=۰\Rightarrow ۳۶-۲n-۱۲=۰\Rightarrow n=۱۲$$

۲۱۶۰- گزینهٔ ۴ نامعادلهٔ داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x^۲-mx-m}{x^۲-x+۱}-۳\le۰\Rightarrow\frac{x^۲-mx-m-۳x^۲+۳x-۳}{x^۲-x+۱}\le۰$$

$$\frac{۲x^۲+(m-۳)x+m+۳}{x^۲-x+۱}\ge۰$$

برای عبارت $x^۲-x+۱$ مقدار Δ منفی است و مقدار عبارت همواره مثبت است. پس برای اینکه مقدار کسر بالا همواره نامنفی باشد، کافی است صورت آن همواره نامنفی باشد. یعنی برای عبارت $۲x^۲+(m-۳)x+m+۳$ ضریب $x^۲$ مثبت باشد (که هست) و Δ نامثبت باشد. پس

$$\Delta=(m-۳)^۲-۸(m+۳)\le۰\Rightarrow m^۲-۶m+۹-۸m-۲۴\le۰$$

$$m^۲-۱۴m-۱۵\le۰\Rightarrow(m-۱۵)(m+۱)\le۰\Rightarrow-۱\le m\le۱۵$$

بنابراین حداکثر مقدار m برابر ۱۵ است.

۲۱۶۱- گزینهٔ ۲ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲=\frac{۱۷}{۳} \\ x_۱=۳x_۲+۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۲=\frac{۲}{۳} \\ x_۱=۵\end{cases} \xrightarrow{x_۱x_۲=\frac{m}{۳}} \frac{۱۰}{۳}=\frac{m}{۳}\Rightarrow m=۱۰$$

ریاضی - ۸۷

۲۱۶۲- گزینهٔ ۲ اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۸\,,\quad \alpha=\frac{\beta}{۲}+۵$$

از حل دستگاه معادله‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $\alpha=۶$ و $\beta=۲$. از طرف دیگر، $\alpha\beta=m\Rightarrow m=۱۲$

خارج از کشور ریاضی - ۹۱

۲۱۶۳- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند. در این صورت $x_۱+x_۲=\frac{m+۱}{۲}$ و $x_۱x_۲=\frac{۱}{۱۶}$. از طرف دیگر،

$$\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}=۲ \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان دو}} x_۱+x_۲+۲\sqrt{x_۱x_۲}=۴$$

$$\frac{m+۱}{۲}+۲\sqrt{\frac{۱}{۱۶}}=۴\Rightarrow \frac{m+۱}{۲}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow m=۶$$

ریاضی - ۹۶

۲۱۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}$ و $\alpha\beta=-۲$. بنابراین مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر است:

$$S=\frac{۱}{\alpha}+۱+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱}{-۲}+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۱=-\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

ریاضی - ۹۲

۲۱۶۵- گزینهٔ ۴ برای اینکه معادله دو جواب مثبت داشته باشد، باید

$$\Delta>۰\,,\quad -\frac{b}{a}>۰\,,\quad \frac{c}{a}>۰$$

$$\Delta=۴(a-۲)^۲-۴(۱۴-a)=۴a^۲-۱۲a-۴۰=۴(a-۵)(a+۲)$$

از شرط $\Delta>۰$ نتیجه می‌شود $a<-۲$ یا $a>۵$. از طرف دیگر،

$$-\frac{b}{a}=۲(a-۲)>۰\Rightarrow a>۲\,,\quad \frac{c}{a}=۱۴-a>۰\Rightarrow a<۱۴$$

اشتراک ناحیه‌های به‌دست آمده جواب مسئله است که به‌صورت $۵<a<۱۴$ است.

ریاضی - ۹۶

۲۱۶۶- گزینهٔ ۳ حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر با $\alpha+\beta=-\frac{-۱۲}{۴}=۳$ و $\alpha\beta=\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=\frac{\sqrt{۳+۱}}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

خارج از کشور ریاضی - ۸۵

۲۱۶۷- گزینهٔ ۱ برای آنکه، معادله دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، باید $\frac{c}{a}<۰$، پس $\frac{c}{a}=\frac{۱-m}{m+۲}<۰\Rightarrow m<-۲$ یا $m>۱$

خارج از کشور ریاضی - ۹۵

۲۱۶۸- گزینهٔ ۳ در مخلوط اول که ۱۱ کیلوگرم است، $\frac{۴۰}{۱۰۰}\times ۱۱=۴/۴$ کیلوگرم رنگ و در مخلوط دوم که ۴ کیلوگرم است، $\frac{۷۰}{۱۰۰}\times ۴=۲/۸$ کیلوگرم رنگ موجود است.

فرض می‌کنیم که با تبخیر، x کیلوگرم از مواد غیر از رنگ تبخیر شود. در این صورت

$$\frac{۴/۴+۲/۸}{۱۱+۴-x}=\frac{۵۰}{۱۰۰}\Rightarrow \frac{۷/۲}{۱۵-x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۷/۲\times ۲=۱۵-x\Rightarrow x=۰/۶$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۱۶۹- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $A=x^۲+۴x+۵$، آن‌گاه

$$A-۲=\sqrt{A}\xrightarrow{A\geq ۲} A^۲-۴A+۴=A\Rightarrow A^۲-۵A+۴=۰$$

$$\begin{cases} A=۱ \quad (\text{غ.ق.ق.}) \\ A=۴\Rightarrow x^۲+۴x+۵=۴\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰\xrightarrow{\frac{c}{a}=۱} x_۱x_۲=۱\end{cases}$$

ریاضی - ۹۴

۲۱۷۰- گزینهٔ ۴ از $f(x)>\frac{۷}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۶>\frac{۷}{۲}\Rightarrow x^۲-۴x-۵<۰\Rightarrow -۱<x<۵$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازهٔ (a,b)، همان بازهٔ $(-۱,۵)$ است. پس بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $۵-(-۱)=۶$.

تجربی - ۸۹

۲۱۷۱- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $t=x^۲+x$، آن‌گاه به‌دست می‌آید:

$$t^۲-۱۸t+۷۲=۰\Rightarrow (t-۶)(t-۱۲)=۰$$

$$t=۶\Rightarrow x^۲+x=۶\Rightarrow x^۲+x-۶=۰\Rightarrow x_۱+x_۲=-۱$$

$$t=۱۲\Rightarrow x^۲+x=۱۲\Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow x_۳+x_۴=-۱$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=-۲$$

تجربی - ۹۰

۲۱۷۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ اول را حساب می‌کنیم:

$$۵x^۲+۳x-۲=۰\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{-۳}{۵}\,,\ \alpha\beta=-\frac{۲}{۵}$$

اکنون مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}=\frac{\frac{۹}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۹}{۴}$$

$$P=\frac{۱}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر است:

$$x^۲-Sx+P=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۲۹}{۴}x+\frac{۲۵}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۲۹x+۲۵=۰\Rightarrow k=۲۹$$

راه‌حل دوم یکی از جواب‌های معادلهٔ اول برابر ۱- است:

$$5x^2+3x-2=0 \Rightarrow \alpha=-1$$

بنابراین یکی از جواب‌های معادلهٔ دوم ۱ است:

$$\alpha=-1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2}=1 \Rightarrow 4\times1^2-k\times1+25=0 \Rightarrow k=29$$

ریاضی - ۹۰

۲۱۷۳- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $2x^2-x-2=0$ و α و β جواب‌های معادلهٔ $8x^2-mx-8=0$ باشند.

در این صورت

$$x_1+x_2=\frac{1}{2},\qquad x_1x_2=-1$$
$$\alpha+\beta=\frac{m}{8},\qquad \alpha\beta=-1$$
$$\alpha=x_1^3,\qquad \beta=x_2^3$$

دو طرف تساوی $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ را به توان سه می‌رسانیم:

$$x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{1}{8}$$
$$\alpha+\beta-3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{m}{8}=\frac{1}{8}+\frac{3}{2} \Rightarrow m=13$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۱۷۴- گزینهٔ ۲ $x=2$ در معادله صدق می‌کند، پس

$$2(4a-2-5)=2 \Rightarrow a=2$$

بنابراین معادله به صورت $2x^3-x^2-5x-2=0$ است. با تقسیم عبارت سمت چپ معادله بر $x-2$ به‌دست می‌آید:

$$2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(2x^2+3x+1)=0$$

بنابراین دو جواب دیگر از معادلهٔ $2x^2+3x+1=0$ به‌دست می‌آیند که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{3}{2}$ است.

خارج از کشور ریاضی - ۸۷

۲۱۷۵- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=\sqrt{x}$، آن‌گاه $t^2-2t+m-1=0$.

برای آنکه دو جواب برای x به‌دست آید، باید این معادله دو جواب نامنفی داشته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta>0 \Rightarrow 4-4(m-1)>0 \Rightarrow m<2\\ \frac{c}{a}\ge0 \Rightarrow \frac{m-1}{1}\ge0 \Rightarrow m-1\ge0 \Rightarrow m\ge1\\ -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{-2}{1}>0 \Rightarrow 2>0 \Rightarrow m\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} 1\le m<2$$

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۲۱۷۶- گزینهٔ ۲ برای اینکه همهٔ مقادیر عبارت مورد نظر مثبت باشد، باید

$$1-a>0 \Rightarrow a<1$$

$$\Delta=24+4a(1-a)<0 \Rightarrow -a^2+a+6<0 \Rightarrow a<-2 \text{ یا } a>3$$

از اشتراک این ناحیه‌ها به‌دست می‌آید $a<-2$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۱۷۷- گزینهٔ ۴ برای اینکه معادلهٔ $\sqrt{4x-3}=2-3x$ جواب داشته باشد، باید

$$4x-3\ge0 \Rightarrow x\ge\frac{3}{4},\quad 2-3x\ge0 \Rightarrow x\le\frac{2}{3}$$

با اشتراک دو محدودهٔ به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم که معادله جوابی نمی‌تواند داشته باشد.

خارج از کشور تجربی - ۸۷

۲۱۷۸- گزینهٔ ۴ ابتدا مقدار a را طوری می‌یابیم که $x=4$ جواب معادله باشد:

$$4+a=\sqrt{20-16} \Rightarrow 4+a=2 \Rightarrow a=-2$$

به ازای $a=-2$، معادلهٔ مورد نظر را حل می‌کنیم:

$$x-2=\sqrt{5x-x^2} \Rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2$$
$$2x^2-9x+4=0 \Rightarrow x=4,\frac{1}{2}$$

چون $x=\frac{1}{2}$ در معادلهٔ $x-2=\sqrt{5x-x^2}$ صدق نمی‌کند، این معادله جواب دیگری ندارد.

تجربی - ۸۷

۲۱۷۹- گزینهٔ ۲ باید $f(x)<2$. بنابراین

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2 \Rightarrow 3x^2-2x<2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x-8<0 \Rightarrow -2<x<4$$

پس $a=-2$ و $b=4$ و در نتیجه $b-a=6$.

خارج از کشور ریاضی - ۸۸

۲۱۸۰- گزینهٔ ۲ به‌ازای مقادیری از x، نمودار تابع زیر محور x است که داشته باشیم $f(x)<0$، پس

$$f(x)=x^3-4x^2-x+4=x^2(x-4)-x+4=(x-4)(x^2-1)$$
$$=(x-4)(x-1)(x+1) \xrightarrow{f(x)<0} (x-1)(x+1)(x-4)<0$$

x		-1		1		4		$+\infty$
f(x)		0	+	0	−	0	+	

بزرگ‌ترین بازه به‌صورت (a,b) که در آن $f(x)$ منفی است، بازهٔ $(1,4)$ است، پس $b-a=4-1=3$.

ریاضی - ۸۸

۲۱۸۱- گزینهٔ ۲ اگر $a<-2$، آن‌گاه $1+a<-1<0$، پس $|1+a|=-1-a$. در نتیجه $|2+a|=|1+1+a|=||1+a|-1|$. از طرف دیگر، چون $a<-2$، پس $a+2<0$، در نتیجه $|2+a|=-2-a$.

۲۱۸۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون $-1<x<2$، پس

$$\frac{|x-2|}{x-2}=\frac{2-x}{x-2}=-1\,,\qquad \frac{x+1}{|x+1|}=\frac{x+1}{x+1}=1$$

بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-1-1=-2$.

راه‌حل دوم کافی است حاصل عبارت را به ازای $x=0$ حساب کنیم:

$$A=\frac{|x-2|}{x-2}-\frac{x+1}{|x+1|}\xrightarrow{x=0}A=-1-1=-2$$

۲۱۸۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$-3<x<-2\Rightarrow -18<6x<-12\Rightarrow 0<14<6x+32<20$$

در نتیجه $|6x+32|=6x+32$. از طرف دیگر،

$$-3<x<-2\Rightarrow 3>-x>2\Rightarrow 11>8-x>10>0$$

در نتیجه $|8-x|=8-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{6x+32-4(8-x)}{3x}=\frac{6x+4x}{3x}=\frac{10}{3}$$

۲۱۸۴- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$1<x<2\Rightarrow 3<3x<6\Rightarrow 0<3x-3<3\Rightarrow |3x-3|=3x-3$$

$$\sqrt{4x^2-16x+16}=\sqrt{4(x-2)^2}=2|\underbrace{x-2}_{\text{منفی}}|=-2x+4$$

بنابراین $A=3x-3-(-2x+4)=5x-7$.

۲۱۸۵- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون x منفی است، عبارت $x+\frac{4}{x}$ منفی است، پس $|x+\frac{4}{x}|=-x-\frac{4}{x}$. از طرف دیگر،

$$|x-\frac{4}{x}|=|\frac{x^2-4}{x}|=|\frac{(x-2)(x+2)}{x}|$$

چون $-2<x<0$، پس $x-2<0$ و $x+2>0$ و چون x منفی است، پس $x-\frac{4}{x}$ مثبت است، پس $|x-\frac{4}{x}|=x-\frac{4}{x}$، بنابراین

$$f(x)=-x-\frac{4}{x}+x-\frac{4}{x}=\frac{-8}{x}$$

راه‌حل دوم حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-1$ حساب می‌کنیم:

$$f(x)=|x+\frac{4}{x}|+|x-\frac{4}{x}|\xrightarrow{x=-1}f(-1)=|-5|+|3|=8$$

فقط مقدار گزینهٔ (۴) به ازای $x=-1$ برابر ۸ می‌شود.

۲۱۸۶- گزینهٔ ۳ چون $a-6<0$، پس $|a-6|=-a+6$. بنابراین

$$A=|6-a-|3+|a-6|||=|6-a-|3-a+6||=|6-a-|9-a||$$

$$\xrightarrow{9-a>0}A=|6-a-(9-a)|=|-3|=3$$

۲۱۸۷- گزینهٔ ۲ چون $x<0<y$، پس $2x-y<0$ و $2y-x>0$، پس عبارت مورد نظر برابر است با $-(2x-y)-(2y-x)-x+2y=-2x+y$.

۲۱۸۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $a-1<0$، $b+2>0$ و $a+b<1-1=0$، بنابراین عبارت مورد نظر برابر با $-1-1-1=-3$.

۲۱۸۹- گزینهٔ ۱ چون $a<0$، پس $|a|=-a$، در نتیجه

$$|a|b\le a\xrightarrow{a\neq 0}b\le\frac{a}{|a|}\xrightarrow{a<0}b\le -1$$

بنابراین هر یک از عددهای $2b-6$ و $b-2$ هم منفی هستند، پس

$$|2b-6|-2|b-2|=-(2b-6)-2(-(b-2))=2$$

۲۱۹۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\frac{|a|}{a}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & a>0\\ -1 & a<0\end{cases}$.

اکنون به جدول زیر توجه کنید:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y		2	ت ن	0	ت ن	-2	ت ن	0	ت ن	2	

بنابراین y سه مقدار مختلف (۰ و ± 2) دارد.

۲۱۹۱- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $x^2-5x=\pm 6$ می‌نویسیم. بنابراین

$$x^2-5x=6\Rightarrow x^2-5x-6=(x+1)(x-6)=0\Rightarrow x=-1\,,\,x=6$$

$$x^2-5x=-6\Rightarrow x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0\Rightarrow x=2\,,\,x=3$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -36 است.

۲۱۹۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $|3x-18|=|3(x-6)|=3|x-6|$ و $|24-4x|=|4x-24|=|4(x-6)|=4|x-6|$. بنابراین

$$7|x-6|=28\Rightarrow |x-6|=4\Rightarrow x=2\,,\,x=10$$

پس مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۱۲ است.

۲۱۹۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $|a|=|b|$، آن‌گاه $a=b$ یا $a=-b$. بنابراین از معادلهٔ داده شده نتیجه می‌شود $x^2-2x=x^2+2x-4$ یا $x^2-2x=-x^2-2x+4$. بنابراین

$$x^2-2x=x^2+2x-4\Rightarrow 4x=4\Rightarrow x=1$$

$$x^2-2x=-x^2-2x+4\Rightarrow 2x^2=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادله برابر -2 است.

۲۱۹۴- گزینهٔ ۳ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر $x\ge 0$، آن‌گاه $|x|=x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1\,,\ x=3$$

حالت دوم اگر $x<0$، آن‌گاه $|x|=-x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^2-4x-3=0\Rightarrow x=2-\sqrt{7}\,,\ x=2+\sqrt{7}\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر سه جواب دارد.

۲۱۹۵- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x^2-2x+1-|x-1|-2=0 \Rightarrow (x-1)^2-|x-1|-2=0$$

$$|x-1|^2-|x-1|-2=0 \xrightarrow{|x-1|=t} t^2-t-2=0$$

$$(t+1)(t-2)=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow |x-1|=-1 \ (\text{غ.ق.ق.})$$

$$t=2 \Rightarrow |x-1|=2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \Rightarrow x=3 \\ x-1=-2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر ۲ است.

راه‌حل دوم دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول اگر $x \geq 1$، آن‌گاه $|x-1|=x-1$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^2-2x-x+1-1=0 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x=0 \ (\text{غ.ق.ق.}), \quad x=3$$

حالت دوم اگر $x<1$، آن‌گاه $|x-1|=1-x$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$x^2-2x+x-1-1=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1, \quad x=2 \ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $3-1=2$.

۲۱۹۶- گزینهٔ ۴ نامعادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$3x-2 \geq 7 \text{ یا } 3x-2 \leq -7 \Rightarrow x \geq 3 \text{ یا } x \leq -\frac{5}{3}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,-\frac{5}{3}]\cup[3,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(-\frac{5}{3},3)$ است. پس $a=-\frac{5}{3}$ و $b=3$ و در نتیجه $ab=-5$.

۲۱۹۷- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول نابرابری $|x| \leq |y|$ با نابرابری $(x-y)(x+y) \leq 0$ معادل است، زیرا

$$|x| \leq |y| \Rightarrow x^2 \leq y^2 \Rightarrow x^2-y^2 \leq 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) \leq 0$$

در نتیجه نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(a+5-a+5)(a+5+a-5) \leq 0$$

نابرابری بالا به‌صورت $10(2a) \leq 0$ یا $20a \leq 0$ درمی‌آید که مجموعهٔ جواب‌های آن $(-\infty,0]$ است.

راه‌حل دوم دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$a^2+10a+25 \leq a^2-10a+25 \Rightarrow 20a \leq 0$$

پس مجموعهٔ جواب‌های آن $(-\infty,0]$ است.

۲۱۹۸- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت $\frac{|x-6|}{|x-2|}>3$ می‌نویسیم. چون $x \neq 2$، دو طرف این نامعادله را در عبارت مثبت $|x-2|$ ضرب می‌کنیم:

$$|x-6|>3|x-2|$$

چون دو طرف نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم:

$$x^2-12x+36>9(x^2-4x+4) \Rightarrow 8(x^2-3x)<0 \Rightarrow 0<x<3$$

عددهای صحیح ۱ و ۲ در بازهٔ $(0,3)$ هستند. اما $x=2$ قابل قبول نیست، پس تنها جواب صحیح نامعادلهٔ مورد نظر ۱ است.

۲۱۹۹- گزینهٔ ۳ اگر $x<0$، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن صدق می‌کنند. همچنین $x=0$ جواب نامعادله نیست. اگر $x>0$، آن‌گاه

$$\begin{cases} x^2-x>2x \Rightarrow x^2-3x>0 \Rightarrow x(x-3)>0 \Rightarrow x-3>0 \Rightarrow x>3 \\ \text{یا} \\ x^2-x<-2x \Rightarrow x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0 \xrightarrow{x>0} x+1<0 \\ \qquad x<-1 \ (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ است که شامل عددهای صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ نیست.

۲۲۰۰- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول می‌دانیم $x^2=|x|^2$ بنابراین نامعادله به شکل $|x|^2-5|x|+4 \leq 0$ نوشته می‌شود. اگر فرض کنیم $t=|x|$، نامعادله به‌صورت $t^2-5t+4 \leq 0$ درمی‌آید.

با توجه به جدول زیر، محدودهٔ $1 \leq t \leq 4$ جواب نامعادله است. یعنی

$$1 \leq |x| \leq 4$$

t	$-\infty$		1		4		$+\infty$
t^2-5t+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

راه‌حل دوم عدد صفر در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۱) جواب نیست. عدد ۵ هم در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینه‌های (۲) و (۴) هم جواب نیستند. پس گزینهٔ (۳) جواب است.

۲۲۰۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر $a \geq 0$، آن‌گاه جواب‌های معادلهٔ $|x|=a$ برابرند با $x=\pm a$. بنابراین

$$\big||x-4|-1\big|=3 \Rightarrow \begin{cases} |x-4|-1=3 \Rightarrow |x-4|=4 \\ |x-4|-1=-3 \Rightarrow |x-4|=-2 \end{cases}$$

معادلهٔ $|x-4|=-2$ جواب ندارد. پس

$$|x-4|=4 \Rightarrow \begin{cases} x-4=4 \\ x-4=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=0 \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۲۲۰۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$|x-1||x-3|-5|x-1|=0 \Rightarrow |x-1|(|x-3|-5)=0$$

$$\begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow x=1 \\ |x-3|=5 \Rightarrow x-3=\pm 5 \Rightarrow x=-2, \ x=8 \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر است با ۷.

۲۲۰۳- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که چون سمت چپ معادله نامنفی است، پس سمت راست آن هم نامنفی است، بنابراین $x \geq 0$. طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم

$$|x^2-4|=3x \Rightarrow (x^2-4)^2=(3x)^2 \Rightarrow x^4-8x^2+16=9x^2$$

$$x^4-17x^2+16=0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2-16)=0$$

بنابراین

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$x^2-16=0 \Rightarrow x=\pm 4$$

چون $x \geq 0$، پس فقط جواب‌های $x=1$ و $x=4$ قابل قبول هستند که مجموعه آن‌ها برابر است با ۵.

راه‌حل دوم اگر $x<0$، آن‌گاه معادله جواب ندارد، زیرا سمت راست تساوی منفی و سمت چپ آن نامنفی است. اگر $x \geq 0$، آن‌گاه معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2-4=3x \\ x^2-4=-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=-1, \ x=4 \\ x^2+3x-4=0 \Rightarrow x=1, \ x=-4 \end{cases}$$

جواب‌های $x=-1$ و $x=-4$ قابل قبول نیستند، زیرا با شرط $x\ge 0$ معادله را حل کرده‌ایم. پس جواب‌های معادله $x=1$ و $x=4$ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۵ است.

۲۲۰۴- گزینهٔ ۴ اگر $x\le -3$، آن‌گاه $|x+3|=-(x+3)$ و معادله می‌شود

$$x^2+2(x+3)-18=0 \Rightarrow x^2+2x-12=0$$

$$x=-1-\sqrt{13},\ x=-1+\sqrt{13}\ (\text{غ.ق.ق})$$

اگر $x>-3$، آن‌گاه $|x+3|=x+3$ و معادله می‌شود

$$x^2-2(x+3)-18=0\Rightarrow x^2-2x-24=0$$

$$(x-6)(x+4)=0\Rightarrow x=-4\ (\text{غ.ق.ق}),\quad x=6$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با $5-\sqrt{13}$.

۲۲۰۵- گزینهٔ ۴ با توجه به فرض سؤال، هر یک از معادله‌های $x^2-6x-a=0$ و $x^2-6x+a=0$ باید دو جواب داشته باشد. در نتیجه $36+4a>0$ و $36-4a>0$. می‌دانیم $a>0$ (زیرا اگر $a<0$، معادلهٔ $|x^2-6x|=a$ جواب ندارد)، در نتیجه $36+4a>0$. بنابراین کافی است

$$36-4a>0\Rightarrow a<9$$

بنابراین $0<a<9$.

۲۲۰۶- گزینهٔ ۴ ابتدا باید مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $|x-3|\ge 2$ و $|2x+1|\le 5$ را بیابیم. توجه کنید که

$$|x-3|\ge 2\Rightarrow\begin{cases}x-3\ge 2\Rightarrow x\ge 5\\ x-3\le -2\Rightarrow x\le 1\end{cases}$$

$$|2x+1|\le 5\Rightarrow -5\le 2x+1\le 5\Rightarrow -6\le 2x\le 4\Rightarrow -3\le x\le 2$$

پس مجموعهٔ جواب‌های اولی برابر با $A=(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$ و مجموعهٔ جواب‌های دومی $B=[-3,2]$ است. بنابراین $A\cap B=[-3,1]$.

۲۲۰۷- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول برای حل این نامعادله دو طرف آن را به توان دو می‌رسانیم تا به نامعادلهٔ زیر برسیم:

$$(x+1)^2\ge(2x-1)^2\Rightarrow x^2+2x+1\ge 4x^2-4x+1$$

در نتیجه به نامعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$3x^2-6x\le 0\Rightarrow 0\le x\le 2$$

بنابراین $a=0$ و $b=2$. در نتیجه $b-a=2$.

راه‌حل دوم اگر دو طرف نابرابری $|A|\ge|B|$ را به توان دو برسانیم، نتیجه می‌شود:

$$A^2\ge B^2\Rightarrow A^2-B^2\ge 0\Rightarrow (A-B)(A+B)\ge 0$$

و برعکس. در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر معادل است با

$$(x+1-2x+1)(x+1+2x-1)\ge 0\Rightarrow(-x+2)(3x)\ge 0\Rightarrow 0\le x\le 2$$

بنابراین $a=0$ و $b=2$. در نتیجه $b-a=2$.

۲۲۰۸- گزینهٔ ۴ ابتدا نامعادله را به‌صورت $\left|\frac{x-3}{2-x}\right|\le 1$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\frac{|x-3|}{|2-x|}\le 1\Rightarrow |x-3|\le|2-x|,\quad x\ne 2$$

$$|x-3|^2\le|2-x|^2\Rightarrow x^2-6x+9\le 4-4x+x^2\Rightarrow x\ge\frac{5}{2}$$

بنابراین $[\frac{5}{2},+\infty)$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است و در نتیجه $a=5$، $b=2$. پس $a+b=7$.

۲۲۰۹- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که اگر $x\ge 0$، آن‌گاه $|x|=x$. بنابراین

$$x<|x|\Rightarrow x<0$$

در نتیجه

$$|x|<x^2\xrightarrow{x<0}-x<x^2\Rightarrow x(x+1)>0\xrightarrow{x<0}x+1<0$$

به این ترتیب، $|x+1|=-x-1$، $|x|=-x$ و $|1-x|=1-x$. بنابراین حاصل عبارت مورد نظر برابر است با $-3x$.

راه‌حل دوم $x=-2$ در نابرابری‌های $x<|x|<x^2$ صدق می‌کند. بنابراین کافی است حاصل عبارت مورد نظر را به ازای $x=-2$ به‌دست آوریم:

$$A=|x+1|+|1-x|+|x|\xrightarrow{x=-2}A=1+3+2=6$$

فقط مقدار گزینهٔ (۱) به ازای $x=-2$ برابر ۶ است.

۲۲۱۰- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول اگر $x\ge 0$، آن‌گاه $x+1>0$ و نامعادله به شکل $(x+1)x<x(x+1)$ درمی‌آید که جواب ندارد. اگر $-1<x<0$، آن‌گاه $x+1>0$ و نامعادله به شکل $-(x+1)x<x(x+1)$ درمی‌آید، یعنی $2x(x+1)>0$ که درست نیست. اگر $x\le -1$، آن‌گاه $x+1\le 0$ و نامعادله به شکل $-(x+1)x<-x(x+1)$ درمی‌آید که جواب ندارد. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله تهی است.

راه‌حل دوم معلوم است که $x=0$ و $x=-1$ جواب‌های نامعادله نیستند، پس می‌توانیم نامعادله را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{x+1}{|x+1|}<\frac{x}{|x|}\qquad(1)$$

می‌دانیم برای هر $a\ne 0$، $\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & a>0\\ -1 & a<0\end{cases}$. بنابراین تنها حالتی که نامعادلهٔ (۱) می‌تواند جواب داشته باشد به‌صورت زیر است:

$$\frac{x+1}{|x+1|}=-1\ ,\quad \frac{x}{|x|}=1$$

از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $x+1<0$، یعنی $x<-1$ و از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $x>0$. دو محدودهٔ به‌دست آمده اشتراک ندارند، پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر تهی است.

۲۲۱۱- گزینهٔ ۴ چون از $|A|=-A$، نتیجه می‌شود $A\le 0$، پس از $|x^2-x-6|=-(x^2-x-6)$ نتیجه می‌شود $x^2-x-6\le 0$. بنابراین $(x-3)(x+2)\le 0$ و با توجه به جدول تعیین علامت زیر بازهٔ $[-2,3]$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، که شامل شش عدد صحیح (۰، ±۱، ±۲ و ۳) است.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		+		−		+	

۲۲۱۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\big||x^2-5|-2\big|=1\Rightarrow |x^2-5|-2=\pm 1$$

حالت اول

$$|x^2-5|-2=-1\Rightarrow|x^2-5|=1\Rightarrow\begin{cases}x^2-5=-1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\\ x^2-5=1\Rightarrow x^2=6\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}\end{cases}$$

حالت دوم

$$|x^2-5|-2=1\Rightarrow|x^2-5|=3\Rightarrow\begin{cases}x^2-5=-3\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\\ x^2-5=3\Rightarrow x^2=8\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}\end{cases}$$

بنابراین معادله هشت جواب دارد.

۲۲۱۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x(x^۲-۳)|=|x| \Rightarrow |x||x^۲-۳|=|x|$$

واضح است که $x=۰$ یک جواب معادله است. با شرط $x\neq ۰$ دو طرف معادله را بر $|x|$ تقسیم می‌کنیم:

$$|x^۲-۳|=۱ \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۳=-۱\Rightarrow x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ x^۲-۳=۱\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲\end{cases}$$

بنابراین معادله پنج جواب دارد.

۲۲۱۴- گزینهٔ ۴ با توجه به ریشهٔ عبارت‌های داخل قدرمطلق، سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم

$$x\le -۲ \Rightarrow -۲(x-۱)-(x+۲)=۵\Rightarrow -۳x=۵\Rightarrow x=-\frac{۵}{۳} \text{ (غ.ق.ق.)}$$

$$-۲<x\le ۱\Rightarrow -۲(x-۱)+x+۲=۵\Rightarrow -x+۴=۵\Rightarrow x=-۱$$

$$x>۱\Rightarrow ۲(x-۱)+x+۲=۵\Rightarrow ۳x=۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر $\{-۱,\frac{۵}{۳}\}$ است، پس مجموع جواب‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۲۲۱۵- گزینهٔ ۴ چون صفر جواب معادلهٔ مورد نظر نیست، پس $a\neq ۰$. همچنین، سمت چپ معادله نامنفی است، پس $a>۰$. اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{x^۲}{x+۱}=a\Rightarrow x^۲-ax-a=۰ \quad \text{یا} \quad \frac{x^۲}{x+۱}=-a\Rightarrow x^۲+ax+a=۰$$

توجه کنید که معادلهٔ $x^۲-ax-a=۰$ همیشه دو جواب غیرصفر دارد ($\Delta=a^۲+۴a>۰$). بنابراین برای اینکه معادلهٔ اصلی دو جواب غیرصفر داشته باشد، باید معادلهٔ $x^۲+ax+a=۰$ جواب نداشته باشد:

$$\Delta=a^۲-۴a<۰\Rightarrow ۰<a<۴$$

بنابراین اگر $۰<a<۴$، معادلهٔ مورد نظر دو جواب غیرصفر دارد. توجه کنید که $x=-۱$ (ریشهٔ مخرج کسر)، جواب معادلهٔ $x^۲-ax-a=۰$ نیست.

۲۲۱۶- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|-۴<-۱ \text{ یا } |x|-۴>۱$$

پس $|x|<۳$ یا $|x|>۵$. از نامعادلهٔ $|x|<۳$ نتیجه می‌شود $-۳<x<۳$.

از نامعادلهٔ $|x|>۵$ نتیجه می‌شود $x>۵$ یا $x<-۵$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت زیر است:

$$(-\infty,-۵)\cup(-۳,۳)\cup(۵,+\infty)$$

که شامل اعداد صحیح ±۵، ±۴ و ±۳ نیست. تعداد این اعداد ۶ تاست.

۲۲۱۷- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|(x-۵)(x-۲)|<|(x-۲)(x-۳)|\Rightarrow |x-۲||x-۵|<|x-۲||x-۳|$$

معلوم است که $x\neq ۲$. بنابراین $|x-۵|<|x-۳|$. چون دو طرف این نامعادله نامنفی هستند، پس می‌توان آن‌ها را به توان دو رساند:

$$x^۲-۱۰x+۲۵<x^۲-۶x+۹\Rightarrow ۴x>۱۶\Rightarrow x>۴$$

راه‌حل دوم

$$|x^۲-۷x+۱۰|<|x^۲-۵x+۶|$$

$$x^۲-۷x+۱۰<x^۲-۵x+۶\Rightarrow ۲x>۴\Rightarrow x>۲$$

$$x^۲-۷x+۱۰>-x^۲+۵x-۶\Rightarrow ۲x^۲-۱۲x+۱۶>۰\Rightarrow x^۲-۶x+۸>۰$$

$$(x-۲)(x-۴)>۰\Rightarrow x>۴ \text{ یا } x<۲$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر با اشتراک این جواب‌ها است، که برابر $x>۴$ است.

۲۲۱۸- گزینهٔ ۲ نامعادله را به‌صورت $x^۲-۲x+۱<۲+|x-۱|$ می‌نویسیم. بنابراین

$$(x-۱)^۲<۲+|x-۱|\Rightarrow |x-۱|^۲<۲+|x-۱|$$

اگر فرض کنیم $t=|x-۱|$، آن‌گاه

$$t^۲-t-۲<۰\Rightarrow (t+۱)(t-۲)<۰$$

چون $t\ge ۰$، بنابراین $t+۱\ge ۱$ و در نتیجه باید نامعادلهٔ $t-۲<۰$ را حل کنیم که $t<۲$ جواب است. پس $|x-۱|<۲$ و در نتیجه

$$-۲<x-۱<۲\Rightarrow -۱<x<۳$$

پس اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ در مجموعهٔ جواب‌های نامعادله مورد نظر قرار دارند.

۲۲۱۹- گزینهٔ ۲ ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$-a^۲-۲<|x|-۳a<a^۲+۲\Rightarrow -a^۲+۳a-۲<|x|<a^۲+۳a+۲$$

واضح است که اگر $a^۲+۳a+۲\le ۰$، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. پس

$$a^۲+۳a+۲=(a+۱)(a+۲)\le ۰$$

a	$-\infty$		-۲		-۱		$+\infty$
$a^۲+۳a+۲$		+	۰	−	۰	+	

با توجه به جدول فوق باید $-۲\le a\le -۱$.

۲۲۲۰- گزینهٔ ۲ اگر $x<۱$، آن‌گاه سمت چپ نامعادله منفی و سمت راست آن نامنفی است. پس $x<۱$ جواب نامعادله است. اگر $x>۱$، آن‌گاه $|x+۱|=x+۱$ و در نتیجه

$$\frac{۳}{x-۱}\le x+۱\Rightarrow ۳\le x^۲-۱\Rightarrow x^۲\ge ۴ \xrightarrow{x>۱} x\ge ۲$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $\mathbb{R}-[۱,۲)$ است و در نتیجه

$$a=۱, b=۲\Rightarrow a+b=۳$$

۲۲۲۱- گزینهٔ ۴ با جای‌گذاری $x=\sqrt{۲}-۱$ در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(\sqrt{۲}-۱)=۵|۳\sqrt{۲}-۳-۱|+۳|۵\sqrt{۲}-۵-۴|$$
$$=۵(۳\sqrt{۲}-۴)-۳(۵\sqrt{۲}-۹)=۷$$

با جای‌گذاری $x=\sqrt{۳}-۱$ در ضابطهٔ تابع به‌دست می‌آید

$$f(\sqrt{۳}-۱)=۵|۳\sqrt{۳}-۳-۱|+۳|۵\sqrt{۳}-۵-۴|$$
$$=۵(۳\sqrt{۳}-۴)-۳(۵\sqrt{۳}-۹)=۷$$

پس

$$f(\sqrt{۲}-۱)+f(\sqrt{۳}-۱)=۱۴$$

۲۲۲۲- گزینهٔ ۳ برای $x>۱$ ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$x-۱>۰,\ x+۱>۰\Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{x+۱}-\frac{۱-x}{x-۱}=۲$$

به طریق مشابه برای $-۱<x<۱$ به‌دست می‌آید

$$x-۱<۰,\ x+۱>۰\Rightarrow f(x)=\frac{x+۱}{x+۱}-\frac{۱-x}{-(x-۱)}=۰$$

همچنین برای $x<-۱$،

$$x-۱<۰,\ x+۱<۰\Rightarrow f(x)=\frac{-(x+۱)}{x+۱}-\frac{۱-x}{-(x-۱)}=-۲$$

بنابراین $R_f=\{۰,-۲,۲\}$ و برد تابع ۳ عضو دارد.

۲۲۲۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر $x\ge۰$، آن‌گاه

$$|x|=x\Rightarrow \big|x-|x|\big|=|x-x|=۰$$

بنابراین $f(x)=|۲x-۰|=|۲x|=۲x$. اگر $x<۰$، آن‌گاه

$$|x|=-x\Rightarrow \big|x-|x|\big|=|x+x|=|۲x|=-۲x$$

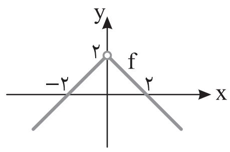
بنابراین $f(x)=|۲x-(-۲x)|=|۴x|=-۴x$. در نتیجه

$$f(x)=\begin{cases}۲x & x\ge۰\\ -۴x & x<۰\end{cases}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(۱)=۲$. فقط در تابع گزینهٔ (۳) این شرایط برقرار است.

۲۲۲۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

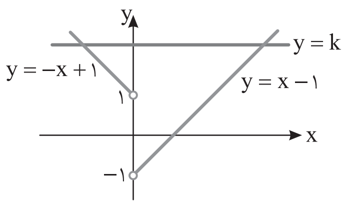
$$f(x)=\frac{۲|x|-x^۲}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{۲x-x^۲}{x} & x>۰\\[2mm] \dfrac{-۲x-x^۲}{-x} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲-x & x>۰\\ ۲+x & x<۰\end{cases}$$



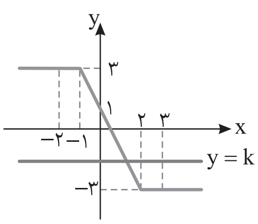
۲۲۲۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-x(۱-\frac{۱}{x}) & x<۰\\[1mm] x(۱-\frac{۱}{x}) & x>۰\end{cases}=\begin{cases}-x+۱ & x<۰\\ x-۱ & x>۰\end{cases}$$

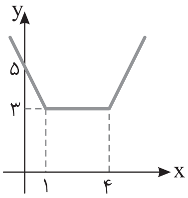
بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است. واضح است که اگر $k>۱$، آن‌گاه خط $y=k$ و نمودار تابع f در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۲۲۶- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f را به کمک نقاط $(۲,-۳)$، $(-۱,۳)$، $(۳,-۳)$ و $(-۲,۳)$ رسم می‌کنیم. واضح است که اگر خط $y=k$ این نمودار را در یک نقطه با طول مثبت قطع کند، باید $-۳<k<۱$.

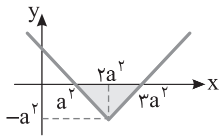


۲۲۲۷- گزینهٔ ۲ برای اینکه حداکثر مقدار عبارت $\frac{۱۵}{|x-۱|+|x-۴|}$ را به‌دست بیاوریم، کافی است حداقل مقدار تابع $f(x)=|x-۱|+|x-۴|$ را به‌دست آوریم. نمودار تابع f در شکل رسم شده است. با توجه به شکل، کمترین مقدار تابع f برابر ۳ است، بنابراین بیشترین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{۱۵}{۳}=۵$.



۲۲۲۸- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را $۲a^۲$ واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-۲a^۲|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را $a^۲$ واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۲a^۲|-a^۲$ به‌دست می‌آید. با توجه به نمودار این تابع، مساحت ناحیهٔ مورد نظر برابر است با

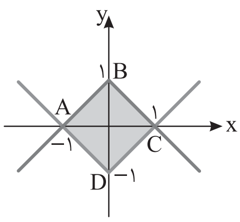
$$S=\frac{۱}{۲}a^۲(۲a^۲)=a^۴$$



بنابراین

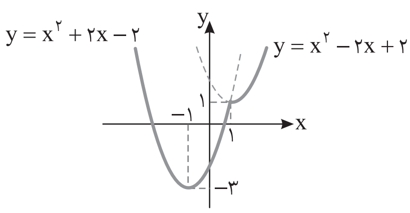
$$a^۴=۴\Rightarrow a=\pm\sqrt{۲}$$

۲۲۲۹- گزینهٔ ۳ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی ABCD مطلوب است. در واقع مساحت مورد نظر از چهار مثلث قائم‌الزاویه به قاعدهٔ یک واحد و ارتفاع یک واحد تشکیل شده است. پس مساحت ABCD برابر است با $۴\times(\frac{۱\times۱}{۲})=۲$.



۲۲۳۰- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x+۲ & x\ge۱\\ x^۲+۲x-۲ & x<۱\end{cases}$.

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است و برد آن بازهٔ $[-۳,+\infty)$ است.



۲۲۳۱- گزینهٔ ۱ ابتدا مقادیر $f(۲-|a|)$ و $f(۲+|a|)$ را حساب می‌کنیم:

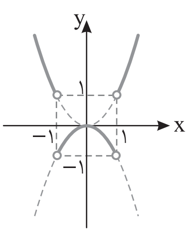
$$f(۲-|a|)=\big|۲-|a|-۲\big|+۱=\big|-|a|\big|+۱=|a|+۱$$

$$f(۲+|a|)=\big|۲+|a|-۲\big|+۱=\big||a|\big|+۱=|a|+۱$$

بنابراین $f(۲-|a|)-۲f(۲+|a|)+۱=|a|+۱-۲|a|-۲+۱=-|a|$.

۲۲۳۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & |x|>۱\\ -x^۲ & |x|<۱\end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است و برد تابع f برابر با $(-۱,۰)\cup(۱,+\infty)$ است. پس $a=۱$ و $b=۰$ و در نتیجه $a-b=۱$.

۲۲۳۳- گزینهٔ ۲ اگر $۰\le x\le ۲$، آن‌گاه $x+۲>۰$ و $x-۲\le ۰$، پس

$$x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)\le ۰$$

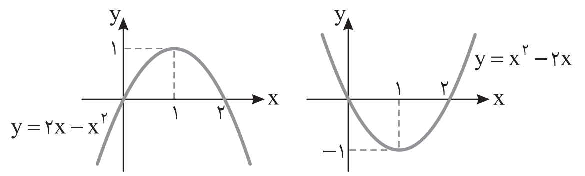
$$x^۲-۲x=x(x-۲)\le ۰$$

بنابراین $f(x)=-x^۲+۴+(x^۲-۲x)=-۲x+۴$. پس

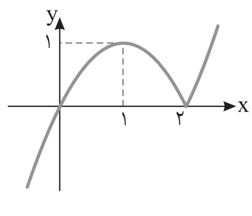
$$۰\le x\le ۲\Rightarrow -۴\le -۲x\le ۰\Rightarrow ۰\le -۲x+۴\le ۴$$

پس حداکثر مقدار تابع برابر ۴ است.

۲۲۳۴- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=\begin{cases}۲x-x^۲ & x\le ۲\\ x^۲-۲x & x>۲\end{cases}$ است. نمودار توابع $y=۲x-x^۲$ و $y=x^۲-۲x$ به‌صورت زیر است.



بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۲۲۳۵- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

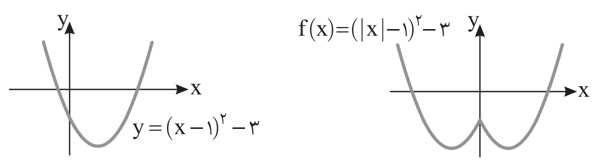
$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۲x-۲ & x\le ۰\\ x^۲-۲x-۲ & x>۰\end{cases}$$

هر یک از قطعه‌ها بخشی از یک سهمی است (اولی به رأس $(-۱,-۳)$ و دومی به رأس $(۱,-۳)$). پس نمودار تابع به‌صورت گزینهٔ (۳) است.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=|x|^۲-۲|x|-۲=(|x|-۱)^۲-۳$$

بنابراین کافی است ابتدا نمودار تابع $y=(x-۱)^۲-۳$ را رسم کنیم، سپس قسمتی از نمودار را که سمت چپ محور عرض‌ها قرار دارد حذف کنیم و قرینهٔ قسمتی را که سمت راست این محور قرار دارد نسبت به این محور رسم کنیم.

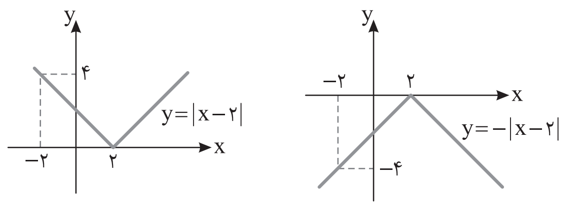


راه‌حل سوم چون $f(-x)=f(x)$، بنابراین نمودار تابع f نسبت به محور y متقارن است (توجه کنید که نمودار $y=f(-x)$ از قرینه کردن نمودار تابع f نسبت به محور y به‌دست می‌آید). بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر، $f(۰)=-۲$، پس گزینهٔ (۱) هم رد می‌شود.

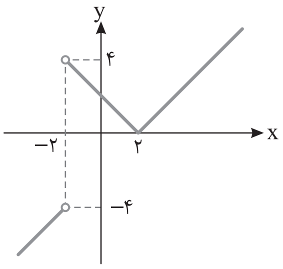
۲۲۳۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f(x)=\frac{|x-۲||x+۲|}{x+۲}=\begin{cases}|x-۲| & x>-۲\\ -|x-۲| & x<-۲\end{cases}$$

ابتدا نمودار توابع $y=|x-۲|$ و $y=-|x-۲|$ را رسم می‌کنیم.



پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



۲۲۳۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که با توجه به ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق چهار حالت زیر برای ضابطهٔ تابع وجود دارد:

$$x\le -۱\Rightarrow f(x)=-x+x-۲+۲(x+۱)=۲x$$

$$-۱<x\le ۰\Rightarrow f(x)=-x+x-۲-۲(x+۱)=-۲x-۴$$

$$۰<x\le ۲\Rightarrow f(x)=x+x-۲-۲(x+۱)=-۴$$

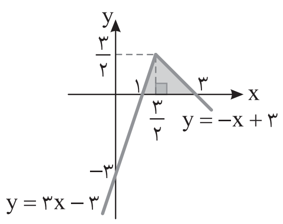
$$x>۲\Rightarrow f(x)=x-(x-۲)-۲(x+۱)=-۲x$$

بنابراین روی بازهٔ $[۰,۲]$ نمودار تابع یک پاره‌خط افقی است که طول آن برابر است با ۲.

۲۲۳۸- گزینهٔ ۴ ضابطهٔ تابع را بدون قدرمطلق می‌نویسیم و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases}x\ge \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=x-(۲x-۳)=-x+۳\\ x\le \frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=x+۲x-۳=۳x-۳\end{cases}$$

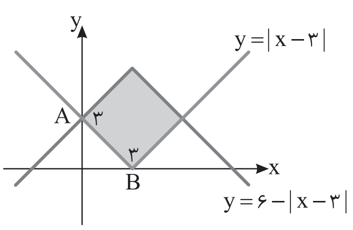
مطابق شکل روبه‌رو، مساحت مثلثی به ارتفاع $\frac{۳}{۲}$ و قاعدهٔ ۲ مد نظر است که برابر است با $\frac{۳}{۲}$.



۲۲۳۹- گزینهٔ ۳ در شکل زیر نمودارها را رسم کرده‌ایم. با توجه به اینکه شکل حاصل مربع است، کافی است طول ضلع مربع را به‌دست آوریم:

$$A(۰,۳)\ ,\ B(۳,۰)\Rightarrow AB=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۰-۳)^۲}=۳\sqrt{۲}$$

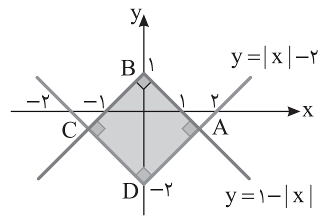
بنابراین مساحت مربع برابر است با $(۳\sqrt{۲})^۲=۱۸$.



۲۲۴۰- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. مساحت ABCD مطلوب مسئله است. ابتدا طول نقطه‌های A و C را مشخص می‌کنیم:

$$|x|-۲=۱-|x|\Rightarrow|x|=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $AC=۳$ و $BD=۳$. پس چهارضلعی ABCD یک مربع است که مساحت آن برابر است با $S=\frac{۱}{۲}\times۳^۲=\frac{۹}{۲}$.



۲۲۴۱- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$x^۳=-۲۰\Rightarrow x=-\sqrt[۳]{۲۰}$$

همچنین $۵<۲\sqrt[۳]{۲۰}<۶$، بنابراین

$$-۶<-۲\sqrt[۳]{۲۰}<-۵\Rightarrow-۶<۲x<-۵\Rightarrow[۲x]=-۶$$

توجه کنید که $۲\sqrt[۳]{۲۰}=\sqrt[۳]{۱۶۰}$ و چون $\sqrt[۳]{۱۲۵}<\sqrt[۳]{۱۶۰}<\sqrt[۳]{۲۱۶}$، پس

$$۵<۲\sqrt[۳]{۲۰}<۶$$

۲۲۴۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$۱\le x<۴\Rightarrow۱\le\sqrt{x}<۲\Rightarrow[\sqrt{x}]=۱$$
$$۴\le x<۹\Rightarrow۲\le\sqrt{x}<۳\Rightarrow[\sqrt{x}]=۲$$
$$۹\le x<۱۶\Rightarrow۳\le\sqrt{x}<۴\Rightarrow[\sqrt{x}]=۳$$
$$۱۶\le x<۲۵\Rightarrow۴\le\sqrt{x}<۵\Rightarrow[\sqrt{x}]=۴$$
$$x=۲۵\Rightarrow\sqrt{۲۵}=۵$$

بنابراین

$$A=۱+۱+۱+\underbrace{۲+۲+\cdots+۲}_{\text{۵تا}}+\underbrace{۳+۳+\cdots+۳}_{\text{۷تا}}+\underbrace{۴+۴+\cdots+۴}_{\text{۹تا}}+۵$$
$$=۳+۱۰+۲۱+۳۶+۵=۷۵$$

۲۲۴۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$[x]=۲\Rightarrow۲\le x<۳\Rightarrow۶\le۳x<۹\Rightarrow۱\le۳x-۵<۴$$

بنابراین $[۳x-۵]$ می‌تواند مقادیر ۱، ۲ و ۳ را داشته باشد.

۲۲۴۴- گزینهٔ ۱ اگر $[\frac{۵-x}{۲}]=-۳$، آن‌گاه $-۳\le\frac{۵-x}{۲}<-۲$. بنابراین

$$-۶\le۵-x<-۴\Rightarrow-۱۱\le-x<-۹$$

در نتیجه $۹<x\le۱۱$.

۲۲۴۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$[۳x-۲]=۱\Rightarrow۱\le۳x-۲<۲\Rightarrow۳\le۳x<۴\Rightarrow۱\le x<\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

$$۲\le۲x<\frac{۸}{۳}\Rightarrow-۱\le۲x-۳<-\frac{۱}{۳}\Rightarrow[۲x-۳]=-۱$$

۲۲۴۶- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$۴n^۲-۴n+۱<۴n^۲-۲n+۱<(۲n)^۲\Rightarrow(۲n-۱)^۲<۴n^۲-۲n+۱<(۲n)^۲$$
$$۲n-۱<\sqrt{۴n^۲-۲n+۱}<۲n$$

بنابراین $[\sqrt{۴n^۲-۲n+۱}]=۲n-۱$.

راه‌حل دوم فرض کنید $n=۲$. در این صورت $[\sqrt{۴n^۲-۲n+۱}]=[\sqrt{۱۳}]=۳$. فقط مقدار گزینهٔ (۲) به‌ازای $n=۲$ برابر ۳ می‌شود.

۲۲۴۷- گزینهٔ ۲ اگر $[\frac{۵-x}{۲}]=-۴$، آن‌گاه $-۴\le\frac{۵-x}{۲}<-۳$، بنابراین

$$-۸\le۵-x<-۶\Rightarrow-۱۳\le-x<-۱۱$$

در نتیجه $۱۱<x\le۱۳$. بنابراین $a=۱۱$، $b=۱۳$ و $b-a=۲$.

۲۲۴۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $[x+۲]=[x]+۲$ و $[x-۱]=[x]-۱$. بنابراین

$$۲[x+۲]-[x-۱]=۷\Rightarrow۲[x]+۴-[x]+۱=۷\Rightarrow[x]=۲\Rightarrow۲\le x<۳$$

۲۲۴۹- گزینهٔ ۱ اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$[x+[x-۳]]=۳\Rightarrow[x]+[x-۳]=۳\Rightarrow[x]+[x]-۳=۳\Rightarrow[x]=۳$$

در نتیجه $۳\le x<۴$. بنابراین $a=۳$، $b=۴$ و $a+b=۷$.

۲۲۵۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $۳\le[x]\le۴$ معادل است با $[x]=۳$ یا $[x]=۴$. پس

$$[x]=۳\Rightarrow۳\le x<۴,\quad[x]=۴\Rightarrow۴\le x<۵$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[۳,۵)$ است.

در نتیجه $a=۳$، $b=۵$ و $a+b=۸$.

۲۲۵۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$[\sqrt[۳]{۲}]=[\sqrt[۳]{۳}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۷}]=۱,\quad[\sqrt[۳]{۸}]=[\sqrt[۳]{۹}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۲۶}]=۲$$
$$[\sqrt[۳]{۲۷}]=[\sqrt[۳]{۲۸}]=\cdots=[\sqrt[۳]{۶۳}]=۳$$

بنابراین

$$A=\overbrace{۱+۱+\cdots+۱}^{\text{۶تا}}+\overbrace{۲+۲+\cdots+۲}^{\text{۱۹تا}}+\overbrace{۳+۳+\cdots+۳}^{\text{۳۷تا}}=۶+۳۸+۱۱۱=۱۵۵$$

۲۲۵۲- گزینهٔ ۳

$$A=[-\sqrt{۱۰}]+[-\sqrt{۹}]+[-\sqrt{۸}]+\cdots+[\sqrt{۱۰}]$$
$$=([-\sqrt{۱۰}]+[\sqrt{۱۰}])+([-\sqrt{۹}]+[\sqrt{۹}])+\cdots+([-\sqrt{۱}]+[\sqrt{۱}])$$

اگر $x\in\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=۰$ و اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=-۱$. از $\sqrt{۰}$ تا $\sqrt{۱۰}$ اعداد $\sqrt{۰}$، $\sqrt{۱}$، $\sqrt{۴}$ و $\sqrt{۹}$ صحیح هستند و اعداد $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۱۰}$ غیرصحیح هستند. بنابراین

$$A=\underbrace{۰+۰+۰+۰}_{\text{۴تا}}+\underbrace{(-۱)+(-۱)+\cdots+(-۱)}_{\text{۷تا}}=-۷$$

۲۲۵۳- گزینهٔ ۴ از $\frac{۱}{۳}<x<\frac{۲}{۳}$ نتیجه می‌شود

$$۱<۳x<۲\Rightarrow[۳x]=۱,\quad\frac{۳}{۲}<\frac{۱}{x}<۳\Rightarrow۳<\frac{۲}{x}<۶\Rightarrow۱<\frac{۲}{۳x}<۲\Rightarrow[\frac{۲}{۳x}]=۱$$

بنابراین $[۳x]-[\frac{۲}{۳x}]=۱-۱=۰$.

۲۲۵۴- گزینهٔ ۲ از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$۲\le x<۳\xrightarrow{\times۲}۴\le۲x<۶,\quad۲\le y<۳\xrightarrow{\times۳}۶\le۳y<۹$$

در نتیجه با جمع کردن این دو نابرابری معلوم می‌شود که

$$۱۰\le۲x+۳y<۱۵\xrightarrow{\div۵}۲\le\frac{۲x+۳y}{۵}<۳$$

پس $[\frac{۲x+۳y}{۵}]=۲$.

۲۲۵۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $x^2-4x=(x-2)^2-4$، پس

$$[x]=2\Rightarrow 2\le x<3\Rightarrow 0\le x-2<1\Rightarrow 0\le (x-2)^2<1$$

$$-4\le (x-2)^2-4<-3\Rightarrow [(x-2)^2-4]=-4$$

بنابراین $[x^2-4x]$ فقط می‌تواند مقدار -4 را داشته باشد.

۲۲۵۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$[x^2+x]=-1\Rightarrow -1\le x^2+x<0$$

$$-1\le (x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}<0\Rightarrow -\frac{3}{4}\le (x+\frac{1}{2})^2<\frac{1}{4}$$

$$(x+\frac{1}{2})^2<\frac{1}{4}\Rightarrow |x+\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\Rightarrow -1<x<0$$

بنابراین $0<x^{10}<1$ و در نتیجه $[x^{10}]=0$.

۲۲۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$n^3<n^3+3n^2+1<n^3+3n^2+3n+1$$

$$n^3<n^3+3n^2+1<(n+1)^3\Rightarrow n<\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}<n+1$$

بنابراین $[\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}]=n$.

۲۲۵۸- گزینهٔ ۳ اگر $-2<x<-1$، آن‌گاه $[x]=-2$ و $|x|=-x$، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$-3x-4=1\Rightarrow x=-\frac{5}{3}$$

اگر $-1\le x<0$، آن‌گاه $[x]=-1$ و $|x|=-x$، پس معادله به شکل زیر است

$$-3x-2=1\Rightarrow x=-1$$

اگر $0\le x<1$، آن‌گاه $[x]=0$ و $|x|=x$، بنابراین معادله به شکل زیر است

$$3x+0=1\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

بنابراین مجموع جواب‌های واقع در بازهٔ $(-2,1)$ برابر است با

$$-\frac{5}{3}-1+\frac{1}{3}=-\frac{7}{3}$$

۲۲۵۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $[x-1]=[x]-1$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[x]^2+5[x]+6=0\Rightarrow([x]+2)([x]+3)=0$$

اکنون توجه کنید که

$$[x]+2=0\Rightarrow[x]=-2\Rightarrow -2\le x<-1$$

$$[x]+3=0\Rightarrow [x]=-3\Rightarrow -3\le x<-2$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[-3,-2)\cup[-2,-1)=[-3,-1)$$

در نتیجه $a=-3$، $b=-1$ و $b-a=2$.

۲۲۶۰- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$[\frac{2[x]+1}{5}]=3\Rightarrow 3\le\frac{2[x]+1}{5}<4\Rightarrow 7\le[x]<\frac{19}{2}$$

چون $[x]$ عددی صحیح است، پس

$$[x]=7\Rightarrow 7\le x<8,\quad [x]=8\Rightarrow 8\le x<9,\quad [x]=9\Rightarrow 9\le x<10$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$[7,8)\cup[8,9)\cup[9,10)=[7,10)$$

در نتیجه $a=7$، $b=10$ و $b-a=3$.

۲۲۶۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین

$$f(x+3)=[\frac{x+3}{2}]-[\frac{x+4}{2}]=[\frac{x+1}{2}+1]-[\frac{x}{2}+2]$$

$$=[\frac{x+1}{2}]+1-[\frac{x}{2}]-2=-f(x)-1$$

در نتیجه $f(x+3)+f(x)=-1$.

۲۲۶۲- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول اگر $x\in[1,2)$، آن‌گاه $-2\le x-3<-1$.

بنابراین $|x-3|=-x+3$. همچنین

$$-1\le x-2<0\Rightarrow [x-2]=-1$$

در نتیجه $f(x)=-1+(-x+3)=-x+2$.

راه‌حل دوم $f(1)=-1+|-2|=1$ فقط در گزینهٔ (۲) برقرار است.

۲۲۶۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $9-x^2\ge 0$ و در نتیجه $-3\le x\le 3$. از طرف دیگر،

$$[\frac{x}{2}]-1=0\Rightarrow[\frac{x}{2}]=1\Rightarrow 1\le\frac{x}{2}<2\Rightarrow 2\le x<4$$

بنابراین عددهای بازهٔ $[2,4)$ در دامنهٔ تابع نیستند و دامنهٔ تابع به‌صورت $[-3,2)$ است. پس $a=-3$، $b=2$ و $a+b=-1$.

۲۲۶۴- گزینهٔ ۲ باید نامعادله‌های $[x]+2\ge 0$ و $3-[x]\ge 0$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را به‌دست آوریم:

$$[x]+2\ge 0\Rightarrow[x]\ge -2\Rightarrow x\ge -2,\quad 3-[x]\ge 0\Rightarrow[x]\le 3\Rightarrow x<4$$

بنابراین $D_f=[-2,4)$. پس $a=-2$، $b=4$ و $a+b=2$.

۲۲۶۵- گزینهٔ ۱ اگر $-1\le x<0$،

$$[x]=-1,|x|=-x\Rightarrow f(x)=-1+x$$

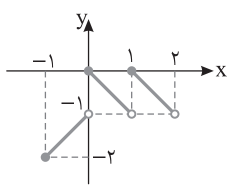
اگر $0\le x<1$،

$$[x]=0,|x|=x\Rightarrow f(x)=-x$$

اگر $1\le x<2$،

$$[x]=1,|x|=x\Rightarrow f(x)=1-x$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است و برد تابع به‌صورت $[-2,0]-\{-1\}$ است.

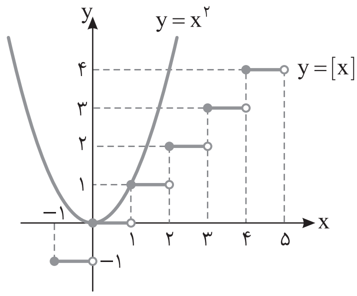


۲۲۶۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=\{x|[|x+1|-2]>0\}$. از طرف دیگر، چون $[|x+1|-2]$ عددی صحیح است، پس اگر مثبت باشد، بزرگ‌تر یا مساوی ۱ است: $[|x+1|-2]\ge 1$. در نتیجه

$$|x+1|-2\ge 1\Rightarrow |x+1|\ge 3\Rightarrow\begin{cases}x+1\ge 3\Rightarrow x\ge 2\\ x+1\le -3\Rightarrow x\le -4\end{cases}$$

بنابراین $D_f=(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$.

۲۲۶۷- گزینهٔ ۲ نمودار این تابع‌ها را در شکل زیر رسم کرده‌ایم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

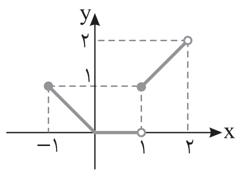


۲۲۶۸- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow f(x)=-x,\quad 0\le x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow f(x)=0$

$1\le x<2\Rightarrow [x]=1\Rightarrow f(x)=x$

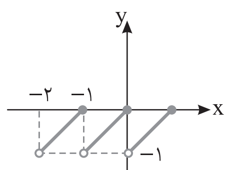
بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۲۶۹- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$-2<x\le -1\Rightarrow 1\le -x<2\Rightarrow[-x]=1\Rightarrow f(x)=x+1$$
$$-1<x\le 0\Rightarrow 0\le -x<1\Rightarrow [-x]=0\Rightarrow f(x)=x$$
$$0<x\le 1\Rightarrow -1\le -x<0\Rightarrow [-x]=-1\Rightarrow f(x)=x-1$$

پس نمودار تابع f به شکل زیر است:



راه‌حل دوم می‌دانیم برای هر عدد حقیقی a ، $[a]\le a$. بنابراین

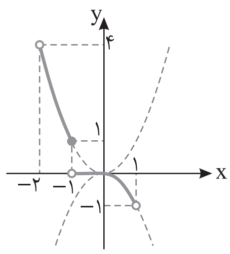
$$[-x]\le -x \Rightarrow x+[-x]\le 0$$

چون $f(x)=x+[-x]$، پس مقادیر تابع f همواره نامثبت هستند، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر $f(0)=0$، پس گزینهٔ (۱) نیز رد می‌شود.

۲۲۷۰- گزینهٔ ۲ ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$-2<x\le-1 \Rightarrow 1\le -x<2 \Rightarrow [-x]=1\Rightarrow f(x)=x^2$$
$$-1<x\le 0\Rightarrow 0\le -x<1\Rightarrow[-x]=0\Rightarrow f(x)=0$$
$$0<x<1\Rightarrow -1<-x<0\Rightarrow[-x]=-1\Rightarrow f(x)=-x^2$$

پس نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۲۷۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(f(x))=f(x)-[3f(x)]$$

اکنون حاصل $[3f(x)]$ را پیدا می‌کنیم. اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه

$$[x+k]=[x]+k$$

در نتیجه

$$[3f(x)]=[3x-3[3x]]=[3x]-3[3x]=-2[3x]$$

(زیرا $3[3x]\in\mathbb{Z}$) بنابراین

$$f(f(x))=f(x)-(-2[3x])=x-[3x]+2[3x]=x+[3x]$$

در نتیجه $f(f(x))-x=[3x]$.

۲۲۷۲- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$[4-x]+[x-3]=0\Rightarrow 4+[-x]+[x]-3=0$$
$$[x]+[-x]=-1\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

پس عددهای غیرصحیح مخرج کسر را صفر می‌کنند و در دامنهٔ تابع نیستند. بنابراین دامنهٔ تابع $\mathbb{Z}$ است.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(0)=f(1)=1$. بنابراین عددهای صفر و ۱ در دامنهٔ تابع هستند و گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) رد می‌شوند.

۲۲۷۳- گزینهٔ ۱ اگر x عددی صحیح باشد که در دامنهٔ f نیست، آن‌گاه

$$[|x+1|-2]-5=0 \qquad (1)$$

و چون x صحیح است، پس $|x+1|-2$ نیز صحیح است، در نتیجه

$$[|x+1|-2]=|x+1|-2$$

بنابراین معادلهٔ (۱) می‌شود

$$|x+1|-2-5=0\Rightarrow |x+1|=7\Rightarrow x+1=\pm7\Rightarrow x=\pm7-1$$

بنابراین مجموع عددهای صحیح مورد نظر برابر ۲− است.

۲۲۷۴- گزینهٔ ۳ برای تعیین دامنهٔ تابع f باید نامعادلهٔ $\frac{4-[x]}{[x]-1}\ge 0$ را حل کنیم. اگر فرض کنیم $t=[x]$، نامعادله به‌صورت $\frac{4-t}{t-1}\ge0$ درمی‌آید که جواب آن به‌صورت $1<t\le4$ است.

بنابراین

$$1<[x]\le4\Rightarrow 2\le x<5$$

بنابراین $D_f=[2,5)$ و در نتیجه $a=2$، $b=5$ و $a+b=7$.

۲۲۷۵- گزینهٔ ۲ باید نامعادلهٔ $4[x]-[x]^2\ge0$ را حل کنیم. فرض می‌کنیم $[x]=t$ و در نتیجه

$$4t-t^2\ge0\Rightarrow t(4-t)\ge0\Rightarrow 0\le t\le4$$

بنابراین $0\le[x]\le4$. در نتیجه $0\le x<5$. پس $D_f=[0,5)$ و دامنهٔ تابع شامل ۵ عدد صحیح است.

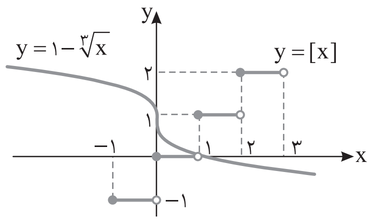
۲۲۷۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که نابرابری $0\le x-[x]<1$ برای هر مقدار x برقرار است.

پس

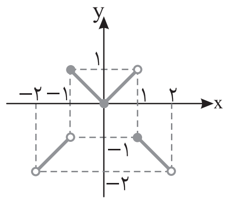
$$-1<[x]-x\le0\Rightarrow -2<2[x]-2x\le0\Rightarrow -2<f(x)\le0$$

بنابراین $R_f=(-2,0]$.

۲۲۷۷- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع $y=1-\sqrt[3]{x}$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم. از روی شکل معلوم است که نمودارها در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



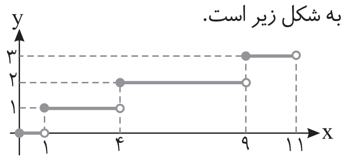
۲۲۷۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ عددی زوج باشد، آن‌گاه $(-1)^{[x]}=1$ و در نتیجه $f(x)=x$. همچنین اگر $[x]$ عددی فرد باشد، آن‌گاه $(-1)^{[x]}=-1$ و در نتیجه $f(x)=-x$. بنابراین نمودار تابع به شکل روبه‌رو است.



۲۲۷۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر است:

$$0\le x<1\Rightarrow 0\le\sqrt{x}<1\Rightarrow[\sqrt{x}]=0\Rightarrow f(x)=0$$
$$1\le x<4\Rightarrow 1\le\sqrt{x}<2\Rightarrow[\sqrt{x}]=1\Rightarrow f(x)=1$$
$$4\le x<9\Rightarrow 2\le\sqrt{x}<3\Rightarrow[\sqrt{x}]=2\Rightarrow f(x)=2$$
$$9\le x<11\Rightarrow 3\le\sqrt{x}<\sqrt{11}\Rightarrow[\sqrt{x}]=3\Rightarrow f(x)=3$$

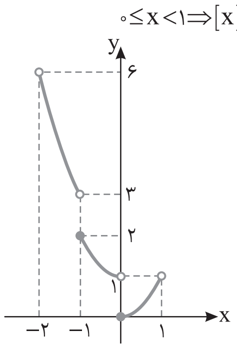
پس نمودار تابع به شکل زیر است.



۲۲۸۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$-2<x<-1\Rightarrow[x]=-2\Rightarrow f(x)=x^2+2$$
$$-1\le x<0\Rightarrow[x]=-1\Rightarrow f(x)=x^2+1$$
$$0\le x<1\Rightarrow[x]=0\Rightarrow f(x)=x^2$$

پس نمودار تابع f به شکل مقابل است:



۲۲۸۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$.
بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$|(2x-1)(x+3)|=2|x+3|\Rightarrow|2x-1||x+3|=2|x+3|$$
$$|x+3|(|2x-1|-2)=0$$

به این ترتیب

$$|x+3|=0\Rightarrow x=-3$$
$$|2x-1|-2=0\Rightarrow 2x-1=\pm2=-\frac{1}{2},\ x=\frac{3}{2}$$

در نتیجه، مجموع جواب‌ها برابر با ۲− است.

۲۲۸۲- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$x^2-3=\pm(x-1)$$

بنابراین

$$x^2-3=x-1\Rightarrow x^2-x-2=0 \qquad (1)$$
$$x^2-3=-(x-1)\Rightarrow x^2+x-4=0 \qquad (2)$$

هر دو معادله دو جواب دارند و دو معادله جواب یکسان ندارند. مجموع جواب‌های معادلهٔ (۱) برابر ۱ و مجموع جواب‌های معادلهٔ (۲) برابر ۱− است. بنابراین مجموع جواب‌های معادلهٔ اصلی برابر صفر است.

۲۲۸۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\left|4x-\sqrt{x^2-8x+16}\right|=\left|4x-\sqrt{(x-4)^2}\right|=\big|4x-|x-4|\big|$$

از طرف دیگر،

$$|2x-5|<3\Rightarrow-3<2x-5<3\Rightarrow 2<2x<8\Rightarrow 1<x<4 \qquad (1)$$

بنابراین $x-4<0$، در نتیجه $|x-4|=-(x-4)$. بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $|4x+x-4|=|5x-4|$. از طرف دیگر، بنابر نابرابری‌های (۱)،

$$x>1\Rightarrow 5x>5\Rightarrow 5x-4>1$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $5x-4$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $x=2$ در نامعادلهٔ $|2x-5|<3$ صدق می‌کند.

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر را به ازای $x=2$ به دست می‌آوریم:

$$A=\left|4x-\sqrt{x^2-8x+16}\right|\xrightarrow{x=2}A=\left|8-\sqrt{4-16+16}\right|=6$$

فقط مقدار گزینهٔ (۳) به ازای $x=2$ برابر ۶ است.

۲۲۸۴- گزینهٔ ۴ نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$|x^2-3x|<2x\Rightarrow|x(x-3)|<2x\Rightarrow|x||x-3|<2x$$

معلوم است که $x=0$ جواب این نامعادله نیست و x نمی‌تواند منفی باشد.

بنابراین $x>0$ و

$$x|x-3|<2x\Rightarrow x(|x-3|-2)<0\Rightarrow|x-3|-2<0\Rightarrow|x-3|<2$$
$$-2<x-3<2\Rightarrow 1<x<5$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(1,5)$ است، یعنی $a=1$، $b=5$ و $b-a=4$.

۲۲۸۵- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** از $-3\le x\le 6$، نتیجه می‌شود

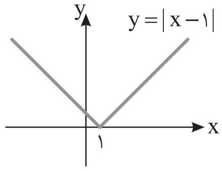
$$-4\le x-1\le 5$$

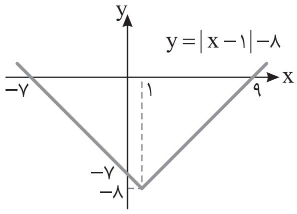
پس $0\le|x-1|\le 5$. بنابراین

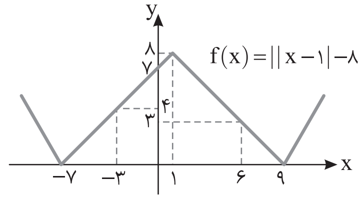
$$-8\le|x-1|-8\le-3\Rightarrow 3\le\big||x-1|-8\big|\le 8\Rightarrow 3\le f(x)\le 8$$

پس حداقل مقدار تابع برابر ۳ و حداکثر مقدار آن ۸ است و مجموع آن‌ها ۱۱ است.

راه‌حل دوم نمودار تابع را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل تابع، واضح است که وقتی $-3\le x\le 6$، $3\le f(x)\le 8$.







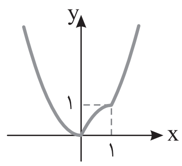
پس حداقل مقدار تابع برابر ۳ و حداکثر مقدار آن ۸ است و مجموع آن‌ها ۱۱ است.

۲۲۸۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x+x & x\le 0\\ -(x^2-x)+x & 0<x\le 1\\ x^2-x+x & x>1\end{cases}=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ -x^2+2x & 0<x\le 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ -(x-1)^2+1 & 0<x\le 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است.



۲۲۸۷- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(120)=[\frac{120}{11}]-[-\frac{120}{17}]$.

از طرف دیگر،

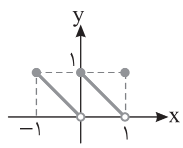
$$10<\frac{120}{11}<11\Rightarrow[\frac{120}{11}]=10\ ,\qquad -8<-\frac{120}{17}<-7\Rightarrow[-\frac{120}{17}]=-8$$

بنابراین $f(120)=10-(-8)=18$.

۲۲۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}-1-(x-1) & -1\le x<0\\ 0-(x-1) & 0\le x<1\\ 1+0 & x=1\end{cases}=\begin{cases}-x & -1\le x<0\\ -x+1 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

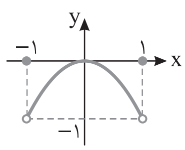
بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



۲۲۸۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه $[x+k]=[x]+k$. بنابراین $[x]\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=x^2([x]+[-x])$

از طرف دیگر، $[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$.

پس می‌توان نوشت $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -x^2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ و نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



راه‌حل دوم می‌دانیم $[x]\le x$، بنابراین تابع $f(x)=x^2[[x]-x]$ همواره نامثبت است. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرف دیگر $f(0)=0$، پس گزینهٔ (۲) هم رد می‌شود.

۲۲۹۰- گزینهٔ ۱ به جای x در ضابطهٔ f قرار می‌دهیم $x-1$:

$$f(x-1)=4(x-1)-[x-1]-[3(x-1)]=4x-4-[x]+1-[3x]+3$$
$$=4x-[x]-[3x]=f(x)$$

۲۲۹۱- گزینهٔ ۴ معادلهٔ $(x-4)|x|<2x-5$ را برای $x\ge 0$ و $x<0$ جداگانه حل می‌کنیم:

$$x\ge 0\Rightarrow(x-4)x<2x-5\Rightarrow x^2-6x+5<0\Rightarrow 1<x<5$$
$$x<0\Rightarrow(x-4)(-x)<2x-5\Rightarrow x^2-2x-5>0$$
$$x<1-\sqrt{6}\,,\,x>1+\sqrt{6}\xrightarrow{x<0}x<1-\sqrt{6}$$

پس مجموعهٔ جواب‌های معادله به‌صورت $(-\infty,1-\sqrt{6})\cup(1,5)$ است.

ریاضی - ۹۲

۲۲۹۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** واضح است که اگر $x<0$، نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^2-2x|<0$ که غیرممکن است. بنابراین باید با شرط $x\ge 0$ نامعادله را حل کنیم. اکنون توجه کنید که نامعادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$$|x^2-2x|<x\Rightarrow|x(x-2)|<x\Rightarrow|x||x-2|<x$$
$$x|x-2|<x\Rightarrow|x-2|<1\Rightarrow-1<x-2<1\Rightarrow 1<x<3$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(1,3)$ است.

راه‌حل دوم به کمک دو مقدار $x=1$ و $x=2$ گزینهٔ صحیح مشخص می‌شود. $x=1$ در نامعادله صدق نمی‌کند ولی $x=2$ در آن صدق می‌کند. تنها گزینه‌ای که عدد ۲ در آن قرار دارد ولی عدد ۱ در آن قرار ندارد، گزینهٔ (۴) است.

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۲۹۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** اگر $|x+1|-1<0$، آن‌گاه نامعادله جواب ندارد. زیرا در این صورت باید $|x^2-2|<0$ که غیرممکن است. بنابراین باید $|x+1|-1\ge 0$ و در نتیجه

$$|x+1|\ge 1\Rightarrow\begin{cases}x+1\ge 1\Rightarrow x\ge 0\\ x+1\le -1\Rightarrow x\le -2\end{cases}$$

اگر $x\le -2$، آن‌گاه $x+1<0$ و $x^2-2>0$، پس نامعادله به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2-2<-x-1-1\Rightarrow x^2+x<0\Rightarrow x(x+1)<0\Rightarrow -1<x<0\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین نامعادله در بازهٔ $(-\infty,-2]$ جواب ندارد. پس باید با فرض $x\ge 0$ آن را حل کنیم. در این حالت $x+1>0$ و نامعادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$|x^2-2|<x+1-1\Rightarrow|x^2-2|<x\Rightarrow -x<x^2-2<x$$

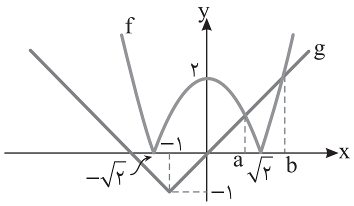
پس باید دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases}x^2-x-2<0 & (1)\\ x^2+x-2>0 & (2)\end{cases}$ را حل کنیم. مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۱) با شرط $x\ge 0$ به صورت $0\le x<2$ و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۲) با شرط $x\ge 0$ به صورت $x>1$ است. اشتراک این مجموعهٔ جواب‌ها بازهٔ $(1,2)$ است که وسط بازه نقطه‌ای به طول ۱/۵ است.

راه‌حل دوم ابتدا نمودار توابع $f(x)=|x^2-2|$ و $g(x)=|x+1|-1$ را رسم می‌کنیم. توجه کنید جاهایی که $f(x)<g(x)$، بازهٔ (a,b) است. از روی نمودارها معلوم می‌شود که در این بازه $x>0$. بنابراین در این بازه، ضابطهٔ g به‌صورت $g(x)=x+1-1=x$ ساده می‌شود. اکنون توجه کنید که نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$|x^2-2|<x \Rightarrow x^4-4x^2+4<x^2 \Rightarrow x^4-5x^2+4<0$$

$$(x^2-4)(x^2-1)<0 \xrightarrow{x>0} 1<x<2$$

بنابراین $a=1$ و $b=2$، پس بازهٔ مورد نظر به‌صورت $(1,2)$ است و وسط بازه نقطه‌ای به طول $1/5$ است.



خارج از کشور ریاضی - ۹۵

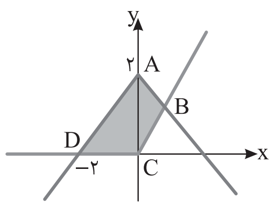
۲۲۹۴- گزینهٔ ۳ با تعیین ضابطه، دو تابع مورد نظر را رسم می‌کنیم:

$$y=2-|x|=\begin{cases}2-x & x\ge 0\\ 2+x & x<0\end{cases},\quad y=x+|x|=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

ابتدا مختصات نقطهٔ B را محاسبه می‌کنیم:

$$2-x_B=2x_B\Rightarrow 3x_B=2\Rightarrow x_B=\frac{2}{3}$$

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{\frac{2}{3}\times 2}{2}+\frac{2\times 2}{2}=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$



تجربی - ۹۵

۲۲۹۵- گزینهٔ ۴ عبارت x^2+1 همواره مثبت است، پس

$$|x^2+1|=x^2+1$$

بنابراین

$$2x+1-|x-2|>x^2+1\Rightarrow -x^2+2x>|x-2|\Rightarrow -x(x-2)>|x-2|$$

$$x\ge 2: -x(x-2)>(x-2)\Rightarrow (x-2)(-x-1)>0$$

$$-x>1\Rightarrow x<-1 \quad \text{(غ.ق.ق)}$$

$$x<2: -x(x-2)>-(x-2)\Rightarrow (x-2)(-x+1)>0$$

$$-x<-1\Rightarrow x>1$$

بنابراین $1<x<2$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۲۲۹۶- گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع g را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=f(2x-3)-2f(x)=2x-3-[2x-3]-2x+2[x]$$

$$=2x-3-[2x]+3-2x+2[x]\Rightarrow g(x)=2[x]-[2x]$$

با توجه به اینکه حاصل $g(x)=2[x]-[2x]$ همواره عددی صحیح است، گزینهٔ (۳) یعنی $\{-1,0\}$ یا گزینهٔ (۴) یعنی $\{0,1\}$ پاسخ صحیح هستند که با قرار دادن چند مقدار خواهیم داشت:

$$x=\frac{1}{10}\Rightarrow y=0,\quad x=\frac{9}{10}\Rightarrow y=-1$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۲

۲۲۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا از $[x^2+x]=-1$، مقادیر x را می‌یابیم:

$$-1\le x^2+x<0\Rightarrow\begin{cases}x^2+x<0\Rightarrow -1<x<0\\ x^2+x+1\ge 0\Rightarrow \text{همواره درست است.}\Rightarrow x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1<x<0$$

پس $0<x^{20}<1$ و حاصل $[x^{20}]$ برابر صفر است.

تجربی - ۸۸

۲۲۹۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** از آنجا که به‌ازای هر عدد طبیعی $n>2$ حاصل، عددی منحصربه‌فرد است به‌ازای $n=3$ این عدد را به‌دست می‌آوریم:

$$n=3:[\sqrt{36-9+1}]-2[\sqrt{9-6}]=[\sqrt{28}]-2[\sqrt{3}]=5-2=3$$

راه‌حل دوم به‌ازای $n>2$،

$$\begin{cases}4n^2-4n+1<4n^2-3n+1<4n^2\Rightarrow (2n-1)^2<4n^2-3n+1<(2n)^2\\ 2n-1<\sqrt{4n^2-3n+1}<2n\Rightarrow [\sqrt{4n^2-3n+1}]=2n-1\\ n^2-4n+4<n^2-2n<n^2-2n+1\Rightarrow (n-2)^2<n^2-2n<(n-1)^2\\ n-2<\sqrt{n^2-2n}<n-1\Rightarrow [\sqrt{n^2-2n}]=n-2\end{cases}$$

پس $[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]=2n-1-2(n-2)=4-1=3$.

تجربی - ۹۱

۲۲۹۹- گزینهٔ ۱ ضابطهٔ $f(x-f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=[x]\Rightarrow f(x-f(x))=f(x-[x])$$

از طرف دیگر $x-[x]$ همواره در فاصلهٔ $[0,1)$ است، بنابراین $f(x-[x])$ یعنی جزء صحیح آن برابر صفر است، یعنی $f(x-[x])=0$.

خارج از کشور تجربی - ۸۵

۲۳۰۰- گزینهٔ ۱ از نامعادلهٔ $x^2+x<0$ نتیجه می‌گیریم $-1<x<0$، پس به‌ازای $-1<x<0$:

$$-1<x<0\Rightarrow [x]=-1,\qquad 0<x^2<1\Rightarrow [x^2]=0$$

$$-1<x^3<0\Rightarrow [x^3]=-1,\qquad 0<x^4<1\Rightarrow [x^4]=0$$

بنابراین $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]=-1+0-1+0=-2$.

خارج از کشور تجربی - ۸۸

۲۳۰۱- گزینهٔ ۳ نقاط A و B را معین می‌کنیم

$$y=0\Rightarrow 2^{x-1}-2=0\Rightarrow 2^{x-1}=2^1\Rightarrow x-1=1\Rightarrow x=2\Rightarrow A=(2,0)$$

$$x=0\Rightarrow y=2^{-1}-2=-\frac{3}{2}\Rightarrow B=(0,-\frac{3}{2})$$

بنابراین $AB=\sqrt{(2-0)^2+(0-(-\frac{3}{2}))^2}=\frac{5}{2}$.

۲۳۰۲- گزینهٔ ۱ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(-\frac{3}{2})=0\Rightarrow 9^{-\frac{3}{2}+a}-2b=0\Rightarrow 2b=9^{-\frac{3}{2}+a}$$

$$f(0)=26\Rightarrow 9^a-2b=26\Rightarrow 2b=9^a-26$$

بنابراین

$$9^{-\frac{3}{2}+a}=9^a-26\Rightarrow 9^a-9^{-\frac{3}{2}+a}=26\Rightarrow 9^a(1-9^{-\frac{3}{2}})=26$$

$$9^a(1-\frac{1}{27})=26\Rightarrow 9^a=27\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

در نتیجه $2b=9^a-26=1$، یعنی $b=\frac{1}{2}$. به این ترتیب، $a+b=2$.

۲۳۰۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

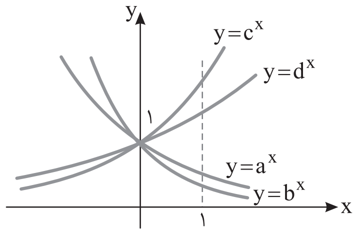
$$f(-1)=9\Rightarrow a^{-1}+1=9\Rightarrow a^{-1}=8\Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

بنابراین $f(x)=(\frac{1}{8})^x+1$. از طرف دیگر

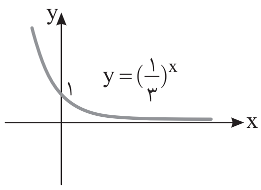
$$f(0)=b\Rightarrow(\frac{1}{8})^0+1=b\Rightarrow b=1+1=2$$

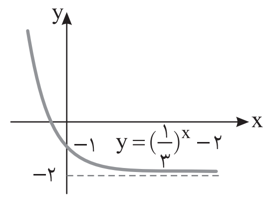
در نتیجه $ab=\frac{1}{4}$.

۲۳۰۴- گزینهٔ ۴ چون عرض نقطهٔ برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ به‌صورت a، b، c و d است، با توجه به نمودار چهار تابع و مقایسهٔ عرض نقطهٔ برخورد تابع‌ها با خط $x=1$ معلوم می‌شود $c>d>a>b$.

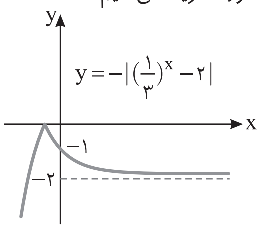


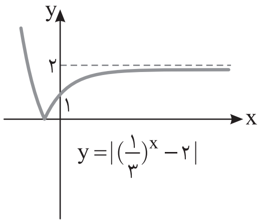
۲۳۰۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $f(x)=1-|(\frac{1}{3})^x-2|$. ابتدا نمودار $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم می‌کنیم و سپس آن را دو واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



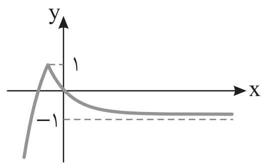


اکنون نمودار تابع $y=|(\frac{1}{3})^x-2|$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:





در نهایت، نمودار را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



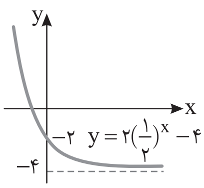
$$f(x)=1-|(\frac{1}{3})^x-2|$$

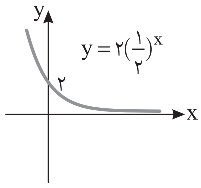
۲۳۰۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

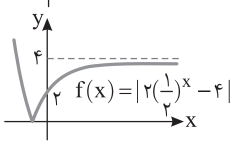
$$f(x)=\frac{|2^{x+1}-1|}{2^{x-1}}=\frac{|2^{x+1}-1|}{|2^{x-1}|}=|\frac{2^{x+1}-1}{2^{x-1}}|=|\frac{2^{x+1}}{2^{x-1}}-\frac{1}{2^{x-1}}|$$

$$=|4-\frac{2}{2^x}|=|4-2(\frac{1}{2})^x|=|2(\frac{1}{2})^x-4|$$

بنابراین نمودار تابع f به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:







۲۳۰۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

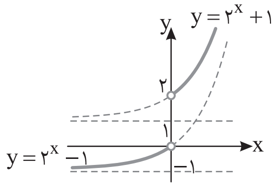
$$(fog)(x)=f(g(x))=3^{g(x)-2}=3^{x+2-2}=3^x$$

$$f(x)=3^{x-2}=\frac{1}{9}\times3^x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}\times(fog)(x)\Rightarrow(fog)(x)=9f(x)$$

۲۳۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}2^x+1 & x>0\\ 2^x-1 & x<0\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



پس برد تابع به‌صورت $(-1,0)\cup(2,+\infty)$ است.

۲۳۰۹- گزینهٔ ۴ در تابع $f(x)=۲^{x^۲}+۱$ برای $x=۱$ و $x=-۱$ مقدار تابع برابر ۳ است. پس تابع یک‌به‌یک نیست.

۲۳۱۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که باید $k>۰$ و

$$f(x)=۲\times۲^x\times(\frac{۱}{k})^x=۲\times(\frac{۲}{k})^x$$

بنابراین، چون تابع f اکیداً صعودی است، پس

$$\frac{۲}{k}>۱\xrightarrow{k>۰}k<۲$$

بنابراین $۰<k<۲$.

۲۳۱۱- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض مسئله،

$$f(۰)=-\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^b-۶=-\frac{۲۱}{۴}\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^b=\frac{۳}{۴}$$

$$a(\frac{۱}{۲})^{b-۲}=۳\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^{b-۳}=۶\Rightarrow a(\frac{۱}{۲})^{b-۳}-۶=۰\Rightarrow f(-۳)=۰$$

بنابراین نمودار تابع f محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۲۳۱۲- گزینهٔ ۲ چون نمودار تابع‌های f و g در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع‌اند، پس

$$f(-۱)=g(-۱)\Rightarrow ۲^{-a+b}=(\frac{۱}{۴})^{-۱-b}=۲^{-۲(-۱-b)}=۲^{۲(۱+b)}$$

بنابراین

$$-a+b=۲(۱+b)\Rightarrow a+b=-۲ \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$f(۱)g(۱)=۴\Rightarrow ۲^{a+b}\times(\frac{۱}{۴})^{۱-b}=۴\Rightarrow ۲^{a+b}\times۲^{-۲(۱-b)}=۲^۲$$

$$۲^{a+۳b-۲}=۲^۲\Rightarrow a+۳b=۴ \qquad (۲)$$

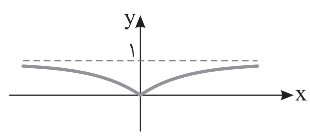
از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-۵$ و $b=۳$. بنابراین $f(x)=۲^{-۵x+۳}$. اکنون فرض کنید $f^{-۱}(\frac{۱}{۱۲۸})=m$. در این صورت

$$f(m)=\frac{۱}{۱۲۸}\Rightarrow ۲^{-۵m+۳}=\frac{۱}{۱۲۸}=۲^{-۷}\Rightarrow -۵m+۳=-۷\Rightarrow m=۲$$

۲۳۱۳- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}۱-۲^x & x\le ۰\\ ۱-۲^{-x} & x>۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که

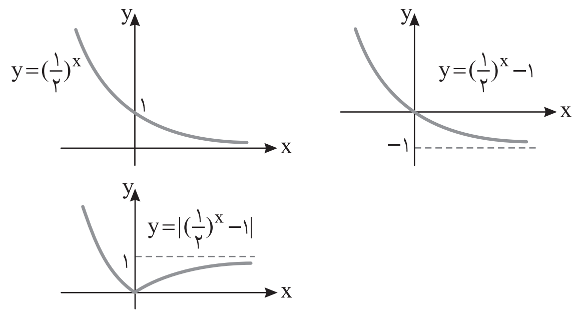
$$f(۱)=f(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

فقط گزینهٔ (۴) این شرط را دارد.

۲۳۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع به شکل زیر ساده می‌شود:

$$y=\frac{|۱-۲^x|}{۲^x}=\frac{|۱-۲^x|}{|۲^x|}=|\frac{۱-۲^x}{۲^x}|=|\frac{۱}{۲^x}-\frac{۲^x}{۲^x}|=|(\frac{۱}{۲})^x-۱|$$

بنابراین نمودار تابع به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:



۲۳۱۵- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $s=۲^{m-۲}+۱$. چون $f^{-۱}(s)=۲۶$. پس $s=f(۲۶)$. در نتیجه $f(۲۶)=۵(۲۶)-۱=۱۲۹$. اکنون می‌توان نوشت

$$s=۲^{m-۲}+۱=۱۲۹\Rightarrow ۲^{m-۲}=۱۲۸=۲^۷$$

بنابراین $m-۲=۷$، پس $m=۹$.

۲۳۱۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $g(x+۲)=۲^{x+۲-۱}=۲^{x+۱}$، بنابراین $f(۲^{x+۱})=۲^x+۱$.

$$f(۲^{x+۱})=۲^x+۱\Rightarrow f^{-۱}(۲^x+۱)=۲^{x+۱}$$

$$۲^x+۱=۹\Rightarrow ۲^x=۸=۲^۳\Rightarrow x=۳$$

بنابراین $f^{-۱}(۹)=۲^{۳+۱}=۱۶$.

۲۳۱۷- گزینهٔ ۲ می‌توان نوشت

$$f(\frac{x}{۳})=۸^{\frac{x}{۳}}=۲^x,\quad g(x-۲)=۲^{۲(x-۲)+۵}=۲^{۲x+۱}$$

بنابراین

$$f(\frac{x}{۳})g(x-۲)=۲^x\times۲^{۲x+۱}=۲^{۳x+۱}=۲^{۳x}\times۲=۲\times۸^x=۲f(x)$$

۲۳۱۸- گزینهٔ ۳ ضابطهٔ تابع را به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(x)=\frac{۲^x+۱}{۲^x+۲}=\frac{۲^x+۲}{۲^x+۲}+\frac{-۱}{۲^x+۲}=۱-\frac{۱}{۲^x+۲}$$

اکنون توجه کنید که برای هر x حقیقی، $۲^x>۰$. بنابراین

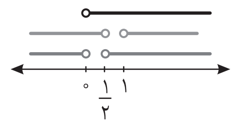
$$۲^x+۲>۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{۲^x+۲}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<-\frac{۱}{۲^x+۲}<۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}<۱-\frac{۱}{۲^x+۲}<۱$$

در نتیجه $\frac{۱}{۲}<f(x)<۱$.

۲۳۱۹- گزینهٔ ۴ می‌دانیم تابع‌های نمایی به شکل $f(x)=ka^x$ ($a>۰, a\neq۱$)، یک‌به‌یک هستند. در نتیجه تابع‌های $y=۳^{۱+۲x}$ و $y=۴^{۵-x}$ یک‌به‌یک هستند. تابع $f(x)=۲^{۳-|x|}$، یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر x حقیقی، $f(x)=f(-x)=۲^{۳-|x|}$. اکنون ثابت می‌کنیم تابع $y=۹^x+۲\times۳^{x+۱}$ یک‌به‌یک است. دقت کنید که $۹^x+۲\times۳^{x+۱}=(۳^x+۳)^۲-۹$. فرض می‌کنیم $f(x_۱)=f(x_۲)$. در نتیجه $(۳^{x_۱}+۳)^۲-۹=(۳^{x_۲}+۳)^۲-۹$. بنابراین $(۳^{x_۱}+۳)^۲=(۳^{x_۲}+۳)^۲$، چون $۳^{x_۱}+۳, ۳^{x_۲}+۳>۰$، پس

$$۳^{x_۱}+۳=۳^{x_۲}+۳\Rightarrow ۳^{x_۱}=۳^{x_۲}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

۲۳۲۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که
$$f(x)=k\times k^x\times(\frac{1}{2k-1})^x=k(\frac{k}{2k-1})^x$$
تابع f اکیداً نزولی است، پس باید
$$0<\frac{k}{2k-1}<1$$
$$\frac{k}{2k-1}>0\Rightarrow k>\frac{1}{2} \text{ یا } k<0$$
$$\frac{k}{2k-1}<1\Rightarrow \frac{k}{2k-1}-1<0\Rightarrow\frac{-k+1}{2k-1}<0\Rightarrow k>1 \text{ یا } k<\frac{1}{2}$$



پس $k>1$.

۲۳۲۱- گزینهٔ ۱ با فاکتورگیری از 3^x معادله را حل می‌کنیم
$$3^x(3+1)=108\Rightarrow 3^x\times4=108\Rightarrow3^x=27=3^3\Rightarrow x=3$$
پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۲۳۲۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم
$$5^{x-3}=(\frac{1}{5})^{x^2}\Rightarrow5^{x-3}=5^{-x^2}$$
$$x-3=-x^2\Rightarrow x^2+x-3=0$$
پس مجموع جواب‌های معادله برابر -1 است.

۲۳۲۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که
$$f^{-1}(5)=a\Rightarrow f(a)=5$$
$$2+3^{a-2}=5\Rightarrow3^{a-2}=3\Rightarrow a-2=1\Rightarrow a=3$$

۲۳۲۴- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $2^x=t$، معادلهٔ مورد نظر می‌شود:
$$t-\frac{2}{t}+15=0\Rightarrow t^2+15t-2=0$$
این معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. از طرف دیگر، معلوم است که معادلهٔ $2^x=a$ فقط وقتی جواب دارد که a مثبت باشد و البته اگر a مثبت باشد، این معادله فقط یک جواب دارد (که $\log_2 a$ است). بنابراین معادلهٔ اصلی فقط یک جواب دارد.

۲۳۲۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل $3\times3^{2x}-9\times3^x+5=0$ نوشت. اگر فرض کنیم $3^x=t$، این معادله می‌شود $3t^2-9t+5=0$. هر دو جواب این معادله مثبت‌اند و مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{9}{3}=3$. به این ترتیب $3^\alpha+3^\beta=t_1+t_2=3$.

۲۳۲۶- گزینهٔ ۲ از معادلهٔ $x+y=5$ به‌دست می‌آید $y=5-x$. با جای‌گذاری $5-x$ به جای y در معادلهٔ $2^x-2^y=4$، به‌دست می‌آید
$$2^x-2^{5-x}=4\Rightarrow2^x-\frac{2^5}{2^x}=4\Rightarrow(2^x)^2-4(2^x)-32=0$$
$$(2^x-8)(2^x+4)=0\Rightarrow\begin{cases}2^x+4=0\Rightarrow2^x=-4 \quad (\text{غ.ق.ق.})\\ 2^x-8=0\Rightarrow2^x=8\Rightarrow x=3\end{cases}$$
$$y=5-x\xrightarrow{x=3}y=2$$
بنابراین $x-y=1$.

۲۳۲۷- گزینهٔ ۲ عددهایی که مخرج کسر را صفر کنند، در دامنهٔ تابع قرار ندارند. پس
$$|2^x-4|-3=0\Rightarrow2^x-4=\pm3\Rightarrow2^x=7,2^x=1$$
هر یک از معادله‌های بالا فقط یک جواب دارند و این دو جواب متمایز هستند پس دامنهٔ تابع شامل دو عدد نیست.

۲۳۲۸- گزینهٔ ۴ چون $(\frac{3}{2})^{-1}=\frac{2}{3}$، پس نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:
$$(\frac{3}{2})^{1-3x}<(\frac{3}{2})^{-(3+x)}$$
اکنون توجه کنید که چون $\frac{3}{2}>1$، پس $1-3x<-(3+x)$، بنابراین $x>2$.

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(2,+\infty)$ است.

۲۳۲۹- گزینهٔ ۳ باید نامعادله‌های $2^x-8\ge0$ و $81-3^x>0$ را حل کنیم و اشتراک مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها را به‌دست آوریم
$$2^x-8\ge0\Rightarrow2^x\ge2^3\Rightarrow x\ge3,\quad 81-3^x>0\Rightarrow3^x<3^4\Rightarrow x<4$$
بنابراین $D_f=[3,4)$. در نتیجه $a=3$، $b=4$ و $a+b=7$.

۲۳۳۰- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع f برابر است با
$$D_f=\{x|-3^{2x+1}+4\times3^x-1>0\}$$
فرض می‌کنیم $3^x=t$، در نتیجه باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:
$$-3t^2+4t-1>0\Rightarrow-(t-1)(3t-1)>0$$
جواب نامعادلهٔ بالا به‌صورت $\frac{1}{3}<t<1$ است. در نتیجه $\frac{1}{3}<3^x<1$. بنابراین
$$-1<x<0$$

۲۳۳۱- گزینهٔ ۱ می‌توان نوشت
$$2^x(1+2+2^2)=5^x(2+5)\Rightarrow2^x\times7=5^x\times7$$
$$2^x=5^x\Rightarrow(\frac{2}{5})^x=1\Rightarrow x=0$$
پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۳۳۲- گزینهٔ ۲ معادله را به شکل $2^{|x|}=(2^{-1})^{x-x^2}=2^{x^2-x}$ می‌نویسیم. بنابراین
$$|x|=x^2-x \qquad (1)$$
اگر $x\ge0$، این معادله می‌شود:
$$x=x^2-x\Rightarrow2x=x^2\Rightarrow x=2,x=0$$
اگر $x<0$، معادلهٔ (۱) می‌شود:
$$-x=x^2-x\Rightarrow x^2=0$$
که چون $x<0$، جواب ندارد. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد: $x=0$ و $x=2$.

۲۳۳۳- گزینهٔ ۳ ابتدا x ای را پیدا می‌کنیم که $3^x-1=8$، یعنی $3^x=9$، پس $x=2$. به این ترتیب، اگر در تساوی داده شده به جای x قرار دهیم، ۲ به‌دست می‌آید $f(8)=2^3+1=9$. از طرف دیگر،
$$f^{-1}(2)=a\Rightarrow f(a)=2$$
$$x^3+1=2\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$$
پس
$$f(3^1-1)=1^3+1\Rightarrow f(2)=2$$
در نتیجه $f^{-1}(2)=2$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $9+2=11$.

۲۳۳۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}-2$. بنابراین اگر فرض کنیم $t=(\sqrt{5}+2)^x$. معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$t+\frac{1}{t}=18\Rightarrow t^2-18t+1=0\Rightarrow t=9+4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^x\Rightarrow x=2$$

$$t=9-4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^x\Rightarrow x=-2$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر -4 است.

۲۳۳۵- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2^{2x}+2^x\times3^x=2\times3^{2x}$$

اگر فرض کنیم $a=2^x$ و $b=3^x$، این معادله می‌شود:

$$a^2+ab=2b^2\Rightarrow a^2-b^2=b^2-ab\Rightarrow(a-b)(a+b)=b(b-a)$$

$$(a-b)(a+b+b)=0\Rightarrow(a-b)(a+2b)=0$$

بنابراین

$$a-b=0\Rightarrow2^x=3^x\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=1\Rightarrow x=0$$

$a+2b=0\Rightarrow2^x+2\times3^x=0$ جواب ندارد.

در نتیجه، معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد: $x=0$.

۲۳۳۶- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $a=2^x$ و $b=3^y$، در نتیجه

$$\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-7\\ ab=\frac{1}{18}\Rightarrow b=\frac{1}{18a}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-7\Rightarrow\frac{1}{a}-18a=-7$$

$$18a^2-7a-1=0\Rightarrow(9a+1)(2a-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{9}=2^x & \text{جواب ندارد.}\\ a=\frac{1}{2}=2^x\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

۲۳۳۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

بنابراین نامعادلهٔ مورد نظر می‌شود:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1-2x}>(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-x-3}$$

چون $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$، پس

$$1-2x<-x-3\Rightarrow x>4$$

۲۳۳۸- گزینهٔ ۴ نامعادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$8(2^x)^2-6(2^x)+1\geq0$$

اگر فرض کنیم $t=2^x$، نامعادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$8t^2-6t+1\geq0\Rightarrow(2t-1)(4t-1)\geq0\Rightarrow t\geq\frac{1}{2}\ \text{یا}\ t\leq\frac{1}{4}$$

$$t\geq\frac{1}{2}\Rightarrow2^x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow2^x\geq2^{-1}\Rightarrow x\geq-1$$

$$t\leq\frac{1}{4}\Rightarrow2^x\leq\frac{1}{4}\Rightarrow2^x\leq2^{-2}\Rightarrow x\leq-2$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-\infty,-2]\cup[-1,+\infty)$ است که همان $\mathbb{R}-(-2,-1)$ است. پس $a=-2$، $b=-1$ و در نتیجه $a+b=-3$.

۲۳۳۹- گزینهٔ ۳ باید نامعادلهٔ $2^{x+1}-4^x\geq0$ را حل کنیم تا دامنهٔ تابع به‌دست آید

$$2^{x+1}-4^x\geq0\Rightarrow2\times2^x-(2^x)^2\geq0\Rightarrow2^x(2-2^x)\geq0$$

با توجه به اینکه $2^x>0$ نتیجه می‌شود

$$2-2^x\geq0\Rightarrow2^x\leq2\Rightarrow x\leq1$$

بنابراین $a=1$.

۲۳۴۰- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع f مجموعهٔ xهایی است که

$$\frac{(\frac{1}{2})^x-4}{27-3^x}\geq0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x-4=0\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x=4=2^2\Rightarrow x=-2$$

$$27-3^x=0\Rightarrow3^x=27=3^3\Rightarrow x=3$$

اکنون توجه کنید که

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(\frac{1}{2})^x-4$		+	0	−		−	
$27-3^x$		+		+	0	−	
$\frac{(\frac{1}{2})^x-4}{27-3^x}$		+	0	−	ت ن	+	

بنابراین

$$D_f=(-\infty,-2]\cup(3,+\infty)=\mathbb{R}-(-2,3]$$

در نتیجه $a=-2$، $b=3$ و $a+b=1$.

۲۳۴۱- گزینهٔ ۱ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log90=\log(9\times10)=\log9+\log10=\log3^2+1=2\log3+1=2a+1$$

۲۳۴۲- گزینهٔ ۱ با استفاده از ویژگی $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log6-\log2\times\log_2 3=\log6-\log2\times\frac{\log3}{\log2}$$

$$=\log6-\log3=\log\frac{6}{3}=\log2$$

۲۳۴۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$. بنابراین $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. در نتیجه

$$\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)=-1$$

۲۳۴۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt[4]{3\sqrt{27\sqrt[3]{81}}}=3^{\frac{1}{4}}\times27^{\frac{1}{4\times2}}\times81^{\frac{1}{4\times2\times3}}$$

$$=3^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{3}{4\times2}}\times3^{\frac{4}{4\times2\times3}}=3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{6}}=3^{\frac{6+9+4}{24}}=3^{\frac{19}{24}}$$

بنابراین

$$\log_3\sqrt[4]{3\sqrt{27\sqrt[3]{81}}}=\log_3 3^{\frac{19}{24}}=\frac{19}{24}\log_3 3=\frac{19}{24}$$

۲۳۴۵- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_4 5=\frac{\log 5}{\log 4}=\frac{\log 5}{2\log 2}=\frac{1}{2}\times\frac{\log 5}{\log 2}=\frac{1}{2}\log_2 5$$

در نتیجه باید حاصل عبارت زیر را پیدا کنیم:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac12\log_2 5}=(2^{-1})^{\frac12\log_2 5}=2^{-\frac12\log_2 5}=(\underbrace{2^{\log_2 5}}_{5})^{-\frac12}=5^{-\frac12}=\frac{1}{\sqrt5}$$

۲۳۴۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $216=6^3=2^3\times3^3$، در نتیجه

$$\log 216=\log(2^3\times3^3)=\log2^3+\log3^3$$

$$=3\log2+3\log3=3x+3y$$

۲۳۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log5+\log20=\log(5\times20)=\log100=2$$

بنابراین $\log 20=2-\log5=2-a$.

۲۳۴۸- گزینهٔ ۲ از دو طرف تساوی $2^x=3^y$ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log2^x=\log3^y\Rightarrow x\log2=y\log3$$

بنابراین

$$\frac{\log3}{\log2}=\frac{x}{y}\Rightarrow\log_2 3=\frac{x}{y}$$

در نتیجه $\log_8 9=\log_{2^3}3^2=\frac23\log_2 3=\frac{2x}{3y}$.

۲۳۴۹- گزینهٔ ۱ از تساوی $3^{\log_2 5}=b$ نتیجه می‌شود

$$\log_3 b=\log_2 5$$

از تساوی $2^{\log_5 3}=a$ نتیجه می‌شود

$$3^{\log_5 2}=a\Rightarrow \log_3 a=\log_5 2$$

بنابراین $\log_3 a\times\log_3 b=\log_5 2\times\log_2 5=1$.

۲۳۵۰- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت $2\times2^x=5^x$ بازنویسی می‌کنیم. در نتیجه $(\frac52)^x=2$. بنابراین با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت

$$x=\log_{\frac52}2=\frac{1}{\log_2\frac52}=\frac{1}{\log_2 5-\log_2 2}=\frac{1}{\log_2 5-1}$$

۲۳۵۱- گزینهٔ ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$A=\log(20\times30\times50)=\log(3\times10^4)=\log3+\log10^4=a+4$$

۲۳۵۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\frac{1}{\log_6 18}=\log_{18}6,\quad \frac{1}{\log_3 18}=\log_{18}3$$

در نتیجه عبارت مورد نظر برابر است با

$$\log_{18}6+\log_{18}3=\log_{18}(3\times6)=1$$

۲۳۵۳- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $3+2\sqrt2=(1+\sqrt2)^2=(\frac{1}{\sqrt2-1})^2$.

بنابراین

$$\log_{(\sqrt2-1)}(3+2\sqrt2)=\log_{(\sqrt2-1)}\left(\frac{1}{\sqrt2-1}\right)^2$$

$$=2\log_{(\sqrt2-1)}\left(\frac{1}{\sqrt2-1}\right)=-2$$

۲۳۵۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}=\log_2(4^{\frac14}\times4^{\frac1{12}}\times2^{\frac1{24}})$$

$$=\log_2 2^{\frac24+\frac2{12}+\frac1{24}}=\log_2 2^{\frac{17}{24}}=\frac{17}{24}$$

$$\log_2\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{4}}}=\log_2(2^{\frac12}\times4^{\frac16}\times4^{\frac1{24}})$$

$$=\log_2 2^{\frac12+\frac26+\frac2{24}}=\log_2 2^{\frac{22}{24}}=\frac{22}{24}$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با $\frac{\frac{17}{24}}{\frac{22}{24}}=\frac{17}{22}$.

۲۳۵۵- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\log_8 3=\log_{2^3}3=\frac13\log_2 3$$

در نتیجه عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$2^{3+\log_8 3}=2^{3+\frac13\log_2 3}=2^3\times2^{\frac13\log_2 3}=8\times(\underbrace{2^{\log_2 3}}_{3})^{\frac13}=8(3)^{\frac13}=8\sqrt[3]{3}$$

راه‌حل دوم

$$2^3\times2^{\log_8 3}=8\times3^{\log_8 2}=8\times3^{\log_{2^3}2}=8\times3^{\frac13}=8\sqrt[3]{3}$$

۲۳۵۶- گزینهٔ ۴ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log\sqrt[3]{6/4}=\log\sqrt[3]{\frac{64}{10}}=\log\sqrt[3]{\frac{32}{5}}=\frac13\log\frac{32}{5}=\frac13(\log32-\log5)$$

$$=\frac13(\log2^5-\log\frac{10}{2})=\frac13(5\log2-(\log10-\log2))$$

$$=\frac13(6\log2-\log10)=\frac13(6a-1)=2a-\frac13$$

۲۳۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\log_5 2=a\Rightarrow\frac{\log2}{\log5}=a\Rightarrow\log2=a\log5$$

$$\log_3 5=b\Rightarrow\frac{\log5}{\log3}=b\Rightarrow\log3=\frac{\log5}{b}$$

بنابراین

$$\log_{15}4=\frac{\log4}{\log15}=\frac{2\log2}{\log3+\log5}=\frac{2a\log5}{\frac{\log5}{b}+\log5}=\frac{2a}{\frac1b+1}=\frac{2ab}{b+1}$$

۲۳۵۸- گزینهٔ ۲ چون $385=5\times7\times11$، پس طرفین سه تساوی داده شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$\log11+\log5+\log5+\log7+\log7+\log11=a+b+c$$

$$2(\log11+\log5+\log7)=a+b+c$$

$$2\log(11\times5\times7)=a+b+c\Rightarrow\log385=\frac{a+b+c}{2}$$

۲۳۵۹- گزینهٔ ۱ با توجه به خاصیت $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{1-\log_2 3}+\frac{1}{1-\log_3 2}=\frac{1}{1-\log_2 3}+\frac{1}{1-\frac{1}{\log_2 3}}$$

$$=\frac{1}{1-\log_2 3}+\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1}=\frac{1-\log_2 3}{1-\log_2 3}=1$$

۲۳۶۰- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $(۳^x)^۲-۳^x-۲=۰$ می‌نویسیم. در نتیجه $(۳^x+۱)(۳^x-۲)=۰$، چون عبارت $۳^x+۱$ همواره مثبت است، نتیجه می‌شود

$$۳^x-۲=۰\Rightarrow ۳^x=۲\Rightarrow x=\log_۳ ۲$$

۲۳۶۱- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول با توجه به اینکه

$$\log_c a+\log_c b=\log_c(ab)$$

داریم

$$A=\log_۵(\frac{۵}{۶}\times\frac{۶}{۷}\times\frac{۷}{۸}\times\cdots\times\frac{۱۲۴}{۱۲۵})=\log_۵\frac{۵}{۱۲۵}=\log_۵\frac{۱}{۲۵}=\log_۵ ۵^{-۲}$$
$$=-۲$$

راه‌حل دوم با توجه به تساوی $\log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$ می‌توان نوشت

$$A=\log_۵ ۵-\log_۵ ۶+\log_۵ ۶-\log_۵ ۷+\log_۵ ۷-\log_۵ ۸$$
$$+\cdots+\log_۵ ۱۲۴-\log_۵ ۱۲۵=\log_۵ ۵-\log_۵ ۱۲۵=۱-۳=-۲$$

۲۳۶۲- گزینهٔ ۱ چون $\frac{۱}{\log_a b}=\log_b a$، پس

$$\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\log_۲ ۳}}=\frac{۱}{۱+\log_۳ ۲}=\frac{۱}{\log_۳ ۳+\log_۳ ۲}=\frac{۱}{\log_۳(۳\times۲)}=\frac{۱}{\log_۳ ۶}$$
$$=\log_۶ ۳$$

۲۳۶۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲\log(۳+\sqrt{۵})=\log(۳+\sqrt{۵})^۲=\log(۹+۵+۶\sqrt{۵})=\log(۱۴+۶\sqrt{۵})$$

بنابراین

$$\log(۲۸+۱۲\sqrt{۵})-۲\log(۳+\sqrt{۵})=\log(۲۸+۱۲\sqrt{۵})-\log(۱۴+۶\sqrt{۵})$$
$$=\log\frac{۲۸+۱۲\sqrt{۵}}{۱۴+۶\sqrt{۵}}=\log ۲=k$$

۲۳۶۴- گزینهٔ ۲ به کمک تساوی $\log_b a=\frac{\log a}{\log b}$ می‌توان نوشت

$$\log_۲ ۳\times\log_۳ ۵\times\log_۵ ۸=\frac{\log ۳}{\log ۲}\times\frac{\log ۵}{\log ۳}\times\frac{\log ۸}{\log ۵}=\frac{\log ۸}{\log ۲}=\frac{۳\log ۲}{\log ۲}=۳$$

۲۳۶۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a=۵^{\log ۲۰}=۵^{\log ۱۰+\log ۲}=۵^{۱+\log ۲}=۵\times۵^{\log ۲}=۵\times۲^{\log ۵}$$
$$b=۲^{\log ۵۰}=۲^{\log ۱۰+\log ۵}=۲^{۱+\log ۵}=۲\times۲^{\log ۵}$$

بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{۵\times۲^{\log ۵}}{۲\times۲^{\log ۵}}=\frac{۵}{۲}$.

۲۳۶۶- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\log ۱۵=\frac{\log_۳ ۱۵}{\log_۳ ۱۰}$. از طرف دیگر

$$\log_۳ ۱۵=\log_۳(۳\times۵)=\log_۳ ۳+\log_۳ ۵=۱+b$$
$$\log_۳ ۱۰=\log_۳(۲\times۵)=\log_۳ ۲+\log_۳ ۵$$
$$=\frac{۱}{\log_۲ ۳}+\log_۳ ۵=\frac{۱}{a}+b=\frac{۱+ab}{a}$$

بنابراین $\log ۱۵=\frac{۱+b}{\frac{۱+ab}{a}}=\frac{a(۱+b)}{۱+ab}$.

۲۳۶۷- گزینهٔ ۲ چون $\log_{a^x} b=\frac{۱}{x}\log_a b$، پس

$$\log_۸ ۱۰=a\Rightarrow\log_{۲^۳}(۲\times۵)=a\Rightarrow\frac{۱}{۳}\log_۲(۲\times۵)=a$$
$$\frac{۱}{۳}(\log_۲ ۲+\log_۲ ۵)=a\Rightarrow ۱+\log_۲ ۵=۳a\Rightarrow\log_۲ ۵=۳a-۱$$

بنابراین

$$\log_{۴۰} ۵۰=\frac{\log_۲ ۵۰}{\log_۲ ۴۰}=\frac{\log_۲(۲\times۵^۲)}{\log_۲(۲^۳\times۵)}=\frac{\log_۲ ۲+\log_۲ ۵^۲}{\log_۲ ۲^۳+\log_۲ ۵}$$
$$=\frac{۱+۲\log_۲ ۵}{۳+\log_۲ ۵}=\frac{۱+۲(۳a-۱)}{۳+۳a-۱}=\frac{۶a-۱}{۳a+۲}$$

۲۳۶۸- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a}\ ,\quad \log_{ab} x=\frac{\log x}{\log(ab)}$$

بنابراین

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}=۳\Rightarrow\frac{\frac{\log x}{\log a}}{\frac{\log x}{\log(ab)}}=۳\Rightarrow\frac{\log(ab)}{\log a}=۳$$
$$\frac{\log a+\log b}{\log a}=۳\Rightarrow ۱+\frac{\log b}{\log a}=۳\Rightarrow\log_a b=۲$$

بنابراین $\log_b a=\frac{۱}{\log_a b}=\frac{۱}{۲}$. در نتیجه $\log_a b+\log_b a=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$.

۲۳۶۹- گزینهٔ ۴ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲^x)^۲-۸\times۲^x+۱۵=۰$$

بنابراین $(۲^x-۵)(۲^x-۳)=۰$، پس

$$\begin{cases}۲^x-۳=۰\Rightarrow ۲^x=۳\Rightarrow x=\log_۲ ۳\\ ۲^x-۵=۰\Rightarrow ۲^x=۵\Rightarrow x=\log_۲ ۵\end{cases}$$

چون $f(x)=\log_۲ x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس $\log_۲ ۵>\log_۲ ۳$، در نتیجه بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ مورد نظر $\log_۲ ۵$ است.

۲۳۷۰- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول از دو طرف معادلهٔ $۲^x=۳^y$ در پایهٔ ۳ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_۳ ۲^x=\log_۳ ۳^y\Rightarrow x\log_۳ ۲=y\log_۳ ۳\Rightarrow y=x\log_۳ ۲$$

در معادلهٔ $x+y=۱$ به جای y قرار می‌دهیم $x\log_۳ ۲$، در نتیجه

$$x+x\log_۳ ۲=۱\Rightarrow x(۱+\log_۳ ۲)=۱$$
$$x(\log_۳ ۳+\log_۳ ۲)=۱\Rightarrow x\log_۳ ۶=۱$$
$$x=\frac{۱}{\log_۳ ۶}\Rightarrow x=\log_۶ ۳$$

راه‌حل دوم

$$x+y=۱\Rightarrow y=۱-x$$
$$۲^x=۳^{۱-x}\Rightarrow ۲^x=\frac{۳}{۳^x}\Rightarrow ۶^x=۳\Rightarrow x=\log_۶ ۳$$

۲۳۷۱- گزینهٔ ۴ اگر $f(t)=8$، آن‌گاه $f^{-1}(8)=t$، بنابراین

$$3+5\log(2t-3)=8 \Rightarrow \log(2t-3)=1 \Rightarrow 2t-3=10 \Rightarrow t=\frac{13}{2}$$

۲۳۷۲- گزینهٔ ۲ چون نمودار تابع f از نقطه‌های $(2,3)$ و $(3,4)$ می‌گذرد، پس

$$f(2)=3 \Rightarrow a+\log_{\frac{1}{2}}(2b+1)=3 \qquad (1)$$

$$f(3)=4 \Rightarrow a+\log_{\frac{1}{2}}(3b+1)=4 \qquad (2)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2b+1)-\log_{\frac{1}{2}}(3b+1)=-1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2b+1}{3b+1}=-1 \Rightarrow \frac{2b+1}{3b+1}=2 \Rightarrow b=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه از تساوی (۱) به‌دست می‌آید:

$$a=3-\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=3-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=3-1=2$$

۲۳۷۳- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل دامنهٔ تابع به‌صورت $(-3,+\infty)$ است. پس دامنهٔ تابع باید به شکل $(-\frac{b}{a},+\infty)$ باشد. بنابراین

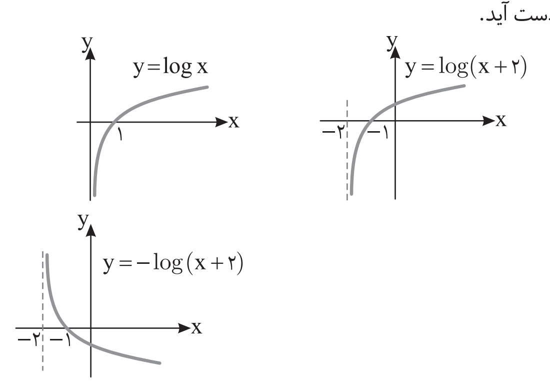
$$-\frac{b}{a}=-3 \Rightarrow b=3a$$

همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(-2,0)$ می‌گذرد. بنابراین

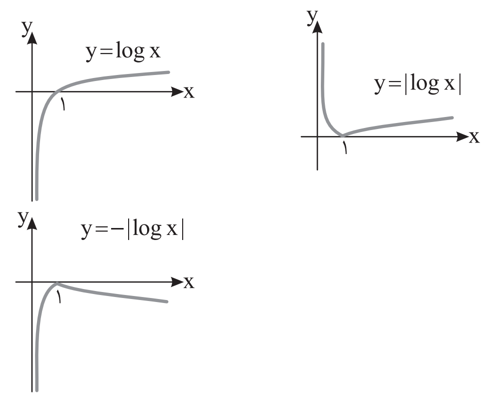
$$f(0)=\log_{\frac{1}{3}} b=-2 \Rightarrow b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$$

در نتیجه $a=3$. بنابراین $ab=27$.

۲۳۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log(x+2)$ به‌دست آید. سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\log(x+2)$ به‌دست آید.



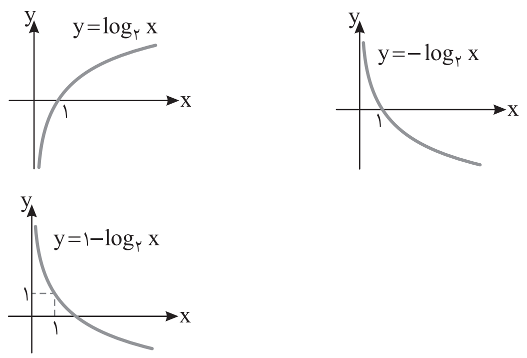
۲۳۷۵- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و قسمت‌هایی از نمودار را که پایین محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم و قسمت‌های پایین محور طول‌ها را حذف می‌کنیم. تا نمودار $y=|\log x|$ به‌دست آید. سپس نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-|\log x|$ رسم شود.



۲۳۷۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\log_2\frac{2}{x}=\log_2 2-\log_2 x=1-\log_2 x$$

بنابراین نمودار تابع به‌ترتیب زیر رسم می‌شود:



۲۳۷۷- گزینهٔ ۲ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$10-x>0 \Rightarrow x<10, \quad x-2>0 \Rightarrow x>2, \quad x-2\neq 1 \Rightarrow x\neq 3$$

پس دامنهٔ تابع $(2,10)-\{3\}$ است که شامل شش عدد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ است.

۲۳۷۸- گزینهٔ ۳ باید همواره $x^2-2mx+4>0$، چون ضریب x^2 مثبت است، باید $\Delta<0$.

$$\Delta=b^2-4ac<0 \Rightarrow (-2m)^2-4\times(1)\times 4<0$$

$$4m^2-16<0 \Rightarrow 4(m^2-4)<0 \Rightarrow |m|<2 \Rightarrow -2<m<2$$

۲۳۷۹- گزینهٔ ۳ با تغییرات دو مرحلهٔ اول به تابع $f(x)=2^{x-1}+1$ می‌رسیم. با قرینه کردن نمودار تابع نسبت به خط $y=x$، به تابع وارون f می‌رسیم. ضابطهٔ تابع وارون f به‌صورت زیر پیدا می‌شود:

$$y=1+2^{x-1} \Rightarrow 2^{x-1}=y-1 \Rightarrow x-1=\log_2(y-1) \Rightarrow x=\log_2(y-1)+1$$

در نتیجه $f^{-1}(x)=\log_2(x-1)+1$.

۲۳۸۰- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم $y=-\log_2(x-1)+2$. در نتیجه

$$2-y=\log_2(x-1) \Rightarrow 2^{2-y}=x-1$$

بنابراین $x=2^{2-y}+1$، پس $f^{-1}(x)=2^{2-x}+1$.

راه‌حل دوم توجه کنید که $f(3)=-\log_2 2+2=1$، بنابراین $f^{-1}(1)=3$. فقط گزینهٔ (۳) در این شرط صدق می‌کند.

۲۳۸۱- گزینهٔ ۴ چون $f^{-۱}(۳)=۲۹$ ، پس $f(۲۹)=۳$ در نتیجه

$$\log_{۳}(۲\times۲۹-k)=۳\Rightarrow ۵۸-k=۳^{۳}=۲۷\Rightarrow k=۳۱$$

۲۳۸۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع f نیمساز ناحیهٔ اول را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(۲,۲)$ می‌گذرد. همچنین نمودار تابع f نیمساز ناحیهٔ دوم را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(-۱,۱)$ می‌گذرد. به این ترتیب

$$f(۲)=۲\Rightarrow\log_{۲}(۲a+b)=۲\Rightarrow ۲a+b=۴ \qquad (۱)$$

$$f(-۱)=۱\Rightarrow\log_{۲}(-a+b)=۱\Rightarrow -a+b=۲ \qquad (۲)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۲}{۳}$ و $b=\frac{۸}{۳}$.

۲۳۸۳- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=(-۲,+\infty)$ ، پس $x=-۲$ باید ریشهٔ عبارت $bx+c$ باشد. بنابراین

$$-۲b+c=۰ \quad (۱)$$

از طرف دیگر $f(۰)=-۱$ و $f(-۱)=۰$. پس

$$f(۰)=\log_a c=-۱\Rightarrow c=\frac{۱}{a} \quad (۲)$$

$$f(-۱)=\log_a(-b+c)=۰\Rightarrow -b+c=۱ \quad (۳)$$

از معادلات (۱) و (۳) نتیجه می شود $b=۱$ و $c=۲$. همچنین از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $a+b+c=\frac{۷}{۲}$.

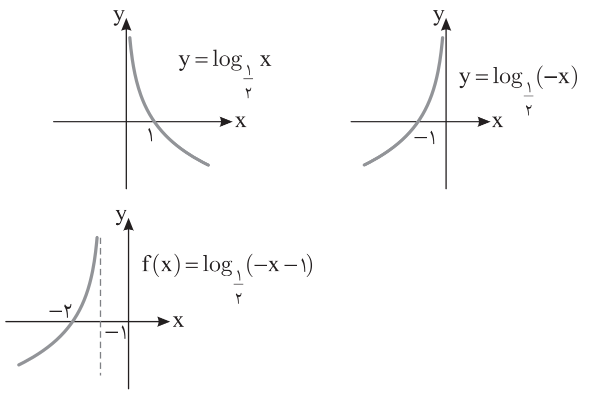
۲۳۸۴- گزینهٔ ۲ نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور طول‌ها از معادلهٔ $f(x)=۰$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\log_{۲}(۳x-۵)=۰\Rightarrow ۳x-۵=۱\Rightarrow x=۲$$

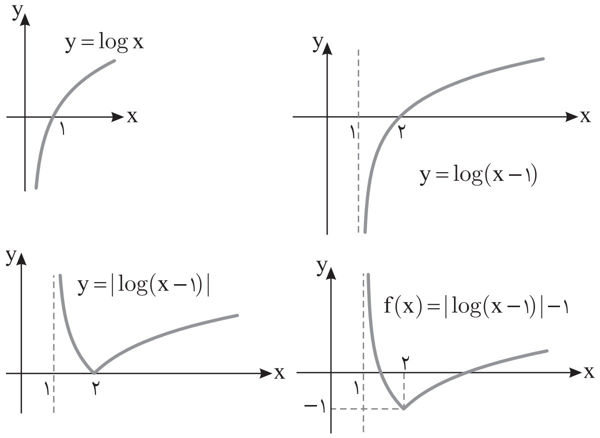
پس نقطهٔ برخورد نمودار f با محور طول‌ها $A(۲,۰)$ است. بنابراین نقطهٔ برخورد نمودار تابع وارون f با محور عرض‌ها $B(۰,۲)$ است. بنابراین

$$AB=\sqrt{(۲-۰)^{۲}+(۰-۲)^{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

۲۳۸۵- گزینهٔ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(-x)$ به‌دست بیاید. سپس آن را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}(-(x+۱))=\log_{\frac{۱}{۲}}(-x-۱)$ به‌دست آید. مراحل رسم نمودار تابع f را در شکل‌های زیر نشان داده‌ایم:



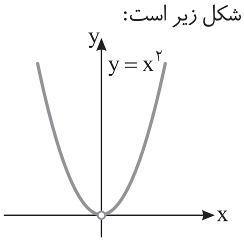
۲۳۸۶- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=\log x$ را رسم می‌کنیم و آن را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=\log(x-۱)$ به‌دست بیاید. سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور طول‌ها قرار دارد نسبت به این محور قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|\log(x-۱)|$ به‌دست آید و آن قسمت‌ها را حذف می‌کنیم. در آخر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع f به‌دست آید.



۲۳۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع مجموعهٔ عددهای حقیقی مخالف صفر است و با توجه به اینکه $a^{\log_a g(x)}=g(x)$

$$f(x)=۲^{\log_{۲} x^{۲}}=x^{۲}, \quad x\neq۰$$

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است:



۲۳۸۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه عبارت $\log_{(x-۱)}(۱۶-x^{۲})$ معنادار باشد، باید

$$۱۶-x^{۲}>۰\Rightarrow x^{۲}<۱۶\Rightarrow -۴<x<۴\ ,\ x-۱>۰\Rightarrow x>۱\ ,\ x-۱\neq۱\Rightarrow x\neq۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $D_f=(۱,۴)-\{۲\}$ است، پس $a=۱$ ، $b=۴$ و $c=۲$ و در نتیجه $a+b+c=۷$.

۲۳۸۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$y=\frac{۴-۲^{x+۱}}{۲^{x}-۱}\Rightarrow y\times۲^{x}-y=۴-۲^{x+۱}$$

$$۲^{x}(y+۲)=۴+y\Rightarrow ۲^{x}=\frac{۴+y}{y+۲}\Rightarrow x=\log_{۲}(\frac{۴+y}{y+۲})$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\log_{۲}(\frac{۴+x}{x+۲})$.

۲۳۹۰- گزینهٔ ۲ برای محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون تابع داده شده، x را برحسب y حساب می‌کنیم:

$$y=\frac{\log x}{۱+\log x}\Rightarrow y+y\log x=\log x\Rightarrow (y-۱)\log x=-y$$

$$\log x=\frac{y}{۱-y}\Rightarrow x=۱۰^{\frac{y}{۱-y}}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=۱۰^{\frac{x}{۱-x}}$.

۲۳۹۱- گزینهٔ ۳ کافی است معادلهٔ $x^{۲}-۳x=x$ را حل کنیم:

$$x^{۲}-۴x=۰\Rightarrow x=۰\,,\,x=۴$$

واضح است که $x=۰$ قابل قبول نیست چون لگاریتم صفر تعریف نمی‌شود. پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۳۹۲- گزینهٔ ۱ معادله را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_{۲}(۱۲b-۲۱)-\log_{۲}(b^{۲}-۳)=\log_{۲}(\frac{۱۲b-۲۱}{b^{۲}-۳})=۲$$

در نتیجه

$$\frac{۱۲b-۲۱}{b^{۲}-۳}=۲^{۲}=۴\Rightarrow ۴b^{۲}-۱۲=۱۲b-۲۱$$

بنابراین

$$۴b^{۲}-۱۲b+۹=(۲b-۳)^{۲}=۰$$

بنابراین $b=\frac{۳}{۲}$. اما به ازای $b=\frac{۳}{۲}$ هیچ‌یک از عبارت‌های $\log_{۲}(۱۲b-۲۱)$ و $\log_{۲}(b^{۲}-۳)$ معنادار نیست، بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۳۹۳- گزینهٔ ۱ طبق تعریف لگاریتم

$$\log_{۲}(\log_{۳}(x-۱))=۵\Rightarrow\log_{۳}(x-۱)=۲^{۵}=۳۲$$

$$x-۱=۳^{۳۲}\Rightarrow x=۳^{۳۲}+۱$$

۲۳۹۴- گزینهٔ ۴ چون $\log_{a^{k}} b=\frac{۱}{k}\log_{a} b$، پس معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\log_{۲^{۲}}x+\log_{۲^{۴}}x^{۲}+\log_{۲^{۶}}x^{۳}=۹$$

$$\frac{۱}{۲}\log_{۲}x+\frac{۲}{۴}\log_{۲}x+\frac{۳}{۶}\log_{۲}x=۹$$

$$\frac{۳}{۲}\log_{۲}x=۹\Rightarrow\log_{۲}x=۶\Rightarrow x=۲^{۶}=۶۴$$

۲۳۹۵- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم $\log_{۳}x=t$، در نتیجه $\log_{x}۳=\frac{۱}{t}$.

بنابراین به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$t-\frac{۶}{t}+۱=۰\Rightarrow t^{۲}+t-۶=۰\Rightarrow(t-۲)(t+۳)=۰\Rightarrow t=-۳\,,\,t=۲$$

پس

$$\log_{۳}x=-۳\Rightarrow x=۳^{-۳}$$

$$\log_{۳}x=۲\Rightarrow x=۳^{۲}$$

بنابراین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۲۳۹۶- گزینهٔ ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+۲)$ و $\log(۳-x)$ بامعنا باشند و نیز $\log(۳-x)\neq۰$، پس

$$D_{f}=\{x|x+۲>۰,۳-x>۰,\log(۳-x)\neq۰\}$$

اگر $\log(۳-x)=۰$، آن‌گاه $x=۲$. بنابراین دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-۲,۳)-\{۲\}$ است.

۲۳۹۷- گزینهٔ ۳ دامنهٔ توابع f و g به شکل زیر هستند:

$$x^{۲}>۰\Rightarrow x\neq۰\Rightarrow D_{f}=\mathbb{R}-\{۰\},\quad x-۱\neq۰\Rightarrow x\neq۱\Rightarrow D_{g}=\mathbb{R}-\{۱\}$$

بنابراین دامنهٔ تابع gof طبق تعریف به شکل زیر است:

$$D_{gof}=\{x|x\in D_{f},f(x)\in D_{g}\}=\{x|x\neq۰\,,\log x^{۲}\neq۱\}$$

$$=\{x|x\neq۰\,,x\neq\pm\sqrt{۱۰}\}=\mathbb{R}-\{۰,\pm\sqrt{۱۰}\}$$

بنابراین ۳ عدد در دامنهٔ تابع gof قرار ندارند.

۲۳۹۸- گزینهٔ ۲ از نامعادلهٔ $\log(x+۱)>\log ۳$ نتیجه می‌شود $x+۱>۳$ و در نتیجه $x>۲$. واضح است که عبارت $\log(x+۱)$ به ازای $x>-۱$ بامعنا است. پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $(۲,+\infty)$ است.

۲۳۹۹- گزینهٔ ۴ برای اینکه $\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)$ بامعنا باشد، باید $x-۱>۰$، یعنی $x>۱$. از طرف دیگر،

$$\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)>۱=\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۲}\Rightarrow x-۱<\frac{۱}{۲}\Rightarrow x<\frac{۳}{۲}$$

بنابراین $۱<x<\frac{۳}{۲}$.

۲۴۰۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که باید $۱۶-x^{۲}>۰$ تا عبارت $\log(۱۶-x^{۲})$ معنادار باشد. بنابراین

$$x^{۲}<۱۶\Rightarrow-۴<x<۴$$

از طرف دیگر،

$$\log(۱۶-x^{۲})<\log۱۵\Rightarrow۱۶-x^{۲}<۱۵\Rightarrow x^{۲}>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $(-۴,-۱)\cup(۱,۴)$ است که چهار عدد صحیح ±۲ و ±۳ در آن قرار دارند.

۲۴۰۱- گزینهٔ ۱ معادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\log_{۹}(۲x+۱)-\log_{۹}(x-۱)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\log_{۹}(\frac{۲x+۱}{x-۱})=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲x+۱}{x-۱}=۹^{\frac{۱}{۲}}=۳\Rightarrow۲x+۱=۳x-۳\Rightarrow x=۴$$

۲۴۰۲- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\log(\frac{x}{x+۱})=\log(\log۲)$$

در نتیجه

$$\frac{x}{x+۱}=\log۲\Rightarrow x=x\log۲+\log۲$$

$$x(۱-\log۲)=\log۲\Rightarrow x(\log۱۰-\log۲)=\log۲\Rightarrow x\log۵=\log۲$$

$$x=\frac{\log۲}{\log۵}\Rightarrow x=\log_{۵}۲$$

۲۴۰۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\log_{۲}(۱۴+\log_{۴}(x-۱))=۴\Rightarrow۱۴+\log_{۴}(x-۱)=۲^{۴}=۱۶$$

$$\log_{۴}(x-۱)=۲\Rightarrow x-۱=۴^{۲}=۱۶\Rightarrow x=۱۷$$

۲۴۰۴- گزینهٔ ۲ چون $\log_{a^k} b=\frac{۱}{k}\log_a b$، پس معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\log_{۲^۲} x+\log_{۲^۴} x+\log_{۲^۶} x=\frac{۱۱}{۳}$$
$$\frac{۱}{۲}\log_۲ x+\frac{۱}{۴}\log_۲ x+\frac{۱}{۶}\log_۲ x=\frac{۱۱}{۳}$$
$$\frac{۱۱}{۱۲}\log_۲ x=\frac{۱۱}{۳}\Rightarrow \log_۲ x=۴\Rightarrow x=۲^۴=۱۶$$

۲۴۰۵- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم $\log_۳ x=t$. در این صورت $\log_x ۳=\frac{۱}{t}$. در نتیجه $\frac{۱}{\log_x ۳}=\log_۳ x=t$. بنابراین، معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید

$$t-\frac{۱۲}{t}=۱\Rightarrow t^۲-۱۲=t\Rightarrow t^۲-t-۱۲=۰$$
$$(t-۴)(t+۳)=۰\Rightarrow t=۴\ ,\ t=-۳$$

در نتیجه

$$\log_۳ x=۴\Rightarrow x=۳^۴=۸۱,\quad \log_۳ x=-۳\Rightarrow x=۳^{-۳}=\frac{۱}{۲۷}$$

۲۴۰۶- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $\log_۲ x=t$، آن‌گاه

$$\log_۸ x=\log_{۲^۳} x=\frac{۱}{۳}\log_۲ x=\frac{۱}{۳}t$$
$$\log_{\frac{۱}{۸}} x=\log_{۸^{-۱}} x=-\log_۸ x=-\frac{۱}{۳}t$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$t(\frac{۱}{۳}t)-t+\frac{۱}{۳}t-۱=۰\Rightarrow\frac{۱}{۳}t^۲-\frac{۲}{۳}t-۱=۰$$
$$t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow t=-۱, t=۳$$

بنابراین

$$t=-۱\Rightarrow\log_۲ x=-۱\Rightarrow x=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$$
$$t=۳\Rightarrow\log_۲ x=۳\Rightarrow x=۲^۳=۸$$

در نتیجه، حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر ۴ است.

۲۴۰۷- گزینهٔ ۱ دستگاه به شکل $\begin{cases}\log x+\log y=۳\\ ۲\log x-۳\log y=۱\end{cases}$ است. طرفین معادلهٔ اول را در ۳ ضرب می‌کنیم، سپس طرفین دو معادله را جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases}۳\log x+۳\log y=۹\\ ۲\log x-۳\log y=۱\end{cases}\Rightarrow ۵\log x=۱۰\Rightarrow\log x=۲\Rightarrow x=۱۰۰$$

بنابراین

$$\log x+\log y=۳\Rightarrow ۲+\log y=۳\Rightarrow\log y=۱\Rightarrow y=۱۰$$

در نتیجه $x-۲y=۱۰۰-۲۰=۸۰$.

۲۴۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\log_{\frac{۱}{۳}}(۲x-۱)=\log_{۳^{-۱}}(۲x-۱)=-\log_۳(۲x-۱)$$

بنابراین نامعادله‌های مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$-۳\le-\log_۳(۲x-۱)\le-۲\Rightarrow ۲\le\log_۳(۲x-۱)\le۳$$

اکنون توجه کنید که

$$\log_۳ ۹=۲\le\log_۳(۲x-۱)\le۳=\log_۳ ۲۷$$
$$۹\le۲x-۱\le۲۷\xrightarrow{+۱}۱۰\le۲x\le۲۸\xrightarrow{\div۲}۵\le x\le۱۴$$

بنابراین $۵\le x\le۱۴$ (توجه کنید که در این محدوده $۲x-۱>۰$). تعداد عددهای صحیح در این محدوده ده تا $(۵,۶,۷,\dots,۱۴)$ است.

۲۴۰۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\log_۲(۱+۳x)<\log_۲(x+۷)\Rightarrow ۱+۳x<x+۷\Rightarrow x<۳$$

از طرف دیگر، باید $۱+۳x>۰$ و $x+۷>۰$. در نتیجه $x>-\frac{۱}{۳}$. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $(-\frac{۱}{۳},۳)$ است.

۲۴۱۰- گزینهٔ ۲ برای اینکه $\log_۳(x+۲)$ بامعنا باشد، باید $x+۲>۰$، یعنی $x>-۲$. از طرف دیگر، باید

$$۱-\log_۳(x+۲)\ge۰\Rightarrow\log_۳(x+۲)\le۱=\log_۳ ۳\Rightarrow x+۲\le۳\Rightarrow x\le۱$$

پس دامنهٔ f بازهٔ $(-۲,۱]$ است.

۲۴۱۱- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $\log_۵ ۲۵=۲$. در نتیجه معادلهٔ داده شده به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\log_۴(۲۸x-۶)-\log_۴(x-۱)=۲\Rightarrow\log_۴(\frac{۲۸x-۶}{x-۱})=۲$$

در نتیجه

$$\frac{۲۸x-۶}{x-۱}=۴^۲=۱۶\Rightarrow ۲۸x-۶=۱۶x-۱۶\Rightarrow ۱۲x=-۱۰\Rightarrow x=\frac{-۱۰}{۱۲}=\frac{-۵}{۶}$$

اما به ازای $x=\frac{-۵}{۶}$ هیچ یک از دو عبارت $\log_۴(۲۸x-۶)$ و $\log_۴(x-۱)$ معنادار نیست. بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۴۱۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$۲\log_x(۲x-۱)=۱\Rightarrow\log_x(۲x-۱)^۲=۱$$

بنابراین

$$(۲x-۱)^۲=x\Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱=x$$
$$۴x^۲-۵x+۱=۰\Rightarrow(۴x-۱)(x-۱)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}, x=۱$$

اکنون توجه کنید که اگر $x=۱$، پایهٔ لگاریتم داده شده در صورت مسئله برابر ۱ می‌شود که ممکن نیست و اگر $x=\frac{۱}{۴}$، آن‌گاه $۲x-۱=-\frac{۱}{۲}$، که باز هم ممکن نیست، زیرا لگاریتم عددهای منفی تعریف نمی‌شود. بنابراین هیچ‌یک از مقدارهای به‌دست آمده برای x قابل قبول نیستند و معادلهٔ مورد نظر جواب ندارد.

۲۴۱۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$\log_۴(x^۲-۶x+۹)=\log_{۲^۲}(x-۳)^۲=\frac{۲}{۲}\log_۲|x-۳|=\log_۲|x-۳|$$

در نتیجه مسئله به حل معادلهٔ زیر منجر می‌شود

$$\log_۲(x+۳)+\log_۲|x-۳|=\log_۲(x+۳)|x-۳|=۴$$

بنابراین $(x+۳)|x-۳|=۲^۴=۱۶$. اکنون می‌توان گفت

$$x>۳\Rightarrow(x+۳)(x-۳)=۱۶\Rightarrow x^۲-۹=۱۶$$
$$x^۲=۲۵\Rightarrow x=۵\ ,\ x=-۵$$ (غ.ق.ق.)
$$x<۳\Rightarrow(x+۳)(۳-x)=۱۶\Rightarrow ۹-x^۲=۱۶\Rightarrow x^۲=-۷$$ (غ.ق.ق.)

بنابراین معادلهٔ موردنظر فقط یک جواب دارد.

۲۴۱۴- گزینهٔ ۲ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_5 x+\log_{\frac{1}{5^2}} x-2\log_{5^2} x=\log_2 5^2$$

$$\log_5 x+2\log_5 x-2\times\frac{1}{2}\log_5 x=2\log_2 5$$

$$\log_5 x=\log_2 5\Rightarrow x=5^{\log_2 5}$$

۲۴۱۵- گزینهٔ ۲ اگر فرض کنیم $\log_2 x=t$، آن‌گاه $\log_2 x^2=2t$ و معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+2t}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1+2t-(1+t)}{(1+t)(1+2t)}=\frac{1}{6}$$

$$6t=1+3t+2t^2\Rightarrow 2t^2-3t+1=0\Rightarrow t=1,\ t=\frac{1}{2}$$

اکنون توجه کنید که

$$t=1\Rightarrow\log_2 x=1\Rightarrow x=2$$

$$t=\frac{1}{2}\Rightarrow\log_2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

بنابراین مجموع مربع‌های جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر $2^2+\sqrt{2}^2=6$ است.

۲۴۱۶- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم:

$$\log x^{(8-\log x)}=\log(\frac{1}{x^2})\Rightarrow(8-\log x)\log x=-2\log x$$

$$\begin{cases}\log x=0\Rightarrow x=10^0=1\\ 8-\log x=-2\Rightarrow\log x=10\Rightarrow x=10^{10}\end{cases}$$

راه‌حل دوم معادلـه را به‌صـورت $x^2\times x^{8-\log x}=1$ یـا $x^{10-\log x}=1$ می‌نویسیم. با توجه به اینکه x عددی مثبت است، دو حالت وجود دارد: پایه در عبارت سمت چپ ۱ باشد، یعنی $x=1$ یا توان در عبارت سمت چپ صفر باشد، یعنی $\log x=10$، پس $x=10^{10}$.

۲۴۱۷- گزینهٔ ۲ از معادلهٔ $\log_2 x+\log_2 y=4$ به‌دست می‌آید

$$\log_2(xy)=4\Rightarrow xy=2^4=16$$

از معادلهٔ $x+y=10$ به‌دست می‌آید

$$y=10-x$$

با جای‌گذاری $10-x$ به جای y در معادلهٔ $xy=16$ نتیجه می‌شود

$$x(10-x)=16\Rightarrow x^2-10x+16=0\Rightarrow(x-2)(x-8)=0$$

$$x=2\Rightarrow y=8,\quad x=8\Rightarrow y=2$$

در هر صورت $x^2+y^2=68$.

۲۴۱۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\Rightarrow 2x-1<x+1\Rightarrow x<2$$

از طرف دیگر، عبـارت $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ به‌ازای $x>\frac{1}{2}$ و عبارت $\log(x+1)$ به‌ازای $x>-1$ معنادار است. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر بازهٔ $(\frac{1}{2},2)$ است.

۲۴۱۹- گزینهٔ ۴ نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان این‌طور نوشت

$$\frac{1-\log x+1+\log x}{(1-\log x)(1+\log x)}>2\Rightarrow\frac{2}{1-(\log x)^2}>2\Rightarrow\frac{1}{1-(\log x)^2}>1$$

$$\frac{1}{1-(\log x)^2}-1>0\Rightarrow\frac{1-1+(\log x)^2}{1-(\log x)^2}>0\Rightarrow\frac{(\log x)^2}{1-(\log x)^2}>0$$

بنابراین باید $(\log x)^2\neq 0$ و $1-(\log x)^2>0$:

$$(\log x)^2\neq 0\Rightarrow x\neq 1,\quad (\log x)^2<1\Rightarrow|\log x|<1$$

$$-1<\log x<1\Rightarrow\frac{1}{10}<x<10$$

پس مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(\frac{1}{10},10)-\{1\}$ است.

۲۴۲۰- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$D_f=\{x|x\neq-3,\frac{3x-1}{x+3}>0,\log(\frac{3x-1}{x+3})\geq 0\}$$

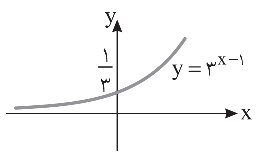
اکنون توجه کنید که

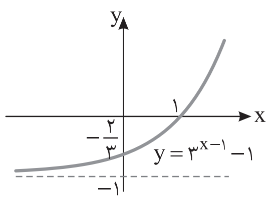
$$\frac{3x-1}{x+3}>0\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$$

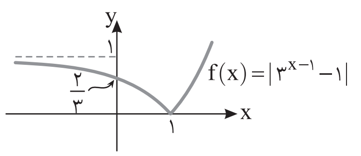
$$\log(\frac{3x-1}{x+3})\geq 0\Rightarrow\frac{3x-1}{x+3}\geq 1\Rightarrow\frac{2(x-2)}{x+3}\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$$

بنابرایـن $D_f=(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$. در نتیجـه عددهای صحیحی که در دامنهٔ تابع f نیستند، ۳−، ۲−، ۱−، صفر و ۱ هستند.

۲۴۲۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نمودار تابع $y=3^x$ را یک واحد به سـمت راسـت انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=3^{x-1}$ به‌دست بیاید. سپس این نمودار را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=3^{x-1}-1$ به‌دست بیاید. سپس قرینهٔ قسـمتی از این نمودار را که پایین محور x اسـت، نسبت به محور x رسم و قسمتی را که زیر محور x است، حذف می‌کنیم تا نمودار تابع f به‌دست بیاید.







۲۴۲۲- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $2^x=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$4^x-3\times 2^{x+2}+27=(2^x)^2-12\times 2^x+27$$

$$=t^2-12t+27=(t-3)(t-9)=0$$

بنابراین $t=3\Rightarrow 2^{x_1}=3\quad(1),\quad t=9\Rightarrow 2^{x_2}=9\quad(2)$

اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم، به دست می‌آید $2^{x_1+x_2}=27$.

بنابراین $2^4<2^{x_1+x_2}<2^5$. در نتیجه $4<x_1+x_2<5$.

۲۴۲۳- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(1)=1 \Rightarrow a+b=1,\quad f(2)=7 \Rightarrow a^2+b=7$$

اگر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به‌دست می‌آید:

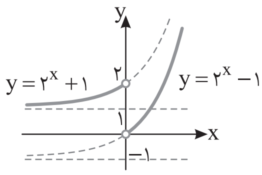
$$a^2-a-6=0 \Rightarrow a=3,\quad a=-2$$

چون a باید مثبت باشد، پس $a=3$. در نتیجه $b=1-a=-2$. به این ترتیب $f(x)=3^x-2$. اکنون توجه کنید که اگر $f^{-1}(-\frac{5}{3})=m$، آن‌گاه

$$f(m)=-\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m-2=-\frac{5}{3} \Rightarrow 3^m=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3} \Rightarrow m=-1$$

۲۴۲۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}2^x+1 & x<0\\ 2^x-1 & x>0\end{cases}$.

بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است.



پس برد تابع به‌صورت $(0,+\infty)$ است.

۲۴۲۵- گزینهٔ ۳ نمودار تابع از نقطهٔ $(5,0)$ می‌گذرد، پس

$$f(5)=0 \Rightarrow \log_a(5b-3)=0 \Rightarrow 5b-3=1 \Rightarrow b=\frac{4}{5}$$

به این ترتیب $f(x)=\log_a(\frac{4}{5}x-3)$. نمودار تابع از نقطهٔ $(15,2)$ می‌گذرد، پس

$$f(15)=2 \Rightarrow \log_a(\frac{4}{5}\times 15-3)=2 \Rightarrow \log_a 9=2 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3$$

بنابراین $ab=\frac{12}{5}$.

۲۴۲۶- گزینهٔ ۱ با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log\sqrt[4]{72}=\log 72^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\log 72=\frac{1}{4}\log(2^3\times 3^2)$$

$$=\frac{1}{4}(\log 2^3+\log 3^2)=\frac{1}{4}(3\log 2+2\log 3)=\frac{1}{4}(3b+2a)$$

۲۴۲۷- گزینهٔ ۱ چون $\frac{1}{\log_a b}=\log_b a$، پس

$$\frac{1}{\log_2 30}+\frac{1}{\log_3 30}+\frac{1}{\log_5 30}=\log_{30}2+\log_{30}3+\log_{30}5$$

$$=\log_{30}(2\times 3\times 5)=\log_{30}30=1$$

۲۴۲۸- گزینهٔ ۱ معادله را به‌صورت $\log\frac{x-1}{x}=\log(\log 2)$ می‌نویسیم. بنابراین

$$\frac{x-1}{x}=\log 2 \Rightarrow x-1=x\log 2 \Rightarrow x=\frac{1}{1-\log 2}=\frac{1}{\log 10-\log 2}$$

$$=\frac{1}{\log\frac{10}{2}}=\frac{1}{\log 5}=\frac{\log 10}{\log 5}=\frac{\log 2+\log 5}{\log 5}=\frac{\log 2}{\log 5}+1=\log_5 2+1$$

۲۴۲۹- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول از دو طرف معادلهٔ مورد نظر در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$(x+1)\log 2=(x-1)\log 5 \Rightarrow x(\log 5-\log 2)=\log 2+\log 5$$

$$x\log\frac{5}{2}=\log 10=1 \Rightarrow x=\frac{1}{\log\frac{5}{2}}=\frac{1}{\log\frac{10}{4}}=\frac{1}{\log 10-\log 4}=\frac{1}{1-2\log 2}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$2^{x+1}=5^{x-1} \Rightarrow 2^x\times 2=5^x\times 5^{-1} \Rightarrow (\frac{5}{2})^x=10$$

از دو طرف این معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$x\log\frac{5}{2}=\log 10=1 \Rightarrow x=\frac{1}{\log\frac{5}{2}}=\frac{1}{\log\frac{10}{4}}$$

$$=\frac{1}{\log 10-\log 4}=\frac{1}{1-2\log 2}$$

۲۴۳۰- گزینهٔ ۱ باید هر دو عبارت $\log(x+3)$ و $\log(2-x)$ بامعنی باشند و نیز $\log(2-x)\neq 0$:

$$D_f=\{x|x+3>0, 2-x>0, \log(2-x)\neq 0\}$$

از $x+3>0$ نتیجه می‌شود $x>-3$ و از $2-x>0$ نتیجه می‌شود $x<2$. از طرف دیگر اگر $\log(2-x)=0$، آن‌گاه $2-x=1$، در نتیجه $x=1$. بنابراین دامنهٔ تابع f به‌صورت $(-3,2)-\{1\}$ است.

۲۴۳۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{3^x}=(\frac{1}{3})^x=(\frac{1}{\sqrt{3}})^{2x}=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}$.

اکنون نقطهٔ تقاطع نمودارها را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$3^x+\frac{8}{3}=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x} \Rightarrow 3^x+\frac{8}{3}=\frac{1}{3^x} \xrightarrow{t=3^x} t+\frac{8}{3}=\frac{1}{t}$$

$$\xrightarrow{\times 3t} 3t^2+8t=3 \Rightarrow 3t^2+8t-3=0$$

$$(3t-1)(t+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=3 \\ t=-3 \ (\text{غ.ق.ق}) \end{cases}$$

$A(-1,3)$ نقطهٔ مورد نظر است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(-1,3)$ و $B(-1,1)$ را به‌دست آوریم که برابر است با $AB=\sqrt{(-1+1)^2+(3-1)^2}=2$.

ریاضی - ۹۶

۲۴۳۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\frac{1}{4^x}=\frac{1}{2^{2x}}=(\frac{1}{2})^{2x}$. اکنون نقطهٔ A را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$4^x=(\frac{1}{2})^{2x}+\frac{3}{2} \Rightarrow 4^x=\frac{1}{4^x}+\frac{3}{2} \xrightarrow{t=4^x} t=\frac{1}{t}+\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2t} 2t^2=2+3t \Rightarrow 2t^2-3t-2=0$$

$$(2t+1)(t-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{2} \ (\text{غ.ق.ق}) \\ t=2 \Rightarrow 4^x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

$A(\frac{1}{2},2)$ نقطهٔ مورد نظر است. بنابراین باید فاصلهٔ نقاط $A(\frac{1}{2},2)$ و $B(-\frac{1}{2},1)$ را به‌دست آوریم که برابر است با $AB=\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۴۳۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از نقاط $(2,6)$ و $(12,10)$ می‌گذرد، پس $f(2)=6$ و $f(12)=10$. بنابراین

$$f(2)=a+\log_2(2b-4)=6\Rightarrow \log_2(2b-4)=6-a$$
$$f(12)=a+\log_2(12b-4)=10\Rightarrow \log_2(12b-4)=10-a$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_2(12b-4)-\log_2(2b-4)=4\Rightarrow \log_2\left(\frac{12b-4}{2b-4}\right)=4$$
$$\frac{12b-4}{2b-4}=16\Rightarrow 12b-4=32b-64\Rightarrow 20b=60\Rightarrow b=3$$

بنابراین $\log_2(2b-4)=\log_2(6-4)=1=6-a\Rightarrow a=5$

ریاضی - ۹۶

۲۴۳۴- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع به‌صورت $\{x \mid ax+b>0\}$ است. جواب نامعادلهٔ اخیر به‌صورت $(-\frac{b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,-\frac{b}{a})$ است. چون تابع فقط در بازهٔ $(-\frac{1}{2},+\infty)$ تعریف شده است، پس

$$-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=2b \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$f(4)=2\Rightarrow \log_3(4a+b)=2\Rightarrow 4a+b=9 \quad (2)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=2$ و $b=1$. به این ترتیب
$$f(x)=\log_3(2x+1)$$
و در نتیجه $f(-\frac{4}{9})=\log_3(-\frac{8}{9}+1)=\log_3\frac{1}{9}=-2$.

ریاضی - ۹۴

۲۴۳۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{\left(\frac{5}{10}\right)^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2^{-\frac{2}{3}}$$

از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A=\log_8(2\sqrt[3]{0.25})=\log_{2^3}(2\times 2^{-\frac{2}{3}})=\log_{2^3}2^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\log_2 2=\frac{1}{9}$$

بنابراین $\log_4(\frac{1}{A}-1)=\log_4(9-1)=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$

ریاضی - ۹۰

۲۴۳۶- گزینهٔ ۲ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\log(6-2\sqrt5)+2\log(1+\sqrt5)=\log(6-2\sqrt5)+\log(1+\sqrt5)^2$$
$$=\log(6-2\sqrt5)+\log(6+2\sqrt5)=\log((6-2\sqrt5)(6+2\sqrt5))$$
$$=\log(36-20)=\log16=4\log2=4k$$

تجربی - ۹۰

۲۴۳۷- گزینهٔ ۴ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>2$. معادله را ساده می‌کنیم:

$$2\log(x-2)=\log(x+10)\Rightarrow \log(x-2)^2=\log(x+10)$$
$$(x-2)^2=x+10\Rightarrow x^2-5x-6=0\Rightarrow x=-1 \text{ (غ.ق.ق)}\ ,\ x=6$$

بنابراین $\log_4(x+2)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$.

ریاضی - ۸۵

۲۴۳۸- گزینهٔ ۳ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>\frac{5}{3}$. از معادلهٔ داده شده مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$\log_5(2x-1)+\log_5(3x-5)=1\Rightarrow \log_5((2x-1)(3x-5))=1$$
$$(2x-1)(3x-5)=5\Rightarrow 6x^2-13x=0\Rightarrow x=0 \text{ (غ.ق.ق)}\ ,\ x=\frac{13}{6}$$

بنابراین $\log_2(6x+3)=\log_2(13+3)=\log_2 2^4=4$.

ریاضی - ۸۶

۲۴۳۹- گزینهٔ ۳ مقدار x را از معادلهٔ داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\log_3(x^2-1)=1+\log_3(x+3)\Rightarrow \log_3(x^2-1)-\log_3(x+3)=1$$
$$\log_3\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)=1\Rightarrow \frac{x^2-1}{x+3}=3\Rightarrow x^2-3x-10=0\Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-2 \end{cases}$$

اگر $x=-2$، آن‌گاه $x-3<0$ و $\log_4(x-3)$ تعریف نمی‌شود و اگر $x=5$، آن‌گاه $\log_4(x-3)=\log_4 2=\frac{1}{2}$.

ریاضی - ۸۸

۲۴۴۰- گزینهٔ ۳ از معادلهٔ $\log y=2\log3+\log x$ به‌دست می‌آید

$$\log y-\log x=\log9\Rightarrow \log\frac{y}{x}=\log9\Rightarrow \frac{y}{x}=9\Rightarrow y=9x$$

در معادلهٔ $2^{x-7}\times4^{x+y}=1$ به جای y قرار می‌دهیم $9x$، در نتیجه

$$2^{x-7}\times4^{x+9x}=1\Rightarrow 2^{x-7}\times2^{20x}=1\Rightarrow 2^{21x-7}=1$$
$$21x-7=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3$$

تجربی - ۹۶

۲۴۴۱- گزینهٔ ۲ دو نمودار در نقطه‌ای به طول -1 متقاطع هستند، پس

$$f(-1)=g(-1)\Rightarrow 3^{b-a}=9=3^2\Rightarrow b-a=2 \quad (1)$$

از طرف دیگر $f(2)=\frac{1}{3}$، پس

$$3^{2a+b}=\frac{1}{3}=3^{-1}\Rightarrow 2a+b=-1 \quad (2)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=-1$ و $b=1$. پس $f(x)=3^{-x+1}$. اکنون فرض می‌کنیم $f^{-1}(27)=m$.

در این صورت

$$f(m)=27\Rightarrow 3^{-m+1}=27\Rightarrow -m+1=3\Rightarrow m=-2$$

ریاضی - ۹۵

۲۴۴۲- گزینهٔ ۳ با توجه به فرض‌های مسئله،

$$f(0)=\frac{3}{2}\Rightarrow ab^0=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$
$$f(-2)=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{3}{2}b^{-2}=\frac{3}{32}\Rightarrow \frac{3}{2b^2}=\frac{3}{32}\Rightarrow b^2=16$$

چون مقدار مثبت b مورد نظر است، پس $b=4$ و $f(x)=\frac{3}{2}\times4^x$.

بنابراین

$$f(\tfrac{3}{2})=\frac{3}{2}\times4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times(2^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times8=12$$

تجربی - ۹۱

۲۴۴۳- گزینهٔ ۳ با توجه به اینکه نمودار تابع از دو نقطهٔ $(۵,۱۱)$ و $(۲۱,۱۵)$ می‌گذرد، پس $f(۵)=۱۱$ و $f(۲۱)=۱۵$. بنابراین

$$f(۵)=a+\log_۲(۱۵+b)^۲=۱۱\Rightarrow a+۲\log_۲(۱۵+b)=۱۱$$

$$\log_۲(۱۵+b)=\frac{۱۱-a}{۲}$$

$$f(۲۱)=a+\log_۲(۶۳+b)^۲=۱۵\Rightarrow a+۲\log_۲(۶۳+b)=۱۵$$

$$\log_۲(۶۳+b)=\frac{۱۵-a}{۲}$$

تساوی اول را از تساوی دوم کم می‌کنیم:

$$\log_۲(۶۳+b)-\log_۲(۱۵+b)=۲\Rightarrow\log_۲\left(\frac{۶۳+b}{۱۵+b}\right)=۲$$

$$\frac{۶۳+b}{۱۵+b}=۴\Rightarrow ۶۳+b=۶۰+۴b\Rightarrow ۳b=۳\Rightarrow b=۱$$

بنابراین

$$a+\log_۲(۱۵+۱)^۲=۱۱\Rightarrow a=۳$$

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۲۴۴۴- گزینهٔ ۱ نمودار تابع محور x را در نقطه‌ای به طول ۱− قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(-۱,۰)$ عبور می‌کند. همچنین نمودار تابع نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱− قطع می‌کند، پس از نقطهٔ $(۱,-۱)$ عبور می‌کند. در نتیجه

$$f(-۱)=۰\Rightarrow\log_{\frac{۱}{۲}}(-a+b)=۰\Rightarrow -a+b=۱\qquad(۱)$$

$$f(۱)=-۱\Rightarrow\log_{\frac{۱}{۲}}(a+b)=-۱\Rightarrow a+b=۲\qquad(۲)$$

بنابراین از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۳}{۲}$.

خارج از کشور ریاضی - ۹۴

۲۴۴۵- گزینهٔ ۴ از معادلهٔ داده شده مقدار x را می‌یابیم:

$$\log(x-۲)=۲\log۲-\log(x-۴)\Rightarrow\log(x-۲)+\log(x-۴)=\log۴$$

$$\log((x-۲)(x-۴))=\log۴\Rightarrow(x-۲)(x-۴)=۴$$

$$x^۲-۶x+۴=۰\Rightarrow x=۳-\sqrt{۵}\ \text{(غ.ق.ق.)}\ ,\ x=۳+\sqrt{۵}$$

بنابراین $\log_۵(x-۳)=\log_۵(۳+\sqrt{۵}-۳)=\log_۵\sqrt{۵}=\frac{۱}{۲}$.

ریاضی - ۸۷

۲۴۴۶- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $A^۲=(۳^a)^۲=۳^{۲a}$، بنابراین

$$\log_۳(۹A^۲)=\log_۳(۳^۲\times۳^{۲a})=\log_۳۳^{(۲+۲a)}$$
$$=(۲+۲a)\log_۳۳=۲+۲a$$

راه‌حل دوم از فرض مسئله نتیجه می‌شود $\log_۳A=a$. پس

$$\log_۳(۹A^۲)=\log_۳(۳^۲A^۲)=\log_۳(۳A)^۲=۲\log_۳(۳A)$$
$$=۲(\log_۳۳+\log_۳A)=۲(۱+a)=۲+۲a$$

ریاضی - ۹۱

۲۴۴۷- گزینهٔ ۳ به کمک ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_x(۳x+۸)=۲-\log_x(x-۶)\Rightarrow\log_x(۳x+۸)+\log_x(x-۶)=۲$$

$$\log_x((۳x+۸)(x-۶))=۲\Rightarrow(۳x+۸)(x-۶)=x^۲$$

$$۳x^۲-۱۰x-۴۸=x^۲\Rightarrow x^۲-۵x-۲۴=۰$$

$$(x-۸)(x+۳)=۰\Rightarrow x=-۳,\ x=۸$$

به‌ازای $x=-۳$ عبارت‌های $\log_x(x-۶)$ و $\log_x(۳x+۸)$ بی‌معنی هستند، بنابراین $x=۸$ و مقدار لگاریتم x در پایهٔ ۴ برابر است با

$$\log_۴x=\log_۴۸=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲۲=\frac{۳}{۲}$$

خارج از کشور تجربی - ۹۳

۲۴۴۸- گزینهٔ ۴ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log_۳(۲x^۲+۱)-\log_۳(x+۲)=۱\Rightarrow\log_۳\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}=۱\Rightarrow\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}=۳$$

$$۲x^۲+۱=۳x+۶\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۵=۰\Rightarrow x=-۱,\quad x=\frac{۵}{۲}$$

اکنون به محاسبهٔ مقدار $\log_۸(۲x-۱)$ می‌پردازیم. با توجه به محدودهٔ تعریف این لگاریتم $(x>\frac{۱}{۲})$، تنها $x=\frac{۵}{۲}$ قابل قبول است، پس

$$\log_۸(۲x-۱)=\log_۸(۲\times\frac{۵}{۲}-۱)=\log_۸۴=\log_{۲^۳}۲^۲=\frac{۲}{۳}\log_۲۲=\frac{۲}{۳}$$

تجربی - ۹۵

۲۴۴۹- گزینهٔ ۲ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم می‌توان نوشت

$$\log(x^۲-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)$$

$$\log\left(\frac{x^۲-x-۶}{x-۳}\right)=\log(۲x-۵)\Rightarrow\frac{(x-۳)(x+۲)}{x-۳}=۲x-۵$$

$$\xrightarrow{x\neq۳}x+۲=۲x-۵\Rightarrow x=۷$$

بنابراین $\log_۴\sqrt[۳]{x+۱}=\log_۴\sqrt[۳]{۸}=\log_{۲^۲}۲=\frac{۱}{۲}\log_۲۲=\frac{۱}{۲}$.

خارج از کشور تجربی - ۹۵

۲۴۵۰- گزینهٔ ۱ برای اینکه لگاریتم‌ها بامعنی باشند باید $x>۰$ و $y>۰$. توجه کنید که

$$\log_۳x+\log_۳y=۲\Rightarrow\log_۳xy=۲\Rightarrow xy=۹$$

$$x^۲+y^۲=۴۶\Rightarrow(x+y)^۲-۲xy=۴۶\Rightarrow(x+y)^۲-۱۸=۴۶$$

$$(x+y)^۲=۶۴\xrightarrow{x>۰,y>۰}x+y=۸$$

بنابراین

$$\log_۴(x+y)=\log_۴۸=\log_{۲^۲}۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲۲=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

تجربی - ۸۹

۲۴۵۱- گزینهٔ ۲ طول پاره‌خط AB برابر است با $(۲a+۱)-(a-۱)$. بنابراین
$$AB=۲a+۱-a+۱=۵\Rightarrow a=۳$$
پس طول پاره‌خط BC برابر است با
$$BC=(۵a-۲)-(۲a+۱)=۳a-۳=۶$$

۲۴۵۲- گزینهٔ ۲ فاصلهٔ نقطهٔ $(a,a\sqrt{۳})$ از مبدأ مختصات برابر است با
$$\sqrt{a^۲+(a\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{a^۲+۳a^۲}=\sqrt{۴a^۲}=۲|a|=۶$$
بنابراین $a=\pm۳$.

۲۴۵۳- گزینهٔ ۲ مختصات M را حساب می‌کنیم:
$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+m}{۲},\qquad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۳m+۱}{۲}$$
چون M روی خط $۲y+۳x-۱=۰$ است، پس
$$۲(\frac{-۳m+۱}{۲})+۳(\frac{۲+m}{۲})-۱=۰\Rightarrow -۳m+۱+۳+\frac{۳m}{۲}-۱=۰$$
$$-\frac{۳m}{۲}=-۳\Rightarrow m=۲$$
بنابراین M نقطهٔ $(\frac{۲+۲}{۲},\frac{-۳\times۲+۱}{۲})$، یعنی $(۲,-\frac{۵}{۲})$ است.

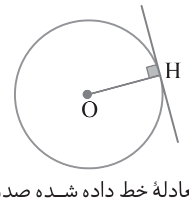
۲۴۵۴- گزینهٔ ۴ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر ۱- است. در نتیجه
$$\frac{۳}{k}\times\frac{-(k-۵)}{۲}=-۱\Rightarrow ۳(k-۵)=۲k\Rightarrow k=۱۵$$

۲۴۵۵- گزینهٔ ۳ اگر رأس B قائمه باشد، آن‌گاه AB بر BC عمود است، یعنی حاصل‌ضرب شیب‌های خط‌های AB و BC برابر ۱- است:
$$m_{AB}=\frac{۶-۴}{۷-۴}=\frac{۲}{۳},\qquad m_{BC}=\frac{۴-a^۲}{۴-۲a}$$
توجه کنید که اگر $a=۲$، نقطه‌های B و C بر هم منطبق می‌شوند که درست نیست. بنابراین $a\neq۲$ و در نتیجه $m_{BC}=\frac{۲+a}{۲}$. به این ترتیب
$$m_{AB}\times m_{BC}=-۱\Rightarrow\frac{۲}{۳}(\frac{۲+a}{۲})=-۱\Rightarrow a=-۵$$

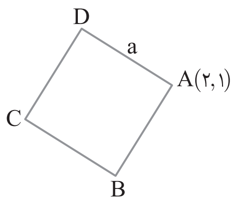
۲۴۵۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** وسط پاره‌خط واصل نقطه‌های $(-۳,۱۰)$ و $(-۹,-۲)$ نقطهٔ $(\frac{-۳-۹}{۲},\frac{۱۰-۲}{۲})$، یعنی $(-۶,۴)$ است. چون نقطهٔ $(۴m,۲m-۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط مورد نظر است، پس حاصل‌ضرب شیب خطی که از نقطه‌های $(۴m,۲m-۱)$ و $(-۶,۴)$ می‌گذرد و شیب خطی که از نقطه‌های $(-۳,۱۰)$ و $(-۹,-۲)$ می‌گذرد برابر ۱- است:
$$\frac{۲m-۱-۴}{۴m+۶}\times\frac{۱۰+۲}{-۳+۹}=-۱\Rightarrow\frac{۲m-۵}{۴m+۶}\times۲=-۱\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$
راه‌حل دوم چون نقطهٔ $P(۴m,۲m-۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل نقاط $A(-۳,۱۰)$ و $B(-۹,-۲)$ است، پس
$$PA=PB\Rightarrow\sqrt{(۴m+۳)^۲+(۲m-۱-۱۰)^۲}=\sqrt{(۴m+۹)^۲+(۲m-۱+۲)^۲}$$
$$(۴m+۳)^۲+(۲m-۱۱)^۲=(۴m+۹)^۲+(۲m+۱)^۲$$
$$۱۶m^۲+۲۴m+۹+۴m^۲-۴۴m+۱۲۱=۱۶m^۲+۷۲m+۸۱+۴m^۲+۴m+۱$$
$$۹۶m=۴۸\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۲۴۵۷- گزینهٔ ۲ شیب خط $۲y+x=۱$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. شیب خط عمود بر این خط ۲ است. پس معادلهٔ خطی را که شیب آن ۲ باشد و از نقطهٔ $(-۱,۲)$ بگذرد می‌نویسیم:
$$y-۲=۲(x+۱)\Rightarrow y=۲x+۴\Rightarrow ۲x-y+۴=۰$$
فاصلهٔ مبدأ مختصات از این خط، مطلوب مسئله است که برابر است با
$$\frac{|۰-۰+۴|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

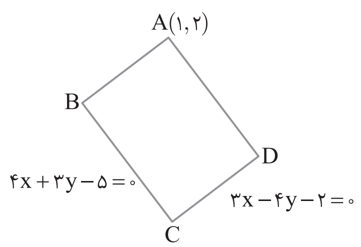
۲۴۵۸- گزینهٔ ۴ شعاع دایره برابر فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $۶x+۸y+۱=۰$ است: $R=\frac{|۶-۸+۱|}{\sqrt{۳۶+۶۴}}=\frac{۱}{۱۰}$. بنابراین مساحت دایره برابر است با
$$S=\pi R^۲=\frac{\pi}{۱۰۰}$$



۲۴۵۹- گزینهٔ ۲ چون مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط داده شده صدق نمی‌کنند، پس $y=۲x-۱$ معادلهٔ AD و AB نیست. پس یا معادلهٔ BC است یا DC. هر کدام که باشد، اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,۱)$ تا خط $y=۲x-۱$ را حساب کنیم، طول ضلع مربع به دست می‌آید:
$$۲x-y-۱=۰,\qquad a=\frac{|۴-۱-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$
بنابراین مساحت مربع ABCD برابر است با $S=a^۲=\frac{۴}{۵}$.



۲۴۶۰- گزینهٔ ۳ رأس A روی هیچ‌کدام از خط‌های داده شده قرار ندارد، زیرا مختصات آن در معادله‌های داده شده صدق نمی‌کنند. پس برای محاسبهٔ طول و عرض مستطیل کافی است فاصلهٔ A از دو خط داده شده را به دست آوریم:
$$AB=\frac{|۴+۶-۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۵}{۵}=۱,\qquad AD=\frac{|۳-۸-۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۷}{۵}$$
بنابراین مساحت مستطیل برابر است با $S=۱\times\frac{۷}{۵}=\frac{۷}{۵}$.



۲۴۶۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$AB=|x_B-x_A|=|۲m-(m-۱)|=|m+۱|$$
$$BC=|x_C-x_B|=|۳m+۱-۲m|=|m+۱|$$

بنابراین

$$۲|m+۱|-|m+۱|=۳\Rightarrow|m+۱|=۳\Rightarrow\begin{cases}m+۱=۳\Rightarrow m=۲\\ m+۱=-۳\Rightarrow m=-۴\end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با -۲ .

۲۴۶۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$AB=\sqrt{(a-\frac{۱}{۲})^۲+(۲a+۳)^۲}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\Rightarrow(a-\frac{۱}{۲})^۲+(۲a+۳)^۲=\frac{۱۳}{۴}$$
$$a^۲-a+\frac{۱}{۴}+۴a^۲+۱۲a+۹=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow ۵a^۲+۱۱a+۶=۰$$

بنابراین مجموع مقدارهای ممکن a برابر است با مجموع جواب‌های این معادله، یعنی $-\frac{۱۱}{۵}$. توجه کنید که این معادله دو جواب دارد.

۲۴۶۳- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین نقطهٔ وسط پاره‌خط AC همان نقطهٔ وسط پاره‌خط BD است.

بنابراین $(\frac{-۲+x}{۲},\frac{-۳+y}{۲})=(\frac{۷-x-۱}{۲},\frac{۲-y+۳}{۲})$. در نتیجه

$$-۲+x=۶-x\Rightarrow x=۴,\quad -۳+y=۵-y\Rightarrow y=۴$$

یعنی C نقطهٔ $(۴,۴)$ است.

راه‌حل دوم در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. پس

$$AB||CD\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow\frac{-۳-۲+y}{-۲-۷+x}=\frac{y-۳}{x+۱}\Rightarrow\frac{-۵+y}{-۹+x}=\frac{y-۳}{x+۱}$$
$$-۵x-۵+yx+y=-۹y+۲۷+xy-۳x\Rightarrow -x+۵y=۱۶$$

به همین ترتیب،

$$AD||BC\Rightarrow m_{AD}=m_{BC}\Rightarrow\frac{-۳-۳}{-۲+۱}=\frac{۲-y-y}{۷-x-x}$$
$$۶=\frac{۲-۲y}{۷-۲x}\Rightarrow ۴۲-۱۲x=۲-۲y\Rightarrow ۶x-y=۲۰$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}-x+۵y=۱۶\\ ۶x-y=۲۰\end{cases}$ به دست می‌آید $x=۴$ و $y=۴$.

بنابراین C نقطهٔ $(۴,۴)$ است.

۲۴۶۴- گزینهٔ ۱ شیب خط راستی که از نقطه‌های $(-۱,۶)$ و $(-۲,-۳)$ می‌گذرد برابر است با $\frac{۶+۳}{-۱+۲}=۹$. بنابراین شیب خط راستی که بر این خط عمود است برابر است با $-\frac{۱}{۹}$. معادلهٔ خط راستی که شیب آن $-\frac{۱}{۹}$ است و از نقطهٔ $(۰,-۵)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$y-(-۵)=-\frac{۱}{۹}(x-۰)\Rightarrow x+۹y+۴۵=۰$$

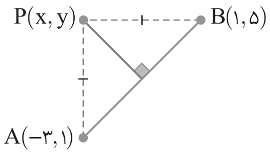
۲۴۶۵- گزینهٔ ۳ شیب خطی را که از نقطه‌های A و B می‌گذرد حساب می‌کنیم $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-۲}{-۱-۱}=۱$. پس شیب ارتفاع CH برابر -۱ است. زیرا $CH\perp AB$. اکنون معادلهٔ خطی را که از رأس C با شیب -۱ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y-y_C=m_{CH}\times(x-x_C)\Rightarrow y+۱=-(x-۳)\Rightarrow y=-x+۲$$

۲۴۶۶- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول می‌دانیم عمودمنصف AB از وسط این پاره‌خط یعنی نقطهٔ $M(-۱,۳)$ می‌گذرد. شیب خط گذرنده از A و B برابر ۱ است، بنابراین شیب عمودمنصف برابر -۱ است. در نتیجه معادلهٔ این خط به‌صورت $y-۳=-۱(x+۱)$ یا به طور ساده‌تر $x+y=۲$ است.

راه‌حل دوم می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است. فرض می‌کنیم نقطهٔ $P(x,y)$ روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. در این صورت

$$PA=PB\Rightarrow\sqrt{(x+۳)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۵)^۲}$$
$$(x+۳)^۲+(y-۱)^۲=(x-۱)^۲+(y-۵)^۲$$
$$x^۲+۶x+۹+y^۲-۲y+۱=x^۲-۲x+۱+y^۲-۱۰y+۲۵$$
$$۸x+۸y=۱۶\Rightarrow x+y=۲$$



۲۴۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید شیب خطی که BC روی آن قرار دارد، برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس شیب خطی که AH روی آن قرار دارد برابر -۲ است.

بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-y_A=m_{AH}(x-x_A)$$
$$y-۲=-۲(x-۱)\Rightarrow y=-۲x+۴$$

بنابراین برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ H کافی است محل تقاطع دو خط $y=-۲x+۴$ و $۲x-۴y+۱=۰$ را پیدا کنیم:

$$\begin{cases}y=-۲x+۴\\ ۲x-۴y+۱=۰\xrightarrow{y=-۲x+۴}۲x-۴(-۲x+۴)+۱=۰\end{cases}$$
$$۱۰x=۱۵\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=-۲(\frac{۳}{۲})+۴\Rightarrow y=۱$$

پس H نقطهٔ $(\frac{۳}{۲},۱)$ است.

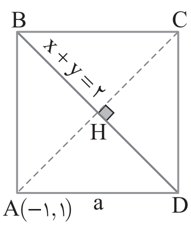
۲۴۶۸- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر، اندازهٔ AH را حساب می‌کنیم:

$$AH=\frac{|-۱+۱-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

بنابراین طول قطر مربع برابر $۲\sqrt{۲}$ است. طول ضلع مربع را حساب می‌کنیم:

$$a^۲+a^۲=(۲\sqrt{۲})^۲\Rightarrow ۲a^۲=۸$$
$$a^۲=۴\Rightarrow a=۲$$

بنابراین محیط مربع برابر ۸ است.



۲۴۶۹- گزینهٔ ۴ چون خط‌های داده شده موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها برابر است، در نتیجه $-\frac{a}{۲}=-۳$ ، پس $a=۶$. اگر دو طرف معادلهٔ خط دوم را در ۲ ضرب کنیم، به شکل $۶x+۲y+۲k=۰$ درمی‌آید. چون فاصلهٔ این دو خط $\sqrt{۱۰}$ است، پس

$$\frac{|۲k+۶|}{\sqrt{۶^۲+۲^۲}}=\sqrt{۱۰}\xrightarrow{k>۰}\frac{۲k+۶}{\sqrt{۴۰}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow k=۷$$

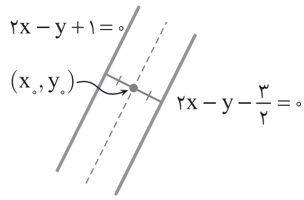
بنابراین $a+k=۱۳$.

۲۴۷۰- گزینهٔ ۱ ابتدا معادلهٔ خط دوم را به صورت $۲x-y-\frac{۳}{۲}=۰$ می‌نویسیم. اکنون فرض می‌کنیم نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی خط مورد نظر باشد. فاصلهٔ این نقطه از دو خط باید برابر باشد

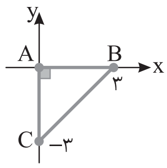
$$\frac{|۲x_۰-y_۰+۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow|۲x_۰-y_۰+۱|=|۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}|$$

$$\begin{cases}۲x_۰-y_۰+۱=۲x_۰-y_۰-\frac{۳}{۲}\Rightarrow۱=-\frac{۳}{۲}\ (\text{غ.ق.ق})\\ ۲x_۰-y_۰+۱=-۲x_۰+y_۰+\frac{۳}{۲}\Rightarrow۴x_۰-۲y_۰-\frac{۱}{۲}=۰\end{cases}$$

پس مختصات تمام نقطه‌هایی که از دو خط داده شده به یک فاصله باشند، در معادلهٔ $۴x-۲y-\frac{۱}{۲}=۰$ صدق می‌کنند، یعنی معادلهٔ خط مورد نظر $۴x-۲y-\frac{۱}{۲}=۰$ است.



۲۴۷۱- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل مقابل واضح است که $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $AB=AC=۳$. بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.



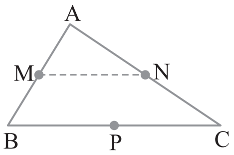
۲۴۷۲- گزینهٔ ۱ چون خط‌های MN و BC موازی هستند، پس شیب آن‌ها برابر است. شیب خط MN را به دست می‌آوریم:

$$m_{MN}=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-۱-۴}{-۲-۵}=\frac{۵}{۷}$$

معادلهٔ خطی را که از نقطهٔ $P(-۳,-۴)$ با شیب $\frac{۵}{۷}$ می‌گذرد می‌نویسیم:

$$y+۴=\frac{۵}{۷}(x+۳)\Rightarrow۷y=۵x-۱۳$$

پس معادلهٔ خطی که BC روی آن قرار دارد، $۷y=۵x-۱۳$ است.



۲۴۷۳- گزینهٔ ۳ مختصات نقطهٔ M وسط ضلع AC را حساب می‌کنیم:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{۴+۲}{۲}=۳,\quad y_M=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{۱-۱}{۲}=۰$$

بنابراین طول میانهٔ BM برابر است با

$$BM=\sqrt{(m-۳)^۲+(-۲-۰)^۲}=\sqrt{(m-۳)^۲+۴}$$

چون $BM=۲$ ، پس

$$\sqrt{(m-۳)^۲+۴}=۲\Rightarrow(m-۳)^۲+۴=۴\Rightarrow(m-۳)^۲=۰\Rightarrow m=۳$$

۲۴۷۴- گزینهٔ ۲ خط $۳x+y=۴$ بر خط $x-ay=۷$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها -۱ است:

$$-۳\times\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=۳$$

خط $x-۳y=۷$ بر خط $bx+۲y=-۵$ عمود است، پس حاصل‌ضرب شیب این خط‌ها نیز -۱ است:

$$\frac{۱}{۳}\times(-\frac{b}{۲})=-۱\Rightarrow b=۶$$

بنابراین $a+b=۹$.

۲۴۷۵- گزینهٔ ۱ اگر نقطهٔ H وسط پاره‌خط AA' باشد، آن‌گاه

$$x_H=\frac{۱-۳}{۲}=-۱,\quad y_H=\frac{۲+۴}{۲}=۳$$

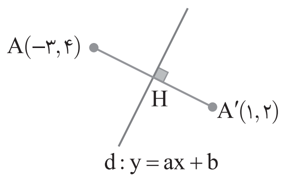
با توجه به شکل زیر مختصات نقطهٔ H در معادلهٔ خط $y=ax+b$ صدق می‌کنند. پس

$$۳=a(-۱)+b\Rightarrow b=a+۳$$

از طرف دیگر عکس و قرینهٔ شیب خطی که از A و A' می‌گذرد، برابر a ، شیب خط $y=ax+b$ است، پس

$$m_{AA'}=\frac{y_{A'}-y_A}{x_{A'}-x_A}=\frac{۲-۴}{۱-(-۳)}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $b=۵$ و در نتیجه $ab=۱۰$.



۲۴۷۶- گزینهٔ ۲ ابتدا طول ضلع‌های مثلث ABC را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(۵-۱)^۲+(-۵-۳)^۲}=\sqrt{۸۰},\quad AC=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۲-۳)^۲}=\sqrt{۵}$$

$$BC=\sqrt{(-۱-۵)^۲+(۲+۵)^۲}=\sqrt{۸۵}$$

واضح است که تساوی $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ بین طول ضلع‌های مثلث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با

$$\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}\times\sqrt{۵}=۱۰$$

۲۴۷۷- گزینهٔ ۳ ابتدا خط‌ها را به‌صورت $۲x-y+k=۰$ و $x-۲y-۱=۰$ می‌نویسیم. اکنون اگر فاصلهٔ A از دو خط به‌ترتیب برابر AH و AH' باشد، آن‌گاه

$$AH=\frac{|۲k+۱+k|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|۳k+۱|}{\sqrt{۵}}\ ,\quad AH'=\frac{|k+۲-۱|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|k+۱|}{\sqrt{۵}}$$

$$AH=۲AH'\Rightarrow|۳k+۱|=۲|k+۱|\Rightarrow\begin{cases}۳k+۱=۲k+۲\Rightarrow k=۱\\ ۳k+۱=-۲k-۲\Rightarrow k=-\frac{۳}{۵}\end{cases}$$

۲۴۷۸- گزینهٔ ۲ خط راست گذرنده از B و C از نقاط $(0,1)$ و $(2,0)$ نیز می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ آن $y-0=\frac{0-1}{2-0}(x-2)$ یا $2y+x-2=0$ است. طول ارتفاع وارد بر BC برابر با فاصلهٔ A از BC است: $\frac{|2\times4-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{1}{2}\times4\times\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

۲۴۷۹- گزینهٔ ۲ طول ضلع BC برابر است با

$$BC=\sqrt{(5-3)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقاط B و C به‌صورت $y-3=\frac{4-3}{5-3}(x-3)$ یا $2y-x-3=0$ است. بنابراین طول ارتفاع وارد بر BC یا همان فاصلهٔ A از خط گذرنده از نقاط B و C برابر است با $\frac{|2(1)-(-7)-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$. بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با $\frac{6}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}=6$.

۲۴۸۰- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ خط‌های موازی $3x+4y+6=0$ و $3x+4y-6=0$ برابر است با $\frac{|6+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{12}{5}$. در نتیجه، چون مساحت مستطیل ۱۲ است، پس طول ضلع دیگرش برابر با ۵ است. بنابراین طول ضلع بزرگ‌تر این مستطیل برابر ۵ است.

۲۴۸۱- گزینهٔ ۲ اگر اشـتراک دو بازهٔ $(-1,3)$ و $[a,a+1]$ تهی باشـد، یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

$a\geq 3$ $\qquad$ $a+1\leq -1\Rightarrow a\leq -2$

بنابراین اگر اشـتراک دو بازه، تهی نباشد باید $-2<a<3$. پس به ازای مقادیر صحیح ۱-، ۰، ۱ و ۲ برای a اشتراک دو بازه تهی نیست.

۲۴۸۲- گزینهٔ ۴ جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسـی مورد نظر برابر $1024=2^{10}$ است و جملهٔ n ام دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر $8+4(n-1)$ است. بنابراین

$$8+4n-4=1024\Rightarrow 4n=1020\Rightarrow n=255$$

پس جملهٔ دویست و پنجاه و پنجم دنبالهٔ حسابی $8,12,16,\ldots$ با جملهٔ دهم دنبالهٔ هندسی $2,4,8,\ldots$ برابر است.

۲۴۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=2\Rightarrow a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}=2\Rightarrow a^{\frac{4}{6}}=2\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}=2$$
$$\Rightarrow a^2=2^3=8\Rightarrow a=\sqrt{8}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sqrt{8}}=\sqrt[4]{8}$$

۲۴۸۴- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a-\frac{1}{a}=2\Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}-2=4\Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=6$$

بنابراین

$$a^2+\frac{1}{a^2}+2=8\Rightarrow (a+\frac{1}{a})^2=8\Rightarrow |a+\frac{1}{a}|=\sqrt{8}$$

با توجه به اینکه a عددی منفی است، پس $a+\frac{1}{a}=-\sqrt{8}$. در نتیجه

$$(a-\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})=2(-\sqrt{8})\Rightarrow a^2-\frac{1}{a^2}=-4\sqrt{2}$$

۲۴۸۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4})}+\frac{5}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{16}+1-\sqrt[3]{4})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}+\frac{5}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1})$$

اکنون مخرج هر یک از کسرها را به کمک اتحاد چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}^3-1}+\frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt[3]{4}^3+1})=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1}+\frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{4+1})$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{4}+1)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})=1+\sqrt[3]{2}$$

۲۴۸۶- گزینهٔ ۳ اولاً نمودار از نقطهٔ $(0,m)$ می‌گذرد و با توجه به شـکل m عددی مثبت است. با این شرایط حاصل‌ضرب صفرهای تابع منفی است که در نمودار همین وضعیت وجود دارد. ثانیاً طول رأس سهمی عددی منفی است. بنابراین

$$-\frac{2m-1}{2(-1)}<0\Rightarrow m<\frac{1}{2}$$

بنابراین اگر $0<m<\frac{1}{2}$ ، نمودار تابع f به‌صورت رسم شده است.

۲۴۸۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجـه کنید که $\alpha+\beta=6$ و $\alpha\beta=2$. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ مورد نظر باشند، آن‌گاه

$$S=x_1+x_2=(\alpha+\frac{1}{\beta})+(\beta+\frac{1}{\alpha})=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6+\frac{6}{2}=9$$
$$P=x_1x_2=(\alpha+\frac{1}{\beta})(\beta+\frac{1}{\alpha})=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=2+2+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

پس معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-9x+\frac{9}{2}=0\Rightarrow 2x^2-18x+9=0$$

۲۴۸۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x\ , \qquad \cos(\frac{5\pi}{2}-x)=\sin x$$

بنابراین

$$-2\cos x=3\sin x\Rightarrow \tan x=-\frac{2}{3}$$

از طرف دیگر،

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+\frac{4}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow \cos^2 x=\frac{9}{13}$$

چون انتهای کمان نظیر زاویهٔ x در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس $\cos x=-\frac{3}{\sqrt{13}}$.

بنابراین

$$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x=-\frac{3}{\sqrt{13}}$$

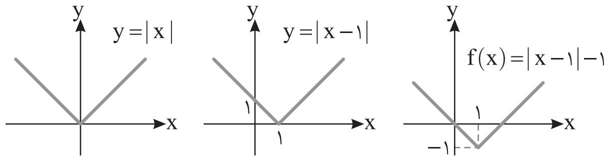
۲۴۸۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\cos 67^\circ=\cos(90^\circ-23^\circ)=\sin 23^\circ$$
$$\sin 53^\circ=\sin(90^\circ-37^\circ)=\cos 37^\circ$$

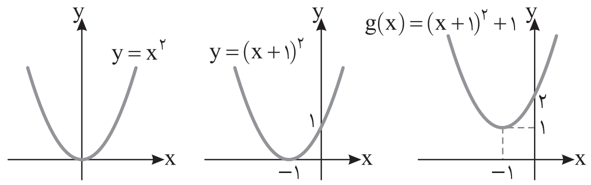
در نتیجه

$$\sin 37^\circ\cos 23^\circ+\cos 67^\circ\sin 53^\circ$$
$$=\sin 37^\circ\cos 23^\circ+\sin 23^\circ\cos 37^\circ$$
$$=\sin(37^\circ+23^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

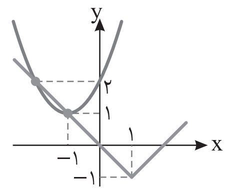
۲۴۹۰- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=|x-۱|$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به پایین منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)=|x-۱|-۱$ به‌دست می‌آید.



اگر نمودار تابع $y=x^۲$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=(x+۱)^۲$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را یک واحد به بالا منتقل کنیم نمودار تابع $y=(x+۱)^۲+۱$ به‌دست می‌آید.



اگر نمودار توابع f و g را در یک دستگاه رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که در دو نقطه متقاطع‌اند.



۲۴۹۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x^۲=|x|^۲$. اکنون نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|x|^۲\leq ۴|x|\Rightarrow |x|^۲-۴|x|\leq ۰\Rightarrow |x|(|x|-۴)\leq ۰$$

چون $|x|\geq ۰$. پس $|x|-۴\leq ۰\Rightarrow |x|\leq ۴\Rightarrow -۴\leq x\leq ۴$

بنابراین نُه عدد صحیح ±۴، ±۳، ±۲، ±۱ و ۰ در نامعادله صدق می‌کنند.

۲۴۹۲- گزینهٔ ۲ برای اینکه عبارت $\sqrt{۴x+۱}$ بامعنی باشد باید $x\geq -\frac{۱}{۴}$. بنابراین $x+۱$ مثبت است و $|x+۱|=x+۱$. پس معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{۴x+۱}=۲x+x+۱\Rightarrow \sqrt{۴x+۱}=۳x+۱$$

اکنون طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را حل می‌کنیم:

$$۴x+۱=۹x^۲+۶x+۱\Rightarrow ۹x^۲+۲x=۰$$

$$x(۹x+۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-\frac{۲}{۹}$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند و معادله دو جواب دارد.

۲۴۹۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f(۰)=-۲$ و $f(\log_۸ ۳)=۰$. بنابراین

$$f(۰)=۱-b=-۲\Rightarrow b=۳\Rightarrow f(x)=a^{۳x}-۳$$

$$f(\log_۸ ۳)=a^{۳\log_۸ ۳}-۳=۰\Rightarrow a^{\log_۲ ۳}=۳$$

$$\log_۲ ۳=\log_a ۳\Rightarrow a=۲$$

بنابراین $b=۳$ و $a=۲$، پس $ab=۶$.

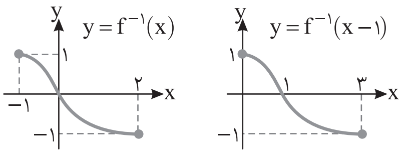
۲۴۹۴- گزینهٔ ۲ ابتدا طرفین تساوی‌های داده شده را در هم ضرب می‌کنیم

$$۲^a۲^{b+۱}=۳^a۳^b\Rightarrow ۲^{a+b+۱}=۳^{a+b}$$

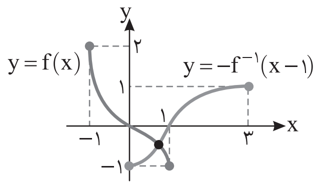
بنابراین

$$۲\times ۲^{a+b}=۳^{a+b}\Rightarrow (\frac{۳}{۲})^{a+b}=۲\Rightarrow a+b=\log_{\frac{۳}{۲}} ۲$$

۲۴۹۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم، نمودار تابع $f^{-۱}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار به‌دست آمده را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=f^{-۱}(x-۱)$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار اخیر را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-f^{-۱}(x-۱)$ به‌دست می‌آید.

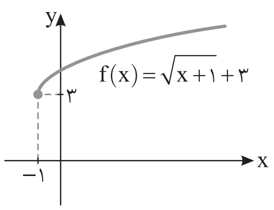


مطابق شکل زیر دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.



۲۴۹۶- گزینهٔ ۱ برای هر $x\in R_f$ تساوی $(fof^{-۱})(x)=x$ برقرار است. با توجه به نمودار تابع f، $R_f=[۳,+\infty)$. پس برای هر $x\geq ۳$، $g(x)=x-۲$، بنابراین

$$x\geq ۳\Rightarrow x-۲\geq ۱\Rightarrow g(x)\geq ۱\Rightarrow R_g=[۱,+\infty)$$



۲۴۹۷- گزینهٔ ۳ ابتدا دامنهٔ تابع‌های f و g را به‌دست می‌آوریم:

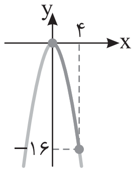
$$\begin{cases} x\geq ۰ \\ ۴x-x^۲\geq ۰\Rightarrow x(۴-x)\geq ۰\Rightarrow ۰\leq x\leq ۴ \end{cases}\Rightarrow D_f=D_g=[۰,۴]$$

بنابراین $D_{f\times g}=D_f\cap D_g=[۰,۴]$. از طرف دیگر،

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(\sqrt{۴x-x^۲}-۲\sqrt{x})(\sqrt{۴x-x^۲}+۲\sqrt{x})$$

$$=۴x-x^۲-۴x=-x^۲$$

بنابراین نمودار تابع $f\times g$ به‌صورت زیر است و برد آن بازهٔ $[-۱۶,۰]$ است.



۲۴۹۸- گزینهٔ ۱ حد چپ و حد راست تابع f را در نقطهٔ $x=-2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(-2a-12x)=-2a+24$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}(-3a-15x)=-3a+30$$

برای اینکه تابع f در $x=-2$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه با هم برابر باشند. پس $-2a+24=-3a+30 \Rightarrow a=6$
بنابراین $f(x)=6[x]+3x[2x] \Rightarrow f(-2)=6(-2)+3(-2)(-4)=12$

۲۴۹۹- گزینهٔ ۲ اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=L_2$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to 2}(f\times g)(x)=\lim_{x\to 2} f(x)\times\lim_{x\to 2} g(x)=L_1L_2=2$$

$$\lim_{x\to 2}(f-g)(x)=\lim_{x\to 2} f(x)-\lim_{x\to 2} g(x)=L_1-L_2=\frac{7}{2}\Rightarrow L_1=L_2+\frac{7}{2}$$

بنابراین $(L_2+\frac{7}{2})L_2=2\Rightarrow L_2^2+\frac{7}{2}L_2-2=0\Rightarrow 2L_2^2+7L_2-4=0$

$$(L_2+4)(2L_2-1)=0\Rightarrow\begin{cases}L_2=-4\Rightarrow L_1=-\frac{1}{2}\\ L_2=\frac{1}{2}\Rightarrow L_1=4\end{cases}$$

پس ۸ یا $\frac{1}{8}=\frac{L_1}{L_2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}=\lim\limits_{x\to 2}(\frac{f}{g})(x)$.

۲۵۰۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $f(2)=bc$ و

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{32(x-2)}{(x-a)(x+a)}$$

چون a و b مثبت‌اند، پس حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=2$ برابر صفر نیست و در نتیجه حد راست آن هم برابر صفر نیست. پس حد مخرج عبارت $\frac{32(x-2)}{(x-a)(x+a)}$ در $x=2$ باید صفر باشد. در غیر این صورت حد راست تابع f در $x=2$ برابر صفر می‌شود. پس

$$\lim_{x\to 2^+}((x-a)(x+a))=0\Rightarrow(2-a)(2+a)=0\Rightarrow a=2, a=-2$$ (غ.ق.ق.)

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{32(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{32}{x+2}=8$$

چون f در $x=2$ پیوسته است، پس باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع f در این نقطه با هم برابر باشند:

$$2a+b=8\xrightarrow{a=2}4+b=8\Rightarrow b=4,\quad bc=8\xrightarrow{b=4}c=2$$

۲۵۰۱- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم جمله‌های دنباله به‌صورت $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ باشند. در این صورت مجموع تمام جمله‌ها برابر است با

$$S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}$$

از طرف دیگر جمله‌های با ردیف زوج به‌صورت $a_2, a_4, \dots, a_{2n}$ هستند که دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q^2 و جملهٔ اول a_1q تشکیل می‌دهند.

بنابراین مجموع آن‌ها برابر با $\frac{a_1q(1-(q^2)^n)}{1-q^2}$ است. طبق فرض

$$\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=3\times\frac{a_1q(1-q^{2n})}{(1-q)(1+q)}\Rightarrow\frac{3q}{1+q}=1\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

۲۵۰۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=((x-2)(x^2+2x+4))(x^3+8)+64=(x^3-8)(x^3+8)+64$$
$$=x^6-64+64=x^6$$

بنابراین مقدار A به ازای $x=\sqrt{2}$ برابر است با $A=(\sqrt{2})^6=2^3=8$.

۲۵۰۳- گزینهٔ ۳ چون معادله جواب دارد، پس

$$\Delta\geq 0\Rightarrow 4k^2-4(k^2+10k+20)\geq 0\Rightarrow 40k+80\leq 0\Rightarrow k\leq -2$$

اگر α و β جواب‌های معادله باشند، آن‌گاه $\alpha+\beta=2k$، و در نتیجه $\alpha\beta=k^2+10k+20$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4k^2-2k^2-20k-40$$
$$=2k^2-20k-40=2(k-5)^2-90$$

بنابراین

$$k\leq -2\Rightarrow k-5\leq -7\Rightarrow (k-5)^2\geq 49$$
$$2(k-5)^2\geq 98\Rightarrow 2(k-5)^2-90\geq 8$$

بنابراین کمترین مقدار مجموع مربعات جواب‌ها برابر ۸ است.

۲۵۰۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f محور طول‌ها را در $x=4$ و $x=-1$ قطع کرده است. پس $f(x)=a(x+1)(x-4)$. نمودار تابع f محور عرض‌ها را در $y=2$ قطع کرده است. پس

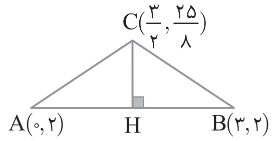
$$f(0)=2\Rightarrow a(0+1)(0-4)=2\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$
$$f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$$

بنابراین نقطهٔ $C(\frac{3}{2},\frac{25}{8})$ رأس سهمی است و

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{0+x_B}{2}\Rightarrow x_B=3$$

پس $CH=\frac{25}{8}-2=\frac{9}{8}$ و $AB=3$. در نتیجه

$$S_{ABC}=\frac{AB\times CH}{2}=\frac{3\times\frac{9}{8}}{2}=\frac{27}{16}$$



۲۵۰۵- گزینهٔ ۴ باید با شرط $x>0$ نامعادلهٔ $f(x)<0$ را حل کنیم:

$$x+\frac{1}{x+2}-5<0\Rightarrow x(x+2)+1-5(x+2)<0\Rightarrow x^2-3x-9<0$$

ریشه‌های چندجمله‌ای x^2-3x-9 به‌صورت $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ هستند. پس

$$\frac{3-3\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$$

از طرف دیگر $x>0$، پس $0<x<\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$. بنابراین حداکثر مقدار a برابر $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ است.

۲۵۰۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که باید $۲x-x^{۲}\geq ۰$ تا عبارت $\sqrt{۲x-x^{۲}}$ در معادله بامعنی باشد. پس $۰\leq x\leq ۲$.

اگر $x=۲$، آن‌گاه سمت چپ معادله برابر صفر و سمت راست آن برابر ۲ است. پس $x=۲$ جواب معادله نیست.

اگر $۰\leq x<۱$، آن‌گاه $[x]=۰$ و معادله به‌صورت $۲\sqrt{۲x-x^{۲}}=۰$ در می‌آید که $x=۰$ جواب آن است ولی مدنظر مسئله نیست.

اگر $۱\leq x<۲$، آن‌گاه $[x]=۱$ و معادله به‌صورت $۲\sqrt{۲x-x^{۲}}=۱$ درمی‌آید که به‌صورت زیر آن را حل می‌کنیم:

$$۴(۲x-x^{۲})=۱\Rightarrow ۴x^{۲}-۸x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲},\ x=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\ (\text{غ.ق.})$$

توجه کنید که $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$ دربازهٔ $[۱,۲)$ قرار ندارد بنابراین قابل قبول نیست.

پس جواب مثبت معادله $x=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$ است.

۲۵۰۷- گزینهٔ ۳ اگر $x\neq ۵$، نامعادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{|۳|}{|۵-x|}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow |x-۵|>۶$$

بنابراین $(x\neq ۵)$،

$$\begin{cases}x-۵>۶\\ x-۵<-۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>۱۱\\ x<-۱\end{cases}$$

به این ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$(-\infty,-۱)\cup(۱۱,+\infty)$$

در نتیجه $a=-۱$ و $b=۱۱$، پس $b-a=۱۲$.

۲۵۰۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos(\frac{۳\pi}{۱۰})=\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۵})=\sin\frac{\pi}{۵}$$
$$\sin(\frac{۶\pi}{۵})=\sin(\pi+\frac{\pi}{۵})=-\sin\frac{\pi}{۵}$$
$$\sin(\frac{۹\pi}{۵})=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۵})=-\sin\frac{\pi}{۵}$$

بنابراین

$$\frac{۲\sin\frac{\pi}{۵}+\cos(\frac{۳\pi}{۱۰})}{۳\sin(\frac{۶\pi}{۵})-۲\sin(\frac{۹\pi}{۵})}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۵}+\sin\frac{\pi}{۵}}{-۳\sin\frac{\pi}{۵}+۲\sin\frac{\pi}{۵}}=\frac{۳\sin\frac{\pi}{۵}}{-\sin\frac{\pi}{۵}}=-۳$$

۲۵۰۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sin^{۴}x+\cos^{۴}x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)^{۲}-۲\sin^{۲}x\cos^{۲}x=\frac{۲}{۳}$$
$$۱-۲\sin^{۲}x\cos^{۲}x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\sin^{۲}x\cos^{۲}x=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین

$$\sin^{۶}x+\cos^{۶}x$$
$$=(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)^{۳}-۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x)$$
$$=۱-۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x=۱-۳(\frac{۱}{۶})=\frac{۱}{۲}$$

۲۵۱۰- گزینهٔ ۴ چون α و β حاده هستند، پس $۰<\alpha,\beta<\frac{\pi}{۲}$. بنابراین $۰<\alpha+\beta<\pi$. در نتیجه $\sin(\alpha+\beta)>۰$، اکنون توجه کنید که

$$\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}=\frac{۳}{۵},\quad \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{۱-\cos^{۲}(\alpha+\beta)}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین

$$\cos\beta=\cos((\alpha+\beta)-\alpha)=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$$
$$=\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

۲۵۱۱- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم $t=۲^{x}$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$t^{۲}+(k-۳)t+k-۴=۰$$

بنابراین $t^{۲}+(k-۳)t+k-۴=(t+k-۴)(t+۱)$. پس جواب‌های این معادله $t=-۱$ و $t=۴-k$ هستند. بنابراین

$$۲^{x}=-۱\ (\text{غ.ق.})$$
$$۲^{x}=۴-k\Rightarrow x=\log_{۲}(۴-k),\ k<۴$$

چون جواب معادله نباید مثبت باشد، پس

$$\log_{۲}(۴-k)\leq ۰\Rightarrow\log_{۲}(۴-k)\leq\log_{۲}۱\Rightarrow ۴-k\leq ۱\Rightarrow k\geq ۳$$

در نتیجه $۳\leq k<۴$.

۲۵۱۲- گزینهٔ ۱ نمودار تابع از نقطهٔ $(۳,۰)$ می‌گذرد، پس

$$f(۳)=۰\Rightarrow\log_{a}(۳b+۷)=۰\Rightarrow ۳b+۷=۱\Rightarrow b=-۲$$

به این ترتیب $f(x)=\log_{a}(-۲x+۷)$. نمودار تابع از نقطهٔ $(b,۱)$ عبور می‌کند، پس

$$f(b)=۱\Rightarrow f(-۲)=۱\Rightarrow\log_{a}(۴+۷)=۱\Rightarrow a=۱۱$$

بنابراین $ab=-۲۲$.

۲۵۱۳- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_{۲}x(\frac{۱}{۲}\log_{۲}x)=\frac{۱}{۳}\log_{۲}x\Rightarrow\log_{۲}x(\frac{۱}{۲}\log_{۲}x-\frac{۱}{۳})=۰$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{cases}\log_{۲}x=۰\Rightarrow x=۱\\ \log_{۲}x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=۲^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۴}\end{cases}$$

پس جواب بزرگ‌تر معادله برابر $\sqrt[۳]{۴}$ است.

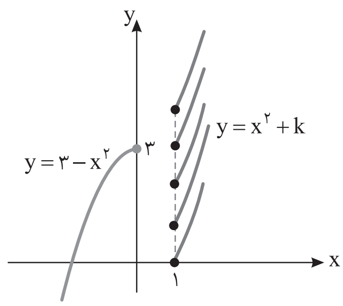
۲۵۱۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $D_{f}=\mathbb{R}-\{۲\}$. بنابراین $x=۲$ باید تنها ریشهٔ مخرج $g(x)$ باشد. یعنی مخرج $g(x)$ باید به‌صورت $(x-۲)^{۲}$ باشد که در این صورت $b=-۴$. از طرف دیگر

$$g(x)=\frac{ax-b}{x^{۲}+bx+۴}=\frac{ax+۴}{(x-۲)^{۲}}$$
$$g(x)=f(x)\Rightarrow\frac{ax+۴}{(x-۲)^{۲}}=\frac{-۲}{x-۲}\Rightarrow ax+۴=-۲(x-۲)$$
$$ax+۴=-۲x+۴$$

پس $a=-۲$، $b=-۴$ و در نتیجه $ab=۸$.

۲۵۱۵- گزینهٔ ۱ نمودار تابع به ازای چند مقدار مختلف k در شکل زیر رسم شده است. واضح است که اگر $f(۱)>۳$، آن‌گاه تابع f یک‌به‌یک خواهد بود. پس

$$۱+k>۳\Rightarrow k>۲$$



۲۵۱۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$x\le ۰ \text{ یا } x\ge ۴\Rightarrow f(x)=x^۲-۴x+۶x-x^۲=۲x$$

$$۰\le x\le ۴\Rightarrow f(x)=-x^۲+۴x+۶x-x^۲=-۲x^۲+۱۰x$$

بنابراین دامنهٔ تابع f باید $[۴,+\infty)$ و برد آن $[۸,+\infty)$ باشد. پس

$$f(x)=y=۲x\Rightarrow x=\frac{y}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲}\ ,\ D_{f^{-۱}}=[۸,+\infty)$$

۲۵۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که حد صورت کسر $\frac{x^۳-a^۳}{۲x-۸}$ در نقطهٔ $x=a$، صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز صفر باشد. در غیر این صورت حاصل حد کسر برابر صفر خواهد بود که چنین نیست. بنابراین

$$\lim_{x\to a}(۲x-۸)=۰\Rightarrow ۲a-۸=۰\Rightarrow a=۴$$

پس مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$b=\lim_{x\to ۴}\frac{x^۳-۶۴}{۲x-۸}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x^۲+۴x+۱۶)}{۲(x-۴)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲+۴x+۱۶}{۲}=\frac{۱۶+۱۶+۱۶}{۲}=۲۴$$

در نتیجه $a+b=۲۸$.

۲۵۱۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $۱<x<۲$، آن‌گاه $[x]=۱$ و در نتیجه $\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{-b}{x}=-b$. از طرف دیگر حد صورت کسر $\frac{x^۲-۱}{ax+b}$ در $x=۱$ برابر صفر است. پس باید حد مخرج آن نیز در این نقطه صفر باشد. در غیر این صورت حد چپ تابع f در $x=۱$ برابر صفر می‌شود که در نتیجه برای پیوستگی تابع در $x=۱$ باید حد راست آن یعنی $-b$ هم برابر صفر شود که مخالف فرض سؤال است. پس

$$\lim_{x\to ۱^-}(ax+b)=a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{-bx+b}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)(x+۱)}{-b(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x+۱}{-b}=-\frac{۲}{b}$$

برای اینکه تابع f در $x=۱$ حد داشته باشد باید

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)\Rightarrow -\frac{۲}{b}=-b\Rightarrow b^۲=۲\Rightarrow b=\pm\sqrt{۲}$$

برای اینکه تابع f در $x=۱$ پیوسته باشد، باید

$$f(۱)=\lim_{x\to ۱}f(x)\Rightarrow c=-b=\pm\sqrt{۲}$$

۲۵۱۹- گزینهٔ ۲ حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت و چاق مخرج ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x+۲}-x)(\sqrt{x+۲}+x)(\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+\sqrt[۳]{x-۱}+۱)}{(\sqrt[۳]{x-۱}-۱)(\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+\sqrt[۳]{x-۱}+۱)(\sqrt{x+۲}+x)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۲-x^۲)(\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+\sqrt[۳]{x-۱}+۱)}{(x-۱-۱)(\sqrt{x+۲}+x)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(۲-x)(x+۱)(\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+\sqrt[۳]{x-۱}+۱)}{(x-۲)(\sqrt{x+۲}+x)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-(x+۱)(\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+\sqrt[۳]{x-۱}+۱)}{\sqrt{x+۲}+x}$$

$$=\frac{-۳\times ۳}{۴}=-\frac{۹}{۴}$$

۲۵۲۰- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\sin\pi x=-\sin(\pi+\pi x)=-\sin(\pi(۱+x))$$

بنابراین

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x\sin\pi x}{x^۲-۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{-x\sin(\pi(۱+x))}{(x+۱)(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\left(\frac{-x}{x-۱}\times\frac{\sin\pi(۱+x)}{\pi(۱+x)}\times\pi\right)=\frac{۱}{-۲}\times ۱\times\pi=-\frac{\pi}{۲}$$

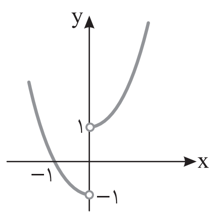
راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x\sin\pi x}{x^۲-۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\sin\pi x+\pi x\cos\pi x}{۲x}=\frac{۰+\pi}{-۲}=-\frac{\pi}{۲}$$

۲۵۲۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}(x^۳+۱) & x>۰\\ \frac{x}{-x}(x^۳+۱) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۳+۱ & x>۰\\ -x^۳-۱ & x<۰\end{cases}$$

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. بنابراین اگر نمودار تابع f، خط $y=k$ را در دو نقطه قطع کند، حدود k، به‌صورت $k>۱$ است.



۲۵۲۲- گزینهٔ ۲ با توجه به زوج مرتب‌های $(-۱,x^۲-x),(۰,x^۳)$ می‌توان نوشت:

$$۰>-۱\Rightarrow x^۳\ge x^۲-x$$

$$x^۳-x^۲+x\ge ۰\Rightarrow x(x^۲-x+۱)\ge ۰$$

چون در چندجمله‌ای درجهٔ دوم $x^۲-x+۱$، $a>۰$ و $\Delta<۰$، پس همواره $x^۲-x+۱>۰$. بنابراین $x\ge ۰$. با توجه به زوج مرتب‌های $(x^۲,۸)$ و $(۰,x^۳)$ می‌توان نوشت:

$$x^۲>۰\Rightarrow ۸\ge x^۳\Rightarrow ۲\ge x$$

با توجه به اینکه x باید عددی صحیح باشد، از اشتراک شرایط به‌دست آمده نتیجه می‌شود $x\in\{۱,۲\}$، پس دو مقدار صحیح برای x وجود دارد.

توجه کنید که $x=۰$ قابل قبول نیست چرا که در این صورت $f=\{(-۱,۰),(۰,۰),(۰,۸)\}$، که تابع نیست.

۲۵۲۳- گزینهٔ ۱ با توجه به اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است، پس

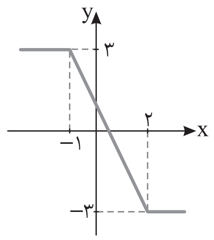
$$\begin{cases} x>3 \Rightarrow f(x)<f(3) \Rightarrow f(x)<0 \\ x<3 \Rightarrow f(x)>f(3) \Rightarrow f(x)>0 \end{cases}$$

اکنون باید دامنهٔ تابع g را مشخص کنیم. برای این کار نامعادلهٔ $(x^2-9)f(x)\geq 0$ را حل می‌کنیم.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x^2-9)f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ فوق $(-\infty,-3]\cup\{3\}$ است. بنابراین تنها یک عدد طبیعی (عدد ۳) جزء دامنهٔ تابع g است.

۲۵۲۴- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی نمودار مشخص است که تابع روی بازهٔ $[-1,2]$ و هر بازه‌ای به‌صورت $[c,d]$ که در آن $c\geq -1$ و $d\leq 2$ اکیداً نزولی است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی به‌دست می‌آید که $a=-1$ و $b=2$، در این صورت $b-a=2-(-1)=3$.



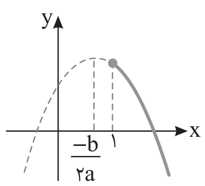
۲۵۲۵- گزینهٔ ۲ تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ با شرط $a<0$ روی بازهٔ $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ صعودی و روی بازهٔ $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ نزولی است. بنابراین باید شرایط زیر برقرار باشد تا تابع f روی بازهٔ $[1,+\infty)$ نزولی باشد (به شکل زیر توجه کنید):

$$k-1<0 \Rightarrow k<1$$

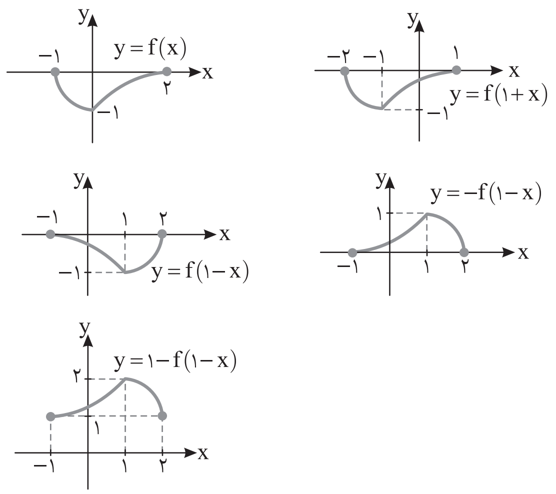
$$\frac{-1}{2(k-1)}\leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2(k-1)}-1\leq 0 \Rightarrow \frac{-1-2k+2}{2(k-1)}\leq 0$$

$$\frac{-2k+1}{2(k-1)}\leq 0 \Rightarrow k\leq\frac{1}{2} \text{ یا } k>1$$

از اشتراک شرط‌های به‌دست آمده نتیجه می‌شود $k\leq\frac{1}{2}$.



۲۵۲۶- گزینهٔ ۴ ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1+x)$ رسم شود. اکنون نمودار این تابع را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(1-x)$ حاصل شود. سپس نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-f(1-x)$ به‌دست آید و در نهایت نمودار را یک واحد به سمت بالا جابه‌جا می‌کنیم تا نمودار تابع $y=1-f(1-x)$ به‌دست آید.



۲۵۲۷- گزینهٔ ۲ اگر نمودار تابع $g(x)=3f(2x)$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=3f(2(x+1))=3f(2x+2)$ به‌دست می‌آید. اکنون اگر این نمودار را سه واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=3f(2x+2)+3$ به‌دست می‌آید. در نهایت اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=3f(2(\frac{1}{2}x)+2)+3=3f(x+2)+3$ به‌دست می‌آید و اگر عرض نقاط این نمودار را یک سوم کنیم، نمودار تابع $y=\frac{1}{3}\times(3f(x+2)+3)=f(x+2)+1$ به‌دست می‌آید.

۲۵۲۸- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|a\pi|}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|a\pi|}=\frac{1}{2}\Rightarrow |a|=4$$

کمترین مقدار تابع f برابر $a^2-|b|$ است. بنابراین

$$a^2-|b|=-4\Rightarrow 16-|b|=-4\Rightarrow |b|=20$$

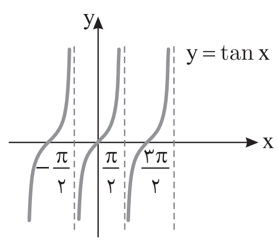
بیشترین مقدار تابع f برابر $a^2+|b|$ است که برابر است با $16+20=36$.

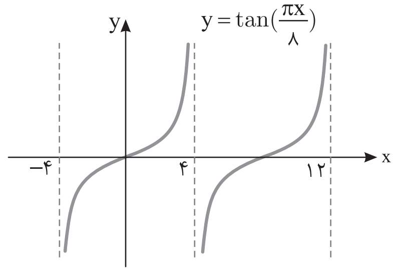
۲۵۲۹- گزینهٔ ۱ تابع $y=\tan x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است، پس $\tan x\geq\tan(-\frac{\pi}{4})$ و در نتیجه $\tan x\geq -1$. بنابراین

$$2m^2-5\geq -1\Rightarrow 2m^2\geq 4\Rightarrow m^2\geq 2\Rightarrow |m|\geq\sqrt{2}$$

پس حداقل مقدار $|m|$ برابر $\sqrt{2}$ است.

۲۵۳۰- گزینهٔ ۲ برای رسم نمودار تابع f ابتدا نمودار تابع $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم، سپس طول نقاط روی این نمودار را در $\frac{8}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. نمودار تابع به شکل زیر است. پس حداقل مقدار a برای اینکه تابع f روی دامنه‌اش یعنی بازهٔ $(a,12)$ اکیداً صعودی باشد برابر ۴ است.





۲۵۳۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که کمترین مقدار تابع برابر $۳a-۲$ است که با توجه به نمودار تابع برابر -۱ است. پس

$$۳a-۲=-۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۴۵}{۷}-\frac{۳}{۷}=۶$ است. پس

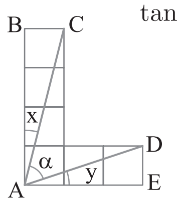
$$T=\frac{۲\pi}{|\frac{۲\pi}{b}|}=۶\Rightarrow |b|=۶\Rightarrow b=\pm ۶$$

اگر $b=-۶$، آنگاه $f(x)=۱+۲\sin(-\frac{۲\pi}{۶}x+\frac{\pi}{۳})$ که در این صورت تابع باید در همسایگی راست $x=۰$ نزولی باشد که این طور نیست. پس $b=۶$ و در نتیجه $ab=۲$.

۲۵۳۲- گزینهٔ ۳ با نمادگذاری شکل زیر، $\alpha+x+y=۹۰^\circ$، پس $\alpha=۹۰^\circ-(x+y)$. از طرف دیگر $\triangle ABC:\tan x=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$ و $\triangle ADE:\tan y=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$. بنابراین

$$\tan\alpha=\tan(۹۰^\circ-(x+y))=\cot(x+y)=\frac{۱}{\tan(x+y)}$$

$$=\frac{۱-\tan x\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{۱-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}}=\frac{۱۱}{۷}$$



پس $\cot\alpha=\frac{۷}{۱۱}$.

۲۵۳۳- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت $\cos x=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ می‌نویسیم. بنابراین جواب‌ها به‌صورت زیر هستند: $(k\in\mathbb{Z})$

$$\begin{cases} x=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow k=-\frac{۱}{۸} \quad (\text{غ.ق.ق.}) \\ x=۲k\pi-x-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

۲۵۳۴- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$۲(۱-\sin^۲ x)+۵\sin x-۵=۰\Rightarrow ۲\sin^۲ x-۵\sin x+۳=۰$$

اگر فرض کنیم $t=\sin x$، معادله به‌صورت $۲t^۲-۵t+۳=۰$ در می‌آید. از حل این معادله نتیجه می‌شود $t_۱=\frac{۳}{۲}$ و $t_۲=۱$. چون $\sin x=\frac{۳}{۲}$ قابل قبول نیست، پس

$$\sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{x\in(۰,۲\pi)}x=\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ داده شده تنها یک جواب در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

۲۵۳۵- گزینهٔ ۳ طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin^۲\frac{x}{۲}+\cos^۲\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}=۱\xrightarrow{۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha}$$

$$۱-\sin x=۱\Rightarrow \sin x=۰$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۴\pi]$ عبارت‌اند از $x=۰$، $x=\pi$، $x=۲\pi$، $x=۳\pi$ و $x=۴\pi$. ولی توجه کنید که جواب‌های $x=\pi$، $x=۲\pi$ و $x=۴\pi$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کنند و قابل قبول نیستند. این جواب‌ها به دلیل اینکه طرفین معادله را به توان دو رسانده‌ایم تولید شده‌اند. بنابراین معادله در بازهٔ $[۰,۴\pi]$ دو جواب دارد که مجموع آن‌ها برابر ۳π است.

۲۵۳۶- گزینهٔ ۱ اگر $x\to ۳^+$، آنگاه $[x]=۳$ و $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$، در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)=+\infty$. اگر $x\to ۳^-$، آنگاه $[x]=۲$ و $f(x)=\frac{-۱}{x-۳}$، در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۳^-}f(x)=+\infty$.

۲۵۳۷- گزینهٔ ۲ چون حد صورت در نقطهٔ $x=۲$ برابر ۳ است. باید حد مخرج کسر در این نقطه برابر صفر باشد، تا حد مورد نظر نامتناهی شود. همچنین، چون حد چپ و حد راست کسر هر دو $+\infty$ شده‌اند، پس باید مقادیر $۳x^۲+ax-b$ در یک همسایگی محذوف نقطهٔ $x=۲$ مثبت باشند. در نتیجه $x=۲$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $۳x^۲+ax-b=۰$ است، یعنی $۳x^۲+ax-b$ باید به‌صورت $۳(x-۲)^۲$ باشد. در نتیجه

$$۳x^۲+ax-b=۳(x-۲)^۲=۳x^۲-۱۲x+۱۲$$

پس $a=-۱۲$، $b=-۱۲$. یعنی $a+b=-۲۴$.

۲۵۳۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-۳$. از طرف دیگر اگر $x\to-\infty$، آنگاه $f(x)<-۳$. بنابراین

$$\lim_{x\to-\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to-\infty}f(f(x))=\lim_{t\to(-۳)^-}f(t)=-\infty$$

۲۵۳۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر در صورت کسر داده شده جمله‌ای شامل $x^۴$ وجود داشته باشد، حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ می‌شود. بنابراین ضریب $x^۴$ در صورت کسر داده شده صفر است، در نتیجه $۲a-۴=۰$. پس $a=۲$. به این ترتیب

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۳-۱}{۱۲x^۳+x^۲+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x^۳}{۱۲x^۳}=\frac{۱}{۳}$$

در نتیجه $ab=\frac{۲}{۳}$.

۲۵۴۰- گزینهٔ ۴ خطوط $x=-\frac{۳b}{a-۱}$ و $y=\frac{۲a}{a-۱}$ به‌ترتیب مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین

$$\frac{۲a}{a-۱}=۳\Rightarrow ۲a=۳a-۳\Rightarrow a=۳$$

$$\frac{-۳b}{a-۱}=۲\Rightarrow\frac{-۳b}{۲}=۲\Rightarrow b=-\frac{۴}{۳}$$

در نتیجه $ab=-۴$.

۲۵۴۱- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-k}{x+۲}$$

از طرف دیگر

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f^۲(x)-kf(x)}{x^۲-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)(f(x)-k)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-k}{x+۲}\times\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)}{x-۲}=f'(-۲)\times\frac{f(-۲)}{-۴}=\frac{k^۲}{-۴}$$

بنابراین $\frac{k^۲}{-۴}=-۲$، در نتیجه $k^۲=۸$.

۲۵۴۲- گزینهٔ ۳ مقدار مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به کمک تعریف به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|\sqrt[۳]{x^۲+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x\sqrt[۳]{x^۲+۱}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt[۳]{x^۲+۱}=۱$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|\sqrt[۳]{x^۲+۱}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x\sqrt[۳]{x^۲+۱}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}(-\sqrt[۳]{x^۲+۱})=-۱$$

بنابراین $۲f'_+(۰)-f'_-(۰)=۳$.

۲۵۴۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$f'(x)=(۸x^۳+۱۰x)(ax^۲+۱)+(۲ax)(۲x^۴+۵x^۲-۳)$$

بنابراین

$$f'(۱)=(۸+۱۰)(a+۱)+(۲a)(۲+۵-۳)=۱۸a+۱۸+۸a=۲۶a+۱۸$$

چون $f'(۱)=-۸$، پس $۲a+۱۸=-۸\Rightarrow ۲۶a=-۲۶\Rightarrow a=-۱$

۲۵۴۴- گزینهٔ ۳ چون تابع در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته است. یعنی

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)$$

$$۸a+۴=۴+۲b\Rightarrow ۴a-b=۰$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}۳ax^۲+۲ & x>۲\\ ۲x+b & x<۲\end{cases}$، بنابراین

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}(۳ax^۲+۲)=۱۲a+۲$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}(۲x+b)=۴+b$$

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow ۱۲a+۲=۴+b\Rightarrow ۱۲a-b=۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}۴a-b=۰\\ ۱۲a-b=۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=\frac{۱}{۴}$ و $b=۱$.

پس $a+b=\frac{۵}{۴}$.

۲۵۴۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=f(\frac{۱}{\sqrt{x}})\Rightarrow g'(x)=(\frac{۱}{\sqrt{x}})'f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})=\frac{-۱}{۲x\sqrt{x}}f'(\frac{۱}{\sqrt{x}})$$

بنابراین $g'(\frac{۱}{۴})=\frac{-۱}{۲\times\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۱}{۴}}}f'(\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}})=-۴f'(۲)$.

از طرف دیگر $f'(۲)=\frac{۴+۱}{۲-۳}=-۵$. در نتیجه $g'(\frac{۱}{۴})=(-۴)(-۵)=۲۰$.

۲۵۴۶- گزینهٔ ۲ مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۲x^۳+۳ax^۲+۶x,\quad f''(x)=۶x^۲+۶ax+۶$$

پس معادلهٔ $۶x^۲+۶ax+۶=۰$ نباید جواب داشته باشد:

$$\Delta=۳۶a^۲-۱۴۴<۰\Rightarrow a^۲<۴\Rightarrow |a|<۲$$

۲۵۴۷- گزینهٔ ۳ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,۱]$ برابر است با

$$\frac{f(۱)-f(a)}{۱-a}=\frac{۰-(a-۲)\sqrt{۱-a}}{۱-a}=\frac{۲-a}{\sqrt{۱-a}}$$

بنابراین

$$\frac{۲-a}{\sqrt{۱-a}}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{(۲-a)^۲}{۱-a}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow\frac{۴+a^۲-۴a}{۱-a}=\frac{۲۵}{۴}$$

$$۴a^۲-۱۶a+۱۶=۲۵-۲۵a$$

$$۴a^۲+۹a-۹=۰\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}, a=-۳$$

با توجه به گزینه‌های داده شده جواب -۳ است.

۲۵۴۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید خط مورد نظر در نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ بر نمودار تابع f مماس باشد. در این صورت، مقدار مشتق تابع f به‌ازای $x=x_۰$ برابر با شیب خط $y=۲x+۴$ یعنی ۲ است. بنابراین

$$f'(x)=۶x^۲-۴\Rightarrow f'(x_۰)=۲\Rightarrow ۶x_۰^۲-۴=۲$$

$$x_۰^۲=۱\Rightarrow x_۰=۱ \text{ یا } x_۰=-۱$$

چون نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار تابع f است، پس

$$y_۰=f(۱)=۲-۴+۶=۴ \quad \text{یا} \quad y_۰=f(-۱)=-۲+۴+۶=۸$$

بنابراین خط‌های مورد نظر از نقطهٔ $(۱,۴)$ یا نقطهٔ $(-۱,۸)$ می‌گذرند و شیب آن‌ها ۲ است. پس معادلهٔ این دو خط به‌صورت $y=۲x+۲$ یا $y=۲x+۱۰$ است.

۲۵۴۹- گزینهٔ ۴ خط $y=۴x+۲$ در نقطهٔ $A(۱,۶)$ بر نمودار تابع f مماس است. بنابراین $f(۱)=۶$ و $f'(۱)=۴$. در نتیجه چون $f'(x)=۳x^۲-۲ax$، پس

$$\begin{cases}f(۱)=۱-a+b=۶\\ f'(۱)=۳-۲a=۴\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}, b=\frac{۹}{۲}\Rightarrow a+b=۴$$

۲۵۵۰- گزینهٔ ۱ باید تابع مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x,\ f'(x)=۰\Rightarrow x=۰, x=۱$$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[۰,۱]$ نزولی است. می‌دانیم در صورتی‌که $c\ge۰$ و $d\le۱$، تابع f روی بازهٔ $[c,d]$ نزولی است اما بیشترین مقدار $b-a$، زمانی است که $a=۰$ و $b=۱$. پس $b-a=۱-۰=۱$.

۲۵۵۱- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f برابر است با $f'(x)=-۶x^۲+۲ax-۶$. برای آنکه تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد باید همواره $f'\le۰$. پس

$$a<۰, \Delta\le۰\Rightarrow -۶<۰, \Delta=۴a^۲-۱۴۴\le۰\Rightarrow -۶\le a\le۶$$

۲۵۵۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $f'(x)=x^۲-۲x-۸$ و

$$f'(x)=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰\Rightarrow x=۴\,,\,x=-۲$$

با توجه به آنکه $f(-۲)=\frac{۲۵}{۳}$ و $f(۴)=-\frac{۸۳}{۳}$، پس نقاط $(-۲,\frac{۲۵}{۳})$ و $(۴,-\frac{۸۳}{۳})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند، بنابراین فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(۴-(-۲))^۲+(-\frac{۸۳}{۳}-\frac{۲۵}{۳})^۲}=\sqrt{۶^۲+۳۶^۲}=۶\sqrt{۳۷}$$

۲۵۵۳- گزینهٔ ۲ تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، برای آنکه تابع در این نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد باید $f'(۲)=۰$. پس

$$f'(x)=\sqrt[۳]{x+a}+\frac{x+۱}{۳\sqrt[۳]{(x+a)^۲}}\,,\,f'(۲)=۰$$

$$f'(۲)=\sqrt[۳]{۲+a}+\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۲+a)^۲}}=\frac{۳(۲+a)+۳}{۳\sqrt[۳]{(۲+a)^۲}}=۰\Rightarrow ۹+۳a=۰\Rightarrow a=-۳$$

۲۵۵۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

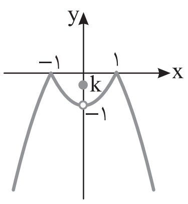
$$f(x)=\begin{cases} ۲x-x^۳ & x\le-\sqrt{۲} \text{ یا } ۰\le x\le\sqrt{۲} \\ x^۳-۲x & -\sqrt{۲}\le x\le ۰ \text{ یا } x\ge\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲-۳x^۲ & x<-\sqrt{۲} \text{ یا } ۰<x<\sqrt{۲} \\ ۳x^۲-۲ & -\sqrt{۲}<x<۰ \text{ یا } x>\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲-۳x^۲=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

همچنین در نقاط $x=۰$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ مشتق چپ و مشتق راست تابع برابر نیستند، پس تابع در این نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست. بنابراین تابع f، پنج نقطهٔ بحرانی دارد.

۲۵۵۵- گزینهٔ ۴ به نمودار تابع f توجه کنید. واضح است که اگر تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، اما ماکزیمم مطلق نداشته باشد، باید $-۱<k<۰$. توجه کنید که اگر $k\ge۰$، آن‌گاه تابع f در نقطهٔ $x=۰$ ماکزیمم مطلق تابع f دارد و اگر $k\le-۱$، در نقطهٔ $x=۰$ مینیمم نسبی دارد.



۲۵۵۶- گزینهٔ ۱ تابع f در تمام نقطه‌های دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+۱)-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x}+۱)^۲}=\frac{۱-a}{۲\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)^۲}$$

اگر $f'(x)=۰$، آن‌گاه $a=۱$ که در این صورت $f(x)=۱$. چون کمترین مقدار تابع f روی بازهٔ $[۰,۴]$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است، پس $a=۱$ قابل قبول نیست. پس $f'(x)\neq۰$، بنابراین نقاط ابتدا و انتهای بازه را بررسی می‌کنیم: $f(۰)=a$ و $f(۴)=\frac{۲+a}{۳}$. اگر $f(۰)=a=\frac{۴}{۳}$، آن‌گاه $a=\frac{۴}{۳}$ و اگر $f(۴)=\frac{۲+a}{۳}=\frac{۴}{۳}$، آن‌گاه $a=۲$. بنابراین حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{۴}{۳}\times۲=\frac{۸}{۳}$ است.

۲۵۵۷- گزینهٔ ۱ اگر $f'(x)>۰$ و $f''(x)<۰$، آن‌گاه تابع f صعودی و جهت تقعر آن رو به پایین است:

$$f'(x)=x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲-۶x$$

$$f''(x)=۳x^۲+۳x-۶<۰\Rightarrow x^۲+x-۲<۰\Rightarrow (x+۲)(x-۱)<۰$$

$$-۲<x<۱$$

$$f'(x)>۰\Rightarrow x(x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶)>۰$$

$$x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶=۰\,,\quad \Delta=\frac{۹}{۴}+۲۴=\frac{۱۰۵}{۴}$$

$$x=\frac{-\frac{۳}{۲}\pm\frac{\sqrt{۱۰۵}}{۲}}{۲}=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۰۵}}{۴}$$

x	$-\infty$		$\frac{-۳-\sqrt{۱۰۵}}{۴}$		۰		$\frac{-۳+\sqrt{۱۰۵}}{۴}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

از اشتراک ناحیه‌هایی که در آنها $f'(x)>۰$ با $-۲<x<۱$، بازهٔ $(-۲,۰)$ حاصل می‌شود.

۲۵۵۸- گزینهٔ ۴ فرض کنید نقطهٔ B روی سهمی به معادلهٔ $y=۲x^۲$ باشد. بنابراین مختصات آن به‌صورت $B(x,۲x^۲)$ است. پس

$$AB=\sqrt{(x-۹)^۲+(۲x^۲-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۱۸x+۸۱+۴x^۴}$$

اگر $f(x)=\sqrt{۴x^۴+x^۲-۱۸x+۸۱}$، آن‌گاه

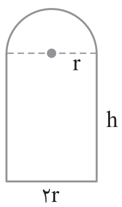
$$f'(x)=\frac{۸x^۳+x-۹}{\sqrt{۴x^۴+x^۲-۱۸x+۸۱}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۸x^۳+x-۹=۰\Rightarrow (۸x^۳-۸)+(x-۱)=۰$$

$$۸(x-۱)(x^۲+x+۱)+(x-۱)=(x-۱)(۸x^۲+۸x+۹)=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آید. پس B نقطهٔ $(۱,۲)$ و عرض آن برابر ۲ است.

۲۵۵۹- گزینهٔ ۴ در واقع باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد. پس



$$\text{محیط}=۵\Rightarrow ۲h+۲r+(\frac{۲\pi r}{۲})=۲h+۲r+r\pi=۵$$

$$h=\frac{۵-۲r-r\pi}{۲}=\frac{۵}{۲}-r-\frac{r\pi}{۲}$$

$$\text{مساحت پنجره}=S_{\text{مستطیل}}+S_{\text{نیم‌دایره}}$$

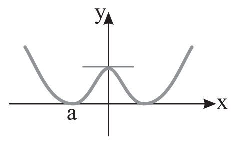
$$S(r)=(h\times۲r)+(\frac{r\times r\times\pi}{۲})=(\frac{۵}{۲}-r-\frac{r\pi}{۲})\times۲r+\frac{r^۲\pi}{۲}$$

$$=-۲r^۲-\frac{r^۲\pi}{۲}+۵r$$

$$S'(r)=-۴r-r\pi+۵\,,\,S'(r)=۰\Rightarrow -۴r-r\pi+۵=۰$$

$$r=\frac{۵}{۴+\pi}$$

۲۵۶۰- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f در سه نقطه صفر است. پس نمودار گزینه‌های (۳) و (۴) جواب نیستند. تابع f روی بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، پس در این بازه باید f' منفی باشد. پس نمودار گزینهٔ (۲) هم جواب نیست و نمودار گزینهٔ (۱) جواب است.



۲۵۶۱- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{5\sqrt[4]{5}\sqrt[3]{5}}=5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{8}}\times5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{12+3+4}{24}}=5^{\frac{19}{24}}$$

و

$$\sqrt[4]{5\sqrt[6]{5}}=5^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{1}{24}}=5^{\frac{6+1}{24}}=5^{\frac{7}{24}}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{5^{\frac{19}{24}}}{5^{\frac{7}{24}}}=5^{\frac{19}{24}-\frac{7}{24}}=5^{\frac{12}{24}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

۲۵۶۲- گزینهٔ ۱ طول رأس سهمی برابر $\frac{5}{2}$ است، پس

$$-\frac{a}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow a=-5$$

مقدار $f(0)$ مساوی ۴ است. پس

$$f(0)=-b\Rightarrow -b=4\Rightarrow b=-4$$

بنابراین $f(x)=x^2-5x+4$. مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ به‌ترتیب برابر ۵ و ۴ هستند، پس مجموع جواب‌ها یک واحد بیشتر از حاصل‌ضرب آن‌هاست.

۲۵۶۳- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت $\sqrt{3-x}=2-\sqrt{x}$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم:

$$3-x=4+x-4\sqrt{x}\Rightarrow 4\sqrt{x}=1+2x$$

مجدداً طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$16x=1+4x^2+4x\Rightarrow 4x^2-12x+1=0$$

مجموع جواب‌های معادلهٔ بالا مورد نظر است که برابر ۳ است. (توجه کنید که معادله درجهٔ دوم فوق دو جواب دارد که در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند.)

۲۵۶۴- گزینهٔ ۳ ابتدا تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)-2\sin(2\pi+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)-2\cos(3\pi-\alpha)}=3$$

$$\frac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{-\sin\alpha+2\cos\alpha}=3$$

$$\cos\alpha-2\sin\alpha=-3\sin\alpha+6\cos\alpha$$

$$\sin\alpha=5\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=5$$

بنابراین $\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha=\frac{1}{5}$.

۲۵۶۵- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{1}{4}\Rightarrow 4\sin x+8\cos x=\cos x-\sin x$$

$$5\sin x=-7\cos x\Rightarrow\tan x=-\frac{7}{5}$$

بنابراین

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(-\frac{7}{5})}{1-(-\frac{7}{5})^2}=\frac{35}{12}$$

۲۵۶۶- گزینهٔ ۲ در نقاطی نمودار تابع f محور طول‌ها را قطع می‌کند که $f(x)=0$، پس

$$\cos 3x=0,\quad 3x=\frac{(2k+1)\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{6},\quad k\in\mathbb{Z}$$

چون جواب‌های واقع در بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{2})$ را می‌خواهیم، پس

$$\frac{\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\frac{(2k+1)\pi}{6}<\frac{7\pi}{2}$$

$$3<2k+1<21\Rightarrow 1<k<10$$

بنابراین به ازای $k=2$، $k=3$، ... و $k=9$ برای x هشت مقدار به‌دست می‌آید که طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور طول‌هاست.

۲۵۶۷- گزینهٔ ۲ اگر $x<0$، نامعادله برقرار است و عددهای منفی در آن صدق می‌کنند. اگر $x>0$، آن‌گاه

$$\begin{cases}x^2-x>2x\Rightarrow x^2-3x>0\Rightarrow x(x-3)>0\Rightarrow x-3>0\Rightarrow x>3\\ \text{یا}\\ x^2-x<-2x\Rightarrow x^2+x<0\Rightarrow x(x+1)<0\Rightarrow x+1<0\Rightarrow x<-1\ (\text{غ.ق.})\end{cases}$$

واضح است که $x=0$ نیز جواب نامعادله نیست. بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ است که می‌توانیم آن را به‌صورت $\mathbb{R}-[0,3]$ بنویسیم. پس $a=0$ و $b=3$ و در نتیجه $a+b=3$.

۲۵۶۸- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$4x-x^2\geq0\Rightarrow x(4-x)\geq0\Rightarrow 0\leq x\leq4\Rightarrow D_f=[0,4]$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{x\,|\,0\leq x\leq4,\ 0\leq\sqrt{4x-x^2}+3\leq4\}$$

از طرف دیگر

$$-3\leq\sqrt{4x-x^2}\leq1\Rightarrow 4x-x^2\leq1$$

$$x^2-4x+4\geq3\Rightarrow(x-2)^2\geq3$$

$$\begin{cases}x-2\geq\sqrt{3}\\ x-2\leq-\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq2+\sqrt{3}\\ x\leq2-\sqrt{3}\end{cases}$$

بنابراین

$$D_{fof}=\{x\,|\,0\leq x\leq4,\ x\geq2+\sqrt{3}\ \text{یا}\ x\leq2-\sqrt{3}\}$$
$$=[0,2-\sqrt{3}]\cup[2+\sqrt{3},4]$$

پس $a=2-\sqrt{3}$، $b=2+\sqrt{3}$ و $ab=4-3=1$.

۲۵۶۹- گزینهٔ ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع f را پیدا می‌کنیم

$$y=2-\sqrt{4-x^2},\quad -2\le x\le 0$$

$$\sqrt{4-x^2}=2-y\Rightarrow 4-x^2=(2-y)^2$$

$$x^2=4-(2-y)^2\Rightarrow |x|=\sqrt{4-(2-y)^2}=\sqrt{4y-y^2}$$

چون $-2\le x\le 0$، پس $x=-\sqrt{4y-y^2}$ و در نتیجه $f^{-1}(x)=-\sqrt{4x-x^2}$.

بنابراین $a=-1$ و $b=0$ و در نتیجه $a+b=-1$.

۲۵۷۰- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=4f(2x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$y=4f(2(x-1))=4f(2x-2)$$

اگر این نمودار را دو واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=4f(2x-2)+2$ به‌دست می‌آید. اگر طول نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=4f(2(2x)-2)+2$ رسم می‌شود و اگر عرض نقاط این نمودار را نصف کنیم، نمودار تابع $y=\frac{1}{2}(4f(4x-2)+2)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده است به‌صورت $y=2f(4x-2)+1$ است.

۲۵۷۱- گزینهٔ ۴ شرایط زیر باید برقرار باشند:

$$x-3>0\Rightarrow x>3$$

$$\log_{0/5}(x-3)\ge 1$$

$$\log_{0/5}(x-3)\ge \log_{0/5}0/5$$

$$x-3\le 0/5\Rightarrow x\le 3/5$$

بنابراین دامنهٔ تابع $(3,3/5]$ است. پس $a=3$ و $b=3/5$ و در نتیجه

$$b-a=\frac{1}{2}$$

۲۵۷۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$$

اکنون اگر صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، معلوم می‌شود که حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(2x-\sqrt{3x^2+1})(2x+\sqrt{3x^2+1})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{4x^2-3x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)(2x+\sqrt{3x^2+1})}{x+1}=\frac{2(2+2)}{2}=4$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{2x-\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x+1}{2-\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}}=\frac{2}{2-\frac{3}{2}}=4$$

۲۵۷۳- گزینهٔ ۴ اگر $x\to(\frac{\pi}{2})^+$، آن‌گاه $\cos x\to 0^-$ و در نتیجه $[\cos x]=-1$. پس باید مقدار $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{-1}{\sin x-\sin^2 x}$ را به‌دست آوریم. حد مخرج کسر صفر است و مقدار عبارت مخرج مثبت است، زیرا در یک همسایگی راست $\frac{\pi}{2}$، نابرابری $0<\sin x<1$ برقرار است. بنابراین

$$\sin x-\sin^2 x=\sin x(1-\sin x)$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{-1}{\sin x-\sin^2 x}=-\infty$$

۲۵۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که خطوط $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند. بنابراین باید نقاط تلاقی نمودار تابع f و این خطوط را مشخص کنیم:

$$f(x)=1\Rightarrow\frac{x}{|x|-2}=1\Rightarrow |x|-2=x$$

$$\begin{cases}x\ge 0\Rightarrow x-2=x\Rightarrow -2=0 & (\text{غ.ق.ق.})\\ x<0\Rightarrow -x-2=x\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

$$f(x)=-1\Rightarrow\frac{x}{|x|-2}=-1\Rightarrow |x|-2=-x$$

$$\begin{cases}x\ge 0\Rightarrow x-2=-x\Rightarrow x=1\\ x<0\Rightarrow -x-2=-x\Rightarrow -2=0 & (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

بنابراین $A(-1,1)$ و $B(1,-1)$ نقاط تلاقی نمودار تابع f با خطوط مجانب آن است.

۲۵۷۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(2)=a$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(3x-[x])=\lim_{x\to 2^-}(3x-1)=5$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4$$

پس به ازای هیچ مقدار a حد چپ و حد راست تابع نمی‌توانند با مقدار تابع در $x=2$ برابر باشند.

۲۵۷۶- گزینهٔ ۴ شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه پیوستگی آن است:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+}(1+a\cos\pi x)=\lim_{x\to 1^-}(bx^2+x)$$

$$1-a=b+1\Rightarrow b=-a$$

همچنین باید مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=1$ با هم برابر باشند:

$$f'(x)=\begin{cases}-a\pi\sin\pi x & x>1\\ 2bx+1 & x<1\end{cases}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=0$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=2b+1$$

$$2b+1=0\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

بنابراین $a=\frac{1}{2}$.

۲۵۷۷- گزینهٔ ۳ با توجه به تعریف مشتق، از $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-۹}{h}=\frac{۳}{۲}$

نتیجه می‌شود $f'(۲)=\frac{۳}{۲}$ و $f(۲)=۹$. از طرف دیگر،

$$g'(x)=\sqrt{f(x)}+\frac{xf'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$$

بنابراین $g'(۲)=\sqrt{f(۲)}+\frac{۲f'(۲)}{۲\sqrt{f(۲)}}=۳+\frac{۳}{۶}=۳/۵$.

۲۵۷۸- گزینهٔ ۲ ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{۲x(x^۳+۴)-۳x^۴}{(x^۳+۴)^۲}=\frac{x(۸-x^۳)}{(x^۳+۴)^۲}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt[۳]{۴}$		۰		۲		$+\infty$
$f'(x)$		−	ت ن	−	۰	+	۰	−	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[۰,۲]$ صعودی است و حداکثر مقدار a برابر ۲ است.

۲۵۷۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f''(x)=۱۲x(x-۲)$، بنابراین

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$f''(x)$		+	۰	−	۰	+	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

از روی این جدول معلوم می‌شود که کمترین مقدار a برابر صفر و بیشترین مقدار b برابر ۲ است. بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۲ است.

۲۵۸۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f در مبدأ مختصات بر محور x مماس است، پس $f'(۰)=۰$: $f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+b\xrightarrow{f'(۰)=۰}b=۰$.

همچنین ۴− ریشهٔ تابع است، پس

$$f(x)=x^۴+ax^۳=x^۳(x+a)\xrightarrow{f(-۴)=۰}(-۴)^۳(-۴+a)=۰\Rightarrow a=۴$$

بنابراین $f(x)=x^۴+۴x^۳$. اکنون ریشه‌های تابع مشتق را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۴x^۳+۱۲x^۲=۰\Rightarrow x^۲(۴x+۱۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۳\end{cases}$$

مشخص است که $x=-۳$ طول نقطهٔ مینیمم مطلق تابع است. مقدار مینیمم مطلق تابع برابر است با $f(-۳)=(-۳)^۴+۴(-۳)^۳=۸۱-۴\times۲۷=-۲۷$.

۲۵۸۱- گزینهٔ ۲ اگر از دستور $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود

$$S_۷=۸۴\Rightarrow ۸۴=\frac{۷}{۲}(۲a_۱+(۷-۱)d)$$

$$S_{۱۸}=۷۱۱\Rightarrow ۷۱۱=\frac{۱۸}{۲}(۲a_۱+(۱۸-۱)d)$$

بنابراین

$$\begin{cases}a_۱+۳d=۱۲\\۲a_۱+۱۷d=۷۹\end{cases}$$

اگر این دستگاه معادلات را حل کنیم، معلوم می‌شود که $a_۱=-۳$ و $d=۵$.

بنابراین

$$S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}(۲a_۱+(۱۱-۱)d)=\frac{۱۱}{۲}(۲(-۳)+۱۰\times۵)=۲۴۲$$

۲۵۸۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $a-c=(a-b)+(b-c)=۸$، همچنین،

$$\frac{ab-ac+bc-b^۲}{a-c}=\frac{-ac+b(a+c)-b^۲}{a-c}=\frac{-(b^۲-b(a+c)+ac)}{a-c}$$

$$=\frac{-(b-a)(b-c)}{a-c}=\frac{-(-۴)(۴)}{۸}=۲$$

۲۵۸۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $x_۱+x_۲=۳$ و $x_۱x_۲=۲m+۱$. بنابراین

$$\begin{cases}x_۱+x_۲=۳\\۳x_۱-x_۲=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۱\\x_۲=۲\end{cases}$$

در نتیجه $x_۱x_۲=۲\Rightarrow ۲m+۱=۲\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$

۲۵۸۴- گزینهٔ ۱ نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{۱}{x+۳}<\frac{x-۵}{۹}\Rightarrow\frac{۹}{x+۳}+۵-x<۰\Rightarrow\frac{۹+(۵-x)(x+۳)}{x+۳}<۰$$

$$\frac{-x^۲+۲x+۲۴}{x+۳}<۰\Rightarrow\frac{(x-۶)(x+۴)}{x+۳}>۰$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر، مجموعهٔ جواب نامعادله به‌صورت $(-۴,-۳)\cup(۶,+\infty)$ است.

x	$-\infty$		-۴		-۳		۶		$+\infty$
$\frac{(x-۶)(x+۴)}{x+۳}$		−	۰	+	ت ن	−	۰	+	

پس $a=-۴$، $b=۶$ و $ab=-۲۴$.

۲۵۸۵- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\cos x-\sin x=\sqrt{۲}\cos(x+\frac{\pi}{۴})$$

بنابراین

$$\sqrt{۲}\cos(x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{cases}x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\\x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\ ,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارتند از صفر، ۲π و $\frac{۳\pi}{۲}$.

راه‌حل دوم معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin x+۱-\cos x=۰\Rightarrow ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}+۲\sin^۲\frac{x}{۲}=۰$$

$$۲\sin\frac{x}{۲}(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})=۰$$

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow x=۰, x=۲\pi\\\sin\frac{x}{۲}=-\cos\frac{x}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۲}=\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

۲۵۸۶- گزینهٔ ۱ توجه کنید که اگر $a>۰$، آن‌گاه معادله جواب ندارد.

اگر $a\le۰$، آن‌گاه

$$\big||x-۱|-a\big|=-a$$

$$\begin{cases}|x-۱|-a=-a\\|x-۱|-a=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-۱|=۰\Rightarrow x=۱\\|x-۱|=۲a\quad(*)\end{cases}$$

اگر $a<۰$، آن‌گاه معادلهٔ $(*)$ جواب ندارد. اگر $a=۰$، آن‌گاه

$$|x-۱|=۰\Rightarrow x-۱=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین در حالتی که $a\le۰$ معادله یک جواب دارد.

۲۵۸۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$،
بنابراین

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g\,,g(x)\in D_f\}=\{x|x\neq -۲,\frac{۲x-۳}{x+۲}\neq ۱\}$$

از طرف دیگر

$$\frac{۲x-۳}{x+۲}\neq ۱\Rightarrow ۲x-۳\neq x+۲\Rightarrow x\neq ۵$$

پس $D_{fog}=\{x|x\neq -۲,x\neq ۵\}=\mathbb{R}-\{-۲,۵\}$.

بنابراین ۲− و ۵ در دامنهٔ تابع fog قرار ندارند که مجموع آن‌ها برابر ۳ است.

۲۵۸۸- گزینهٔ ۳ چون این دو منحنی در نقطهٔ $(۱,۲)$ برخورد می‌کنند، پس

$$(۱,۲)\in f\Rightarrow f(۱)=۲\Rightarrow \sqrt[۳]{a+b}=۲\Rightarrow a+b=۸$$

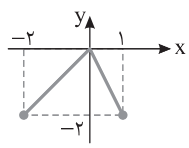
$$(۱,۲)\in f^{-۱}\Rightarrow (۲,۱)\in f\Rightarrow f(۲)=۱\Rightarrow \sqrt[۳]{۲a+b}=۱\Rightarrow ۲a+b=۱$$

در نتیجه

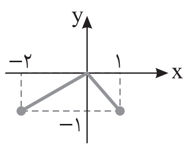
$$\begin{cases}a+b=۸\\ ۲a+b=۱\end{cases}\Rightarrow a=-۷\,,b=۱۵$$

بنابراین $۳a+b=-۶$.

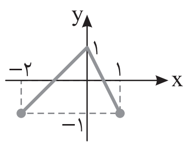
۲۵۸۹- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع f را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آید. اگر عرض نقاط نمودار به‌دست آمده را دو برابر کنیم، نمودار تابع $y=۲f(-x)$ به‌دست می‌آید. نمودار اخیر را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=۱+۲f(-x)$ به‌دست آید که به‌صورت شکل (۲) خواهد بود.



$y=۲f(-x)$



$y=f(-x)$



$y=۱+۲f(-x)$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(-۱)=f(۲)=-۱$. اگر شکل (۲) مربوط به تابع g باشد، آن‌گاه $g(-۲)=g(۱)=-۱$. از طرف دیگر،

$$g(x)=۱+۲f(-x)$$

$$g(-۲)=۱+۲f(۲)=۱-۲=-۱,\quad g(۱)=۱+۲f(-۱)=۱-۲=-۱$$

بنابراین شکل (۲) متعلق به تابع $g(x)=۱+۲f(-x)$ است.

۲۵۹۰- گزینهٔ ۳ از تساوی $\log\sqrt{۸}=a$ نتیجه می‌شود

$$\log ۲^{\frac{۳}{۲}}=a\Rightarrow \frac{۳}{۲}\log ۲=a\Rightarrow \log ۲=\frac{۲a}{۳}$$

بنابراین

$$\log ۱۲۵=\log ۵^{۳}=۳\log ۵=۳\log\frac{۱۰}{۲}$$

$$=۳(\log ۱۰-\log ۲)=۳(۱-\frac{۲a}{۳})=۳-۲a$$

۲۵۹۱- گزینهٔ ۲ چون حد مخرج صفر است و حد مورد نظر وجود دارد، پس حد صورت هم باید صفر باشد تا حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ در بیاید. در نتیجه

$$\lim_{x\to ۱}(x^{۲}-ax+b)=۰\Rightarrow ۱-a+b=۰\Rightarrow b=a-۱$$

اکنون باید حد زیر را حساب کنیم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-ax+a-۱}{۲x^{۲}-۳x+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-a+۱)}{(x-۱)(۲x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x-a+۱}{۲x-۱}=۲-a$$

بنابراین

$$۲-a=a-۴\Rightarrow a=۳$$

پس $b=۲$ و در نتیجه $a+b=۵$.

۲۵۹۲- گزینهٔ ۳ اگر در صورت کسر داده شده جملهٔ شامل $x^{۳}$ وجود داشته باشد، مقدار حد مورد نظر برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. بنابراین باید ضریب $x^{۳}$ در صورت کسر داده شده صفر باشد، یعنی $a+۱=۰$، پس $a=-۱$. در این صورت حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x^{۲}+x}{(b+۱)x^{۲}-۴}=\frac{-۲}{b+۱}$$

بنابراین $\frac{-۲}{b+۱}=۲$، یعنی $b=-۲$. به این ترتیب $a+b=-۳$.

۲۵۹۳- گزینهٔ ۳ شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=۱$ همان $f'(۱)$ است. پس،

$$f'(x)=۴x^{۳}+۲mx+۱\Rightarrow f'(۱)=۴+۲m+۱=۲\Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$$

۲۵۹۴- گزینهٔ ۲ تابع در $x=۳$ پیوسته است و

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} & x>۳\\ ۱ & x<۳\end{cases}$$

$$f'_{+}(۳)=\lim_{x\to ۳^{+}}\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}=\frac{۱}{۴}\,,\quad f'_{-}(۳)=\lim_{x\to ۳^{-}}۱=۱$$

بنابراین

$$\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۳+h)-f(۳-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}+\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۳-h)-f(۳)}{-h}$$

$$=f'_{+}(۳)+f'_{-}(۳)=\frac{۱}{۴}+۱=\frac{۵}{۴}$$

توجه کنید که می‌توانیم از قاعدهٔ هوپیتال نیز استفاده کنیم:

$$\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(۳+h)-f(۳-h)}{h}=\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f'(۳+h)+f'(۳-h)}{۱}$$

$$=f'_{+}(۳)+f'_{-}(۳)=\frac{۱}{۴}+۱=\frac{۵}{۴}$$

۲۵۹۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^{۳}x^{\frac{۱}{۲}}=x^{\frac{۷}{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۷}{۲}x^{\frac{۵}{۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{۳۵}{۴}x^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳۵}{۴}x\sqrt{x}$$

بنابراین $f''(۴)=\frac{۳۵}{۴}\times۴\times۲=۷۰$.

۲۵۹۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $f'(x)=x^{۲}+۲x+k$ ، برای اینکه تابع اکیداً صعودی باشد باید مشتق آن به ازای هر x نامنفی باشد:

$$x^{۲}+۲x+k\geq۰$$

بنابراین

$$\Delta=۴-۴k\leq۰\Rightarrow k\geq۱$$

۲۵۹۷- گزینهٔ ۴ به ازای تمام مقادیر x، باید مشتق دوم تابع نامنفی باشد:

$$f'(x)=۴x^{۳}+۳ax^{۲}+۳x$$

$$f''(x)=۱۲x^{۲}+۶ax+۳$$

برای اینکه این عبارت درجهٔ دوم همواره مثبت باشد، باید

$$\Delta=۳۶a^{۲}-۱۴۴=۳۶(a^{۲}-۴)\leq۰\Rightarrow-۲\leq a\leq۲$$

۲۵۹۸- گزینهٔ ۴ می‌دانیم در تابع درجهٔ سوم

$$f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$$

نقطهٔ عطف به‌صورت $(\frac{-b}{۳a},f(\frac{-b}{۳a}))$ است. پس

$$\frac{-b}{۳a}=۱\Rightarrow b=-۳a$$

$$-۲=f(۱)\Rightarrow a+b-۳-۱=-۲\Rightarrow a+b=۲$$

درنتیجه $a=-۱$ و $b=۳$ ،بنابراین تابع به‌صورت $f(x)=-x^{۳}+۳x^{۲}-۳x-۱$ است؛ برای یافتن نقطهٔ ماکزیمم نسبی این تابع ابتدا مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=-۳x^{۲}+۶x-۳=-۳(x^{۲}-۲x+۱)=-۳(x-۱)^{۲}$$

مشخص است که همواره $f'(x)\leq۰$. پس تابع اکیداً نزولی است و اکسترمم نسبی ندارد.

۲۵۹۹- گزینهٔ ۲ با توجه به ضابطهٔ داده شده می‌توان نتیجه گرفت که تابع از نقطهٔ $(۰,۲)$ می‌گذرد، پس مجانب افقی تابع خط $y=۲$ است. بنابراین

$$۲=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=a\Rightarrow a=۲$$

همچنین تابع $f(x)=\frac{۲x^{۲}+bx+۸}{x^{۲}+۴}$ بر محور x مماس است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد:

$$۲x^{۲}+bx+۸=۰\xrightarrow{\Delta=۰}b^{۲}-۶۴=۰\Rightarrow b=\pm۸$$

چون نمودار تابع در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور x مماس است، می‌توان نتیجه گرفت $b<۰$. پس مقدار $b=-۸$ قابل قبول است. بنابراین $a+b=-۶$.

۲۶۰۰- گزینهٔ ۱ مقدار تابع f' در نقطه‌های -۱ و ۵ برابر صفر است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌های به طول -۱ و ۵ موازی محور x است. روی بازه‌های $(-\infty,-۱)$ و $(۵,+\infty)$ علامت f' منفی است، پس تابع f روی این بازه‌ها اکیداً نزولی است. روی بازهٔ $(-۱,۵)$ علامت f' مثبت است، پس تابع f روی این بازه اکیداً صعودی است. توجه کنید که فقط نمودار گزینهٔ (۱) این ویژگی‌ها را دارد.

۲۶۰۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$S_{۲۰}=۳S_{۱۲}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲}(۲a_{۱}+۱۹d)=۳\times\frac{۱۲}{۲}(۲a_{۱}+۱۱d)$$

$$۲۰a_{۱}+۱۹۰d=۳۶a_{۱}+۱۹۸d\Rightarrow۱۶a_{۱}=-۸d\Rightarrow d=-۲a_{۱}$$

از طرف دیگر، $a_{۳}=۶\Rightarrow a_{۱}+۲d=۶\Rightarrow a_{۱}-۴a_{۱}=۶\Rightarrow a_{۱}=-۲$

پس

$$\begin{cases}a_{۱}=-۲\\ d=۴\end{cases}\Rightarrow a_{۱۰}=a_{۱}+۹d=-۲+۹\times۴=۳۴$$

۲۶۰۲- گزینهٔ ۲ ابتدا مخرج کسرها را با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر گویا می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{(\sqrt[۳]{۲}-۱)(\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱)}=\frac{\sqrt[۳]{۲}-۱}{۲-۱}=\sqrt[۳]{۲}-۱$$

$$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{۲}+۱)(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}+۱)}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲}+۱)}{۲+۱}=\sqrt[۳]{۲}+۱$$

بنابراین $A=\sqrt[۳]{۲}-۱+\sqrt[۳]{۲}+۱=۲\sqrt[۳]{۲}$.

۲۶۰۳- گزینهٔ ۳ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ زیر باشند،

$$x^{۲}-(۲m-۳)x+۲n+۲=۰$$

آن‌گاه

$$\alpha+\beta=۲m-۳,\quad\alpha\beta=۲n+۲$$

همچنین اگر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ جواب‌های معادلهٔ $x^{۲}-nx+m+۱=۰$ باشند، آن‌گاه

$$x_{۱}+x_{۲}=n,\quad x_{۱}x_{۲}=m+۱$$

با توجه به $\alpha=x_{۱}+۱$ و $\beta=x_{۲}+۱$ نتیجه می‌شود

$$\alpha+\beta=x_{۱}+x_{۲}+۲$$

$$\alpha\beta=(x_{۱}+۱)(x_{۲}+۱)=x_{۱}x_{۲}+x_{۱}+x_{۲}+۱$$

بنابراین

$$\begin{cases}۲m-۳=n+۲\\ ۲n+۲=m+۱+n+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲m-۵=n\\ m=n\end{cases}$$

پس

$$۲m-۵=m\Rightarrow m=۵,\quad n=۵$$

بنابراین $m+n=۱۰$.

۲۶۰۴- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $x^{۲}=t$ ، آن‌گاه $x=\pm\sqrt{t}$ ، $t\geq۰$ و معادله به شکل زیر درمی‌آید

$$t^{۲}+۲mt+m^{۲}-۱=۰\quad(*)$$

در این معادله

$$\Delta=۴m^{۲}-۴(m^{۲}-۱)=۴>۰$$

بنابراین معادلهٔ $(*)$ به ازای هر مقدار m دو جواب حقیقی دارد. اگر هر دو جواب این معادله منفی باشند، آن‌گاه معادلهٔ اولیه جواب حقیقی نخواهد داشت. بنابراین اگر $t_{۱}$ و $t_{۲}$ جواب‌های معادلهٔ $(*)$ باشند، باید

$$t_{۱}+t_{۲}<۰\Rightarrow-۲m<۰\Rightarrow m>۰$$

$$t_{۱}t_{۲}>۰\Rightarrow m^{۲}-۱>۰\Rightarrow m<-۱\ \text{یا}\ m>۱$$

بنابراین اگر $m>۱$ ، آن‌گاه معادلهٔ اولیه جواب حقیقی ندارد.

۲۶۰۵- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\cos^2 x-\cos^4 x=\cos^2 x(1-\cos^2 x)=\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{8}$$

بنابراین

$$\tan^2 x+\cot^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

صورت کسر بالا را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$$

در نتیجه

$$\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1-\frac{2}{8}}{\frac{1}{8}}=6$$

۲۶۰۶- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=-3$$

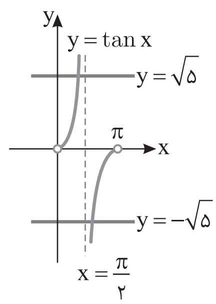
$$\frac{1+\tan x}{1-\tan x}+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=-3$$

$$(1+\tan x)^2+(1-\tan x)^2=-3(1-\tan^2 x)$$

$$2+2\tan^2 x=-3+3\tan^2 x$$

$$\tan^2 x=5\Rightarrow \tan x=\pm\sqrt{5}$$

بنابراین با توجه به نمودار تابع $y=\tan x$ معادله دو جواب در بازهٔ $(0,\pi)$ دارد.



۲۶۰۷- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر $-1\le a\le 1$، آن‌گاه $|a|\le 1$. بنابراین نامعادله را به‌صورت $\left|\frac{x-2}{x-3}\right|\le 1$ می‌نویسیم. بنابراین

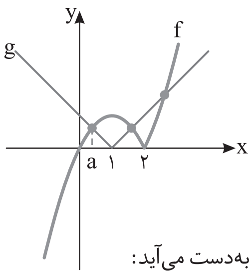
$$\frac{|x-2|}{|x-3|}\le 1\Rightarrow |x-2|\le|x-3|,\quad x\ne 3$$

$$|x-2|^2\le|x-3|^2\Rightarrow x^2-4x+4\le x^2-6x+9\Rightarrow x\le\frac{5}{2}$$

بنابراین $(-\infty,\frac{5}{2}]$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است و در نتیجه $a=5$، $b=2$. پس $a+b=7$.

۲۶۰۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\ge 2\\ -x^2+2x & x\le 2\end{cases}$$



پس نمودار تابع‌های f و g به‌صورت مقابل است. کمترین طول نقطه‌های برخورد برابر a است. چون $a<1$، پس

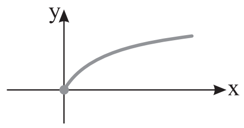
$$f(x)=-x^2+2x$$

$$g(x)=-x+1$$

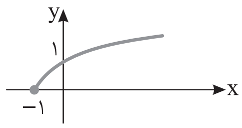
مقدار a از حل معادلهٔ $-x^2+2x=-x+1$ به‌دست می‌آید:

$$x^2-3x+1=0\Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ (\text{غ.ق.ق.}),\quad x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

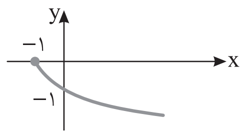
۲۶۰۹- گزینهٔ ۱ مراحل رسم نمودار به‌صورت زیر است.



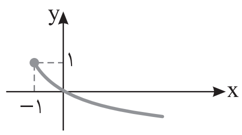
$y=\sqrt{x}$



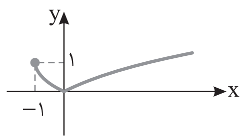
$y=\sqrt{x+1}$



$y=-\sqrt{x+1}$



$y=1-\sqrt{x+1}$



$y=|1-\sqrt{x+1}|$

۲۶۱۰- گزینهٔ ۱ چون تابع f اکیداً صعودی است، پس از $f^{-1}(4x-3)>f^{-1}(x^2)$ نتیجه می‌شود

$$4x-3>x^2\Rightarrow x^2-4x+3<0$$

$$(x-1)(x-3)<0\Rightarrow 1<x<3$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله شامل عدد صحیح ۲ است.

۲۶۱۱- گزینهٔ ۳ اگر $x<0$، باید وارون تابع $g(x)=\frac{2x+x}{2}$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=\frac{3x}{2}\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{2x}{3},\quad x<0$$

اگر $x\ge 0$، باید وارون تابع $h(x)=\frac{2x-x}{2}$ را پیدا کنیم:

$$h(x)=\frac{x}{2}\Rightarrow h^{-1}(x)=2x,\quad x\ge 0$$

بنابراین وارون تابع به‌صورت زیر است:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{2x}{3} & x<0\\ 2x & x\ge 0\end{cases}$$

که همان $f^{-1}(x)=\frac{4x+2|x|}{3}$ است. بنابراین $a=4$، $b=3$ و $a+b=7$.

۲۶۱۲- گزینهٔ ۴ معادلهٔ داده شده را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_{۲^۲}(xy)+\log_{۲^۳}\frac{x}{y}=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}\log_۲(xy)+\frac{۱}{۳}\log_۲\frac{x}{y}=۰$$

$$۳\log_۲(xy)+۲\log_۲\frac{x}{y}=۰\Rightarrow\log_۲(xy)^۳+\log_۲(\frac{x}{y})^۲=۰$$

$$\log_۲((x^۳y^۳)(\frac{x}{y})^۲)=۰\Rightarrow x^۵y=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{x^۵}=x^{-۵}$$

بنابراین

$$\log_x y=\log_x x^{-۵}=-۵\log_x x=-۵$$

۲۶۱۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۱$ و حد مورد نظر به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ است. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^۲(x)-۱}{۲f^۲(x)-۳f(x)+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(x)-۱)(f(x)+۱)}{(f(x)-۱)(۲f(x)-۱)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+۱}{۲f(x)-۱}=\frac{۱+۱}{۲-۱}=۲$$

۲۶۱۴- گزینهٔ ۲ از اتحاد $۱-\cos ۲\alpha=۲\sin^۲\alpha$ استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱-\cos(۲kx)}{۱-\cos ۲x}=\lim_{x\to۰}\frac{۲\sin^۲(kx)}{۲\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to۰}((\frac{\sin kx}{kx})^۲\times(\frac{x}{\sin x})^۲\times k^۲)=۱^۲\times۱^۲\times k^۲=k^۲$$

بنابراین $k^۲=۲k$ و در نتیجه $k=۰$ یا $k=۲$. پس مجموع مقدارهای ممکن برای k برابر ۲ است.

۲۶۱۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{x^۲-۱}{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x^۲-۳x+۲)}=\frac{x+۱}{(x-۱)(x-۲)}$$

پس

$$\lim_{x\to۱^-}\frac{x^۲-۱}{x^۳-۴x^۲+۵x-۲}=\lim_{x\to۱^-}\frac{x+۱}{(x-۱)(x-۲)}=+\infty$$

۲۶۱۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که شیب خط d برابر است با ۱-. بنابراین شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=۲$ برابر ۱- است. یعنی $f'(۲)=-۱$. در نتیجه

$$g(x)=f^۲(x)\Rightarrow g'(x)=۲f(x)f'(x)$$

$$g'(۲)=۲f(۲)f'(۲)=۲\times۳\times(-۱)=-۶$$

۲۶۱۷- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{۵h}=\frac{۳}{۵}\lim_{h\to۰}\frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{۳h}=\frac{۳}{۵}f'(۲)$$

از طرف دیگر، $f'(x)=۳x^۲-۲$، پس $f'(۲)=۱۰$. بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با $\frac{۳}{۵}\times۱۰=۶$.

۲۶۱۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g'(x)=f(x)+xf'(x)$$

$$g''(x)=f'(x)+f'(x)+xf''(x)=۲f'(x)+xf''(x)$$

بنابراین $g''(۲)=۲f'(۲)+۲f''(۲)=۴+۴=۸$.

۲۶۱۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که $D_f=[۳,۵]$ و

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۳}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۵-x}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\sqrt{x-۳}=\sqrt{۵-x}\Rightarrow x-۳=۵-x\Rightarrow x=۴$$

پس $(۴,۲)$ نقطهٔ بحرانی تابع f است و مجموع طول و عرض آن برابر ۶ است.

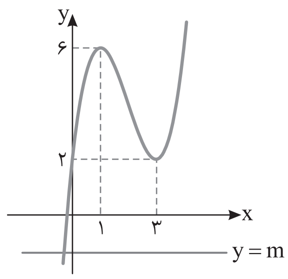
۲۶۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲x+۹=۳(x^۲-۴x+۳)=۳(x-۱)(x-۳)$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow x=۱, x=۳$$

جدول تغییرات تابع f به‌صورت زیر است:

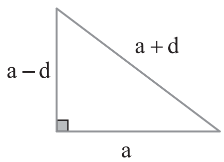
x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
f		↗	۶ max نسبی	↘	۲ min نسبی	↗	



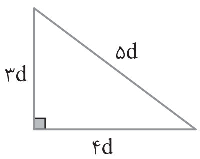
پس نمودار تقریبی تابع f به‌صورت روبه‌رو است. واضح است که اگر معادلهٔ $f(x)=m$ یک ریشه داشته باشد، باید m کمتر از مقدار مینیمم نسبی تابع یا بیشتر از مقدار ماکزیمم نسبی آن باشد، یعنی $m>۶$ یا $m<۲$.

۲۶۲۱- گزینهٔ ۲ طول ضلع‌های مثلث را مطابق شکل $a-d, a, a+d$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$(a+d)^۲=a^۲+(a-d)^۲\Rightarrow a=۴d$$



بنابراین طول ضلع‌های مثلث $۳d, ۴d, ۵d$ هستند. پس مساحت مثلث $S=\frac{۱}{۲}\times۳d\times۴d=۶d^۲$ و محیط آن $P=۱۲d$ است.



مساحت مثلث، واسطهٔ هندسی بین وتر و محیط است. پس

$$S^۲=P\times(۵d)\Rightarrow ۳۶d^۴=۱۲d\times۵d\Rightarrow d=\sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با $S=۶d^۲=۱۰$.

۲۶۲۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sqrt{۵\sqrt[۴]{۳}}=\sqrt[۴]{۵\sqrt{x}}\Rightarrow ۵^{\frac{۱}{۲}}۳^{\frac{۱}{۸}}=۵^{\frac{۱}{۴}}x^{\frac{۱}{۸}}$$

اگر دو طرف این تساوی را به توان ۸ برسانیم، معلوم می‌شود که

$$۵^۴\times۳=۵^۲\times x\Rightarrow x=۵^۲\times۳=۷۵$$

۲۶۲۳- گزینهٔ ۴ ابتـدا توجه کنیـد که $x_1+x_2=-6$ و $x_1x_2=-3$.

بنابراین

$$(\frac{x_1}{x_2}+x_2)(\frac{x_2}{x_1}+x_1)=1+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}+x_1x_2$$
$$=1+\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1x_2}+x_1x_2=1+\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1x_2}+x_1x_2$$
$$=1+\frac{(-6)^3-3(-3)(-6)}{-3}-3=88$$

۲۶۲۴- گزینهٔ ۲ ابتـدا دقت کنید که اگـر x جواب معادله باشـد، آن‌گاه $x>0$. اکنون دو طرف معادلهٔ داده شده را به توان دو می‌رسانیم:

$$x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=8\Rightarrow\frac{x^4}{x^2-1}+2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=8$$

بنابراین اگر $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$، آن‌گاه

$$y^2+2y=8\Rightarrow(y+1)^2=9\xrightarrow{y>0}y+1=3\Rightarrow y=2$$

در نتیجه

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=2\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^4=4(x^2-1)$$
$$x^4-4x^2+4=0\Rightarrow(x^2-2)^2=0\Rightarrow x^2=2\xrightarrow{x>0}x=\sqrt{2}$$

پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک جواب دارد.

۲۶۲۵- گزینهٔ ۲ راه‌حـل اول چندجملـه‌ای $P(x)$ را بـه شـکل زیـر می‌نویسیم:

$$P(x)=ax^3+4x^2-14x+10-a=a(x^3-1)+4x^2-14x+10$$
$$=a(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(4x-10)$$
$$=(x-1)(ax^2+(a+4)x+a-10)$$

برای اینکه چندجمله‌ای $P(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، باید چندجمله‌ای $Q(x)=ax^2+(a+4)x+a-10$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد. پس

$$Q(1)=0\Rightarrow a+a+4+a-10=0\Rightarrow a=2$$

راه‌حل دوم باید $P(1)=0$ و $P'(1)=0$. بنابراین

$$P'(x)=3ax^2+8x-14$$
$$P'(1)=3a+8-14=0\Rightarrow a=2$$

۲۶۲۶- گزینهٔ ۴ می‌توان نوشت

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}=1\Rightarrow\frac{\cos x\sin 3x+\sin x\cos 3x}{\sin x\cos x}=1$$
$$\frac{\sin(x+3x)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=1\Rightarrow\frac{\sin 4x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}$$

بنابرایـن $\cos 2x=\frac{1}{4}$. اکنـون توجـه کنید که $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

پس $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{3}{8}$.

۲۶۲۷- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+\cos x-1=0\Rightarrow 2-2\cos^2 x+\cos x-1=0$$
$$2\cos^2 x-\cos x-1=0\Rightarrow(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر هستند

$$\cos x=1\Rightarrow x=0,\quad x=2\pi$$
$$\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3},\quad x=\frac{4\pi}{3}$$

پس مجموع جواب‌های بالا برابر است با 4π.

۲۶۲۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(g(x))=\frac{3x-2}{2x-1}\Rightarrow f(\frac{3}{2x})=\frac{3x-2}{2x-1}$$

اگر در این تساوی به جای x قرار دهیم $\frac{3}{2x}$، به‌دست می‌آید

$$f(x)=\frac{3\times\frac{3}{2x}-2}{2\times\frac{3}{2x}-1}=\frac{9-4x}{6-2x}$$

در نتیجه

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{9-4x}{6-2x}+\frac{3}{2x}=\frac{4x^2-6x-9}{2x^2-6x}$$

۲۶۲۹- گزینهٔ ۲ اگر نمـودار تابع $y=\sqrt{-x}$ را دو واحـد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x+2)}=\sqrt{-x-2}$ بەدسـت می‌آیـد. اگر نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-2}$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را مجدداً دو واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{(x+2)-2}=\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید.

۲۶۳۰- گزینهٔ ۲ قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع f^{-1} است. پس باید f و f^{-1} برابر باشند. ضابطهٔ f^{-1} را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\sqrt[3]{a+bx^3}\Rightarrow y^3=a+bx^3\Rightarrow x^3=\frac{y^3-a}{b}$$
$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{b}y^3-\frac{a}{b}}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{b}x^3-\frac{a}{b}}$$

از تسـاوی $f(x)=f^{-1}(x)$ نتیجه می‌شود $\sqrt[3]{a+bx^3}=\sqrt[3]{-\frac{a}{b}+\frac{1}{b}x^3}$.

پـس $a=-\frac{a}{b}$ و $b=\frac{1}{b}$ و در نتیجـه $b=\pm1$. اگـر $b=1$، آن‌گاه $a=0$ که قابل قبول نیست. پس $b=-1$.

۲۶۳۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$2^a=3\Rightarrow a=\log_2 3\Rightarrow\frac{1}{a}=\log_3 2$$
$$3^b=8\Rightarrow b=\log_3 8$$

بنابراین $b+\frac{1}{a}=\log_3 8+\log_3 2=\log_3 16$ و در نتیجه

$$3^{b+\frac{1}{a}}=3^{\log_3 16}=16$$

۲۶۳۲- گزینهٔ ۱ با استفاده از خاصیت $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$ معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{\log x}{\log 2}+\frac{\log x}{\log 5}=2\Rightarrow \log x\left(\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 5}\right)=2$$

$$\log x\left(\frac{\log 5+\log 2}{\log 2\times\log 5}\right)=2\Rightarrow \log x\left(\frac{1}{\log 2\times\log 5}\right)=2$$

$$\log x=2\log 2\times\log 5=\log 4\times\log 5$$

$$x=10^{\log 4\times\log 5}=(10^{\log 4})^{\log 5}=4^{\log 5}$$

۲۶۳۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{(a+2)x^2}=\frac{a}{a+2}$$

پس

$$\frac{a}{a+2}=3\Rightarrow a=-3$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{-3x^2+x+4}{-x^2-3x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(-3x+4)}{(x+1)(-x-2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-3x+4}{-x-2}=-7$$

۲۶۳۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** با توجه به تساوی‌های $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}=1$ می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+\tan 5x}{\sin 2x+\tan 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}+\frac{\tan 5x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\tan 4x}{x}}$$

$$=\frac{3\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)+5\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 5x}{5x}\right)}{2\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)+4\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 4x}{4x}\right)}=\frac{3+5}{2+4}=\frac{4}{3}$$

راه‌حل دوم از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+\tan 5x}{\sin 2x+\tan 4x}=\lim_{x\to0}\frac{3x+5x}{2x+4x}=\lim_{x\to0}\frac{8x}{6x}=\frac{4}{3}$$

راه‌حل سوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+\tan 5x}{\sin 2x+\tan 4x}=\lim_{x\to0}\frac{3\cos 3x+5(1+\tan^2 5x)}{2\cos 2x+4(1+\tan^2 4x)}=\frac{3+5}{2+4}=\frac{4}{3}$$

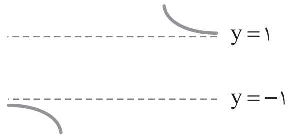
۲۶۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که خط‌های $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند. از طرف دیگر اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}>1$$

و اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x}{-x-1}=-1+\frac{1}{x+1}<-1$$

پس نمودار تابع f در $+\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد و در $-\infty$ پایین مجانب افقی آن قرار دارد.



۲۶۳۶- گزینهٔ ۴ برای آنکه تابع f در نقطهٔ $x=0$ پیوسته باشد، می‌بایست $\lim_{x\to0}f(x)$ برابر a باشد. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، حد مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(2\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-1}{x}$$

اکنون دقت کنید که

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2\cos x-1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2\cos x-1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

پس $\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-1}{x}$ وجود ندارد، بنابراین هیچ مقداری برای a پیدا نمی‌شود. توجه کنید که حد تابع f در $x=0$ را می‌توانیم به کمک هم‌ارزی‌های مثلثاتی به‌طور ساده‌تری به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x-x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

به همین ترتیب

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin 2x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x-x}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

۲۶۳۷- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[-1,2]$ برابر $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$ است: $\frac{f(2)-f(-1)}{3}=\frac{6-0}{3}=2$. آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطهٔ a برابر $f'(a)$ است.

$$f'(x)=3x^2-1\Rightarrow f'(a)=3a^2-1$$

بنابراین

$$3a^2-1=2\Rightarrow 3a^2=3\Rightarrow a=\pm1$$

پس نقطهٔ $x=1$ جواب مسئله است.

۲۶۳۸- گزینهٔ ۳ با استفاده از قواعد مشتق‌گیری، مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=2\times2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)\times\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$$

بنابراین

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۶۳۹- گزینهٔ ۲ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=x^3-3x^2-4x$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x(x^2-3x-4)=0\Rightarrow x=0,\ x=-1,\ x=4$$

بنابراین کمترین مقدار تابع بین مقادیر زیر است:

$$f(0)=0,\quad f(-1)=-\frac{3}{4},\quad f(4)=-32$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

پس کمترین مقدار تابع برابر ۳۲- است.

۲۶۴۰- گزینهٔ ۳ چون تابع f همه‌جا دو بار مشتق‌پذیر است، طول نقطهٔ عطف آن ریشهٔ معادلهٔ $f''(x)=0$ است. توجه کنید که

$$f'(x)=3ax^2+6x\Rightarrow f''(x)=6ax+6$$

$$f''(-1)=0\Rightarrow -6a+6=0\Rightarrow a=1$$

بنابراین $f(x)=x^3+3x^2+2$. چون نقطهٔ عطف روی نمودار تابع است، پس عرض آن برابر است با $f(-1)=-1+3+2=4$.

۲۶۴۱- گزینهٔ ۱ اگر دو عدد را a و b بنامیم، واسطهٔ حسابی آن‌ها $\frac{a+b}{2}$ و واسطهٔ هندسی آن‌ها $\pm\sqrt{ab}$ است. چون دو عدد مثبت هستند، پس

$$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{3}{\sqrt{8}}\Rightarrow\frac{(a+b)^2}{4ab}=\frac{9}{8}\Rightarrow 8(a+b)^2=36ab$$

$$2a^2+2b^2-5ab=0\Rightarrow(2a-b)(a-2b)=0\Rightarrow\begin{cases}b=2a\Rightarrow\frac{b}{a}=2\\ a=2b\Rightarrow\frac{a}{b}=2\end{cases}$$

بنابراین نسبت عدد بزرگ‌تر به عدد کوچک‌تر برابر با ۲ است.

۲۶۴۲- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول فرض می‌کنیم $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ و طرفین تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$x^3=(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3+(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\underbrace{(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})}_{x}$$

$$x^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\underbrace{\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}}_{-1}x$$

بنابراین

$$x^3=4-3x\Rightarrow x^3+3x-4=0$$

از حل این معادله مقدار x را به‌دست می‌آوریم:

$$x^3+3x-4=x^3-1+3x-3=(x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)$$

$$=(x-1)\underbrace{(x^2+x+4)}_{\Delta<0}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$

راه‌حل دوم می‌دانیم اگر $a+b+c=0$، آن‌گاه $a^3+b^3+c^3=3abc$، بنابراین

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\Rightarrow\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+(-x)=0$$

$$2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}-x^3=3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}(-x)$$

پس از ساده کردن مجدداً به معادلهٔ $x^3+3x-4=0$ می‌رسیم که در راه‌حل اول آن را حل کرده‌ایم.

۲۶۴۳- گزینهٔ ۳ خط $(5-k)y+2x=3$ محور x را در نقطهٔ $(\frac{3}{2},0)$ قطع می‌کند. این نقطه روی خط $mx-y=-2$ نیز هست. پس

$$m(\frac{3}{2})-0=-2\Rightarrow m=-\frac{4}{3}$$

چون دو خط بر هم عمودند، حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها ۱- است، پس

$$m\times(\frac{-2}{5-k})=-1\Rightarrow-\frac{4}{3}\times\frac{-2}{5-k}=-1\Rightarrow k=\frac{23}{3}$$

بنابراین $k-m=9$.

۲۶۴۴- گزینهٔ ۴ واضح است که $x=1$ جواب معادله است. پس $x-1$ عامل معادله است

$$(x^3-1)+(mx-m)=0\Rightarrow(x-1)(x^2+x+1)+m(x-1)=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1+m)=0$$

برای اینکه معادله سه جواب متمایز داشته باشد، باید معادلهٔ $x^2+x+m+1=0$ دو جواب داشته باشد که برابر ۱ نباشند. بنابراین

$$\Delta=1-4(m+1)>0\Rightarrow-4m-3>0\Rightarrow m<-\frac{3}{4}$$

$$1^2+1+m+1\neq0\Rightarrow m\neq-3$$

پس $m\in(-\infty,-\frac{3}{4})-\{-3\}$.

۲۶۴۵- گزینهٔ ۲ برای حل این مسئله باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\frac{2}{x}+x>3\Rightarrow\frac{2}{x}+x-3>0$$

این نامعادله به‌صورت $\frac{x^2-3x+2}{x}>0$ درمی‌آید. چون

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

پس جدول تعیین علامت به شکل زیر است:

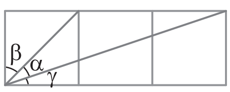
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$\frac{x^2-3x+2}{x}$		$-$	ت ن	$+$	0	$-$	0	$+$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(0,1)\cup(2,+\infty)$ است. در نتیجه $a=0$، $b=2$ و $a+b=2$.

۲۶۴۶- گزینهٔ ۲ با نمادگذاری شکل زیر، $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$. بنابراین $\alpha=90^\circ-(\beta+\gamma)$ و در نتیجه

$$\cos\alpha=\cos(90^\circ-(\beta+\gamma))=\sin(\beta+\gamma)=\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$



۲۶۴۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\tan(2x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب کلی معادله به‌صورت زیر است

$$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

۲۶۴۸- گزینهٔ ۳ اگر $|x+1|\le 7$، آن‌گاه $-7\le x+1\le 7$، یعنی $-8\le x\le 6$. اگر $0\le x\le 6$، آن‌گاه عبارت مورد نظر برابر است با $A=x^2-4x$ که حدود آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A=x^2-4x=(x-2)^2-4$$

بنابراین

$$0\le x\le 6\Rightarrow -2\le x-2\le 4\Rightarrow 0\le (x-2)^2\le 16\Rightarrow -4\le A\le 12$$

اگر $-8\le x\le 0$، آن‌گاه عبارت مورد نظر برابر است با $A=-x^2-4x$ که حدود آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A=-x^2-4x=-(x+2)^2+4$$

$$-8\le x\le 0\Rightarrow -6\le x+2\le 2\Rightarrow 0\le (x+2)^2\le 36$$

$$-36\le -(x+2)^2\le 0\Rightarrow -32\le A\le 4$$

پس بیشترین مقدار A برابر ۱۲ و کمترین مقدار آن برابر ۳۲- است و مجموع این دو مقدار برابر ۲۰- است.

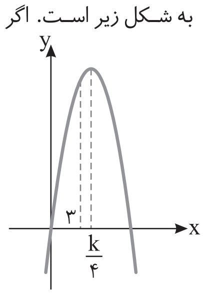
۲۶۴۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{(x^2-4)+(3ax+6a)}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)+3a(x+2)}{x+2}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2+3a)}{x+2}=x+3a-2\ ,\quad x\ne -2$$

برای اینکه تابع همانی باشد، باید $f(x)=x$، پس $3a-2=0$ و در نتیجه $a=\frac{2}{3}$. بنابراین $f(3a)=3a=2$.

۲۶۵۰- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $y=-2x^2+kx$ به شکل زیر است. اگر $x=3$ قبل از طول رأس سهمی قرار گیرد یا بر آن منطبق شود، تابع یک‌به‌یک است. بنابراین $3\le\frac{k}{4}$ پس $k\ge 12$.



۲۶۵۱- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$y=3^{\frac{2-x}{2}}-1\Rightarrow y+1=3^{\frac{2-x}{2}}$$

$$\log_3(y+1)=\frac{2-x}{2}\Rightarrow x=2-2\log_3(y+1)$$

$$=\log_3 3^2-\log_3(y+1)^2=\log_3\left(\frac{3}{y+1}\right)^2$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\log_3\left(\frac{3}{x+1}\right)^2$.

۲۶۵۲- گزینهٔ ۲ از طرفین معادله در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\log 2^{x+1}=\log 5^{x-1}\Rightarrow (x+1)\log 2=(x-1)\log 5$$

$$x\log 2-x\log 5=-\log 2-\log 5$$

$$x(\log 2-\log 5)=-(\log 2+\log 5)=-\log 10=-1$$

از طرف دیگر $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-\log 2$. پس

$$x(\log 2-1+\log 2)=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{2\log 2-1}=\frac{-1}{\log 4-1}=\frac{1}{1-\log 4}$$

۲۶۵۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$، آن‌گاه

$$f'(\frac{\pi}{6})=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$$

$$g'(\frac{\pi}{6})=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$$

بنابراین

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}}{\dfrac{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}}=\frac{f'(\frac{\pi}{6})}{g'(\frac{\pi}{6})}$$

از طرف دیگر

$$f'(x)=\cos x\Rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g'(x)=-\sin x\Rightarrow g'(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$$

پس $L=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$.

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-\frac{1}{2}}{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{-\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$$

۲۶۵۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+2x+1}{3x-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x}=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-2x+1}{3x+x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}$$

بنابراین خطوط $y=3$ و $y=\frac{1}{2}$ مجانب‌های افقی نمودار تابع f هستند و فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر برابر $\frac{5}{2}$ است.

۲۶۵۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax-a+3)=a-a+3=3$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=2$$

بنابراین تابع f به ازای هیچ مقدار a، در نقطهٔ $x=1$ پیوسته نیست.

۲۶۵۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $g'(x)=1+3x^2f'(x^3)$.
بنابراین $g'(2)=1+3\times4f'(8)=1+12\times2=25$.

۲۶۵۷- گزینهٔ ۱ در $x=0$ تابع مشتق دارد، زیرا

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to0}\sqrt[3]{x}=0$$

اگر $x\neq0$، آن‌گاه مشتق تابع به‌صورت $f'(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ محاسبه می‌شود.

بنابراین مشتق تابع به ازای هر x حقیقی تعریف می‌شود و در نتیجه $D_{f'}=\mathbb{R}$.

۲۶۵۸- گزینهٔ ۴ طول نقطهٔ عطف تابع f جواب معادلهٔ $f''(x)=0$ است. (به‌شرطی که f'' در اطراف آن تغییر علامت دهد.) توجه کنید که

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\Rightarrow f''(x)=6x+2a$$
$$f''(-2)=0\Rightarrow -12+2a=0\Rightarrow a=6$$

چون $x=1$ طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، پس $f'(1)=0$، در نتیجه

$$3+12+b=0\Rightarrow b=-15$$

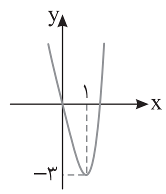
به این ترتیب $f(x)=x^3+6x^2-15x+2$ و مقدار اکسترمم نسبی مورد نظر برابر است با $f(1)=-6$.

۲۶۵۹- گزینهٔ ۲ نقاط اکسترمم نسبی تابع f را پیدا می‌کنیم و با توجه به اینکه نمودار تابع f از مبدأ می‌گذرد، این نمودار را رسم می‌کنیم.

$$f'(x)=4x^3-4\ ,\quad f'(x)=0\Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-3 min	$\nearrow$	

پس برد تابع f بازهٔ $[-3,+\infty)$ است.

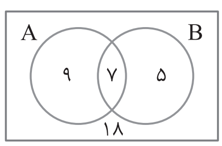


۲۶۶۰- گزینهٔ ۱ طبق نمودار $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$، پس گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند. همچنین طبق نمودار، تابع یک ریشهٔ ساده $(x=0)$ و یک ریشهٔ مکرر دارد، پس گزینهٔ (۳) نیز رد می‌شود (تابع گزینهٔ (۳) دو ریشهٔ سادهٔ $x=0$ و $x=1$ را دارد).

۲۶۶۱- گزینهٔ ۴ اگر گروه ورزش را با A و گروه روزنامهٔ دیواری را با B نمایش دهیم، آن‌گاه $n(A)=16$، $n(B)=12$ و $n(A-B)=9$. بنابراین

$$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=16-9=7$$
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=16+12-7=21$$

بنابراین $39-21=18$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۲۶۶۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{5}}\times2^{\frac{4}{15}}\times2^{\frac{4}{3}}=2^2=4$$

بنابراین

$$(2A)^{-\frac{1}{3}}=8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}=0/5$$

۲۶۶۳- گزینهٔ ؟ ابتدا توجه کنید که معادلهٔ

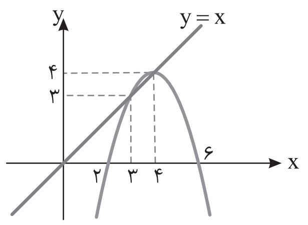
$$(2m-1)x^2+6x+m-2=0$$

به ازای $m=\frac{1}{2}$ درجهٔ دوم نیست و به صورت $6x-\frac{3}{2}=0$ درمی‌آید که تنها جواب آن $\frac{1}{4}$ است. چون $\frac{1}{2}$ در هر چهار گزینه وجود دارد، پس هیچ کدام از گزینه‌ها جواب نیستند ولی منظور طراح سؤال حالتی بوده که دلتای معادله مثبت است. در این صورت

$$\Delta=36-4(2m-1)(m-2)>0\Rightarrow(m+1)(2m-7)<0\Rightarrow-1<m<3/5$$

یعنی منظور طراح، گزینهٔ (۳) بوده است.

۲۶۶۴- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** اگر نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را سه واحد به طرف xهای مثبت سپس دو واحد به طرف yهای منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=-(x-3)^2+2(x-3)+5-2$ به دست می‌آید. ساده شدهٔ ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=-x^2+8x-12$ است. بنابراین می‌خواهیم بازه‌ای را معین کنیم که در آن بازه نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد. به نمودار این تابع و خط $y=x$ توجه کنید. در بازهٔ $(3,4)$ نمودار تابع f بالای این خط قرار دارد.



راه‌حل دوم برای اینکه بدانیم در چه بازه‌ای نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار دارد، کافی است نامعادلهٔ $f(x)>x$ را حل کنیم:

$$-x^2+8x-12>x\Rightarrow x^2-7x+12<0$$
$$(x-3)(x-4)<0\Rightarrow3<x<4$$

راه‌حل سوم در تابع $f(x)=-x^2+8x-12$ مقادیر $f(3)$ و $f(4)$ را به دست می‌آوریم: $f(3)=-9+24-12=3\ ,\quad f(4)=-16+32-12=4$

بنابراین در نقاط $x=3$ و $x=4$ نمودار تابع f بالای خط $y=x$ قرار ندارد، بلکه منطبق بر این خط است. پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) که شامل عدد ۳ یا ۴ هستند، جواب نیستند و گزینهٔ (۱) جواب است.

۲۶۶۵- گزینهٔ ۲ مجموع اعداد طبیعی دو رقمی مضرب هفت به صورت $S=14+21+\cdots+98$ است. به راحتی می‌توانید این اعداد را جمع بزنید و به عدد ۷۲۸ برسید. البته می‌توانید از فرمول مجموع جملات دنبالهٔ حسابی استفاده کنید. در این مجموع جملهٔ اول برابر ۱۴، جملهٔ آخر برابر ۹۸ و تعداد جملات برابر ۱۳ است. پس $S=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{13}{2}(14+98)=728$.

۲۶۶۶- گزینهٔ (۴) فرض کنید بهروز به تنهایی در t ساعت این کار را انجام می‌دهد. بنابراین فرهاد در $t+۹$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. پس بهروز در هر ساعت $\frac{۱}{t}$ از این کار و فرهاد در هر ساعت $\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. اگر هر دو با هم کار کنند، در هر ساعت به مقدار $\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}$ از این کار را انجام می‌دهند. چون با هم در ۲۰ ساعت کار را تمام می‌کنند، پس در یک ساعت $\frac{۱}{۲۰}$ کار را با هم انجام می‌دهند. بنابراین

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow ۲۰(t+۹)+۲۰t=t(t+۹)\Rightarrow t^{۲}-۳۱t-۱۸۰=۰$$

$$(t-۳۶)(t+۵)=۰\Rightarrow t=۳۶,\ t=-۵ \ \text{(غ.ق.ق.)}$$

۲۶۶۷- گزینهٔ (۱) ابتدا توجه کنید که

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

بنابراین

$$(gof^{-۱})(۲)=g(۱)=\text{تعریف نشده}\ ,\quad (gof^{-۱})(۵)=g(۲)=۳$$

$$(gof^{-۱})(۴)=g(۳)=۱\ ,\quad (gof^{-۱})(۶)=g(۴)=۲$$

بنابراین $D_{gof^{-۱}}=\{۵,۴,۶\}$، در نتیجه

$$D_{\frac{g}{gof^{-۱}}}=D_g\bigcap D_{gof^{-۱}}-\{x|(gof^{-۱})(x)=۰\}=\{۴,۵\}$$

در توابع داده شده در گزینه‌ها فقط تابع گزینهٔ (۱) دامنه‌اش $\{۴,۵\}$ است.

۲۶۶۸- گزینهٔ (۴) توجه کنید که اگر $g(x)=x^{۲}-x$، آن‌گاه $g(۱)=۰$ و $g(۲)=۲$. بنابراین

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{Ax+B}\ ,\quad f(۱)=۰\ ,\quad f(۲)=۲$$

بنابراین

$$f(۱)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{A+B}=۰\Rightarrow ۲^{-A-B}=۲$$

$$-A-B=۱\Rightarrow A+B=-۱$$

$$f(۲)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{۲A+B}=۲\Rightarrow ۲^{-۲A-B}=۴$$

$$-۲A-B=۲\Rightarrow ۲A+B=-۲$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}A+B=-۱\\ ۲A+B=-۲\end{cases}$ نتیجه می‌شود $A=-۱$ و $B=۰$. در نتیجه

$$f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-x}\Rightarrow f(۳)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-۳}=۶$$

۲۶۶۹- گزینهٔ (۲) ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

۲۶۷۰- گزینهٔ (۳) راه‌حل اول

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a(\cos x-۱)}{x}+\lim_{x\to ۰}\frac{\cos a\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin a\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{x}+\lim_{x\to ۰}\frac{\cos a\sin x}{x}$$

$$=-\sin a\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\times\lim_{x\to ۰}\sin\frac{x}{۲}+\cos a\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}$$

$$=-\sin a\times ۰+\cos a\times ۱=\cos a$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin(x+a)-\sin a}{x}$$

اکنون اگر فرض کنیم $f(x)=\sin x$، مقدار حد فوق برابر مقدار مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ یعنی $\cos a$ است.

راه‌حل سوم اگر قرار دهیم $a=۰$، حد مورد نظر به صورت زیر در می‌آید

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۰\cos x+\cos ۰\sin x-\sin ۰}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

اکنون در گزینه‌ها $a=۰$ را قرار می‌دهیم و فقط گزینهٔ (۳) به صورت $\cos ۰=۱$ درمی‌آید.

راه‌حل چهارم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin a\sin x+\cos a\cos x-۰}{۱}=\cos a$$

۲۶۷۱- گزینهٔ (۳) ابتدا توجه کنید که

$$f(۲)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-\sqrt{x+۲})(x+\sqrt{x+۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^{۲}-x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x+\sqrt{x+۲})}{x+۱}=\frac{۳(۲+۲)}{۲+۱}=۴$$

بنابراین برای اینکه تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد باید تساوی $۲a-۱=۴$ برقرار باشد که نتیجه می‌شود $a=\frac{۵}{۲}$. توجه کنید که حد راست تابع را می‌توانید به کمک قاعدهٔ هوپیتال نیز به دست آورید:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴$$

۲۶۷۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $f(x)=1+\frac{a}{2}\sin 2bx$. بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|2b|}$ و حداکثر مقدار تابع برابر $1+|\frac{a}{2}|$ است. با توجه به نمودار تابع f دورهٔ تناوب برابر $\frac{3\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\pi$ و حداکثر مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است. بنابراین

$$\frac{2\pi}{|2b|}=\pi\Rightarrow|b|=1,\quad 1+|\frac{a}{2}|=\frac{3}{2}\Rightarrow|a|=1$$

با توجه به اینکه نمودار تابع f در اطراف نقطهٔ $x=0$ صعودی است، مقادیر a و b هم‌علامت‌اند. بنابراین $a=1$ و $b=1$ یا $a=-1$ و $b=-1$. پس $a+b$ می‌تواند برابر ۲ یا ۲− باشد که فقط حالت $a+b=2$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۶۷۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که مطابق اتحاد چاق و لاغر

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)$$
$$=(\sin x+\cos x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

$$(\sin x+\cos x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$
$$(\sin x+\cos x-1)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)=0$$
$$\begin{cases}\sin x+\cos x-1=0\\ 1-\frac{1}{2}\sin 2x=0\Rightarrow\sin 2x=2 \ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

معادلهٔ $\sin x+\cos x-1=0$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ جواب‌های $x=0$، $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=2\pi$ را دارد که مجموع آنها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

۲۶۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to 2}(2x-5)=-1$. بنابراین اولاً باید $\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)$ برابر صفر باشد ثانیاً باید علامت عبارت x^2+ax+b در یک همسایگی نقطهٔ $x=2$ مثبت باشد. پس x^2+ax+b باید برابر $(x-2)^2$ باشد، در نتیجه

$$x^2+ax+b=x^2-4x+4\Rightarrow a=-4,\ b=4$$

پس $a+b=0$.

۲۶۷۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}g(1)=2\\ g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow g'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{4}{3}\Rightarrow f'(2)=\frac{4}{3}$$

بنابراین

$$(fog)'(1)=g'(1)f'(g(1))=g'(1)f'(2)=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=2$$

۲۶۷۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=2$ علامت عبارت x^2-2x منفی است، بنابراین $|x^2-2x|=2x-x^2$. در واقع تابع f به صورت زیر است

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\le 0\\ 2x-x^2 & 0<x<2\\ \frac{1}{2}x^2+ax+b & x\ge 2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x<0\\ 2-2x & 0<x<2\\ x+a & x>2\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس $f'_+(2)=f'_-(2)$. بنابراین

$$2+a=2-4\Rightarrow a=-4$$

از طرف دیگر تابع f در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است. پس

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$$

بنابراین $2+2a+b=4-4\Rightarrow b=-2a-2=6$

در نتیجه $a+b=2$.

۲۶۷۷- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,2]$ برابر است با

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{12-2}{2}=5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{3}{4}$ برابر است با $f'(\frac{3}{4})$:

$$f'(x)=\sqrt{4x+1}+\frac{4(x+2)}{2\sqrt{4x+1}}\Rightarrow f'(\frac{3}{4})=2+\frac{11}{4}=\frac{19}{4}$$

بنابراین آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[0,2]$ از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{4}$ به اندازهٔ $\frac{1}{4}$ بیشتر است.

۲۶۷۸- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع f، در نقطهٔ $x=1$ جهت تقعر نمودار تغییر می‌کند و خط مماس بر نمودار افقی است. بنابراین $f'(1)=f''(1)=0$. پس

$$f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx,\quad f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c$$
$$f''(x)=36x^2+6ax+2b,\quad f'(1)=0\Rightarrow 12+3a+2b+c=0$$
$$f''(1)=0\Rightarrow 36+6a+2b=0$$

چون طبق نمودار، $f'(0)=0$ پس $c=0$. بنابراین از حل دستگاه معادلات به‌دست آمده نتیجه می‌شود $a=-8$ و $b=6$.

۲۶۷۹- گزینهٔ ۳ خط $x=1$ مجانب قائم نمودار تابع f است. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)^4}$$
$$f'(x)=0\Rightarrow 2(x-1)(x^2-1-x^2-2x)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2},\ x=1\ (\text{غ.ق.ق.})$$

بنابراین $x=-\frac{1}{2}$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است:

$$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{3},\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$
$$\lim_{x\to 1}f(x)=+\infty$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع f روی هر دو بازهٔ $(-\infty,1)$ و $(1,+\infty)$ برابر $-\frac{1}{3}$ است. فاصلهٔ نقطهٔ $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ از مجانب قائم نمودار تابع f برابر $\frac{3}{2}$ است.

۲۶۸۰- گزینهٔ ۱ بازهٔ $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ است، بنابراین بایستی $x+1<3<2x-1$. مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های $x+1<3$ و $3<2x-1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x+1<3 \Rightarrow x<2 \quad (1)$$

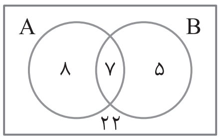
$$3<2x-1 \Rightarrow x>2 \quad (2)$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های (۱) و (۲) برابر تهی است.

۲۶۸۱- گزینهٔ ۴ اگر گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B بنامیم. آن‌گاه $n(A)=15$، $n(B)=12$ و $n(A\cap B)=7$. بنابراین

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=12+15-7=20$$

بنابراین $42-20=22$ نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند. نمودار زیر تعداد افراد هر گروه را نشان می‌دهد.



۲۶۸۲- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1.5}=3^{\frac{2}{5}}\times 3^{\frac{1}{10}}\times 3^{-\frac{3}{2}}\times 2^{-3}=3^{-1}\times 2^{-3}=\frac{1}{24}$$

بنابراین $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}=(1+24)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5$.

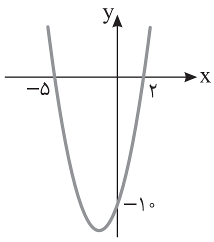
۲۶۸۳- گزینهٔ ۲ برای اینکه سهمی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها قرار بگیرد، باید $a<0$ و $b^2-4ac<0$. بنابراین در سهمی به معادلهٔ $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$ باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$1-m<0\Rightarrow m>1, \quad 4(m-3)^2+4(1-m)<0\Rightarrow m^2-7m+10<0$$

$$(m-2)(m-5)<0\Rightarrow 2<m<5$$

بنابراین اگر $2<m<5$، آن‌گاه سهمی مورد نظر همواره پایین محور xها قرار دارد.

۲۶۸۴- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^2-x-3$ را دو واحد به طرف xهای منفی سپس نُه واحد به طرف yهای منفی انتقال دهیم، نمودار تابع $f(x)=(x+2)^2-(x+2)-3-9$ به دست می‌آید. ساده شدهٔ ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$ است. نمودار تابع f به صورت زیر است و واضح است که در بازهٔ $(-5,2)$ نمودار تابع f زیر محور xها قرار دارد. توجه کنید که اگر نمودار تابع f زیر محور xها قرار داشته باشد، آن‌گاه $f(x)<0$. بنابراین $(x+5)(x-2)<0\Rightarrow -5<x<2$



۲۶۸۵- گزینهٔ ۱ مجموع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\cdots+\frac{1}{17\times 20}$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{20})=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{20})=\frac{3}{20}=0.15$$

۲۶۸۶- گزینهٔ ۲ اگر $x\geq\frac{1}{2}$، آن‌گاه معادله به صورت $2x-1+x+2=3$ در می‌آید که جواب آن $x=\frac{2}{3}$ است. اگر $-2<x<\frac{1}{2}$، آن‌گاه معادله به صورت $-2x+1+x+2=3$ در می‌آید که $x=0$ جواب آن است. اگر $x\leq -2$، آن‌گاه معادله به صورت $-2x+1-x-2=3$ در می‌آید که $x=-\frac{4}{3}$ جواب آن است ولی قابل قبول نیست. بنابراین جواب‌های معادله $x=\frac{2}{3}$ و $x=0$ هستند که مجموع آن‌ها برابر $\frac{2}{3}$ است.

۲۶۸۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$g^{-1}=\{(3,2),(2,4),(6,5),(1,3)\}$$

$$f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$$

بنابراین

$$g^{-1}of=\{(1,4),(4,5)\}\Rightarrow(g^{-1}of)-f=\{(1,2),(4,-1)\}$$

بنابراین برد تابع $(g^{-1}of)-f$ مجموعهٔ $\{2,-1\}$ است.

۲۶۸۸- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $f(x)=3^{Ax+B}$ نمودار تابع $y=x^2$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. پس نمودار تابع f از نقاط $(1,1)$ و $(3,9)$ عبور می‌کند.

بنابراین

$$f(1)=1\Rightarrow 3^{A+B}=1\Rightarrow A+B=0$$

$$f(3)=9\Rightarrow 3^{3A+B}=9\Rightarrow 3A+B=2$$

از حل دستگاه معادلات بالا نتیجه می‌شود $A=1$ و $B=-1$ و در نتیجه $f(x)=3^{x-1}$. پس عرض نقطهٔ تلاقی نمودار تابع f با محور yها برابر $f(0)=\frac{1}{3}$ است.

۲۶۸۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\tan\frac{17\pi}{6}=\tan(3\pi-\frac{\pi}{6})=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{11\pi}{3}=\sin(4\pi-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos(3\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\tan\frac{17\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{3}+\cos\frac{10\pi}{3}=(-\frac{\sqrt{3}}{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{2}=\frac{3}{6}-\frac{1}{2}=0$$

۲۶۹۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که در یک همسایگی راست $x=1$ تابع $y=[x]$ با تابع $y=1$ برابر است. پس

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\cos^2\pi x}{1+\cos\pi x}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-\cos\pi x)(1+\cos\pi x)}{1+\cos\pi x}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}(1-\cos\pi x)=1-\cos\pi=2$$

۲۶۹۱- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(۱)=a+b\ ,\quad \lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(ax+b)=a+b$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} x[x]=\lim_{x\to ۱^-} ۰=۰$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته است، پس $a+b=۰$. از طرف دیگر

$$f(-۱)=-a+b\ ,\quad \lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-}(ax+b)=-a+b$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^+} x[x]=\lim_{x\to (-۱)^+}(-x)=۱$$

تابع f در $x=-۱$ پیوسته است، پس $-a+b=۱$. از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۱\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۱}{۲}$.

۲۶۹۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید

$$f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$$

$$=\frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}-\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\frac{\sin^۲(\pi x)-\cos^۲(\pi x)}{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}$$

$$=\frac{-\cos(۲\pi x)}{\frac{۱}{۲}\sin(۲\pi x)}=-۲\cot(۲\pi x)=-۲\tan(\frac{\pi}{۲}-۲\pi x)$$

پس دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{|-۲\pi|}=\frac{۱}{۲}$ است.

۲۶۹۳- گزینهٔ ۴ معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۱}{۲}$$

$$۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin^۲ ۲x=۱\Rightarrow\sin ۲x=\pm ۱$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند

$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$، $\pi+\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ که مجموع آن‌ها برابر ۴π است.

۲۶۹۴- گزینهٔ ۱ خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} f(x)=۲$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\frac{۲x^۲-x-۲}{x^۲+۲x}=۲-\frac{۵x+۲}{x^۲+۲x}=۲-\frac{۵x+۲}{(x+۱)^۲-۱}$$

اگر $x\to +\infty$، آن‌گاه علامت عبارت $\frac{۵x+۲}{(x+۱)^۲-۱}$ مثبت است و در نتیجه $f(x)<۲$. اگر $x\to -\infty$، آن‌گاه علامت عبارت $\frac{۵x+۲}{(x+۱)^۲-۱}$ منفی است و در نتیجه $f(x)>۲$. بنابراین نمودار تابع f در $+\infty$ پایین مجانب افقی آن و در $-\infty$ بالای مجانب افقی آن قرار دارد.

۲۶۹۵- گزینهٔ ۴ خط $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $(۲,۱)$ بر نمودار تابع y مماس است. پس $g(۲)=۱$ و $g'(۲)=۳$. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین

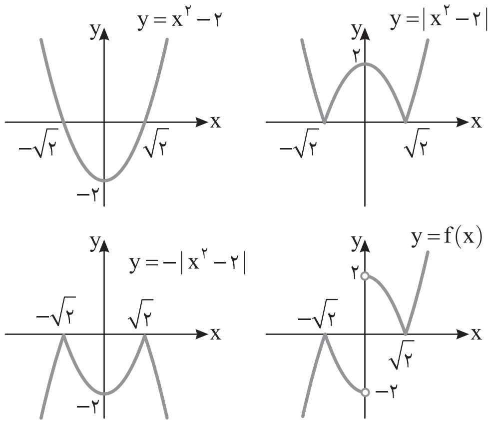
$$(fog)'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))=g'(۲)f'(۱)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$$

۲۶۹۶- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع f در $x=۰$ تعریف نشده پس در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. عبارت $x^۳-۲x$ در ضابطهٔ f داخل قدرمطلق قرار دارد و این عبارت در $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{۲}$ برابر صفر می‌شود و در نتیجه تابع f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. بنابراین در سه نقطه تابع f مشتق ندارد.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}=\frac{|x||x^۲-۲|}{x}=\begin{cases}|x^۲-۲| & x>۰\\ -|x^۲-۲| & x<۰\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است. واضح است که در $x=۰$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=-\sqrt{۲}$ تابع f مشتق‌پذیر نیست.



۲۶۹۷- گزینهٔ ۲ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[۰,۴]$ برابر است با

$$\frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰}=\frac{(۳+\frac{۱}{۵})-(۱+۱)}{۴}=\frac{۳}{۱۰}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=\frac{۳}{۲}$ برابر $f'(\frac{۳}{۲})$ است:

$$f(x)=\sqrt{۲x+۱}+\frac{۱}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}-\frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

$$f'(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{۲۵}=\frac{۱۷}{۵۰}$$

بنابراین اختلاف $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۱۷}{۵۰}$ مورد سؤال است که برابر $۰/۰۴$ است.

۲۶۹۸- گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار تابع f معلوم است که این تابع فقط در $x=3$ اکسترمم نسبی دارد. از طرف دیگر،

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2$$

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$$

علامت $f'(x)$ در $x=0$ نباید تغییر کند و فقط در $x=3$ باید تغییر کند.

بنابراین باید $b=0$ و

$$f'(x)=x(4x^2+3ax)=x^2(4x+3a)$$

$$f'(3)=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین

$$f(x)=x^4-4x^3\Rightarrow f(-2)=48$$

۲۶۹۹- گزینهٔ ۳ خط $y=-1$ مجانب افقی نمودار تابع f است. زیرا

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

اکنون نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2x-x^2}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2-2x)(x+1)^2-2(x+1)(2x-x^2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2(x+1)(1-x^2-2x+x^2)=0$$

$$x=\frac{1}{2},\ x=-1\ \text{(غ.ق.ق)}$$

بنابراین $x=\frac{1}{2}$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع f است. پس باید طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع هم باشد. فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ از خط $y=-1$ مورد سؤال است که برابر $\frac{4}{3}$ است.

۲۷۰۰- گزینهٔ ۴ ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1,\ 9-x^2\geq 0\Rightarrow x^2\leq 9\Rightarrow -3\leq x\leq 3$$

$$D_f=[-3,1)\cup(1,3]$$

برای این‌که بازهٔ $(k-2,3k+2)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع f باشد یا باید زیرمجموعهٔ $[-3,1)$ باشد یا باید زیرمجموعهٔ $(1,3]$ باشد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $(k-2,3k+2)\subseteq[-3,1)$. در این حالت باید $k-2\geq -3$ و $3k+2\leq 1$. پس $-1\leq k\leq -\frac{1}{3}$.

حالت دوم $(k-2,3k+2)\subseteq(1,3]$. در این حالت باید $k-2\geq 1$ و $3k+2\leq 3$ که ممکن نیست. بنابراین $k\in[-1,-\frac{1}{3}]$ که در گزینهٔ (۴) بازهٔ $[-1,-\frac{1}{3}]$ آمده است.

۲۷۰۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(\pi<x<\frac{3\pi}{2})\qquad \sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{-\cos x}$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

به این ترتیب،

$$\sqrt{1+\tan^2 x}(2\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2 x)=-\frac{1}{\cos x}(2\times\frac{1}{2}-\sin^2 x)$$

$$=-\frac{1}{\cos x}(1-\sin^2 x)=-\frac{1}{\cos x}\times\cos^2 x=-\cos x$$

۲۷۰۲- گزینهٔ ۳ فرض کنید سرعت آب برابر v باشد. در این صورت، سرعت قایق موتوری در جهت حرکت آب $100+v$ و در جهت مخالف حرکت آب برابر $100-v$ است. در نتیجه

$$\frac{1200}{100-v}-\frac{1200}{100+v}=5\Rightarrow\frac{240}{100-v}-\frac{240}{100+v}=1$$

$$240(\frac{1}{100-v}-\frac{1}{100+v})=1\Rightarrow 240(\frac{2v}{100^2-v^2})=1$$

$$100^2-v^2=480v\Rightarrow v^2+480v-100^2=0$$

$$(v-20)(v+500)=0\Rightarrow v=20$$

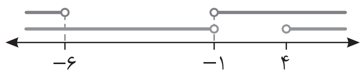
۲۷۰۳- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$(1)\qquad \frac{2x-3}{x+1}>1\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-1>0\Rightarrow\frac{x-4}{x+1}>0\Rightarrow x>4\ \text{یا}\ x<-1$$

$$\frac{2x-3}{x+1}<3\Rightarrow\frac{2x-3}{x+1}-3<0\Rightarrow\frac{-x-6}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x+6}{x+1}>0$$

$$(2)\qquad x<-6\ \text{یا}\ x>-1$$

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) است که از روی شکل زیر معلوم می‌شود برابر $\mathbb{R}-[-6,4]$ است.



راه‌حل دوم اعداد ۵ و ۷- در نامعادله صدق می‌کنند:

$$1<\frac{2\times5-3}{5+1}=\frac{7}{6}<3\ ,\qquad 1<\frac{2\times(-7)-3}{-7+1}=\frac{17}{6}<3$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب نامعادله است.

۲۷۰۴- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2\Rightarrow\sqrt{2a^2+4a}=2-3a\Rightarrow 2a^2+4a=4-12a+9a^2$$

$$7a^2-16a+4=0\Rightarrow(7a-2)(a-2)=0\Rightarrow a=\frac{2}{7},\ a=2$$

توجه کنید که اگر $a=2$، تساوی مورد نظر درست نیست (سمت چپ بیشتر از ۲ است). بنابراین $a=\frac{2}{7}$. در نتیجه $\frac{a+1}{a}=1+\frac{1}{a}=1+\frac{7}{2}=4/5$.

۲۷۰۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{17\pi}{3})=\sin(5\pi+\frac{2\pi}{3})=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{17\pi}{6})=\cos(\frac{17\pi}{6})=\cos(3\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{19\pi}{4})=\tan(5\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\sin(\frac{-11\pi}{6})=-\sin(\frac{11\pi}{6})=-\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-(-\sin\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1)(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

۲۷۰۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع مورد نظر از روی نمودار تابع $y=\sin x$ با تبدیلات به‌دست آمده است. چون نمودار تابع مورد نظر و نمودار تابع سینوس در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر بالای محور x هستند، پس مقدار b مثبت است. بنابراین بیشترین مقدار تابع $y=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})$ برابر $a+b$ است. از روی نمودار معلوم است که این بیشترین مقدار برابر $\sqrt{3}$ است، پس $a+b=\sqrt{3}$. از طرف دیگر، چون نقطهٔ $(\pi,-\frac{3}{2})$ روی نمودار تابع مورد نظر است. پس

$$y=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\frac{3}{2}\Rightarrow a-b(\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{3}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=\sqrt{3}\\ a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow b+b\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

$$b(1+\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\Rightarrow b=\sqrt{3}$$

۲۷۰۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(0/4)^{2x-1}=(\frac{125}{8})^{x^2}\Rightarrow(\frac{2}{5})^{2x-1}=((\frac{5}{2})^3)^{x^2}\Rightarrow(\frac{2}{5})^{2x-1}=(\frac{2}{5})^{-3x^2}$$

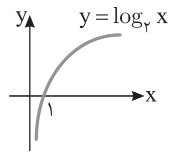
بنابراین

$$2x-1=-3x^2\Rightarrow 3x^2+2x-1=0\Rightarrow(3x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{3},\ x=-1$$

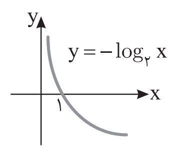
به ازای $x=-1$، مقدار $9x+1$ منفی می‌شود که لگاریتم آن در مبنای ۸ تعریف نمی‌شود. بنابراین $x=\frac{1}{3}$ و

$$\log_8(9x+1)=\log_8(3+1)=\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}\log_2 2=\frac{2}{3}$$

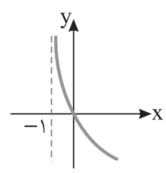
۲۷۰۸- گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=\log_2 x$ به‌صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع $y=-\log_2 x$ به‌صورت زیر است:



اگر این نمودار را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم به نمودار تابع $y=-\log_2(x+1)$ می‌رسیم که همان نمودار داده شده است:



توجه کنید که $y=-\log_2(x+1)=\log_2(x+1)^{-1}$، بنابراین

$$U(x)=(x+1)^{-1}$$

۲۷۰۹- گزینهٔ ۱ برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=-2$ فقط از چپ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=f(-2)$ و $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)\neq f(-2)$. اکنون توجه کنید که

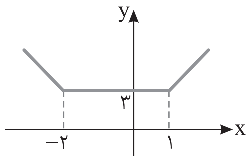
$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{8+x^3}{|x+2|}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(2+x)(4-2x+x^2)}{-(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^-}(-(4-2x+x^2))=-(4-2(-2)+(-2)^2)=-12$$

چون $f(-2)=a$، پس باید $a=-12$.

توجه کنید که $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=12$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)\neq f(-2)$.

۲۷۱۰- گزینهٔ ۱ نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است. از روی این نمودار معلوم است که تابع f روی بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً نزولی است.



۲۷۱۱- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=-\cos x$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر می‌شود

$$4\sin x(-\cos x)=1\Rightarrow\sin 2x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله و جواب‌های درون بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر هستند:

$$2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 0\le k\pi-\frac{\pi}{12}\le 2\pi$$

$$\frac{1}{12}\le k\le 2+\frac{1}{12}\Rightarrow k=1,2$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{12},\ x=2\pi-\frac{\pi}{12}\qquad(1)$$

$$2x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in\mathbb{Z}\Rightarrow 0\le k\pi+\frac{7\pi}{12}\le 2\pi$$

$$-\frac{7}{12}\le k<2-\frac{7}{12}\Rightarrow k=0,1$$

$$x=\frac{7\pi}{12},\ x=\pi+\frac{7\pi}{12}\qquad(2)$$

مجموع جواب‌های (۱) و (۲) برابر است با $4\pi+\frac{14\pi-2\pi}{12}=5\pi$.

۲۷۱۲- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$x^2+10x+16=(x+2)(x+8)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to-8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(x+8)}{2+\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}\left(\frac{(x+2)(x+8)}{2+\sqrt[3]{x}}\times\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{2^3+\sqrt[3]{x}^3}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}\frac{(x+2)(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{8+x}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to-8}((x+2)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}))$$

$$=\frac{1}{6}(-8+2)(4-2(-2)+2^2)=-12$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{-۱۶+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\times(-۲)^۲}}=\frac{-۶}{\frac{۱}{۲}}=-۱۲$$

۲۷۱۳- گزینهٔ ۴ چون تابع در هیچ همسایگی چپ نقطهٔ صفر تعریف نشده است، پس دربارهٔ حد چپ آن در نقطهٔ صفر نمی‌توان حرف زد. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}$$

چون $\lim_{x\to ۰^+}(x^۲-۱)=-۱$ ، $\lim_{x\to ۰^+}(۲x)=۰$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ صفر مقادیر $۲x$ مثبت‌اند، پس $\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۱}{۲x}=-\infty$.

۲۷۱۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)$. از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)-(-۲)(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^۲}\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(-۳)+۲(۳)}{(-۳)^۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

۲۷۱۵- گزینهٔ ۲ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و در نتیجه در $x=۲$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}(-x^۲+ax+b)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x-۱}$$

$$-۴+۲a+b=\frac{۱}{۲-۱}=۱\Rightarrow ۲a+b=۵$$

همچنین،

$$f'_-(۲)=f'_+(۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}f'(x)$$

$$\lim_{x\to ۲^-}(-۲x+a)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۱}{(x-۱)^۲}\Rightarrow -۴+a=-۱\Rightarrow a=۳$$

بنابراین $b=۵-۲a=-۱$

۲۷۱۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(۲)=g'(۲)\times f'(g(۲))\qquad(۱)$$

از طرف دیگر،

$$g'(x)=\frac{۲(x-۱)-(۱)(۲x+۱)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}\Rightarrow g'(۲)=-۳$$

همچنین، $g(۲)=۵$. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $(-۳)f'(۵)=۶$ ، پس $f'(۵)=-۲$.

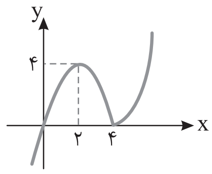
۲۷۱۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{۸-\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{۱۱}{۴}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}=f'(۲)$$

از طرف دیگر، $f'(x)=x+\frac{۱}{x^۲}$ ، پس $f'(۲)=\frac{۹}{۴}$. بنابراین اختلاف مورد نظر می‌شود $\frac{۱۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$.

۲۷۱۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۴x & x\le ۴\\ x^۲-۴x & x>۴\end{cases}$.



بنابراین نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این شکل معلوم می‌شود که $(۴,۰)$ نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f و $(۲,۴)$ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است. فاصلهٔ این نقطه‌ها برابر است با $\sqrt{(۴-۲)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$.

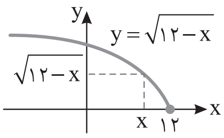
۲۷۱۹- گزینهٔ ۳ اگر مطابق شکل داده شده، طول یکی از ضلع‌های مستطیل برابر x باشد، طول ضلع دیگرش می‌شود $\sqrt{۱۲-x}$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل}=x\sqrt{۱۲-x}$$

در نتیجه، باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=x\sqrt{۱۲-x}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=(۱)\sqrt{۱۲-x}+x(\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}})$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \sqrt{۱۲-x}(۲\sqrt{۱۲-x})=x\Rightarrow ۲(۱۲-x)=x\Rightarrow x=۸$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع f ، یعنی بیشترین مقدار مساحت مستطیل مورد نظر به ازای $x=۸$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۸\sqrt{۴}=۱۶$.

۲۷۲۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^۲-۲x-۳=(x-۱)^۲-۴\Rightarrow f(x)+۴=(x-۱)^۲$$

$$x=\sqrt{f(x)+۴}+۱$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۱$. در نتیجه طول نقطهٔ تقاطع نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ زیر است:

$$\sqrt{x+۴}+۱=\frac{x-۹}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}+۲=x-۹\Rightarrow ۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱\qquad(۱)$$

$$۴(x+۴)=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰\Rightarrow (x-۵)(x-۲۱)=۰$$

$$x=۵\,,\,x=۲۱$$

توجه کنید که $x=۵$ جواب نیست، زیرا به ازای $x=۵$ سمت چپ معادلهٔ (۱) مثبت ولی سمت راست آن منفی است. بنابراین $x=۲۱$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $f(x)=(x-۱)^۲-۴$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع‌های $f^{-۱}$ و g جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ است. اکنون توجه کنید که

$$f^{-۱}(x)=g(x)\Rightarrow f(f^{-۱}(x))=f(g(x))\Rightarrow x=f(g(x))$$

$$x=(g(x)-۱)^۲-۴\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۹}{۲}-۱)^۲\Rightarrow x+۴=(\frac{x-۱۱}{۲})^۲$$

$$۴x+۱۶=x^۲-۲۲x+۱۲۱\Rightarrow x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰$$

$$(x-۵)(x-۲۱)=۰\Rightarrow x=۵\,,\,x=۲۱$$

اکنون توجه کنید که $R_{f^{-۱}}=D_f=[۱,+\infty)$ ، پس مقادیر $f^{-۱}$ مثبت‌اند. اما $g(۵)<۰$ ، پس $x=۵$ جواب معادلهٔ $f^{-۱}(x)=g(x)$ نیست. بنابراین $x=۲۱$.

۲۷۲۱- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{|\cos x|}=\frac{1}{-\cos x} \qquad (\frac{\pi}{2}<x<\pi)$$

بنابراین

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}(\frac{1}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{-\frac{1}{\cos x}}(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x})$$

$$=-\tan x\cos x\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}=-\sin x\times\frac{\cos^2 x}{\sin x}=-\cos^2 x$$

۲۷۲۲- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2}>\frac{x}{x-2}\Rightarrow\frac{7x-8}{(x+1)(x-2)}-\frac{x}{x-2}>0\Rightarrow\frac{7x-8-x(x+1)}{(x+1)(x-2)}>0$$

$$\frac{-x^2+6x-8}{(x+1)(x-2)}>0\Rightarrow\frac{-(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}>0\Rightarrow\frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}<0$$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$\frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x-2)}$		$+$	ت‌ن	$-$	ت‌ن	$-$	0	$+$	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر $(-1,2)\cup(2,4)$ می‌شود.

راه‌حل دوم توجه کنید که اعداد صفر و ۳ در نامعادله صدق می‌کنند:

$$\frac{0-8}{0-0-2}>\frac{0}{0-2}\Rightarrow 4>0\ ,\qquad \frac{21-8}{9-3-2}>\frac{3}{3-1}\Rightarrow\frac{13}{4}>\frac{3}{2}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) جواب نامعادله است.

۲۷۲۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$2a+\sqrt{3a+16}=1\Rightarrow\sqrt{3a+16}=1-2a\Rightarrow\sqrt{3a+16}^2=(1-2a)^2$$

$$3a+16=1-4a+4a^2\Rightarrow 4a^2-7a-15=0$$

$$(4a+5)(a-3)=0\Rightarrow a=-\frac{5}{4}\ ,\ a=3$$

توجه کنید که $a=3$ در تساوی داده شده صدق نمی‌کند، ولی $a=-\frac{5}{4}$ در تساوی داده شده صدق می‌کند. بنابراین $a=-\frac{5}{4}$ و $4a+9=4$.

۲۷۲۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha\ ,\quad \cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-\frac{3\pi}{2})=-\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cot\alpha$$

بنابراین (چون α ربع سوم است، $\cos\alpha<0$)

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\frac{16}{9}}=\frac{9}{25}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{3}{5}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{4}{3}\times(-\frac{3}{5})=-\frac{4}{5}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{3}{4}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $(-\frac{3}{5})(\frac{4}{5})+\frac{3}{4}=0/27$.

۲۷۲۵- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $y=a+b\sin x$. از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که b مثبت است، پس بیشترین مقدار تابع برابر $a+b$ است. چون این مقدار برابر ۳ است، پس $a+b=3$. همچنین، نمودار تابع از نقطهٔ $(-\frac{5\pi}{6},0)$ گذشته است، پس

$$0=a+b\sin(-\frac{5\pi}{6})=a+b(-\frac{1}{2})=a-\frac{b}{2}$$

بنابراین

$$\begin{cases}a+b=3\\ a-\frac{b}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر $y=1+2\sin x$ می‌شود، که مقدار آن به ازای $x=\frac{\pi}{6}$ برابر است با $1+2\sin\frac{\pi}{6}=2$.

۲۷۲۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که $3^{x^2-2}=81^x=(3^4)^x=3^{4x}$.

بنابراین

$$x^2-2=4x\Rightarrow x^2-4x-2=0$$

$$x=2-\sqrt{6}\ ,\ x=2+\sqrt{6}$$

چون به ازای $x=2-\sqrt{6}$، مقدار $x-2$ منفی می‌شود و $\log_6(x-2)$ به ازای آن تعریف نشده است، پس $x=2-\sqrt{6}$ قابل قبول نیست. بنابراین $x=2+\sqrt{6}$ و در نتیجه

$$\log_6(x-2)=\log_6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\log_6 6=\frac{1}{2}$$

۲۷۲۷- گزینهٔ ۲ چون دامنهٔ تابع بازهٔ $(-\frac{a}{2},+\infty)$ است و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این بازه $(\frac{1}{2},+\infty)$ است، پس $a=-1$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(2,0)$ گذشته است، پس $y(2)=0$:

$$-1+\log_b(4-1)=0\Rightarrow\log_b 3=1\Rightarrow b=3$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $y=-1+\log_3(2x-1)$ می‌شود. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع مورد نظر با خط $y=1$ جواب معادلهٔ زیر است:

$$-1+\log_3(2x-1)=1\Rightarrow\log_3(2x-1)=2\Rightarrow 2x-1=9\Rightarrow x=5$$

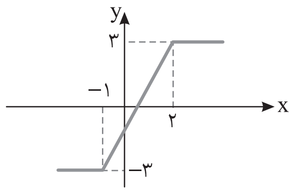
۲۷۲۸- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-4}{2|x-2|}=\lim_{x\to2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{2(-(x-2))}=\lim_{x\to2^-}\frac{x+2}{-2}=-2$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{2|x-2|}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)}=\lim_{x\to2^+}\frac{x+2}{2}=2$$

چون $f(2)=2$، پس تابع f در نقطهٔ $x=2$ فقط از راست پیوسته است.

۲۷۲۹- گزینهٔ ۳ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. از روی این نمودار معوم است که تابع f روی بازهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.



۲۷۳۰- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos ۳x+\cos x=۰\Rightarrow \cos ۳x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

بنابراین $(k\in\mathbb{Z})$

$$۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

$$۳x=۲k\pi-(\pi-x)\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲}$$

چون باید $\cos x\neq ۰$، پس جواب‌های به شکل $k\pi-\frac{\pi}{۲}$ قبول نیستند. در نتیجه، جواب‌های کلی معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ هستند $(k\in\mathbb{Z})$.

۲۷۳۱- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{(۵x-۸)(x-۲)}\times\frac{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۸-(۳x+۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳(x-۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

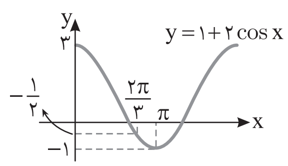
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳}{(۵x-۸)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\frac{-۳}{(۲)(۴+۲\times۲+۲^۲)}=-\frac{۱}{۸}$$

راه‌حل دوم بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x-۱۸}=\frac{-\frac{۱}{۲^۲}}{۲۰-۱۸}=-\frac{۱}{۸}$$

۲۷۳۲- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+}\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+}(۱+۲\cos x)=۰$ و در یک همسایگی راست نقطهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$، مقادیر $۱+۲\cos x$ منفی هستند. بنابراین $\lim_{x\to(\frac{۲\pi}{۳})^+}\frac{\sin x}{۱+۲\cos x}=-\infty$.



۲۷۳۳- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}=f'(\frac{۱}{۴})$$

از طرف دیگر،

$$f'(x)=\frac{(-۱)(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{(\sqrt{x})^۲}.$$

پس

$$f'(\frac{۱}{۴})=\frac{-\frac{۱}{۲}+(۱)(\frac{۱}{۴}+۱)}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

۲۷۳۴- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز است. بنابراین

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=f(۲)\Rightarrow\lim_{x\to ۲^+}\frac{۸}{ax+b}=۴\Rightarrow\frac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow ۲a+b=۲$$

از طرف دیگر $f'(x)=\begin{cases}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲} & x>۲\\ -۳x^۲+۶ & x<۲\end{cases}$. پس

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f'(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۸a}{(ax+b)^۲}=\frac{-۸a}{(۲a+b)^۲}=\frac{-۸a}{۲^۲}=-۲a$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f'(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-۳x^۲+۶)=-۶$$

بنابراین

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)\Rightarrow -۲a=-۶\Rightarrow a=۳$$

۲۷۳۵- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $f(x)=x(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}$. پس

$$f'(x)=(۱)(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}}+x\times\frac{۱}{۳}(\frac{(۳)(x+۲)-(۱)(۳x+۱)}{(x+۲)^۲})(\frac{۳x+۱}{x+۲})^{\frac{۱}{۳}-۱}$$

در نتیجه

$$f'(-۳)=(\frac{-۸}{-۱})^{\frac{۱}{۳}}+(-۳)(\frac{۱}{۳})(\frac{۳(-۱)-(-۸)}{(-۱)^۲})(\frac{-۸}{-۱})^{-\frac{۲}{۳}}=۲-۵\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

۲۷۳۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که نقطه‌های ابتدایی و انتهایی نمودار تابع $(۰,f(۰))$ و $(۸,f(۸))$ هستند. شیب خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند برابر است با $\frac{f(۸)-f(۰)}{۸-۰}=\frac{۳-(-۵)}{۸}=۱$. اکنون طول نقطه‌ای را روی نمودار تابع f پیدا می‌کنیم که شیب خط مماس در این نقطه بر نمودار تابع برابر ۱ است:

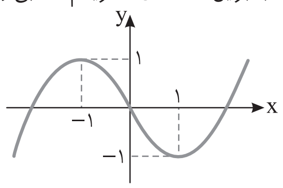
$$f'(x)=\frac{۹}{(x+۱)^۲}\Rightarrow f'(x)=۱\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱$$

$$(x+۱)^۲=۹\Rightarrow x=۲\,,\ \ x=-۴\ \text{(غ.ق.ق.)}$$

بنابراین طول نقطهٔ مورد نظر برابر ۲ است و عرض آن برابر است با $f(۲)=۱$. معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۱ است به‌صورت $y-۱=(۱)(x-۲)$ یعنی $y=x-۱$ است. عرض نقطه‌ای که این خط محور y را قطع می‌کند برابر است با $y=۰-۱=-۱$.

۲۷۳۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که $f(x)=\begin{cases}-x^۲-۲x & x\le ۰\\ x^۲-۲x & x>۰\end{cases}$.

پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است. بنابراین نقطه‌های ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع f به‌ترتیب نقطه‌های $(-۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با $\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$

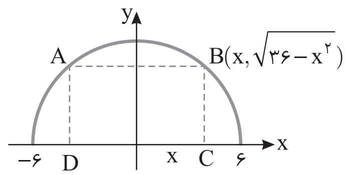


۲۷۳۸- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول فرض می‌کنیم مستطیل موردنظر ABCD باشد و طول نقطهٔ C برابر x باشد (شکل زیر را ببینید). چون نقطهٔ B روی دایرهٔ $x^۲+y^۲=۳۶$ است، پس عرض نقطهٔ B برابر است با $\sqrt{۳۶-x^۲}$. به این ترتیب، $S_{ABCD}=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$. باید بیشترین مقدار تابع $f(x)=۲x\sqrt{۳۶-x^۲}$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f'(x)=۲\sqrt{۳۶-x^۲}-\frac{۲x^۲}{\sqrt{۳۶-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۳۶-x^۲=x^۲\Rightarrow x^۲=۱۸\Rightarrow x=۳\sqrt{۲}\ (x>۰)$$

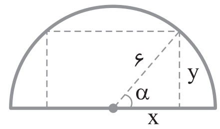
بنابراین بیشترین مقدار تابع f، یعنی بیشترین مساحت مستطیل ABCD، به ازای $x=۳\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید و برابر است با $۲(۳\sqrt{۲})\sqrt{۳۶-۱۸}=۳۶$.



راه‌حل دوم با نمادگذاری شکل زیر، فرض می‌کنیم طول ضلع‌های مستطیل ۲x و y باشند. در این صورت $x=۶\cos\alpha$ و $y=۶\sin\alpha$. بنابراین

$$\text{مساحت مستطیل}=۲xy=۲(۶\cos\alpha)(۶\sin\alpha)=۳۶\sin ۲\alpha\le ۳۶$$

توجه کنید که تساوی وقتی به‌دست می‌آید که $۲\alpha=۹۰^\circ$، یعنی $\alpha=۴۵^\circ$.



۲۷۳۹- گزینهٔ ۳ توجه کنید که شکل nام از مستطیلی با $۲\times(n+۱)$ دایره و نواری با n دایره درست شده است. بنابراین تعداد دایره‌های شکل nام برابر است با $۲(n+۱)+n=۳n+۲$. پس تعداد دایره‌های شکل دوازدهم برابر است با $۳\times۱۲+۲=۳۸$.

۲۷۴۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$.

اکنون فرض کنید $f^{-۱}(۸)=a$. در این صورت

$$f(a)=۸\Rightarrow \frac{۲}{۵}a-۴=۸\Rightarrow a=۳۰$$

اکنون فرض کنید $g^{-۱}(۳۰)=b$. در این صورت

$$g(b)=۳۰\Rightarrow b^۳+b=۳۰\Rightarrow b=۳$$

بنابراین $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)=g^{-۱}(f^{-۱}(۸))=g^{-۱}(۳۰)=۳$.

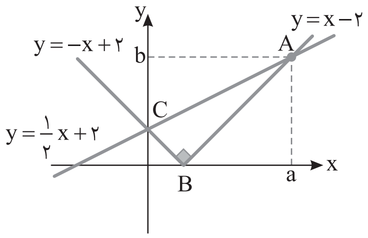
۲۷۴۱- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-۱$ برابر ۸ است، پس $P(۱)=۸$. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $۲x+۱$ برابر ۵ است، پس $P(-\frac{۱}{۲})=۵$. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲-x-۱$ یک چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌صورت $ax+b$ است. بنابراین

$$P(x)=(۲x^۲-x-۱)Q(x)+ax+b=(x-۱)(۲x+۱)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases}P(۱)=a+b=۸\\ P(-\frac{۱}{۲})=-\frac{a}{۲}+b=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=۶\end{cases}$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲-x-۱$ برابر $۲x+۶$ است.

۲۷۴۲- گزینهٔ ۴ نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۴x+۴}=|x-۲|$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$ به‌صورت زیر است. مطابق شکل داده شده مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مد نظر است.



$$x-۲=\frac{۱}{۲}x+۲\Rightarrow x=۸\Rightarrow a=۸\Rightarrow b=۸-۲=۶$$

بنابراین رئوس مثلث نقاط $A(۸,۶)$، $B(۲,۰)$ و $C(۰,۲)$ هستند. پس

$$AB=\sqrt{(۸-۲)^۲+(۶-۰)^۲}=۶\sqrt{۲},\quad BC=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-۲)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC=\frac{۱}{۲}\times۶\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۲}=۱۲$$

۲۷۴۳- گزینهٔ ۱ فرض کنید $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)=a$، بنابراین

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))=a\Rightarrow g(a)=f^{-۱}(۲۰)\Rightarrow f(g(a))=۲۰$$

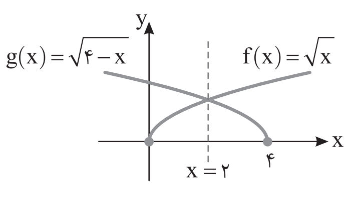
واضح است که $f(۱۶)=۲۰$، زیرا

$$f(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow f(۱۶)=۱۶+\sqrt{۱۶}=۱۶+۴=۲۰$$

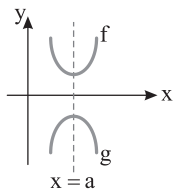
پس $f^{-۱}(۲۰)=۱۶$. بنابراین

$$g(a)=۱۶\Rightarrow\frac{۹a+۶}{۱-a}=۱۶\Rightarrow ۹a+۶=۱۶-۱۶a\Rightarrow a=\frac{۲}{۵}$$

۲۷۴۴- گزینهٔ ۳ اگر قرینهٔ نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور y را رسم کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار جدید را چهار واحد به سمت راست منتقل کنیم، نمودار تابع $y=\sqrt{-(x-۴)}$ به‌دست می‌آید. بنابراین نمودار دو تابع اولیه و نهایی به‌صورت زیر است. با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع g قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=۲$ است.



توجه ادبیات سؤال ایراد دارد چون پرسیده شده است: «منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط متقارن هستند؟» این سؤال یعنی نمودار توابع f و g هر دو نسبت به خط $x=a$ متقارن هستند و مقدار a چند است؟ (شکل مقابل را ببینید) در حالی که مقصود طراح این بوده است که قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به خط $x=a$ نمودار تابع g می‌شود و a چند است؟ از طرف دیگر سؤال خارج از مباحث کتاب درسی است. چیزی که سؤال پرسیده شده مثلاً این طوری می‌شود:



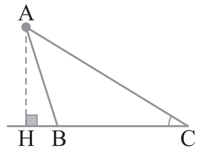
۲۷۴۵- گزینهٔ ۴ ابتدا $\cot \hat{C}$ را با معلوم بودن $\sin \hat{C}$ به‌دست می‌آوریم:

$$۱+\cot^۲ \hat{C}=\frac{۱}{\sin^۲ \hat{C}} \Rightarrow ۱+\cot^۲ \hat{C}=\frac{۱۶۹}{۲۵}$$

$$\cot^۲ \hat{C}=\frac{۱۴۴}{۲۵} \Rightarrow \cot \hat{C}=\frac{۱۲}{۵}$$

بنابراین در مثلث AHC می‌توان نوشت:

$$\cot \hat{C}=\frac{CH}{AH} \Rightarrow \frac{۱۲}{۵}=\frac{۹}{AH} \Rightarrow AH=۳/۷۵$$



۲۷۴۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$A=\cos(\frac{۱۱\pi}{۴}+\alpha)=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۴}+\alpha)=-\cos(\alpha-\frac{\pi}{۴})$$

$$=-(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

از طرف دیگر، $\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$، پس

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۲}{۱۰۰}=\frac{۴۹}{۵۰} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{-۷}{۵\sqrt{۲}}=-\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}$$

توجه کنید که انتهای کمان نظیر زاویهٔ α در ربع دوم قرار دارد و $\cos\alpha$ منفی است. در نتیجه

$$A=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}-\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰})=\frac{۳}{۵}$$

۲۷۴۷- گزینهٔ ۲ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\tan ۳x \tan x=۱ \Rightarrow \tan ۳x=\frac{۱}{\tan x}=\cot x$$

$$\tan ۳x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}=(۲k+۱)\frac{\pi}{۸} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

اکنون جواب‌های واقع در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ را تعیین می‌کنیم:

$$k=۴ \Rightarrow x=\frac{۹\pi}{۸}, \quad k=۵ \Rightarrow x=\frac{۱۱\pi}{۸}$$

$$k=۶ \Rightarrow x=\frac{۱۳\pi}{۸}, \quad k=۷ \Rightarrow x=\frac{۱۵\pi}{۸}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ برابر ۶π است. توجه کنید که به ازای هیچ‌یک از جواب‌ها، مقدار $\tan x$ برابر صفر نیست.

۲۷۴۸- گزینهٔ ۳ تعداد اعداد واقع در نوزده دستهٔ اول برابر است با:

$$۱+۲+\cdots+۱۹=\frac{۱۹\times۲۰}{۲}=۱۹۰$$

بنابراین عدد اول دستهٔ بیستم ۱۹۱ و عدد آخر آن ۲۱۰ است. مجموع این اعداد برابر است با $۴۰۱۰=(۱۹۱+۲۱۰)\frac{۲۰}{۲}$.

۲۷۴۹- گزینهٔ ۱ مقدار جرم باقی‌مانده در بازه‌های زمانی ۳۰ روزهٔ متوالی به‌صورت زیر است.

- در ابتدا $a=۲۴$ گرم موجود است.
- پس از ۳۰ روز مقدار باقی‌مانده برابر است با $a-\frac{۱}{۱۰}a=\frac{۹}{۱۰}a$
- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر است با

$$\frac{۹}{۱۰}a-\frac{۱}{۱۰}(\frac{۹}{۱۰}a)=\frac{۸۱}{۱۰۰}a=(\frac{۹}{۱۰})^۲a$$

- پس از ۳۰ روز دیگر مقدار باقی‌مانده برابر $(\frac{۹}{۱۰})^۳a$ خواهد بود.

بنابراین پس از n بازهٔ زمانی ۳۰ روزه مقدار باقی‌مانده از جرم برابر است با

$$(\frac{۹}{۱۰})^n a=۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n$$

چون ۸ گرم از ماده قرار است باقی بماند، پس

$$۲۴(\frac{۹}{۱۰})^n=۸ \Rightarrow (\frac{۹}{۱۰})^n=\frac{۱}{۳} \Rightarrow (\frac{۱۰}{۹})^n=۳$$

$$n=\log_{\frac{۱۰}{۹}}۳=\frac{۱}{\log_۳(\frac{۱۰}{۹})}=\frac{۱}{\log_۳۱۰-\log_۳۹}=\frac{۱}{\frac{۱}{\log ۳}-۲}=\frac{۱}{\frac{۱۰۰}{۴۸}-۲}=۱۲$$

پس برای باقی‌ماندن ۸ گرم از این عنصر ۱۲ تا ۳۰ روز طی می‌شود که برابر ۳۶۰ روز است.

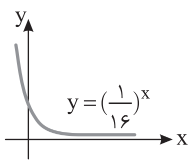
۲۷۵۰- گزینهٔ ۱ این سؤال مربوط به حد دنباله‌هاست که خارج از مباحث کتاب درسی است ولی تا حد امکان سعی می‌کنیم با کمک مطالب موجود در کتاب درسی به آن توضیح دهیم. ابتدا توجه کنید که

$$\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}=\frac{۲\times۲^{۲n}-۲\times۲^{-۲n}}{۲\times۲^{۲n}+۳\times۲\times۲^{-۲n}}=\frac{۲^{۲n}-۲^{-۲n}}{۲^{۲n}+۳\times۲^{-۲n}}$$

$$=\frac{۱-۲^{-۴n}}{۱+۳\times۲^{-۴n}}=\frac{۱-(\frac{۱}{۱۶})^n}{۱+۳(\frac{۱}{۱۶})^n}$$

از طرف دیگر با توجه به نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۱۶})^x$ واضح است که $\lim_{x\to+\infty}(\frac{۱}{۱۶})^x=۰$. بنابراین حد مورد نظر برابر است با

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۱-(\frac{۱}{۱۶})^n}{۱+۳(\frac{۱}{۱۶})^n}=\frac{۱-۰}{۱-۳\times۰}=۱$$



۲۷۵۱- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x+5)-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(2x+5)^2-49x}{4x^2-(3x+1)}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-29x+25}{4x^2-3x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{(2x+5)+7\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)}\times\frac{2+2}{2+5+7}=\frac{4}{14}\lim_{x\to 1}\frac{4x-25}{4x+1}=\frac{2}{7}\times\left(-\frac{21}{5}\right)=-1/2$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5-7\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{2-\frac{7}{2\sqrt{x}}}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}=\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{2\times 2}}=-1/2$$

۲۷۵۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که تابع f به‌صورت زیر است:

$$|x-1|<1\Rightarrow -1<x-1<1\Rightarrow 0<x<2$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & 0<x<2\\ x^2+ax+b & x\le 0 \text{ یا } x\ge 2\end{cases}$$

چون تابع f در نقاط $x=0$ و $x=2$ پیوسته است، پس

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

$$b=\lim_{x\to 0^-}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to 0^+}((x-1)[x])\Rightarrow b=0$$

$$f(2)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)$$

$$4+2a+b=\lim_{x\to 2^+}(x^2+ax+b)=\lim_{x\to 2^-}((x-1)[x])$$

$$4+2a=(2-1)\times 1\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۲۷۵۳- گزینهٔ ۱ چون خط $y=-1$ مجانب افقی نمودار تابع f است، پس

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=-1\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+3x}{ax^2+bx+c}=-1\Rightarrow\frac{-2}{a}=-1\Rightarrow a=2$$

بنابراین $f(x)=\frac{-2x^2+3x}{2x^2+bx+c}$. چون خطوط $x=1$ و $x=-2$ مجانب‌های قائم نمودار تابع f هستند، پس $x=1$ و $x=-2$ ریشه‌های چندجمله‌ای $2x^2+bx+c$ هستند. پس

$$2x^2+bx+c=2(x-1)(x+2)=2x^2+2x-4\Rightarrow b=2,\ c=-4$$

در نتیجه

$$f(x)=\frac{-2x^2+3x}{2x^2+2x-4}\Rightarrow f(-1)=\frac{-2-3}{2-2-4}=\frac{5}{4}=1/25$$

۲۷۵۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$g(x)=f(\sqrt{1+\tan^2 x})\Rightarrow g'(x)=(\sqrt{1+\tan^2 x})'f'(\sqrt{1+\tan^2 x})$$

$$g'(x)=\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{2\sqrt{1+\tan^2 x}}f'(\sqrt{1+\tan^2 x})$$

بنابراین

$$g'(\frac{\pi}{3})=\frac{2\sqrt{3}(1+3)}{2\sqrt{1+3}}f'(\sqrt{1+3})\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}f'(2)\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{4}$$

۲۷۵۵- گزینهٔ ۴ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[5,6]$ برابر است با

$$\frac{f(6)-f(5)}{6-5}=\frac{3-4}{1}=-1$$

از طرف دیگر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطهٔ x برابر $f'(x)$ است.

$$f(x)=\sqrt{21-x^2+4x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2+4x}}=\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}$$

بنابراین

$$\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}=-1\quad(*)\Rightarrow 21-x^2+4x=(x-2)^2$$

$$21-x^2+4x=x^2+4-4x\Rightarrow 2x^2-8x-17=0$$

$$x=2+\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad x=2-\frac{5\sqrt{2}}{2}\ (\text{غ.ق.ق})$$

توجه کنید که طبق معادلهٔ $(*)$ مقدار x باید بیشتر از ۲ باشد.

۲۷۵۶- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}=5\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(4)=5\times 2-\frac{4}{2}=8$$

$$f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{x\sqrt{x}}\Rightarrow m=f'(4)=\frac{5}{4}+\frac{2}{8}=\frac{3}{2}$$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(4,8)$ با شیب $\frac{3}{2}$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$y-8=\frac{3}{2}(x-4)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x+2$$

اگر قرار دهیم $x=0$، عرض نقطهٔ تقاطع با محور y برابر ۲ به‌دست می‌آید.

۲۷۵۷- گزینهٔ ۴ چون $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ جواب‌های معادلهٔ $2x^2+3x-1=0$ هستند، پس مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌ها معلوم است:

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{3}{2},\quad \tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{2}$$

بنابراین $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{3}{2}}{1-(-\frac{1}{2})}=-1$.

۲۷۵۸- گزینهٔ ۱ چندجمله‌ای $P(x)$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر است. پس $P(\frac{1}{2})=0$. بنابراین

$$P(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})^4+a(\frac{1}{2})^3+2(\frac{1}{2})^2-3(\frac{1}{2})=0\Rightarrow a=7$$

$$P(x)=2x^4+7x^3+2x^2-3x$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+2$ برابر است با

$$P(-2)=2(-2)^4+7(-2)^3+2(-2)^2-3(-2)=-10$$

۲۷۵۹- گزینهٔ ۴ طول نقاط تقاطع نمودار تابع‌های $f(x)=|x-2|+|x+1|$ و $g(x)=x+7$ از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید. پس

$$f(x)=g(x)\Rightarrow|x-2|+|x+1|=x+7$$

$$x\ge 2\Rightarrow x-2+x+1=x+7\Rightarrow x=8$$

$$-1\le x\le 2\Rightarrow -x+2+x+1=x+7\Rightarrow x=-4\ (\text{غ.ق.ق})$$

$$x\le -1\Rightarrow -x+2-x-1=x+7\Rightarrow x=-2$$

بنابراین $A(8,15)$ و $B(-2,5)$ نقاط تقاطع هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$AB=\sqrt{(8+2)^2+(15-5)^2}=10\sqrt{2}$$

۲۷۶۰- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** فرض کنید $a=(f^{-1}og^{-1})(-۹)$، پس

$$f^{-1}(g^{-1}(-۹))=a\Rightarrow f(a)=g^{-1}(-۹)\ ,\ a\geq ۲$$
$$a^{۲}-۴a+۹=g^{-1}(-۹)\Rightarrow g(a^{۲}-۴a+۹)=-۹$$
$$\frac{۳-(a^{۲}-۴a+۹)}{۲}=-۹\Rightarrow a^{۲}-۴a-۱۲=۰$$
$$(a-۶)(a+۲)=۰\Rightarrow a=۶\ ,\ a=-۲\ (\text{غ.ق.ق})$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$y=f(x)=x^{۲}-۴x+۹\Rightarrow y=(x-۲)^{۲}+۵$$
$$y-۵=(x-۲)^{۲}\ |x-۲|=\sqrt{y-۵}$$
$$\xrightarrow{x\geq ۲} x-۲=\sqrt{y-۵}$$
$$x=۲+\sqrt{y-۵}\Rightarrow f^{-1}(x)=۲+\sqrt{x-۵}$$

از طرف دیگر،

$$y=g(x)=\frac{۳-x}{۲}\Rightarrow ۲y=۳-x\Rightarrow x=۳-۲y\Rightarrow g^{-1}(x)=۳-۲x$$

بنابراین

$$(f^{-1}og^{-1})(-۹)=f^{-1}(g^{-1}(-۹))=f^{-1}(۳-۲(-۹))$$
$$f^{-1}(۲۱)=۲+\sqrt{۲۱-۵}=۶$$

۲۷۶۱- گزینهٔ ۲ اگر بخواهیم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^{۲}$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم، ابتدا باید آن را نسبت به محور x سپس نسبت به محور y قرینه کنیم (یا ابتدا نسبت به محور y سپس نسبت به محور x قرینه کنیم). ضابطهٔ این تابع به صورت $y=-f(-x)$ خواهد بود. اگر این نمودار را چهار واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $g(x)=-f(-x)+۴$ رسم می‌شود. طول نقاط تلاقی نمودار تابع‌های f و g از معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

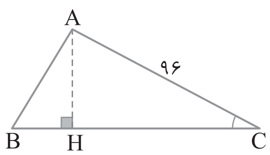
$$f(x)=g(x)\Rightarrow (x-۱)^{۲}=-(-x-۱)^{۲}+۴$$
$$x^{۲}-۲x+۱=-x^{۲}-۲x-۱+۴\Rightarrow x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm ۱$$

۲۷۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا از $۱+\cot^{۲}\hat{C}=\frac{۱}{\sin^{۲}\hat{C}}$ مقدار $\sin\hat{C}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱+(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^{۲}=\frac{۱}{\sin^{۲}\hat{C}}\Rightarrow \sin^{۲}\hat{C}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow \sin\hat{C}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین

$$\triangle AHC:\sin\hat{C}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{AH}{۹۶}\Rightarrow AH=۶۴$$

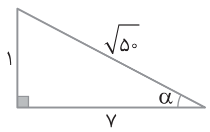


۲۷۶۳- گزینهٔ ۱ با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل که در آن $\tan\alpha=\frac{۱}{۷}$، نتیجه می‌شود

$$\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵۰}},\quad \cos\alpha=\frac{۷}{\sqrt{۵۰}}$$

بنابراین

$$\sin(\frac{۱۳\pi}{۴}+\alpha)=\sin(۳\pi+(\frac{\pi}{۴}+\alpha))=-\sin(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$
$$=-\sin\frac{\pi}{۴}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{۴}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$
$$=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۵۰}}+\frac{۷}{\sqrt{۵۰}})=-\frac{۴}{۵}$$



۲۷۶۴- گزینهٔ ۱ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x$$
$$(\sin x\cos\frac{\pi}{۶}+\sin\frac{\pi}{۶}\cos x)+(\cos x\cos\frac{\pi}{۳}-\sin x\sin\frac{\pi}{۳})=\cos ۲x$$
$$(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x)+(\frac{۱}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x)=\cos ۲x$$
$$\cos x=\cos ۲x$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$۲x=۲k\pi\pm x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳},\ x=۲k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های به صورت $\frac{۲k\pi}{۳}$ شامل جواب‌های به صورت $۲k\pi$ هستند.

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت $x=\frac{۲k\pi}{۳},k\in\mathbb{Z}$ است.

۲۷۶۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که تعداد اعداد نوشته شده در چهل دستهٔ اول برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+۴۰=\frac{۴۰}{۲}(۱+۴۰)=۸۲۰$

بنابراین آخرین عدد واقع در دستهٔ چهلم همان هشتصدوبیستمین عدد طبیعی فرد است که برابر است با $۲\times ۸۲۰-۱=۱۶۳۹$.

۲۷۶۶- گزینهٔ ۲ مقدار مادهٔ خالص در محلول در روزهای متوالی به صورت زیر است (فرض می‌کنیم محلول ۱۰۰ درصد خالص داریم).

روز اول: ۱۰۰ (غلظت ۱۰۰٪)

روز دوم: $۱۰۰-۴=۹۶$ (غلظت ۹۶٪)

روز سوم: $۹۶-\frac{۹۶}{۱۰۰}\times ۴=۹۶(۱-\frac{۴}{۱۰۰})$ (غلظت: ۹۲/۱۶٪)

روز چهارم: ...

اکنون توجه کنید که همین مقادیر را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$۱۰۰,۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰}),۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰})^{۲},\ldots$$

بنابراین در روز $(n+۱)$ ام، یعنی پس از گذشت n روز مقدار مادهٔ خالص برابر $۱۰۰(۱-\frac{۴}{۱۰۰})^{n}$ خواهد بود که باید $\frac{۱}{۳}$ مادهٔ خالص اولیه، یعنی $\frac{۱۰۰}{۳}$ لیتر باشد.

پس

$$100\left(1-\frac{4}{100}\right)^n=\frac{1}{3}\times 100\Rightarrow\left(\frac{24}{25}\right)^n=\frac{1}{3}$$

$$n=\log_{\frac{24}{25}}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-\log 3}{\log\frac{24}{25}}=\frac{-\log 3}{\log 24-\log 25}$$

$$=\frac{-\log 3}{\log 8+\log 3-\log\left(\frac{100}{4}\right)}=\frac{-\log 3}{3\log 2+\log 3-\log 100+\log 4}$$

$$=\frac{-\log 3}{5\log 2+\log 3-2}=\frac{-0.48}{5\times 0.3+0.48-2}=24$$

۲۷۶۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to 0^-$، آن‌گاه

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$$

از طرف دیگر،

$$\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}=\frac{(\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x})}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{2+3x-(2-x)}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\frac{4x}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{4}{-\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-2$$

۲۷۶۸- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع بازهٔ $[-2,2]$ در نظر گرفته شده است، بنابراین تابع در نقاط $x=2$ و $x=-2$ حد ندارد و پیوسته نیست. در نقاط غیرصحیح بازهٔ $(-2,2)$، توابع $y=[x]$ و $y=\sin\pi x$ پیوسته‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x$ نیز پیوسته است. در نقاط صحیح این بازه (یعنی $x=0$، $x=1$ و $x=-1$) تابع $y=[x]$ ناپیوسته است ولی چون تابع $y=\sin\pi x$ پیوسته است و مقدار آن برابر صفر است، تابع f پیوسته خواهد بود. بنابراین تابع f فقط در دو نقطهٔ $x=2$ و $x=-2$ ناپیوسته است.

۲۷۶۹- گزینهٔ ۲ در دو حالت ممکن است تابع $f(x)=\frac{ax^2+7x}{2x^2+bx+c}$ فقط یک مجانب قائم به معادلهٔ $x=2$ داشته باشد.

حالت اول $x=2$ ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای مخرج $f(x)$ باشد، یعنی

$$2x^2+bx+c=2(x-2)^2=2x^2-8x+8\Rightarrow b=-8$$

$$c=8\Rightarrow f(x)=\frac{ax^2+7x}{2(x-2)^2}$$

چون $f(3)=6$، پس

$$\frac{9a+21}{2\times 1}=6\Rightarrow a=-1\Rightarrow f(x)=\frac{-x^2+7x}{2(x-2)^2}$$

پس معادلهٔ مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y=-\frac{1}{2}$ است.

حالت دوم $x=2$ ریشهٔ مخرج $f(x)$ باشد و یکی از ریشه‌های صورت $f(x)$ ریشهٔ دیگر مخرج آن باشد. اگر $a\neq 0$، آن‌گاه ریشه‌های صورت $f(x)$ اعداد $x=0$ و $x=-\frac{7}{a}$ هستند. بنابراین $f(x)$ باید به صورت‌های زیر باشد:

- اگر $x=0$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x(ax+7)}{2x^2+bx+c}=\frac{x(ax+7)}{2x(x-2)}\Rightarrow c=0\ ,\ b=-4\Rightarrow f(x)=\frac{ax+7}{2(x-2)}$$

چون $f(3)=6$، پس $\frac{3a+7}{2\times 1}=6\Rightarrow a=\frac{5}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{5}{3}x+7}{2x-4}$

در این حالت معادلهٔ مجانب افقی نمودار تابع f به صورت $y=\frac{5}{6}$ است.

- اگر $x=-\frac{7}{a}$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج باشد، آن‌گاه

$$f(x)=\frac{x(ax+7)}{2x^2+bx+c}=\frac{x(ax+7)}{2(x-2)(ax+7)}\Rightarrow a=1\ ,\ b=10\ ,\ c=-28$$

$$f(x)=\frac{x(x+7)}{2(x-2)(x+7)}=\frac{x}{2(x-2)}$$

در این حالت $f(3)=\frac{3}{2}$ که مخالف فرض مسئله است.

اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{7x}{2x^2+bx+c}$ که در این صورت باید داشته باشیم $c=0$ و $b=-4$، یعنی $f(x)=\frac{7x}{2x^2-4x}=\frac{7}{2(x-2)}$ که باز هم شرط $f(3)=6$ برقرار نیست. پس خطوط $y=\frac{-1}{2}$ و $y=\frac{5}{3}$ می‌توانند مجانب افقی نمودار تابع f باشند.

۲۷۷۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$g(x)=f\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\Rightarrow g'(x)=\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)'f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$g'(x)=\frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$=\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}f'\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

بنابراین

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-2\cos\frac{\pi}{6}}{(1+\sin\frac{\pi}{6})^2}f'\left(\frac{1-\sin\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{-4\sqrt{3}}{9}f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{4}$$

۲۷۷۱- گزینهٔ ۴ اگر نمودار تابع‌های $f(x)=x\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2+ax+b$ در نقطهٔ مشترک $x=4$ بر یک خط مماس باشند، آن‌گاه

$$\begin{cases}f(4)=g(4)\Rightarrow 8=16+4a+b\Rightarrow b=-8-4a\\ f'(4)=g'(4)\Rightarrow 3=8+a\Rightarrow a=-5\Rightarrow b=12\end{cases}$$

توجه کنید که

$$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(4)=\frac{3}{2}\times 2=3$$

$$g(x)=x^2+ax+b\Rightarrow g'(x)=2x+a\Rightarrow g'(4)=8+a$$

۲۷۷۲- گزینهٔ ۱ ابتدا $f'(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$0\le x<4\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+6x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}\Rightarrow f'(2)=\frac{5}{4}$$

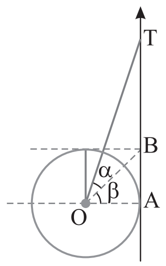
اکنون توجه کنید که در یک همسایگی نقطهٔ $x=5$، تساوی $[\frac{x}{4}]=1$ برقرار است. پس در این همسایگی می‌توان نوشت

$$f(x)=x^2-9x\Rightarrow f'(x)=2x-9\Rightarrow f'(5)=10-9=1$$

بنابراین $f'(2)-f'(5)=\frac{1}{4}$.

۲۷۷۳- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل زیر،

$$OA=AB=1\ ,\ BT=2\Rightarrow\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{AT}{OA}=\dfrac{1+2}{1}=3\\ \tan\beta=\dfrac{AB}{OA}=\dfrac{1}{1}=1\end{cases}$$



بنابراین

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$3=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}$$

$$3-3\tan\alpha=\tan\alpha+1$$

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}$$

۲۷۷۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(5+\sqrt{6})}{(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6})}=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{25-6}$$

$$=\frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

از طرف دیگر،

$$2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\sqrt{3}+1$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)=\sqrt{2}-1$$

۲۷۷۵- گزینهٔ ۳ اعداد مربع کامل به‌صورت زیر هستند:

$$1^2,2^2,3^2,\dots,8^2,9^2,\dots$$

بنابراین آخرین عدد دستهٔ هشتم عدد 8^2 و آخرین عدد دستهٔ نهم عدد 9^2 است. همچنین اولین عدد دستهٔ نهم 8^2+1 است. پس واسطهٔ حسابی بین 8^2+1 و 9^2 را باید حساب کنیم که برابر است با $\frac{8^2+1+9^2}{2}=73$

۲۷۷۶- گزینهٔ ۲ چون چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر است، پس بر $x-1$ و $x+1$ هم بخش‌پذیر است. یعنی $p(-1)=p(1)=0$. از طرف دیگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ برابر $Q(2)$ است. بنابراین

$$Q(x)=p(x-1)+p(1-x)\Rightarrow Q(2)=p(1)+p(-1)=0$$

توجه در صورت سؤال نوشته شده است «حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$» که معلوم نیست چیه! ولی احتمالاً منظور همین «باقی‌مانده» بوده است.

۲۷۷۷- گزینهٔ ۱ مجموع جواب‌ها و حاصل‌ضرب جواب‌ها در معادلهٔ $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ به‌ترتیب برابر $\frac{1-2m}{3}$ و $\frac{2-m}{3}$ هستند، پس

$$\frac{1-2m}{3}=\frac{3}{2-m}\Rightarrow(1-2m)(2-m)=9\Rightarrow 2m^2-5m-7=0$$

$$(m+1)(2m-7)=0\Rightarrow m=-1\ ,\ m=\frac{7}{2}$$

به‌ازای $m=-1$ معادله به‌صورت $3x^2-3x+3=0$ در می‌آید که جواب ندارد، پس فقط $m=\frac{7}{2}$ قابل قبول است.

۲۷۷۸- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** نامعادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$1<\frac{x+1}{2x-1}<3\Rightarrow -1<\frac{x+1}{2x-1}-2<1\Rightarrow -1<\frac{-3x+3}{2x-1}<1$$

$$\left|\frac{-3x+3}{2x-1}\right|<1\Rightarrow|3x-3|<|2x-1|$$

بنابراین نامعادله به‌صورت زیر حل می‌شود:

$$(3x-3)^2<(2x-1)^2\Rightarrow(3x-3)^2-(2x-1)^2<0$$

$$(3x-3+2x-1)(3x-3-2x+1)<0$$

$$(5x-4)(x-2)<0\Rightarrow\frac{4}{5}<x<2\Rightarrow x\in(0/8,2)$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که عدد ۱ در نامعادله صدق می‌کند، زیرا $1<\frac{1+1}{2-1}<3$

همچنین عدد $\frac{3}{2}$ در نامعادله صدق می‌کند

$$1<\frac{\frac{3}{2}+1}{2(\frac{3}{2})-1}<3\Leftrightarrow 1<\frac{5}{4}<3$$

این اعداد فقط عضو بازهٔ گزینهٔ (۴) هستند.

راه‌حل سوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x+1}{2x-1}<3\Rightarrow\frac{x+1-6x+3}{2x-1}<0\Rightarrow\frac{-5x+4}{2x-1}<0\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{4}{5},+\infty)$$

$$\frac{x+1}{2x-1}>1\Rightarrow\frac{x+1-2x+1}{2x-1}>0\Rightarrow\frac{-x+2}{2x-1}>0\Rightarrow x\in(\frac{1}{2},2)$$

از اشتراک دو مجموعهٔ جواب به‌دست آمده نتیجه می‌شود

$$x\in(\frac{4}{5},2)=(0/8,2)$$

۲۷۷۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** مختصات نقاط را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم:

$$y=ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}\Rightarrow 0+0+c=5\Rightarrow c=5\ ,\quad\begin{cases}x=1\\y=11\end{cases}\Rightarrow a+b+c=11\Rightarrow a+b=6$$

$$\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}\Rightarrow 4a-2b+c=5\Rightarrow 4a-2b=0\Rightarrow b=2a$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases}a+b=6\\b=2a\end{cases}$ نتیجه می‌شود $a=2$ و $b=4$. پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=2x^2+4x+5$ است که از نقطهٔ $(-1,3)$ می‌گذرد.

راه‌حل دوم چون سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ از نقاط $(۰,۵)$، $(-۲,۵)$ و $(۱,۱۱)$ می‌گذرد، پس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c-۵$ از نقاط $(۰,۰)$، $(-۲,۰)$ و $(۱,۶)$ می‌گذرد و معادلهٔ سهمی‌ای که از این نقاط می‌گذرد به صورت $y=a(x-۰)(x+۲)=a(x^۲+۲x)$ است. این سهمی از نقطهٔ $(۱,۶)$ می‌گذرد. پس $۶=a(۱+۲)\Rightarrow a=۲$

بنابراین معادلهٔ سهمی اولیه به‌صورت $y=۲x^۲+۴x+۵$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

راه‌حل سوم چون عرض نقاط $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ یکسان است، پس طول رأس این سهمی برابر -۱ است. بنابراین معادلهٔ سهمی به شکل کلی $y=m(x+۱)^۲+n$ است. این سهمی از نقاط $(۰,۵)$ و $(۱,۱۱)$ می‌گذرد. پس

$$(۰,۵)\in \text{سهمی}\Rightarrow m+n=۵ \quad , \quad (۱,۱۱)\in \text{سهمی}\Rightarrow ۴m+n=۱۱$$

از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} m+n=۵\\ ۴m+n=۱۱\end{cases}$ به‌دست می‌آید $m=۲$ و $n=۲$.

در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $y=۲(x+۱)^۲+۳$ است که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ می‌گذرد.

۲۷۸۰- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دوازده واحد به راست ببریم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}$ به‌دست می‌آید. اگر این نمودار را دو واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{x-۱۲}+۲$ حاصل می‌شود. نقطهٔ برخورد نمودار توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱۲}+۲$ مد نظر است که طول آن از حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{x}=\sqrt{x-۱۲}+۲\Rightarrow\sqrt{x}-۲=\sqrt{x-۱۲}\Rightarrow x+۴-۴\sqrt{x}=x-۱۲$$

$$۱۶=۴\sqrt{x}\Rightarrow ۴=\sqrt{x}\Rightarrow x=۱۶$$

پس نقطهٔ مورد نظر $A(۱۶,۴)$ است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

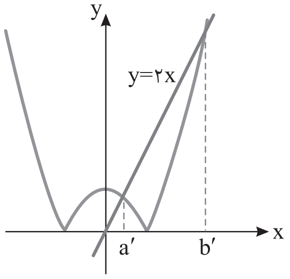
$$\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۱۷}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۷۸۱- گزینهٔ ۱ نمودار تابع‌های $f(x)=|۲x^۲-۴|=۲|x^۲-۲|$ و $g(x)=۲x$ به‌صورت زیر است. واضح است که در بازهٔ (a',b') نمودار تابع f زیر نمودار تابع g قرار دارد. پس کافی است نقاط a' و b' را معلوم کنیم که جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هستند:

$$۲|x^۲-۲|=۲x\Rightarrow|x^۲-۲|=x$$

$$x\ge۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲=x\\ x^۲-۲=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=۲\,,\, x=-۱\ (\text{غ.ق.ق.})\\ x^۲+x-۲=۰\Rightarrow x=۱\,,\, x=-۲\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$



بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ وقتی است که $a=a'=۱$ و $b=b'=۲$ و در نتیجه $b-a=۱$.

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حل هندسی معادلات و نامعادلات در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۷۸۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید $D_f=D_g=\mathbb{R}$، بنابراین $D_{gof}=\mathbb{R}$. از طرف دیگر،

$$(gof)(x)=g(f(x))=-f^۲(x)+۴f(x)=۴-(f(x)-۲)^۲$$

$$=۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲$$

اکنون توجه کنید که

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱\Rightarrow -۲\le ۲x-[۲x]-۲<-۱$$

$$۱<(۲x-[۲x]-۲)^۲\le۴\Rightarrow -۴\le-(۲x-[۲x]-۲)^۲<-۱$$

$$۰\le۴-(۲x-[۲x]-۲)^۲<۳\Rightarrow۰\le(gof)(x)<۳$$

بنابراین برد تابع gof بازهٔ $[۰,۳)$ است.

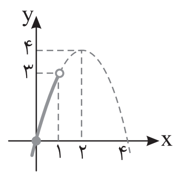
راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$۰\le۲x-[۲x]<۱\Rightarrow۰\le f(x)<۱$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(t)=-t^۲+۴t, \quad ۰\le t<۱$$

بنابراین نمودار تابع g به صورت زیر است و در نتیجه $۰\le g(t)<۳$، یعنی

$$R_{gof}=[۰,۳)$$



۲۷۸۳- گزینهٔ ۳ چون $g(x)=f^{-۱}(x)$، پس

$$g(۶)+g(۱۲)=f^{-۱}(۶)+f^{-۱}(۱۲)$$

از طرف دیگر، $f(x)=x+\sqrt{x}$، $f(۴)=۴+۲=۶$ و $f(۹)=۹+۳=۱۲$. بنابراین $f^{-۱}(۶)=۴$ و $f^{-۱}(۱۲)=۹$ و در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر ۱۳ است.

۲۷۸۴- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** فرض می‌کنیم نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(a,-a)$ که $a>۰$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع کند. در این صورت $f^{-۱}(a)=-a$ و در نتیجه $f(-a)=a$. بنابراین

$$-a-\frac{۲}{-a}=a\Rightarrow۲a=\frac{۲}{a}\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=۱$$

راه‌حل دوم ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۲}{x},\quad x<۰\Rightarrow y=\frac{x^۲-۲}{x}\Rightarrow xy=x^۲-۲\Rightarrow x^۲-yx-۲=۰$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{y+\sqrt{y^۲+۸}}{۲}>۰ \quad (\text{غ.ق.ق.})\\ x=\dfrac{y-\sqrt{y^۲+۸}}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=\frac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}$. طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-\sqrt{x^۲+۸}}{۲}=-x\Rightarrow\sqrt{x^۲+۸}=۳x\quad(x>۰)$$

$$x^۲+۸=۹x^۲\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱, x=-۱\ (\text{غ. ق. ق.})$$

۲۷۸۵- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که

$$\log_4 3=\frac{8}{10}\Rightarrow\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{4}{5}\Rightarrow\log_2 3=\frac{8}{5}$$

بنابراین

$$\log_{12}6=\frac{\log_2 6}{\log_2 12}=\frac{\log_2 3+\log_2 2}{\log_2 3+2\log_2 2}=\frac{\frac{8}{5}+1}{\frac{8}{5}+2}=\frac{13}{18}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_4 3=0/8=\frac{4}{5}\Rightarrow 4^{\frac{4}{5}}=3\Rightarrow 4^4=3^5\Rightarrow 2^8=3^5$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.) بنابراین

$$\log_{12}6=\log_{12}3+\log_{12}2=\log_{2^2\times3}3+\log_{2^2\times3}2$$
$$=4\log_{(2^8\times3^4)}3+5\log_{(2^{10}\times3^5)}2=4\log_{(3^5\times3^4)}3+5\log_{(2^{10}\times2^8)}2$$
$$=4\log_{3^9}3+5\log_{2^{18}}2=\frac{4}{9}\log_3 3+\frac{5}{18}\log_2 2=\frac{4}{9}+\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$$

۲۷۸۶- گزینهٔ ۲ از نمودار تابع f معلوم است که $f(-\frac{1}{3})=0$ و $f(0)=-2$. بنابراین

$$f(x)=-4+2^{ax+b}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=-4+2^b=-2\\ f(-\frac{1}{3})=-4+2^{-\frac{a}{3}+b}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2^b=2\Rightarrow b=1\\ 2^{-\frac{a}{3}+1}=4\Rightarrow-\frac{a}{3}+1=2\Rightarrow a=-3\end{cases}$$

پس

$$f(x)=-4+2^{-3x+1}\Rightarrow f(-\frac{5}{3})=-4+2^6=60$$

۲۷۸۷- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول فرض کنید $f^{-1}(2)=a>0$. در این صورت $f(a)=2$ و در نتیجه

$$\frac{2^a+(\frac{1}{2})^a}{2}=2\Rightarrow 2^a+\frac{1}{2^a}=4$$

با فرض $b=2^a>0$ معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$b+\frac{1}{b}=4\Rightarrow b^2-4b+1=0\Rightarrow b=2+\sqrt{3},\ b=2-\sqrt{3}\ (\text{غ.ق.})$$

(اگر $b=2-\sqrt{3}$، آن‌گاه $a=\log_2(2-\sqrt{3})<0$ که با توجه به دامنهٔ داده شده قابل قبول نیست.) پس $2^a=2+\sqrt{3}\Rightarrow a=\log_2(2+\sqrt{3})$

راه‌حل دوم تابع وارون تابع $f(x)=\frac{2^x+(\frac{1}{2})^x}{2}$ با دامنهٔ $[0,+\infty)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2^x+(\frac{1}{2})^x}{2}\Rightarrow 2y=2^x+\frac{1}{2^x}$$

اگر فرض کنیم $t=2^x>0$، آن‌گاه

$$2y=t+\frac{1}{t}\Rightarrow t^2-2yt+1=0\Rightarrow t=y\pm\sqrt{y^2-1}\Rightarrow 2^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$$

چون $x\geq0$، پس فقط $y+\sqrt{y^2-1}$ قابل قبول است. بنابراین

$$x=\log_2(y+\sqrt{y^2-1})\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2-1})$$

در نتیجه $f^{-1}(2)=\log_2(2+\sqrt{3})$.

۲۷۸۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan 300^\circ=\tan(360^\circ-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$
$$\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 480^\circ=\tan(450^\circ+30^\circ)=\tan(5\times90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$
$$\sin 840^\circ=\sin(810^\circ+30^\circ)=\sin(9\times90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین

$$\tan 300^\circ\cos 210^\circ+\tan 480^\circ\sin 840^\circ$$
$$=(-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$$

۲۷۸۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$y=a+b\sin(\frac{\pi}{2}+x)=a+b\cos x$$

پس ماکزیمم تابع برابر $a+|b|$ است که با توجه به شکل برابر ۳ است. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{7\pi}{3},0)$ عبور می‌کند. پس

$$a+b\cos\frac{7\pi}{3}=0\Rightarrow a+b\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{3}=0$$
$$a+\frac{b}{2}=0\Rightarrow a=-\frac{b}{2}$$

بنابراین $a+|b|=3\Rightarrow-\frac{b}{2}+|b|=3$

با توجه به نمودار تابع واضح است که b مقداری منفی است، پس

$$-\frac{b}{2}-b=3\Rightarrow b=-2$$

۲۷۹۰- گزینهٔ ۴ حداکثر مقدار و حداقل مقدار تابع $y=a\sin(bx)+c$ به‌ترتیب برابر $|a|+c$ و $-|a|+c$ است که روی شکل برابر ۱ و ۳- نشان داده شده است. پس

$$\begin{cases}|a|+c=1\\-|a|+c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-1\\|a|=2\end{cases}$$

از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است که روی شکل برابر $\frac{9\pi}{2}-(-\frac{3\pi}{2})=6\pi$ نشان داده شده است. پس $\frac{2\pi}{|b|}=6\pi\Rightarrow|b|=\frac{1}{3}$

پس

$$|\frac{a}{b}|=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6\Rightarrow\frac{a}{b}=\pm6$$

ولی چون نمودار رسم شده در یک همسایگی راست صفر نزولی است، a و b باید غیرهم‌علامت باشند، پس $\frac{a}{b}=-6$.

۲۷۹۱- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(x+\frac{\pi}{4})\Rightarrow\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4})$$
$$\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4}-x)$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}-x\\ 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}+x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\\ x=(2k+1)\pi\end{cases}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

چون شرط $x\neq k\pi$ قرار داده شده است، پس $x=(2k+1)\pi$ قابل قبول نیست.

۲۷۹۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که در یک همسایگی چپ نقطهٔ $x=-2$ تابع $y=[x]$ با تابع $y=-3$ برابر است. بنابراین

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{[x]+3}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{-3+3}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}0=0$$

۲۷۹۳- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{4x^n}=\frac{1}{6}\Rightarrow\begin{cases}n=1\\ a=\frac{2}{3}\end{cases}$$

بنابراین **راه‌حل اول**

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2-1}}{x-3}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\left(\frac{8x^3-27(x^2-1)}{x-3}\times\frac{1}{4x^2+6x\sqrt[3]{x^2-1}+9\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(8x^2-3x-9)}{x-3}$$

$$\times\lim_{x\to3}\frac{1}{4x^2+6x\sqrt[3]{x^2-1}+9\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to3}(8x^2-3x-9)\times\frac{1}{36+36+36}$$

$$=\frac{1}{12}\times(72-9-9)\times\frac{1}{36\times3}=\frac{1}{24}$$

راه‌حل دوم به کمک قاعدهٔ هوپیتال مقدار حد خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{2\times3}{3\times4}}{4}=\frac{1}{24}$$

توجه این سؤال خارج از مباحث کتاب درسی رشتهٔ تجربی است. چون حد تابع رادیکالی در بی‌نهایت در کتاب درسی رشتهٔ تجربی وجود ندارد.

۲۷۹۴- گزینهٔ ۳ چون تابع f در نقطهٔ $x=-2$ مشتق‌پذیر است، پس در این نقطه پیوسته نیز هست. بنابراین

$$f'_-(-2)=f'_+(-2),\quad f(-2)=\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}f(x)$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\le-2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{5-2x}} & x\le-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_-(-2)=-\frac{1}{\sqrt{5+4}}=-\frac{1}{3}\\ f'_+(-2)=-(-2)+b=b+2\end{cases}\Rightarrow b+2=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=-\frac{7}{3}$$

$$\begin{cases}f(-2)=\sqrt{5+4}=3\\ \lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}(-\frac{1}{2}x^2+bx+c)=-2-2b+c=c+\frac{8}{3}\end{cases}$$

$$c+\frac{8}{3}=3\Rightarrow c=\frac{1}{3}$$

۲۷۹۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}=\frac{x(x+2)}{x^3(x-1)^3}=\frac{x+2}{x^2(x-1)^3}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{x^2(x-1)^3-(2x(x-1)^3+3(x-1)^2x^2)(x+2)}{(x^2(x-1)^3)^2}$$

در نتیجه

$$f'(2)=\frac{4\times1^3-(4(1)^3+3(1)^2\times4)(4)}{(4(1)^3)^2}=-\frac{15}{4}$$

۲۷۹۶- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x+\sqrt{4x-x^2}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=\frac{\sqrt{4x-x^2}+2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$$

واضح است که $x=0$ و $x=4$ نقاط بحرانی تابع‌اند ولی چون تابع f در یک همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود، پس این نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. بنابراین باید معادلهٔ $f'(x)=0$ را حل کنیم تا طول نقاط اکسترمم نسبی به‌دست آید:

$$\sqrt{4x-x^2}+2-x=0\Rightarrow\sqrt{4x-x^2}=x-2,\quad x>2$$

$$4x-x^2=x^2-4x+4\Rightarrow2x^2-8x+4=0$$

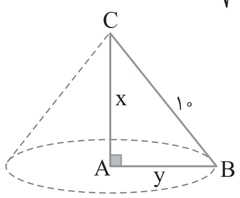
$$x^2-4x+2=0\Rightarrow x=2+\sqrt{2}\,,\ x=2-\sqrt{2}\ (\text{غ.ق.ق})$$

بنابراین نقطهٔ $A(2+\sqrt{2}\,,2+2\sqrt{2})$ نقطهٔ اکسترمم (ماکزیمم) نسبی تابع f است که فاصلهٔ آن از نیمساز ناحیهٔ اول برابر است با $\frac{|2+2\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

۲۷۹۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x^2+y^2=10$. پس $y^2=10-x^2$.
اگر مثلث را حول ضلع AC دوران دهیم، مخروطی به‌دست می‌آید که شعاع قاعدهٔ آن برابر y و ارتفاع آن برابر x است، پس حجم حاصل برابر $V=\frac{\pi}{3}y^2x$ خواهد بود. بنابراین می‌خواهیم حداکثر مقدار تابع $V(x)=\frac{\pi}{3}x(10-x^2)$ حاصل شود.

$$V(x)=\frac{\pi}{3}(10x-x^3)\Rightarrow V'(x)=\frac{\pi}{3}(10-3x^2)$$

$$V'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{\frac{10}{3}}\Rightarrow y^2=10-\frac{10}{3}\Rightarrow y=\sqrt{2}\sqrt{\frac{10}{3}}$$



بنابراین

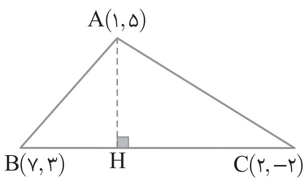
$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{10}{3}}}{\sqrt{\frac{10}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

۲۷۹۸- گزینهٔ ۴ ابتدا معادلهٔ خط BC را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{3-(-2)}{7-2}=1$$

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-3=1\times(x-7)$$

پس معادلهٔ خط BC به‌صورت $x-y-4=0$ است. طول ارتفاع AH برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC است که برابر است با $\frac{|1-5-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$.



۲۷۹۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}}\times\frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3}$$
$$=\frac{13\sqrt{3}-13}{13}=\sqrt{3}-1$$

همچنین $2+\sqrt{3}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3})^{-1}$

بنابراین $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}+(2-\sqrt{3})^{-1}=\sqrt{3}-1+2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+1$

۲۸۰۰- گزینهٔ ۴ جملات سوم، هفتم و شانزدهم دنبالهٔ حسابی را به ترتیب a، $a+4d$ و $a+13d$ در نظر می‌گیریم. چون این اعداد جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، پس

$$a(a+13d)=(a+4d)^2\Rightarrow a^2+13ad=a^2+8ad+16d^2$$
$$5ad=16d^2\Rightarrow a=\frac{16}{5}d$$

(توجه کنید که $d\neq 0$. چون در غیر این صورت، $q=1$ که در گزینه‌ها وجود ندارد.)

بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با

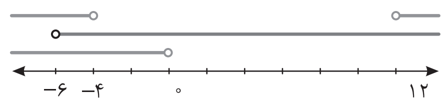
$$r=\frac{a+4d}{a}=\frac{\frac{16}{5}d+4d}{\frac{16}{5}d}=\frac{36d}{16d}=\frac{9}{4}$$

۲۸۰۱- گزینهٔ ۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس $p(4)=3$ و $p(-2)=1$. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $A(x)=p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$ برابر $A(2)$ است و برابر است با $A(2)=p(4)+4p(-2)=3+4\times1=7$

۲۸۰۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** چون معادله دو جواب مثبت دارد، پس شرایط $\Delta>0$، $\frac{c}{a}>0$ و $-\frac{b}{a}>0$ برقرار هستند. در اینجا $a=2$، $b=m$ و $c=m+6$. پس

$$\Delta=b^2-4ac=m^2-4\times2(m+6)>0\Rightarrow m^2-8m-48>0$$
$$(m-12)(m+4)>0\Rightarrow m>12 \text{ یا } m<-4 \qquad (1)$$
$$\frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{m+6}{2}>0\Rightarrow m>-6 \qquad (2)$$
$$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow-\frac{m}{2}>0\Rightarrow m<0 \qquad (3)$$

با توجه به شکل زیر، اشتراک مجموعهٔ جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) به صورت $m\in(-6,-4)$ است.



راه‌حل دوم توجه کنید که به ازای $m=-5$ معادله به صورت $2x^2-5x+1=0$ در می‌آید که به وضوح دو جواب مثبت دارد چون $\Delta=17>0$، $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}>0$ و $-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}>0$. پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب نیستند. از طرف دیگر به ازای $m=-1$ معادله به صورت $2x^2-x+5=0$ در می‌آید که جواب ندارد، زیرا $\Delta=-39<0$. پس گزینهٔ (۳) هم جواب نیست و گزینهٔ (۴) جواب است.

۲۸۰۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2x-1}{x+1}<3\Rightarrow\frac{2x-1-3x-3}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x+4}{x+1}>0$$
$$x\in(-\infty,-4)\cup(-1,+\infty) \qquad (1)$$
$$\frac{2x-1}{x+1}>-1\Rightarrow\frac{2x-1+x+1}{x+1}>0\Rightarrow\frac{3x}{x+1}>0$$
$$x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty) \qquad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}-[-4,0]$$

راه‌حل دوم نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$-1<\frac{2x-1}{x+1}<3\Rightarrow-2<\frac{2x-1}{x+1}-1<2\Rightarrow-2<\frac{x-2}{x+1}<2$$
$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|<2\Rightarrow|x-2|<2|x+1|\Rightarrow x^2-4x+4<4x^2+8x+4$$
$$x^2+4x>0\Rightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$$

راه‌حل سوم واضح است که $x=0$ در نامعادله صدق نمی‌کند، پس گزینهٔ (۴) جواب نیست. از طرف دیگر، $x=-5$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های (۱) و (۲) جواب درست نیستند، بنابراین گزینهٔ (۳) جواب است.

۲۸۰۴- گزینهٔ ۲ چون رأس سهمی نقطهٔ $(-1,9)$ است، پس معادلهٔ آن به صورت $y=a(x+1)^2+9$ است. این سهمی از نقطهٔ $(3,1)$ می‌گذرد، پس

$$1=a(3+1)^2+9\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+9$ است که از نقطهٔ $(5,-9)$ می‌گذرد:

$$-\frac{1}{2}(5+1)^2+9=-18+9=-9$$

۲۸۰۵- گزینهٔ ۱ اگر نمودار تابع $y=x^2-2x\,,(x>1)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-x^2+2x$ به‌دست می‌آید. اگر نمودار اخیر را شانزده واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-x^2+2x+16$ به‌دست می‌آید. نقطهٔ برخورد نمودار تابع اخیر و نمودار تابع اولیه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x^2-2x=-x^2+2x+16\Rightarrow x^2-2x-8=0$$
$$(x-4)(x+2)=0\Rightarrow x=4, x=-2 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

بنابراین باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,8)$ از مبدأ مختصات را پیدا کنیم که برابر است با

$$OA=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$$

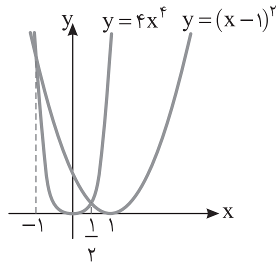
۲۸۰۶- گزینهٔ ۲ در نقاطی که طول آن‌ها عضو مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $(x-1)^2>4x^4$ باشد، نمودار تابع $y=(x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y=4x^4$ قرار دارد:

$$4x^4<(x-1)^2\Rightarrow(2x)^2-(x-1)^2<0$$
$$(2x^2+x-1)(2x^2-x+1)<0$$

عبارت $2x^2-x+1$ همواره مثبت است، زیرا $\Delta=1-8<0$. بنابراین باید نامعادلهٔ $2x^2+x-1<0$ را حل کنیم:

$$(x+1)(2x-1)<0\Rightarrow-1<x<\frac{1}{2}$$

در بازهٔ $(-۱,\frac{۱}{۲})$ چنین اتفاقی می‌افتد. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{۱}{۲}-(-۱)=\frac{۳}{۲}$ است. توجه کنید که نمودار تابع‌های $y=(x-۱)^۲$ و $y=۴x^۴$ به صورت زیر است:



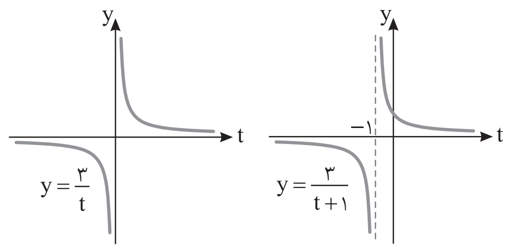
۲۸۰۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

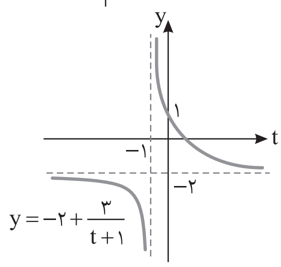
$$۰\le x-[x]<۱\Rightarrow -۱<[x]-x\le ۰\Rightarrow -۱<f(x)\le ۰$$

بنابراین تابع gof با تابع $y=\frac{۱-۲t}{t+۱}$ که دامنهٔ آن بازهٔ $(-۱,۰]$ است، برابر است.

برد این تابع را به‌دست می‌آوریم:

راه‌حل اول نمودار تابع به صورت زیر رسم می‌شود: $y=\frac{۱-۲t}{t+۱}=-۲+\frac{۳}{t+۱}$





واضح است که برد تابع gof بازهٔ $[۱,+\infty)$ است.

راه‌حل دوم به کمک نابرابری‌ها برد تابع را به‌دست می‌آوریم: $y=-۲+\frac{۳}{t+۱}$

$$-۱<t\le ۰\Rightarrow ۰<t+۱\le ۱\Rightarrow \frac{۱}{t+۱}\ge ۱\Rightarrow \frac{۳}{t+۱}\ge ۳\Rightarrow -۲+\frac{۳}{t+۱}\ge ۱\Rightarrow y\ge ۱$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[۱,+\infty)$ است. توجه کنید که به ازای هر $y\ge ۱$ مقداری مانند t وجود دارد که $y=-۲+\frac{۳}{t+۱}$. این مقدار به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y+۲=\frac{۳}{t+۱}\Rightarrow t+۱=\frac{۳}{y+۲}\Rightarrow t=-۱+\frac{۳}{y+۲}$$

راه‌حل سوم تابع $g(t)=\frac{۱-۲t}{t+۱}$ روی بازهٔ $(-۱,۰]$ پیوسته و نزولی است. بنابراین برد آن برابر است با

$$[g(۰),\ \lim_{t\to(-۱)^+} g(t))=[۱,+\infty)$$

۲۸۰۸- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱$$

بنابراین تابع وارون تابع f به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=(\sqrt{x}+۱)^۲-۱\Rightarrow(\sqrt{x}+۱)^۲=y+۱\quad(y\ge -۱)$$

$$\sqrt{x}+۱=\sqrt{y+۱}\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y+۱}-۱$$

$$x=(\sqrt{y+۱}-۱)^۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-۱}(x)=(\sqrt{x+۱}-۱)^۲\quad(x\ge -۱)$$

$$g(۳)+g(۱۵)=f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(x)=x+۲\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}f(۱)=۳\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۱\\ f(۹)=۱۵\Rightarrow f^{-۱}(۱۵)=۹\end{cases}$$

بنابراین

$$g(x)=f^{-۱}(x)\Rightarrow g(۳)+g(۱۵)=f^{-۱}(۳)+f^{-۱}(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

۲۸۰۹- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** ابتدا تابع وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x-\frac{۱}{۲x},\quad x>۰$$

$$y=\frac{۲x^۲-۱}{۲x}\Rightarrow ۲xy=۲x^۲-۱\Rightarrow ۲x^۲-۲yx-۱=۰$$

$$\begin{cases}x=\frac{۲y+\sqrt{۴y^۲+۸}}{۴}\\ x=\frac{۲y-\sqrt{۴y^۲+۸}}{۴}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{y+\sqrt{y^۲+۲}}{۲}\\ x=\frac{y-\sqrt{y^۲+۲}}{۲}<۰\ (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

بنابراین

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+\sqrt{x^۲+۲}}{۲}$$

طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با نیمساز ناحیهٔ دوم (خط $y=-x$) از حل معادلهٔ $f^{-۱}(x)=-x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x+\sqrt{x^۲+۲}}{۲}=-x\Rightarrow\sqrt{x^۲+۲}=-۳x\quad(x<۰)$$

$$x^۲+۲=۹x^۲\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ (\text{غ.ق.ق}),\ x=-\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم فرض کنید نقطهٔ $(a,-a)$ نقطهٔ برخورد نمودار تابع $f^{-۱}$ با خط $y=-x$ (نیمساز ناحیهٔ دوم) باشد $(a<۰)$. بنابراین

$$f^{-۱}(a)=-a\Rightarrow f(-a)=a\Rightarrow -a-\frac{۱}{-۲a}=a$$

$$۲a=\frac{۱}{۲a}\Rightarrow ۴a^۲=۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

۲۸۱۰- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که $\log_3 2=\frac{5}{8}$، پس $\log_2 3=\frac{8}{5}$. بنابراین

$$\log_{18}8=\frac{\log_2 8}{\log_2 18}=\frac{3\log_2 2}{\log_2 9+\log_2 2}=\frac{3}{2\log_2 3+1}=\frac{3}{2\times\frac{8}{5}+1}=\frac{5}{7}$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$\log_3 2=\frac{5}{8}\Rightarrow 3^{\frac{5}{8}}=2\Rightarrow 3^5=2^8\Rightarrow 3^{10}=2^{16}$$

(دقت کنید که این تساوی به صورت تقریبی داده شده است و تساوی درستی نیست.)

بنابراین

$$\log_{18}8=\log_{3^2\times 2}2^3=3\log_{3^2\times 2}2=3\times 5\log_{3^{10}\times 2^5}2$$
$$=15\log_{2^{16}\times 2^5}2=15\log_{2^{21}}2=\frac{15}{21}\log_2 2=\frac{5}{7}$$

۲۸۱۱- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار تابع واضح است که $f(0)=-6$ و $f(\frac{1}{2})=0$. بنابراین

$$f(x)=-9+(\frac{1}{3})^{ax+b}$$

$$\begin{cases}f(0)=-9+(\frac{1}{3})^{b}=-6\\ f(\frac{1}{2})=-9+(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}a+b}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^{-b}=3\Rightarrow b=-1\\ 3^{-\frac{a}{2}+1}=9\Rightarrow -\frac{a}{2}+1=2\Rightarrow a=-2\end{cases}$$

پس

$$f(x)=-9+(\frac{1}{3})^{-2x-1}\Rightarrow f(2)=-9+(\frac{1}{3})^{-5}=234$$

۲۸۱۲- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** تابع وارون تابع $f(x)=\frac{2^x-(\frac{1}{2})^x}{2}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2^x-(\frac{1}{2})^x}{2}\Rightarrow 2y=2^x-\frac{1}{2^x}$$

اگر فرض کنیم $t=2^x>0$، آن‌گاه

$$2y=t-\frac{1}{t}\Rightarrow t^2-2yt-1=0\Rightarrow\begin{cases}t=y+\sqrt{y^2+1}\\ t=y-\sqrt{y^2+1}<0\quad(\text{غ.ق.})\end{cases}$$
$$2^x=y+\sqrt{y^2+1}\Rightarrow x=\log_2(y+\sqrt{y^2+1})$$

بنابراین

$$f^{-1}(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})\Rightarrow f^{-1}(2)=\log_2(2+\sqrt{5})$$

راه‌حل دوم فرض کنید $f^{-1}(2)=a$. پس $f(a)=2$ و در نتیجه

$$\frac{2^a-(\frac{1}{2})^a}{2}=2\Rightarrow 2^a-\frac{1}{2^a}=4\Rightarrow(2^a)^2-4\times 2^a-1=0$$

اگر فرض کنیم $2^a=b>0$، آن‌گاه

$$b^2-4b-1=0\Rightarrow b=2+\sqrt{5},\ b=2-\sqrt{5}<0\quad(\text{غ.ق.})$$

بنابراین

$$2^a=2+\sqrt{5}\Rightarrow a=\log_2(2+\sqrt{5})$$

۲۸۱۳- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\tan 285^\circ=\tan(270^\circ+15^\circ)=-\cot 15^\circ$$
$$\tan(-165^\circ)=\tan(-180^\circ+15^\circ)=\tan 15^\circ$$
$$\sin 1095^\circ=\sin(1080^\circ+15^\circ)=\sin(6\times 180^\circ+15^\circ)=\sin 15^\circ$$
$$\cos 255^\circ=\cos(270^\circ-15^\circ)=-\sin 15^\circ$$

بنابراین

$$\tan 285^\circ\tan(-165^\circ)-\sin 1095^\circ\cos 255^\circ$$
$$=(-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ)-(\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ)$$
$$=-1+\sin^2 15^\circ=-\cos^2 15^\circ$$

۲۸۱۴- گزینهٔ ۳ با توجه به شکل معلوم است که نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(x+\frac{\pi}{3})$ از نقطهٔ $(\frac{\pi}{2},0)$ می‌گذرد و حداکثر مقدار آن برابر $\frac{3}{2}$ است. پس

$$f(\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow a+b\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow a+b\cos\frac{\pi}{3}=0\Rightarrow a+\frac{b}{2}=0$$
$$a=-\frac{b}{2}\Rightarrow a+|b|=\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{b}{2}+|b|=\frac{3}{2}$$

همچنین با توجه به وضعیت نمودار واضح است که b باید منفی باشد. پس

$$-\frac{b}{2}-b=\frac{3}{2}\Rightarrow b=-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۲۸۱۵- گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار واضح است که کمترین مقدار تابع برابر -3 است، پس $-|a|+c=-3$. از طرف دیگر نمودار تابع از نقطهٔ $(\frac{\pi}{6},1)$ عبور می‌کند، پس $1=a\sin(\frac{b\pi}{6})+c$. همچنین دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$ است. پس $\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{|b|}$ و در نتیجه $|b|=3$. با توجه به نمودار معلوم است که a و b باید هم‌علامت باشند، پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول اگر a و b مثبت باشند، آن‌گاه $b=3$ و در نتیجه

$$\begin{cases}-a+c=-3\\ a\sin\frac{\pi}{2}+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a+c=-3\\ a+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ c=-1\end{cases}$$

حالت دوم اگر a و b منفی باشند، آن‌گاه $b=-3$ و در نتیجه

$$\begin{cases}a+c=-3\\ a\sin(\frac{-\pi}{2})+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=-3\\ -a+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ c=-1\end{cases}$$

۲۸۱۶- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$4\sin 3x\cos 3x=1 \Rightarrow 2\sin 6x=1 \Rightarrow \sin 6x=\sin\frac{\pi}{6}$$

بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 6x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6} \\ 6x=2k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{36} \\ x=\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{36} \end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2})$ به‌ازای $k=0$ و $k=1$ حاصل می‌شوند:

$$x=\frac{\pi}{36},\ x=\frac{5\pi}{36},\ x=\frac{13\pi}{36},\ x=\frac{17\pi}{36}$$

بنابراین معادله در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ چهار جواب دارد.

۲۸۱۷- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که اگر $x\neq\frac{\pi}{2}$، آن‌گاه

$$\frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\cos^2 x}=\frac{(\sin x-1)(2\sin x+1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{-2\sin x-1}{1+\sin x}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin x-1}{1+\sin x}=\frac{-2-1}{1+1}=-\frac{3}{2}$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید

$$f(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۲۸۱۸- گزینهٔ ۲ چـون حد تابـع f در بی‌نهایت برابر ۲ شـده اسـت، پس درجهٔ چندجمله‌ای صورت کسـر $f(x)$ با درجـهٔ چندجمله‌ای مخرج آن برابر است. اکنون دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

حالت اول $a=0$ و $n=2$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-6x^2+1}{7x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{7x^2}=-\frac{2}{7}$$

بنابراین حالت اول قابل قبول نیست.

حالت دوم $n=3$ و $a\neq 0$. در این صورت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-6x^2+1}{ax^3+7x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{ax^3}=\frac{4}{a}=2\Rightarrow a=2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^3-6x^2+1}{2x^3+7x^2-2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x^2-2x-1)}{(2x-1)(x^2+4x+2)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2-2x-1}{x^2+4x+2}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{17}{4}}=-\frac{6}{17}$$

۲۸۱۹- گزینهٔ ۴ سؤال با این ادبیات دارای بی‌شمار جواب است. کافی است معادلهٔ دو خط را که از نقطهٔ $A(2,m)$ می‌گذرند، بنویسیم که هر کدام بر نمودار یکی از تابع‌های داده شده مماس باشند. بی‌شمار نقطهٔ مانند A می‌توان پیدا کرد و بی‌شـمار مقدار برای a و b وجود دارد. ولی احتمالاً منظور طراح سـؤال این بوده که نمودار دو تابع $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ و $g(x)=ax^2+bx$ از نقطهٔ $(2,m)$ بگذرند و یک خط در این نقطه بر هر دو نمودار مماس باشد. در این صورت

$$f(2)=g(2)\Rightarrow 4=4a+2b\Rightarrow 4a=4-2b$$

$$f'(2)=g'(2)\Rightarrow -3=4a+b\Rightarrow 4a=-3-b$$

بنابراین

$$4-2b=-3-b\Rightarrow b=7$$

توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x+2}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$g(x)=ax^2+bx\Rightarrow g'(x)=2ax+b$$

۲۸۲۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)'}{3\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}}$$

از طرف دیگر،

$$y=\frac{2x-x^2}{3x+5}\Rightarrow y'=\frac{(2-2x)(3x+5)-3(2x-x^2)}{(3x+5)^2}$$

بنابراین

$$f'(x)=\frac{2\left((2-2x)(3x+5)-3(2x-x^2)\right)}{3(3x+5)^2\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{3x+5}}}$$

$$f'(-2)=\frac{2\left((2+4)(-6+5)-3(-4-4)\right)}{3(-6+5)^2\sqrt[3]{\frac{-4-4}{-6+5}}}=6$$

۲۸۲۱- گزینهٔ ۱ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(x^2-4x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2-4x-1=0\Rightarrow x=2+\sqrt{5},\ x=2-\sqrt{5}$$

اکنون به جدول تعیین علامت $f'(x)$ توجه کنید:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
			min		max		

بنابرایـن $x=2+\sqrt{5}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسـبی تابع f اسـت. مقدار ماکزیمم نسبی تابع f برابر است با

$$f(2+\sqrt{5})=\frac{(2+\sqrt{5})^2+2(2+\sqrt{5})-3}{(2+\sqrt{5})^2+1}=\frac{4+5+4\sqrt{5}+4+2\sqrt{5}-3}{4+5+4\sqrt{5}+1}$$

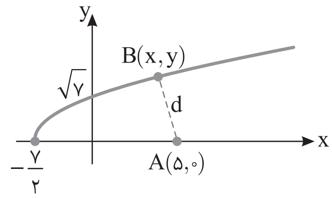
$$=\frac{6\sqrt{5}+10}{4\sqrt{5}+10}=\frac{3\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}+5}\times\frac{2\sqrt{5}-5}{2\sqrt{5}-5}$$

$$=\frac{30-15\sqrt{5}+10\sqrt{5}-25}{20-25}=\frac{5-5\sqrt{5}}{-5}=\sqrt{5}-1$$

۲۸۲۲- گزینهٔ ۱ مطابق شکل زیر فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ B روی نمودار تابع $y=\sqrt{2x+7}$ برابر است با

$$d=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(\sqrt{2x+7}-0)^2}$$
$$=\sqrt{x^2-10x+25+2x+7}=\sqrt{x^2-8x+32}$$

کمترین مقدار عبارت $x^2-8x+32$ به‌ازای $x=4$ به‌دست می‌آید که برابر ۱۶ است. پس کمترین مقدار d برابر ۴ است.

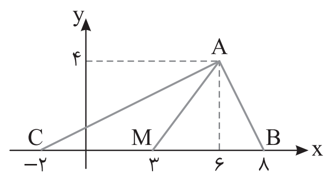


۲۸۲۳- گزینهٔ ۲ ابتدا رئوس مثلث را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}y=0\\2y-x=2\end{cases}\Rightarrow x=-2,\quad \begin{cases}y=0\\y+2x=16\end{cases}\Rightarrow x=8$$
$$\begin{cases}2y-x=2\\y+2x=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=4\end{cases}$$

پس مثلث مورد نظر به صورت زیر است و اندازهٔ میانهٔ AM را می‌خواهیم. چون M نقطهٔ $(3,0)$ است، پس

$$AM=\sqrt{(6-3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=5$$



۲۸۲۴- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=x^2\ge 0$، معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $t^2-7t-5=0$ درمی‌آید. جواب‌های این معادله به‌صورت زیر هستند:

$$t=\frac{7+\sqrt{69}}{2},\quad t=\frac{7-\sqrt{69}}{2}<0\ (\text{غ.ق.ق.})$$

چون جواب‌های معادلهٔ بالا باید نامنفی باشند، پس فقط جواب $t=\frac{7+\sqrt{69}}{2}$ قابل قبول است. پس جواب‌های معادلهٔ اصلی به‌صورت زیر هستند:

$$x_1=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}},\quad x_2=-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}$$

پس حاصل‌ضرب و مجموع جواب‌های معادلهٔ مورد نظر برابر است با

$$P=x_1x_2=-\left(\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}\right)^2=-\frac{7+\sqrt{69}}{2}$$
$$S=x_1+x_2=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}=0$$

بنابراین مقدار عبارت خواسته شده برابر است با

$$2P^2-3SP+2S=2P^2-0+0=2\left(-\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)^2$$
$$=2\left(\frac{49+69+14\sqrt{69}}{4}\right)=59+7\sqrt{69}$$

۲۸۲۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{vmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{vmatrix}=(\log 5)^2-(\log 2)^2$$
$$=(\log 5+\log 2)(\log 5-\log 2)$$
$$=\log 10\times\log\frac{5}{2}=1\times\log\frac{5}{2}=\log_{10}\frac{5}{2}$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_{10}\frac{5}{2}\times\log_{\frac{5}{2}}(3x-2)=1$$
$$\log_{10}(3x-2)=1\Rightarrow 3x-2=10\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=4$$

۲۸۲۶- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$\log_{21}1323=\log_{21}9\times 147=\log_{21}9+\log_{21}147$$
$$=2\log_{21}3+\log_{21}147$$

بنابراین عبارت مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\log_{21}3)^2+\log_{21}147(2\log_{21}3+\log_{21}147)$$
$$=(\log_{21}3)^2+2\log_{21}3\log_{21}147+(\log_{21}147)^2$$
$$=(\log_{21}3+\log_{21}147)^2=(\log_{21}(3\times 147))^2=(\log_{21}441)^2$$
$$=(\log_{21}21^2)^2=(2\log_{21}21)^2=(2\times 1)^2=4$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\log_{21}3=\log_{21}\frac{21}{7}=\log_{21}21-\log_{21}7=1-\log_{21}7$$
$$\log_{21}147=\log_{21}(21\times 7)=\log_{21}21+\log_{21}7=1+\log_{21}7$$
$$\log_{21}1323=\log_{21}(21^2\times 3)=2\log_{21}21+\log_{21}3=2+\log_{21}3$$

پس عبارت مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(1-\log_{21}7)^2+(1+\log_{21}7)(2+\log_{21}3)$$
$$=1+(\log_{21}7)^2-2\log_{21}7+2+\log_{21}3$$
$$+2\log_{21}7+\log_{21}7\log_{21}3$$
$$=3+\log_{21}3+(\log_{21}7)(\log_{21}7+\log_{21}3)$$
$$=3+\log_{21}3+\log_{21}7\log_{21}21$$
$$=3+\log_{21}3+\log_{21}7=3+\log_{21}21=3+1=4$$

۲۸۲۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x>\frac{3}{2}$، آن‌گاه عبارت $2x-3$ مثبت است و در نتیجه نامعادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$((m^2-1)x^2-4mx+4)(x-3\sqrt{x}+2)>0$$

از طرف دیگر،

$$A=x-3\sqrt{x}+2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

بنابراین علامت عبارت A با شرط $x>\frac{3}{2}$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
A			−	0	+	

چـون علامـت A روی بازهٔ $(2,4)$ منفی اسـت و این بـازه مجموعهٔ جواب‌های نامعادله است، پس علامت عبارت $B=(m^2-1)x^2-4mx+4$ در این بازه باید منفی باشد تا حاصل‌ضرب AB مثبت شود. همچنین علامت A روی بازهٔ $(2,\frac{3}{2})$ منفی است و این بازه جواب نامعادله نیست. پس علامت B روی این بازه باید مثبت باشد. بنابراین $x=2$ باید ریشهٔ B باشد. پس

$$(m^2-1)4-8m+4=0 \Rightarrow m^2-2m=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=0 \end{cases}$$

اگر $m=2$، آن‌گاه $B=(3x^2-8x+4)=(3x-2)(x-2)$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(2,4)$ مثبت است که قابل قبول نیست.

اگر $m=0$، آن‌گاه $B=-x^2+4=-(x-2)(x+2)$

در این صورت علامت B روی بازهٔ $(2,4)$ منفی است و قابل قبول است.

۲۸۲۸- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1-(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{15}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(\frac{1}{4})}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{8}{17}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{4})^2}{1+(\frac{1}{4})^2}=\frac{15}{17}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=-\frac{16}{105}$$

۲۸۲۹- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$f(\alpha)=4\sin\alpha\cos2\alpha+2\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha(2\cos2\alpha+1)=2\sin\alpha(\cos2\alpha+1+\cos2\alpha)$$
$$=2\sin\alpha(\cos2\alpha+2\cos^2\alpha)=2(\sin\alpha\cos2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha)$$
$$=2(\sin\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos\alpha)=2\sin(\alpha+2\alpha)=2\sin3\alpha$$

بنابراین

$$f(\frac{41\pi}{9})=2\sin(\frac{41\pi}{3})=2\sin(14\pi-\frac{\pi}{3})=-2\sin\frac{\pi}{3}=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$f(\alpha)=4\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha=4\sin\alpha-8\sin^3\alpha+2\sin\alpha$$
$$=6\sin\alpha-8\sin^3\alpha=2(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=2\sin3\alpha$$

بنابراین

$$f(\frac{41\pi}{9})=2\sin(\frac{41\pi}{3})=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

۲۸۳۰- گزینهٔ ۴ معادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(1+\cos2\alpha)(1+\cos4\alpha)(1+\cos8\alpha)=\frac{1}{8}$$
$$(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}$$
$$(\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha)^2=\frac{1}{64}$$
$$(\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha}{\sin\alpha})^2=\frac{1}{64}$$
$$(\frac{1}{2}\sin2\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$
$$(\frac{1}{4}\sin4\alpha\cos4\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha \Rightarrow (\frac{1}{8}\sin8\alpha)^2=\frac{1}{64}\sin^2\alpha$$
$$\sin^2 8\alpha=\sin^2\alpha \Rightarrow \frac{1-\cos16\alpha}{2}=\frac{1-\cos2\alpha}{2} \Rightarrow \cos16\alpha=\cos2\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} 16\alpha=2k\pi+2\alpha \\ 16\alpha=2k\pi-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{k\pi}{7} \\ \alpha=\frac{k\pi}{9} \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین بزرگ‌ترین جواب معادله که در بازهٔ $[0,\pi]$ قرار دارد، برابر $\frac{8\pi}{9}$ است.

۲۸۳۱- گزینهٔ ۳ فـرض کنیـد $P(x)=ax^2+bx+c$. در ایـن صـورت $P'(x)=2ax+b$. اگر $P(x)$ را بر $P'(x)$ تقسـیم کنیم و خارج قسمت برابر $\frac{1}{2}x+1$ و باقی‌مانده برابر -2 باشد، آن‌گاه تساوی زیر همواره برقرار است:

$$P(x)=P'(x)(\frac{1}{2}x+1)-2 \Rightarrow ax^2+bx+c=(2ax+b)(\frac{1}{2}x+1)-2$$

این تساوی را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$ax^2+bx+c=ax^2+(2a+\frac{b}{2})x+b-2$$

برای این که تساوی بالا به‌ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید

$$\begin{cases} 2a+\frac{b}{2}=b \Rightarrow b=4a \\ c=b-2 \Rightarrow c=4a-2 \end{cases}$$

بنابرایـن چندجملـه‌ای $P(x)$ برابر $ax^2+4ax+4a-2$ اسـت که مجموع ضرایب آن برابر است با

$$a+4a+4a-2=9a-2$$

واضح اسـت که کمترین مقدار این مجموع وقتی a عددی طبیعی است، برابر ۷ است که به‌ازای $a=1$ به‌دست می‌آید.

۲۸۳۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1 \Rightarrow a_{100}=\frac{1}{a_{99}}+1 \Rightarrow \frac{k}{m}=\frac{1}{a_{99}}+1$$
$$\frac{1}{a_{99}}=\frac{k-m}{m} \Rightarrow a_{99}=\frac{m}{k-m}$$

بنابراین

$$a_{99}=\frac{1}{a_{98}}+1 \Rightarrow \frac{m}{k-m}=\frac{1}{a_{98}}+1 \Rightarrow \frac{1}{a_{98}}=\frac{m}{k-m}-1=\frac{2m-k}{k-m}$$
$$a_{98}=\frac{k-m}{2m-k}$$

۲۸۳۳- گزینهٔ ۱ ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}2^k & n=3k\\ -2k+4 & n=3k+1\\ [\frac{n}{k+2}]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}a_0=2^0=1\\ a_1=-2\times0+4=4\\ a_2=[\frac{3\times0+2}{0+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases}a_3=2^1=2\\ a_4=-2\times1+4=2\\ a_5=[\frac{3\times1+2}{1+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases}a_6=2^2=4\\ a_7=-2\times2+4=0\\ a_8=[\frac{3\times2+2}{2+2}]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19\Rightarrow 3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین اگر $n=3k+2$، آن‌گاه

$$a_n=[\frac{n}{k+2}]+a=[\frac{3k+2}{k+2}]-2=[3-\frac{4}{k+2}]-2=1+[\frac{-4}{k+2}]$$

$$a_2=-1,\ a_5=-1,\ a_8=a_{11}=a_{14}=a_{17}=a_{20}=a_{23}=a_{26}=a_{29}=0$$

بنابراین مجموع جملات بالا برابر ۲- است.

۲۸۳۴- گزینهٔ ۴ اگر فرض کنیم $t=\sqrt[3]{9\cos^2x-1}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $y=2^t-2^{-t}$ در می‌آید. از طرف دیگر،

$$0\le\cos^2x\le1\Rightarrow0\le9\cos^2x\le9\Rightarrow-1\le9\cos^2x-1\le8$$

$$-1\le\sqrt[3]{9\cos^2x-1}\le2\Rightarrow-1\le t\le2$$

بنابراین باید برد تابع با ضابطهٔ $f(t)=2^t-2^{-t}$ و دامنهٔ $[-1,2]$ را به‌دست بیاوریم. توجه کنید که تابع $y=2^t$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^{-t}$ اکیداً نزولی است و تابع $y=-2^{-t}$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y=2^t-2^{-t}$ نیز اکیداً صعودی است. بنابراین

$$-1\le t\le2\Rightarrow f(-1)\le f(t)\le f(2)\Rightarrow-\frac{3}{2}\le f(t)\le\frac{15}{4}\Rightarrow R_f=[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$$

بنابراین $a=-\frac{3}{2}$ و $b=\frac{15}{4}$ و در نتیجه $b-a=\frac{21}{4}$.

۲۸۳۵- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول دامنهٔ تابع f مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|}>0$ است. اگر فرض کنیم $\sqrt{|x|}=t\ge0$، آن‌گاه نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{6+t-t^2}>0\Rightarrow6+t-t^2>0\Rightarrow t^2-t-6<0\Rightarrow(t-3)\underbrace{(t+2)}_{\text{مثبت}}<0$$

$$t-3<0\Rightarrow0\le t<3$$

بنابراین باید نامعادلهٔ $0\le\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم. نابرابری $\sqrt{|x|}\ge0$ به‌ازای هر مقدار x برقرار است. پس باید نامعادلهٔ $\sqrt{|x|}<3$ را حل کنیم.

$$\sqrt{|x|}<3\Rightarrow|x|<9\Rightarrow-9<x<9$$

راه‌حل دوم واضح است که $x=-4$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

$$f(-4)=\log_6(\frac{1}{6+\sqrt{4}-4})=\log_6\frac{1}{4}$$

عدد ۴- فقط در بازهٔ $(-9,9)$ قرار دارد و عضو بازه‌های دیگر گزینه‌ها نیست. پس گزینهٔ (۱) درست است.

۲۸۳۶- گزینهٔ ۳ اگر نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}+k$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار به‌دست آمده را $k-2$ واحد در راستای افقی انتقال دهیم، نمودار تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\sqrt{4-(x-(k-2))}+k=\sqrt{k+2-x}+k=f(x)$$

چون نمودار تابع f نمودار تابع وارونش را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند، پس اگر طول نقطهٔ تقاطع a باشد، آن‌گاه

$$f(a)=1\Rightarrow\sqrt{k+2-a}+k=1$$

$$\sqrt{k+2-a}=1-k\xrightarrow{1-k\ge0}a=k+2-(1-k)^2$$

$$f^{-1}(a)=1\Rightarrow f(1)=a\Rightarrow\sqrt{k+2-1}+k=a\xrightarrow{k\ge-1}a=\sqrt{k+1}+k$$

توجه کنید که تساوی‌های فوق فقط برای $-1\le k\le1$ می‌توانند برقرار باشند.

$$k+2-(1-k)^2=\sqrt{k+1}+k\Rightarrow1+2k-k^2=\sqrt{k+1}$$

با شرط $1+2k-k^2\ge0$، یعنی $1-\sqrt{2}\le k\le1+\sqrt{2}$، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$k^4-4k^3+2k^2+3k=0\Rightarrow k(k^3-4k^2+2k+3)=0$$

$$k(k-3)(k^2-k-1)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k=3\\ k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

چون $-1\le k\le1$ و $1-\sqrt{2}\le k\le1+\sqrt{2}$، پس $1-\sqrt{2}\le k\le1$، پس فقط $k=0$ قابل قبول است. بنابراین $f(x)=\sqrt{2-x}$ و طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $y=f(x)-1$ با محور طول‌ها به‌صورت زیر است:

$$y=0\Rightarrow f(x)-1=0\Rightarrow\sqrt{2-x}=1\Rightarrow x=1$$

۲۸۳۷- گزینهٔ ۳ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

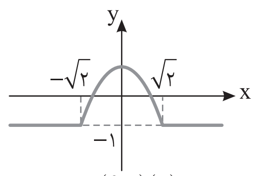
$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le 1-x^2\le 1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le 2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2} \text{ یا } x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

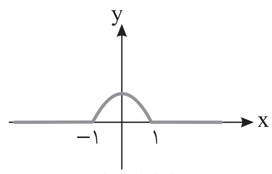
$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x<-1 \text{ یا } x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع‌های fog و gof به‌صورت زیر است و هرکدام از آن‌ها در دو نقطه مشتق‌پذیر نیستند.



$y=(fog)(x)$



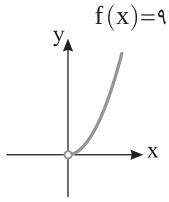
$y=(gof)(x)$

۲۸۳۸- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=9^{\log_3 x}=(3^2)^{\log_3 x}=(3^{\log_3 x})^2=x^2$$

از طرف دیگر، دامنهٔ تابع f بازهٔ $(0,+\infty)$ است.

پس نمودار تابع f به‌صورت مقابل است:



۲۸۳۹- گزینهٔ ؟ توجه کنید که اگر $x\to 0^+$، آن‌گاه $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\to 0^+$ و $\sqrt{2x}\to 0^+$. بنابراین می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\alpha\to 0:\quad \tan\alpha\sim\alpha,\quad 1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$$

در این صورت حد مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1)^2}{(\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2)^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}})^2}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^n}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-(1-x^2))^2}{x^n}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{n-4}}\times\frac{1}{(1+1)^2}\times\frac{1}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{4x^{n-4}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>4$، آن‌گاه حد بالا نامتناهی است و نمی‌تواند برابر a باشد. اگر $n=4$، آن‌گاه حد بالا برابر $\frac{1}{4}$ است و در نتیجه $a=\frac{1}{4}$ و $a+n=\frac{17}{4}$. اگر $n<4$، آن‌گاه حد بالا برابر صفر است و در نتیجه $a=0$ و $a+n<4$. پس $a+n$ می‌تواند تمام مقادیر مجموعهٔ $(-\infty,4)\cup\{\frac{17}{4}\}$ را داشته باشد.

۲۸۴۰- گزینهٔ ۱ توجه کنید که توابع $y=\frac{3}{x^2}$ و $y=\frac{-2}{x^2}$ روی بازهٔ $(-\infty,0)$ به‌ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی هستند. پس اگر $x\to(-\frac{1}{2})^-$، آن‌گاه

$$\frac{3}{x^2}\to 12^-,\qquad \frac{-2}{x^2}\to(-8)^+$$

بنابراین در یک همسایگی چپ $x=-\frac{1}{2}$، توابع $y=[\frac{3}{x^2}]$ و $y=[\frac{-2}{x^2}]$ به‌ترتیب با تابع‌های $y=11$ و $y=-8$ برابرند. پس

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[-\frac{2}{x^2}]}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x+6}{16x+8}=-\infty$$

۲۸۴۱- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول چون تابع f در دو نقطه ناپیوسته است، پس مخرج $f(x)$ دو ریشه دارد. چون تابع f دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد، پس یا هر دو مجانب آن قائم هستند و مجانب افقی ندارد یا یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد. اگر $a=0$، آن‌گاه $f(x)=\frac{-bx^2+2}{-bx+2}$ که در این صورت مخرج $f(x)$ فقط یک ریشه دارد و قابل قبول نیست (واضح است که $b\neq 0$).

اگر $a\neq 0$، آن‌گاه $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^3}{ax^3}=1$

یعنی خط $y=1$ مجانب افقی تابع است. پس این تابع فقط یک مجانب قائم دارد، یعنی یکی از ریشه‌های مخرج $f(x)$ ریشهٔ صورت آن نیز هست. اگر این ریشه $x=n$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases}an^3-bn^2+2=0\\ an^3-bn+2=0\end{cases}\Rightarrow bn^2-bn=0\Rightarrow bn(n-1)=0$$

چون $b\neq 0$ و $n\neq 0$، پس $n=1$، در نتیجه $a-b+2=0\Rightarrow b=a+2$

اکنون توجه کنید که مخرج $f(x)$ علاوه بر $x=1$ یک ریشهٔ مضاعف دارد. پس

$$ax^3-bx+2=ax^3-(a+2)x+2=0\Rightarrow ax(x^2-1)-2(x-1)=0$$

$$(x-1)(a(x^2+x)-2)=0\Rightarrow(x-1)(ax^2+ax-2)=0$$

پس معادلهٔ $ax^2+ax-2=0$ ریشهٔ مضاعف دارد، یعنی

$$\Delta=a^2+8a=0\xrightarrow{a\neq 0}a=-8\,,\,b=-6$$

راه‌حل دوم مقادیر a و b را از گزینه‌ها در ضابطهٔ f قرار دهید و درست بودن شرایط مسئله را بررسی کنید.

۲۸۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که حد مخرج کسر $\frac{f(x)}{x}$ در $x=0$ برابر صفر است و اگر حد صورت آن در این نقطه برابر صفر نباشد، حد این کسر نامتناهی می‌شود، پس حد صورت کسر، یعنی $f(x)$ هم باید در $x=0$ برابر صفر باشد. پس

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\cos^3 2x+ax^2+b)=1+0+b=0\Rightarrow b=-1$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=\cos^3 2x+ax^2-1\Rightarrow f'(x)=-6\sin 2x\cos^2 2x+2ax$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-6\sin 2x\cos^2 2x}{x}+\frac{2ax}{x}\right)$$
$$=-6\times 2\times 1^2+2a=-12+2a=2\Rightarrow a=7$$

بنابراین $a+b=6$.

۲۸۴۳- گزینهٔ ۳ توجه کنید که تابع $f(x)=|\sin 2x|+1$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست:

$$x>0\Rightarrow f(x)=\sin 2x+1\Rightarrow f'(x)=2\cos 2x\Rightarrow f'_+(0)=2$$
$$x<0\Rightarrow f(x)=-\sin 2x+1\Rightarrow f'(x)=-2\cos 2x\Rightarrow f'_-(0)=-2$$

بنابراین شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ که در $x=0$ بر نمودار تابع f رسم می‌شوند، به‌ترتیب برابر ۲ و ۲- است. معادلهٔ این نیم‌مماس‌ها به‌صورت زیر است:

نیم‌مماس راست: $y-f(0)=f'_+(0)(x-0)\Rightarrow y-1=2x\Rightarrow y=2x+1$

نیم‌مماس چپ: $y-f(0)=f'_-(0)(x-0)\Rightarrow y-1=-2x\Rightarrow y=-2x+1$

نقاط تلاقی امتداد این نیم‌مماس‌ها و نیمساز ناحیهٔ دوم و ناحیهٔ چهارم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}y=2x+1\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow 2x+1=-x\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases}y=-2x+1\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow -2x+1=-x\Rightarrow x=1\Rightarrow y=-1$$

پس باید فاصلهٔ نقاط $A(1,-1)$ و $B(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ را پیدا کنیم:

$$AB=\sqrt{(1+\frac{1}{3})^2+(-1-\frac{1}{3})^2}=\sqrt{2\times\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

۲۸۴۴- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $D_f=[0,+\infty)-\{1\}$ و

$$f(x)=2x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=2(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})(2x)(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

بنابراین $f'(x)$ روی $(0,+\infty)-\{1\}$ مثبت است. از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2-(+\infty)=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=2-(-\infty)=+\infty$$

بنابراین تابع f روی دامنه‌اش صعودی نیست ولی روی بازه‌های $[0,1)$ و $(1,+\infty)$ صعودی است.

۲۸۴۵- گزینهٔ ۱ مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-8}\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

x	$-\infty$		0		2		$\sqrt[3]{32}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

بنابراین $f'(x)$ روی بازه‌های $[0,2)$ و $(2,\sqrt[3]{32}]$ و هر زیرمجموعهٔ آن‌ها اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار طول این بازه‌ها مربوط به بازهٔ $[0,2)$ است که برابر ۲ است.

۲۸۴۶- گزینهٔ ۳ ابتدا اکسترمم‌های نسبی تابع f را معین می‌کنیم:

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$$
$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x+1)(x-2)$$
$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\Rightarrow y=-2-3+12+1=8\\ x=2\Rightarrow y=16-12-24+1=-19\end{cases}$$

پس نقاط $A(-1,8)$ و $B(2,-19)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند و شیب پاره‌خط AB برابر است با $\frac{-19-8}{2-(-1)}=-9$

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول a برابر $f'(a)$ است. پس می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چند مقدار a تساوی $f'(a)=-9$ برقرار است.

$$f'(a)=6(a+1)(a-2)=-9\Rightarrow 2a^2-2a-4=-3\Rightarrow 2a^2-2a-1=0$$

از معادلهٔ بالا دو جواب برای a به‌دست می‌آید. پس دو نقطه روی نمودار تابع f وجود دارد که خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقاط موازی پاره‌خط AB است.

۲۸۴۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\log_a c+\log_b c=1\Rightarrow\frac{1}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c b}=1$$
$$\log_c b+\log_c a=\log_c a\times\log_c b\Rightarrow\log_c(ab)=\log_c a\times\log_c b$$

۲۸۴۸- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\log_2(4^x+15)=x+3\Rightarrow 4^x+15=2^{x+3}$$
$$(2^x)^2-8\times 2^x+15=0\Rightarrow(2^x-5)(2^x-3)=0$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}2^x-5=0\Rightarrow 2^x=5\Rightarrow x=\log_2 5\\ 2^x-3=0\Rightarrow 2^x=3\Rightarrow x=\log_2 3\end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با

$$\log_2 5+\log_2 3=\log_2 5\times 3=\log_2 15$$

۲۸۴۹- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید برای اینکه عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده باشند، باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

$$-x^2+6x-8\geq 0\Rightarrow x^2-6x+8\leq 0\Rightarrow(x-2)(x-4)\leq 0$$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$(x-2)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$2\leq x\leq 4\quad(\mathrm{I})$

$-x^3+4x^2+25x-100\geq 0\Rightarrow x^3-4x^2-25x+100\leq 0$

$(x^3-25x)-(4x^2-100)\leq 0\Rightarrow x(x^2-25)-4(x^2-25)\leq 0$

$(x^2-25)(x-4)\leq 0\Rightarrow (x-5)(x+5)(x-4)\leq 0$

x	$-\infty$		-5		4		5		$+\infty$
$(x-5)(x+5)(x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\leq -5$ یا $4\leq x\leq 5$ $\quad$ (II)

از (I) و (II) نتیجه می‌شود فقط به‌ازای $x=4$ عبارت‌های رادیکالی موجود در معادله تعریف شده هستند. اکنون کافی است مشخص کنیم $x=4$ جواب معادله هست یا نه.

$$\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}+\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}=x+2$$

$$\sqrt{4+0}+\sqrt{16+0}=4+2\Rightarrow 2+4=4+2$$

پس $x=4$ تنها جواب معادله است.

۲۸۵۰- گزینهٔ «۲» ابتدا توجه کنید که

$$x-3\sqrt{x}+2=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$$

بنابراین علامت عبارت $A=\frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}+2}$ مطابق جدول زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
A	////	////	////	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

اکنون فرض کنید $B=(m^2-1)x^2-4mx+4$، می‌خواهیم مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه باشد. اگر B چندجمله‌ای درجهٔ دوم باشد و ریشه نداشته باشد یا ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن‌گاه با توجه به علامت A مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ نمی‌تواند یک بازه باشد. پس B دو ریشه دارد و این ریشه‌ها باید از اعداد ۱، $\frac{3}{2}$ و ۴ باشند، بنابراین سه حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x=1$ ریشهٔ B است.

$$m^2-1-4m+4=0\Rightarrow m^2-4m+3=0\Rightarrow m=3\,,\,m=1\text{(غ.ق.ق.)}$$

$$B=8x^2-12x+4=4(x-1)(2x-1)$$

در این صورت جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	////	////	////	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

واضح است که مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

حالت دوم: $x=\frac{3}{2}$ ریشهٔ B است.

$$(m^2-1)\frac{9}{4}-4(\frac{3}{2})m+4=0\Rightarrow 9m^2-9-24m+16=0$$

$$9m^2-24m+7=0\Rightarrow (3m-1)(3m-7)=0\Rightarrow m=\frac{1}{3}\,,\,m=\frac{7}{3}$$

اگر $m=\frac{1}{3}$، آن‌گاه $B=-\frac{8}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4=(2x-3)(-\frac{4}{9}x-\frac{4}{3})$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	////	////	////	$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$-$	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ بازهٔ $(1,4)$ است.

اگر $m=\frac{7}{3}$، آن‌گاه $B=\frac{40}{9}x^2-\frac{28}{3}x+4=\frac{4}{9}(5x-3)(2x-3)$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	////	////	////	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

حالت سوم: $x=4$ ریشهٔ B است.

$$16(m^2-1)-16m+4=0\Rightarrow 4m^2-4m-3=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}\,,\,m=\frac{3}{2}$$

اگر $m=-\frac{1}{2}$، آن‌گاه $B=-\frac{3}{4}x^2+2x+4=(x-4)(-\frac{3}{4}x-1)$

و جدول تعیین علامت AB به صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	////	////	////	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ بازهٔ $(1,\frac{3}{2}]$ است.

اگر $m=\frac{3}{2}$، آن‌گاه $B=\frac{5}{4}x^2-6x+4=(x-4)(\frac{5}{4}x-1)$

و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{5}$		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	////	////	////	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

اکنون توجه کنید که اگر $m=1$ یا $m=-1$، آن‌گاه چندجمله‌ای B از درجهٔ اول است. این دو حالت را هم باید بررسی کنیم.

اگر $m=1$، آن‌گاه $B=-4x+4$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	////	////	////	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ بازهٔ $[\frac{3}{2},4)$ است.

اگر $m=-1$، آن‌گاه $B=4x+4$ و جدول تعیین علامت AB به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
AB	////	////	////	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

در این صورت مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه نیست.

بنابراین به‌ازای $m=\frac{1}{3}$، $m=-\frac{1}{2}$ و $m=1$ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $AB\geq 0$ یک بازه است.

۲۸۵۱- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول مخرج مشترک می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+1-\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{4\times\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

راه‌حل دوم ابتدا هریک از کسرها را ساده می‌کنیم، سپس حاصل را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$$

راه‌حل سوم حاصل عبارت را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}+\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

اکنون مقدار گزینه‌ها را به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{3}$ حساب می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ گزینهٔ (۲): $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

گزینهٔ (۳): $2\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$ گزینهٔ(۴): $2\tan\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۲۸۵۲- گزینهٔ ۳ معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos2\alpha)(1+\cos4\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(2\cos^2\frac{\alpha}{2})(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$(8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos2\alpha)^2=1$$

واضح است که $\alpha=2k\pi$ جواب معادله نیست، پس $\sin\frac{\alpha}{2}\neq0$ و معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{8\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2=1$$

$$(4\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha)^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$(2\sin2\alpha\cos2\alpha)^2=\sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\frac{1-\cos8\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos8\alpha=\cos\alpha$$

بنابراین جواب‌های معادله به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases}8\alpha=2k\pi+\alpha\\ 8\alpha=2k\pi-\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2k\pi}{7}\\ \alpha=\frac{2k\pi}{9}\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

تعداد جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. (توجه کنید که $\alpha\neq2k\pi$)

$$0<\frac{2k\pi}{7}<2\pi\Rightarrow0<k<7\Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$0<\frac{2k\pi}{9}<2\pi\Rightarrow0<k<9\Rightarrow k\in\{1,2,\dots,8\}$$

پس معادله ۱۴ جواب در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارد.

۲۸۵۳- گزینهٔ ۴ بنابر قضیهٔ تقسیم، تساوی زیر به‌ازای هر مقدار x برقرار است:

$$P(x)=(x^2+2x)Q(x)+3x+1$$

از طرفین این تساوی مشتق می‌گیریم.

$$P'(x)=(2x+2)Q(x)+(x^2+2x)Q'(x)+3$$

در تساوی بالا قرار می‌دهیم $x=-2$ و نتیجه می‌شود

$$P'(-2)=(-4+2)Q(-2)+(4-4)Q'(-2)+3$$

$$P'(-2)=-2Q(-2)+3=-2\times3+3=-3$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+2$ برابر -3 است.

۲۸۵۴- گزینهٔ ۲ ابتدا چند جمله از دنباله را مشخص می‌کنیم.

$$a_1=-1,\quad a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$$

$$a_2=2-\frac{1}{a_1}=2+1=3\Rightarrow a_2=\frac{2\times2-1}{2\times2-3}$$

$$a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\Rightarrow a_3=\frac{2\times3-1}{2\times3-3}$$

$$a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}\Rightarrow a_4=\frac{2\times4-1}{2\times4-3}$$

$$a_5=2-\frac{1}{a_4}=2-\frac{5}{7}=\frac{9}{7}\Rightarrow a_5=\frac{2\times5-1}{2\times5-3}$$

بنابراین می‌توان حدس زد که

$$a_{99}=\frac{2\times99-1}{2\times99-3}=\frac{197}{195},\quad a_{100}=\frac{2\times100-1}{2\times100-3}=\frac{199}{197}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب صد جملهٔ اول دنباله برابر است با

$$a_1a_2\cdots a_{100}=(-1)(\frac{3}{1})(\frac{5}{3})(\frac{7}{5})(\frac{9}{7})\cdots(\frac{197}{195})(\frac{199}{197})=-199$$

۲۸۵۵- گزینهٔ ۲ ده جملهٔ اول دنباله را پیدا می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}2^k & n=3k\\ -2k+4 & n=3k+1\\ [\frac{n}{k+2}]+a & n=3k+2\end{cases}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}a_0=2^0=1\\ a_1=-2\times0+4=4\\ a_2=[\frac{3\times0+2}{0+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=1\Rightarrow\begin{cases}a_3=2^1=2\\ a_4=-2\times1+4=2\\ a_5=[\frac{3\times1+2}{1+2}]+a=1+a\end{cases}$$

$$k=2\Rightarrow\begin{cases}a_6=2^2=4\\ a_7=-2\times2+4=0\\ a_8=[\frac{3\times2+2}{2+2}]+a=2+a\end{cases}$$

$$k=3\Rightarrow a_9=2^3=8$$

مجموع ده جملهٔ اول دنباله برابر ۱۹ است. پس

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19\Rightarrow 3a+25=19\Rightarrow a=-2$$

بنابراین باید میانگین a_{28} و a_{29} را پیدا کنیم.

$$a_{28}=-2\times 9+4=-14,\quad a_{29}=[\frac{29}{9+2}]-2=2-2=0$$

پس میانگین جملات بیست و نهم (a_{28}) و سی‌ام (a_{29}) برابر است با

$$\frac{-14+0}{2}=-7$$

۲۸۵۶- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$0\le \sin^2 x\le 1\Rightarrow 0\le 5\sin^2 x\le 5\Rightarrow -1\le 5\sin^2 x-1\le 4$$

$$0\le\sqrt{5\sin^2 x-1}\le 2\Rightarrow -2\le-\sqrt{5\sin^2 x-1}\le 0$$

$$2^{-2}\le 2^{-\sqrt{5\sin^2 x-1}}\le 2^{0}\Rightarrow \frac{1}{4}\le f(x)\le 1$$

بنابراین $R_f=[\frac{1}{4},1]$. در نتیجه $a=\frac{1}{4}, b=1\Rightarrow a+b=\frac{5}{4}$

۲۸۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}=\log_{2^{-1}}t^{-1}=\log_2 t$

بنابراین اگر فرض کنیم $t=12+\sqrt{[x]}-[x]$، آن‌گاه

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{t}-1=\log_2 t-1$$

چون $R_f=\{\log_2 3,\log_2 5\}$، پس

$$\begin{cases}\log_2 t-1=\log_2 3\Rightarrow \log_2 t=1+\log_2 3=\log_2 6\Rightarrow t=6\\ \log_2 t-1=\log_2 5\Rightarrow \log_2 t=1+\log_2 5=\log_2 10\Rightarrow t=10\end{cases}$$

بنابراین با فرض $u=\sqrt{[x]}\ge 0$ داریم

$$\begin{cases}12+u-u^2=6\Rightarrow u^2-u-6=0\Rightarrow u=3,\ u=-2\ (\text{غ.ق.ق.})\\ 12+u-u^2=10\Rightarrow u^2-u-2=0\Rightarrow u=2,\ u=-1\ (\text{غ.ق.ق.})\end{cases}$$

بنابراین

$$\sqrt{[x]}=2\Rightarrow [x]=4\Rightarrow 4\le x<5,\quad \sqrt{[x]}=3\Rightarrow [x]=9\Rightarrow 9\le x<10$$

بنابراین حداکثر عددهای صحیح ۴ و ۹ در دامنهٔ تابع f قرار دارند.

۲۸۵۸- گزینهٔ ۳ تابع f اکیداً صعودی است و اگر نمودار آن را k واحد به بالا یا پایین منتقل کنیم، باز هم تابعی اکیداً صعودی حاصل می‌شود که نمودار وارونش را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. پس نقطهٔ تقاطع نمودار تابع $y=f(x)+k$ و وارونش نقطهٔ $(1,1)$ است، پس

$$f(1)+k=1\Rightarrow\sqrt{\sqrt{1}+3}+k=1\Rightarrow k=-1$$

اکنون اگر نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه کنیم، نمودار تابع $y=-(f(x)-1)$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار تابع $y=-f(x+4)+1$ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ تابع مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

واضح است که نمودار این تابع از نقطهٔ $(0,1-\sqrt{5})$ عبور می‌کند.

۲۸۵۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توابع fog و gof را معین می‌کنیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le 1-x^2\le 1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le 2\\ 1 & x^2<0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}$$

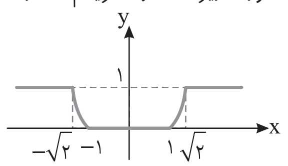
$$=\begin{cases}0 & x<-1\ \text{یا}\ x>1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

بنابراین تابع $h=gof-fog$ به‌صورت زیر است:

$$h(x)=\begin{cases}0-(-1) & x<-\sqrt{2}\\ 0-(1-x^2) & -\sqrt{2}\le x<-1\\ 1-x^2-(1-x^2) & -1\le x\le 1\\ 0-(1-x^2) & 1<x\le\sqrt{2}\\ 0-(-1) & x\ge\sqrt{2}\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}1 & x<-\sqrt{2}\ \text{یا}\ x\ge\sqrt{2}\\ x^2-1 & -\sqrt{2}\le x<-1\ \text{یا}\ 1<x\le\sqrt{2}\\ 0 & -1\le x\le 1\end{cases}$$

پس نمودار تابع h به‌صورت زیر است و ماکزیمم مقدار آن برابر ۱ است.



۲۸۶۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $x\to 0^+$، آن‌گاه $[x]=0$، پس

$$\tan[x]=\tan 0=0$$

از طرف دیگر، $\sqrt{3x}\to 0^+$ و $(\sqrt{1-x^3}-1)\to 0^-$ و می‌توان از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$ استفاده کرد. پس

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n(\frac{1}{2}(3x))}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^3-1}{\frac{3}{2}x^{n+1}}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^3}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{3x^{n-2}}$$

اکنون توجه کنید که اگر $n>2$، آن‌گاه حد بالا موجود نیست. اگر $n=2$، آن‌گاه حد بالا برابر $-\frac{1}{3}$ است. پس $a=-\frac{1}{3}$ و در نتیجه $a^n=\frac{1}{9}$. اگر $0<n<2$، آن‌گاه حد مورد نظر برابر صفر است و در نتیجه $a^n=0$. بنابراین مقدار a^n می‌تواند برابر $\frac{1}{9}$ یا صفر باشد که فقط $\frac{1}{9}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۸۶۱- گزینهٔ ۲ توجه کنید که اگر $x\to(-\frac{۱}{۲})^+$، آن‌گاه $\frac{-۲}{x^۲}\to(-۸)^-$ و $\frac{۳}{x^۲}\to ۱۲^+$. بنابراین $[-\frac{۲}{x^۲}]=-۹$ و $[\frac{۳}{x^۲}]=۱۲$. پس حد مورد نظر به‌صورت مقابل است: $\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۲})^+}\frac{۱۶x-(-۹)}{۲۴x+۱۲}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

۲۸۶۲- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=\frac{x^۳-۵x+۴}{(x-a)(۴x^۲-۴x+۱)}=\frac{(x-۱)(x^۲+x-۴)}{(x-a)(۲x-۱)^۲}$$

واضح است که $y=\frac{۱}{۴}$ مجانب افقی و $x=\frac{۱}{۲}$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

پس این تابع نباید مجانب قائم دیگری داشته باشد. سه حالت ممکن است:

حالت اول: $x=a$ همان $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، یعنی $a=\frac{۱}{۲}$.

حالت دوم: $x=a$ همان $x=۱$ باشد، یعنی $a=۱$.

حالت سوم: $x=a$ ریشهٔ معادلهٔ $x^۲+x-۴=۰$ باشد که در این حالت مجموع مقدارهای ممکن برای a برابر ۱- است. پس مجموع تمام مقادیر ممکن a برابر است با

$$\frac{۱}{۲}+۱-۱=\frac{۱}{۲}$$

۲۸۶۳- گزینهٔ ۳ ابتدا مشتق تابع f را پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sin^n(x^۲)\Rightarrow f'(x)=۲nx\cos(x^۲)\sin^{n-۱}(x^۲)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)f'(x)}{(۱-\cos x)^m}=\lim_{x\to۰^+}\frac{\sin^n(x^۲)۲nx\cos(x^۲)\sin^{n-۱}(x^۲)}{(۱-\cos x)^m}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲nx\sin^{۲n-۱}(x^۲)\cos(x^۲)}{(۱-\cos x)^m}=۳۲\sqrt{۲}$$

اکنون از هم‌ارزی‌های $\sin\alpha\sim\alpha$ و $۱-\cos\alpha\sim\frac{۱}{۲}\alpha^۲$ استفاده می‌کنیم.

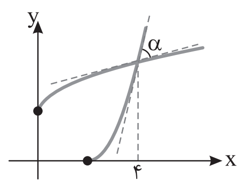
$$\lim_{x\to۰^+}\frac{۲nx(x^۲)^{۲n-۱}\cos(x^۲)}{(\frac{۱}{۲}x^۲)^m}=\lim_{x\to۰^+}\frac{n\times۲^{m+۱}x^{۴n-۱}}{x^{۲m}}=۳۲\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$\begin{cases}۲m=۴n-۱\Rightarrow m=۲n-\frac{۱}{۲}\\ n\times۲^{m+۱}=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow n\times۲^{۲n+\frac{۱}{۲}}=۳۲\sqrt{۲}\Rightarrow n=۲\Rightarrow m=\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

پس $۲m+n=۹$.

۲۸۶۴- گزینهٔ ۴ تابع $f(x)=\sqrt{x}+۲$ اکیداً صعودی است و محل تقاطع نمودار آن با نمودار وارونش روی خط $y=x$ است. پس کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم.



$$\sqrt{x}+۲=x\Rightarrow\sqrt{x}=x-۲\Rightarrow x=x^۲-۴x+۴$$

$$x^۲-۵x+۴=۰\Rightarrow x=۴\,,\,x=۱\text{(غ.ق.ق)}$$

اکنون شیب خطوط مماس بر نمودار تابع‌های f و $f^{-۱}$ را در نقطهٔ $x=۴$ پیدا می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt{x}+۲\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۴}$$

$$f^{-۱}(x)=(x-۲)^۲\Rightarrow(f^{-۱})'(x)=۲(x-۲)\Rightarrow(f^{-۱})'(۴)=۴$$

تانژانت زاویهٔ بین دو خط با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ از تساوی $\tan\alpha=|\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}|$ به‌دست می‌آید. پس

$$\tan\alpha=|\frac{۴-\frac{۱}{۴}}{۱+۴(\frac{۱}{۴})}|=\frac{۱۵}{۸},\quad \sin۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۲(\frac{۱۵}{۸})}{۱+(\frac{۱۵}{۸})^۲}=\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$$

۲۸۶۵- گزینهٔ ۱ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=۳\sqrt[۳]{x}+|x|=\begin{cases}۳\sqrt[۳]{x}+x & x\geq۰\\ ۳\sqrt[۳]{x}-x & x\leq۰\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱ & x>۰\\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱ & x<۰\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱=۰\ \text{(غ.ق.ق)}\\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$		$+$	

بنابراین تابع f روی بازهٔ $[-۱,+\infty)$ صعودی است.

۲۸۶۶- گزینهٔ ۴ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$=\frac{۲x^۵-۸x^۳+۶x}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

x	$-\infty$		-۲		$-\sqrt{۳}$		$-\sqrt{۲}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۲}$		$\sqrt{۳}$		۲		$+\infty$
$f'(x)$				$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$			

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(-۲,-\sqrt{۳})$، $(-۱,۰)$، $(۱,\sqrt{۲})$ و $(\sqrt{۲},\sqrt{۳})$ اکیداً نزولی است و در نقاط $-\sqrt{۳}$، ۱-، ۰، ۱ و $\sqrt{۳}$ (پنج بار) جهت صعودی و نزولی نمودار تابع f تغییر می‌کند.

۲۸۶۷- گزینهٔ ۱ مشتق اول و مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم و نقاط مینیمم نسبی و عطف تابع را معین می‌کنیم.

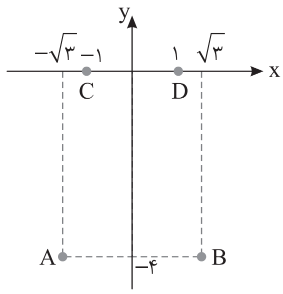
$$f(x)=x^۴-۶x^۲+۵ \Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱۲x \Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲-۱۲$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۴x(x^۲-۳)=۰ \Rightarrow x=۰\,,\ x=\pm\sqrt{۳}$$

$$f''(x)=۰ \Rightarrow ۱۲(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
			min		عطف		max		عطف		min		

پس نقاط $A(-\sqrt{۳}\,,-۴)$ و $B(\sqrt{۳}\,,-۴)$ مینیمم نسبی تابع f هستند و نقاط $C(-۱,۰)$ و $D(۱,۰)$ نقاط عطف این تابع هستند. شیب پاره‌خط‌های AB و CD برابر صفر است. بنابراین زاویهٔ بین آن‌ها برابر صفر است.



۲۸۶۸- گزینهٔ ۴ عبارت مورد نظر را A می‌نامیم. در این صورت

$$A=(a^۲+b^۲-۲ab)^۲(a^۲+b^۲+۲ab)^۲=((a-b)^۲)^۲((a+b)^۲)^۲$$
$$=(((a-b)(a+b))^۲)^۲$$

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$A=((a^۲-b^۲)^۲)^۲=(a^۴-۲a^۲b^۲+b^۴)^۲$$

اکنون توجه کنید که

$$a^۴=(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}-۲})^۴=\sqrt{۶}-۲\,,\quad b^۴=(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}+۲})^۴=\sqrt{۶}+۲$$

$$a^۲b^۲=(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}-۲})^۲\times(\sqrt[۴]{\sqrt{۶}+۲})^۲=\sqrt{\sqrt{۶}-۲}\times\sqrt{\sqrt{۶}+۲}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{۶}-۲)(\sqrt{۶}+۲)}=\sqrt{۶-۴}=\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$A=(a^۴-۲a^۲b^۲+b^۴)^۲=(\sqrt{۶}-۲-۲\sqrt{۲}+\sqrt{۶}+۲)^۲$$
$$=(۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۲})^۲=۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})^۲=۴(۶+۲-۲\sqrt{۱۲})$$

چون $\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$، پس

$$A=۴(۸-۴\sqrt{۳})=۱۶(۲-\sqrt{۳})$$

۲۸۶۹- گزینهٔ ۴ فرض می‌کنیم $\sqrt[۳]{x}=t$. در این صورت معادلهٔ مورد نظر به شکل زیر در می‌آید:

$$(t^۲+\frac{۱}{t^۲}+۱)(t^۲-۱)=۲t \Rightarrow (\frac{t^۴+۱+t^۲}{t^۲})(t^۲-۱)=۲t$$

برای اینکه معادله را ساده کنیم، دو طرف آن را در $t^۲$ ضرب می‌کنیم

$$(t^۴+t^۲+۱)(t^۲-۱)=۲t^۳$$

اکنون توجه کنید که می‌توانیم سمت چپ معادله را به کمک اتحاد چاق و لاغر ساده کنیم

$$(t^۲)^۳-۱^۳=۲t^۳ \Rightarrow (t^۳)^۲-۲t^۳-۱=۰ \qquad (*)$$

چون $\sqrt[۳]{x}=t$، پس $x=t^۳$، در نتیجه معادلهٔ $(*)$ می‌شود $x^۲-۲x-۱=۰$، که مجموع جواب‌های آن برابر است با $-\frac{(-۲)}{۱}=۲$.

۲۸۷۰- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** توجه کنید که چون $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+x-۵=۰$ هستند، پس $x_۱+x_۲=-۱$ و $x_۱x_۲=-۵$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به صورت زیر حساب کنیم:

$$S=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}+\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}S=\frac{(x_۱+۱)^۳+(x_۲+۱)^۳}{(x_۱+۱)^۳(x_۲+۱)^۳}$$

از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم و صورت کسر را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=\frac{(x_۱+۱+x_۲+۱)^۳-۳(x_۱+۱)(x_۲+۱)(x_۱+۱+x_۲+۱)}{((x_۱+۱)(x_۲+۱))^۳}$$
$$=\frac{(x_۱+x_۲+۲)^۳-۳(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)(x_۱+x_۲+۲)}{(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)^۳}$$
$$=\frac{(-۱+۲)^۳-۳(-۱-۵+۱)(-۱+۲)}{(-۱-۵+۱)^۳}=\frac{۱-۳(-۵)(۱)}{(-۵)^۳}=-\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}\times\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=\frac{۱}{((x_۱+۱)(x_۲+۱))^۳}$$
$$=\frac{۱}{(x_۱+x_۲+x_۱x_۲+۱)^۳}=\frac{۱}{(-۱-۵+۱)^۳}=-\frac{۱}{۱۲۵}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت $x^۲+\frac{۱۶}{۱۲۵}x-\frac{۱}{۱۲۵}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $۱۲۵x^۲+۱۶x-۱=۰$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$S=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}+\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=(\frac{۱}{x_۱+۱})^۳+(\frac{۱}{x_۲+۱})^۳=\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}+\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}=\frac{x_۱^۳+x_۲^۳}{۱۲۵}$$

اکنون از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ استفاده می‌کنیم. چون $x_۱+x_۲=-۱$ و $x_۱x_۲=-۵$، پس

$$S=\frac{(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)}{۱۲۵}=\frac{(-۱)^۳-۳(-۵)(-۱)}{۱۲۵}=-\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

از طرف دیگر،

$$P=\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}\times\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=(\frac{۱}{x_۱+۱})^۳\times(\frac{۱}{x_۲+۱})^۳=\frac{x_۱^۳}{۵^۳}\times\frac{x_۲^۳}{۵^۳}=\frac{(x_۱x_۲)^۳}{۵^۳\times۵^۳}$$

چون $x_۱x_۲=-۵$، پس $P=\frac{(-۵)^۳}{۵^۳\times۵^۳}$، یعنی $P=-\frac{۱}{۱۲۵}$. در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $x^۲+\frac{۱۶}{۱۲۵}x-\frac{۱}{۱۲۵}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۱۲۵ ضرب کنیم، می‌شود $۱۲۵x^۲+۱۶x-۱=۰$.

۲۸۷۱- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=۱۶\cos^۲\frac{۳\pi}{۳۶}\cos^۲\frac{۶\pi}{۳۶}\cos^۲\frac{۱۲\pi}{۳۶}\cos^۲\frac{۲۴\pi}{۳۶}$$
$$=۱۶\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{\pi}{۶}\cos^۲\frac{\pi}{۳}\cos^۲\frac{۲\pi}{۳}$$
$$=۱۶\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۳}{۴}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$$

اکنون برای اینکه مقدار $\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}(۱+\cos\frac{۲\pi}{۱۲})=\frac{۳}{۸}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$
$$=\frac{۳}{۸}(\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

راه‌حل دوم عبارت داده شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=۱۶(\cos ۳x\cos ۶x\cos ۱۲x\cos ۲۴x)^۲$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin ۳x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=۱۶(\frac{\sin ۳x\cos ۳x\cos ۶x\cos ۱۲x\cos ۲۴x}{\sin ۳x})^۲$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ به‌دست می‌آید

$$\sin ۳x\cos ۳x=\frac{۱}{۲}\sin ۶x$$

در نتیجه

$$f(x)=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۶x\cos ۶x\cos ۱۲x\cos ۲۴x}{\sin ۳x})^۲$$

به‌طور مشابه $\sin ۶x\cos ۶x=\frac{۱}{۲}\sin ۱۲x$، پس

$$f(x)=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin ۱۲x\cos ۱۲x\cos ۲۴x}{\sin ۳x})^۲$$

به‌طور مشابه با انجام دو مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin ۲۴x\cos ۲۴x}{\sin ۳x})^۲$$
$$=۱۶(\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin ۴۸x}{\sin ۳x})^۲=\frac{\sin^۲ ۴۸x}{۱۶\sin^۲ ۳x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=\frac{\sin^۲\frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin^۲\frac{۳\pi}{۳۶}}=\frac{\sin^۲\frac{۴\pi}{۳}}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲(\pi+\frac{\pi}{۳})}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}\xrightarrow[۲\sin^۲\alpha=۱-\cos ۲\alpha]{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha}$$
$$f(\frac{\pi}{۳۶})=\frac{(-\sin\frac{\pi}{۳})^۲}{۸(۱-\cos\frac{۲\pi}{۱۲})}=\frac{\sin^۲\frac{\pi}{۳}}{۸(۱-\cos\frac{\pi}{۶})}=\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{۸(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۴(۲-\sqrt{۳})}$$

در نهایت صورت و مخرج را در مزدوج $۲-\sqrt{۳}$، یعنی $۲+\sqrt{۳}$ ضرب می‌کنیم

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=\frac{۳}{۱۶(۲-\sqrt{۳})}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۱۶(۴-۳)}=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

راه‌حل سوم عبارت $f(x)$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(۲\cos^۲ ۳x)(۲\cos^۲ ۶x)(۲\cos^۲ ۱۲x)(۲\cos^۲ ۲۴x)$$
$$=(۱+\cos ۶x)(۱+\cos ۱۲x)(۱+\cos ۲۴x)(۱+\cos ۴۸x)$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۳۶})=(۱+\cos\frac{۶\pi}{۳۶})(۱+\cos\frac{۱۲\pi}{۳۶})(۱+\cos\frac{۲۴\pi}{۳۶})(۱+\cos\frac{۴۸\pi}{۳۶})$$
$$=(۱+\cos\frac{\pi}{۶})(۱+\cos\frac{\pi}{۳})(۱+\cos\frac{۲\pi}{۳})(۱+\cos\frac{۴\pi}{۳})$$
$$=(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})(۱+\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۲})=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

۲۸۷۲- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$\cos(۲\alpha-\frac{\pi}{۲})=\sin ۲\alpha\ ,\quad \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\cot ۲\alpha}$. اکنون مقادیر $\cos\alpha$ و $\sin ۲\alpha$ را حساب می‌کنیم. چون $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$، پس می‌توان نوشت

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}$$

چون انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است، پس $\cos\alpha<۰$، یعنی $\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$. از طرف دیگر،

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۲(\frac{۳}{۴})}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۲۴}{۲۵}$$
$$\cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱-\frac{۹}{۱۶}}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۷}{۲۵}$$
$$\cot ۲\alpha=\frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}=\frac{\frac{۷}{۲۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{۷}{۲۴}$$

در نتیجه، عبارت مورد نظر برابر است با $\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\cot ۲\alpha}=\frac{\frac{۲۴}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۷}{۲۴}}=\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

۲۸۷۳- گزینهٔ ۳ می‌توان نوشت

$$\cos^۲ x-\sin^۲ x\cos ۳x=۱\Rightarrow ۱-\cos^۲ x+\sin^۲ x\cos ۳x=۰$$
$$\sin^۲ x+\sin^۲ x\cos ۳x=۰\Rightarrow\sin^۲ x(۱+\cos ۳x)=۰$$
$$\begin{cases}\sin^۲ x=۰\Rightarrow\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ \cos ۳x=-۱\Rightarrow ۳x=(۲k+۱)\pi\Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۳}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای اینکه جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	۰	۱	۲	۳
$k\pi$	۰	π	۲π	$\cancel{۳\pi}$
$\frac{(۲k+۱)\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}$	π	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\cancel{\frac{۷\pi}{۳}}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر ۰، $\frac{\pi}{۳}$، π، $\frac{۵\pi}{۳}$ و ۲π هستند، که تعداد آن‌ها پنج‌تاست.

۲۸۷۴- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ که در آن $g(x)=\log_4(x^2-x-2)$ و $h(x)=\sqrt{x^2-1}+1$. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع f، دامنهٔ تابع‌های g و h را به‌دست می‌آوریم، از آن‌ها اشتراک می‌گیریم و در آخر جواب‌های معادلهٔ $h(x)=0$ را از آن حذف می‌کنیم، یعنی

$$D_f=(D_g\cap D_h)-\{x|x\in D_h, h(x)=0\}$$

برای پیدا کردن دامنهٔ تابع g باید نامعادلهٔ $x^2-x-2>0$ را حل کنیم:

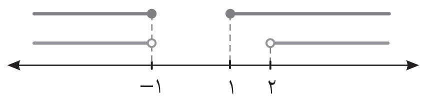
$$x^2-x-2>0 \xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}} (x-2)(x+1)>0 \Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>2$$

پس $D_g=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. از طرف دیگر، برای پیدا کردن دامنهٔ تابع h باید نامعادلهٔ $x^2-1\ge0$ را حل کنیم:

$$x^2-1\ge 0\Rightarrow x^2\ge1\Rightarrow x\ge1 \text{ یا } x\le -1$$

پس $D_h=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. توجه کنید که معادلهٔ $h(x)=0$ جواب ندارد، زیرا $\sqrt{x^2-1}+1$ همواره مثبت است. بنابراین

$$D_f=((-\infty,-1)\cup(2,+\infty))\cap((-\infty,-1]\cup[1,+\infty))=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$



راه‌حل دوم توجه کنید که عدد ۳ در دامنهٔ تابع f است، زیرا

$$f(3)=\frac{\log_4(9-3-2)}{\sqrt{9-1}+1}=\frac{\log_4 4}{\sqrt8+1}=\frac{1}{2\sqrt2+1}$$

پس گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند، زیرا ۳ عضو آن‌ها نیست. از طرف دیگر، چون ۲ عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۱) نیست، ولی عضو مجموعهٔ گزینهٔ (۳) است، پس کافی است ببینیم ۲ در دامنهٔ تابع f هست یا خیر. توجه کنید که

$$f(2)=\frac{\log_4(4-2-2)}{\sqrt{4-1}+1}=\frac{\log_4 0}{\sqrt3+1}$$

چون $\log_4 0$ تعریف نشده است، پس عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، یعنی گزینهٔ (۳) نیز حذف می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) دامنهٔ تابع f است.

۲۸۷۵- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول چون $-\frac12\le x<\frac12$، پس $-\frac32\le 3x<\frac32$. بنابراین

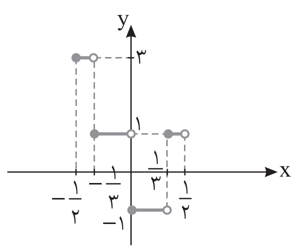
$$-\frac32\le3x<-1\Rightarrow[3x]=-2, -\frac12\le x<-\frac13\Rightarrow f(x)=2|-2|-1=3$$

$$-1\le3x<0\Rightarrow[3x]=-1,-\frac13\le x<0\Rightarrow f(x)=2|-1|-1=1$$

$$0\le3x<1\Rightarrow[3x]=0, 0\le x<\frac13\Rightarrow f(x)=2|0|-1=-1$$

$$1\le 3x<\frac32\Rightarrow[3x]=1,\frac13\le x<\frac12\Rightarrow f(x)=2|1|-1=1$$

در نتیجه نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



راه‌حل دوم توجه کنید که اگر $x\to0^-$، آن‌گاه $3x\to0^-$، پس $[3x]=-1$. در نتیجه

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(2|[3x]|-1)=2|-1|-1=1$$

همچنین اگر $x\to0^+$، آن‌گاه $3x\to0^+$، پس $[3x]=0$. در نتیجه

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(2|[3x]|-1)=2|0|-1=-1$$

فقط گزینهٔ (۲) این شرایط را دارد.

۲۸۷۶- گزینهٔ ۴ راه‌حل اول نقطهٔ برخورد منحنی‌ها جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases}2y=x^2\\ x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}\end{cases}$$

دو طرف معادلهٔ دوم را به توان دو می‌رسانیم و به جای x^2 قرار می‌دهیم $2y$:

$$x^2=(\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3})^2\Rightarrow 2y=y+3+y-3-2\sqrt{(y+3)(y-3)}$$

$$2y=2y-2\sqrt{y^2-9}\Rightarrow -2\sqrt{y^2-9}=0\Rightarrow y^2-9=0\Rightarrow y=\pm3$$

توجه کنید که چون $2y=x^2\ge0$، پس فقط $y=3$ قبول است. در نتیجه

$$x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}=\sqrt6-\sqrt0=\sqrt6$$

بنابراین نقطهٔ برخورد منحنی‌ها $(\sqrt6,3)$ است، که فاصله‌اش از مبدأ برابر است با

$$\sqrt{(\sqrt6)^2+3^2}=\sqrt{6+9}=\sqrt{15}$$

راه‌حل دوم با توجه به ضابطهٔ منحنی $x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}$، متوجه می‌شویم که $y\ge3$. اکنون اگر در ضابطه‌های داده شده قرار دهیم $y=3$، برای هر دو به‌دست می‌آید $x=\sqrt6$، یعنی $(\sqrt6,3)$ نقطهٔ تلاقی دو منحنی است که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با $\sqrt{(\sqrt6)^2+3^2}=\sqrt{15}$.

۲۸۷۷- گزینهٔ ۲ در صورت از 3^x و در مخرج از 2^{x-2} فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{3^x(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)}{2^{x-2}(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)}=52\Rightarrow\frac{3^x\times364}{2^{x-2}\times63}=52$$

$$\frac{3^{x-2}\times9\times52\times7}{2^{x-2}\times9\times7}=52\Rightarrow\frac{3^{x-2}}{2^{x-2}}=1\Rightarrow\left(\frac32\right)^{x-2}=1=\left(\frac32\right)^0\Rightarrow x-2=0$$

$$x=2$$

۲۸۷۸- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که انتقال به اندازهٔ $\frac\pi2$ در امتداد محور x در جهت مثبت معادل $\frac\pi2$ واحد انتقال به راست و انتقال به اندازهٔ $\frac32$ در امتداد محور y در جهت منفی معادل $\frac32$ واحد فقط یک فاصله انتقال به پایین است. پس

$$y=2^{|\sin x|}\xrightarrow{\frac\pi2 \text{ واحد به راست}}y=2^{|\sin(x-\frac\pi2)|}$$

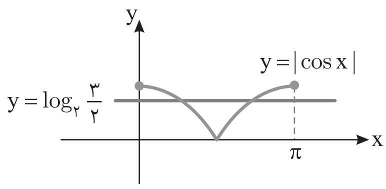
چون که $\sin(x-\frac\pi2)=-\cos x$، پس

$$y=2^{|-\cos x|}=2^{|\cos x|}\xrightarrow{\frac32\text{ واحد به پایین}}y=2^{|\cos x|}-\frac32$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}$ به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد نمودار تابع بالا با محور x در فاصلهٔ $[0,\pi]$، باید تعداد جواب‌های معادلهٔ $2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}=0$ را در این فاصله پیدا کنیم. اکنون با استفاده از تعریف تابع لگاریتم داریم

$$2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}=0\Rightarrow 2^{|\cos x|}=\frac{3}{2}\Rightarrow |\cos x|=\log_2\frac{3}{2}$$

توجه کنید که $\log_2 1<\log_2\frac{3}{2}<\log_2 2$، پس $0<\log_2\frac{3}{2}<1$. اکنون تعداد نقاط برخورد خط $y=\log_2\frac{3}{2}$ و نمودار تابع $y=|\cos x|$ را روی بازهٔ $[0,\pi]$ از روی شکل زیر پیدا می‌کنیم که دوتاست.



۲۸۷۹- گزینهٔ ۱ اگر فرض کنیم $a=\log_x y$، آن‌گاه $\log_y x=\frac{1}{a}$.

بنابراین از تساوی داده شده به‌دست می‌آید

$$a-2(\frac{1}{a})=1\xrightarrow{\times a}a^2-2=a\Rightarrow a^2-a-2=0$$

به کمک اتحاد جملهٔ مشترک عبارت بالا را تجزیه می‌کنیم

$$(a+1)(a-2)=0\Rightarrow a=-1,\ a=2$$

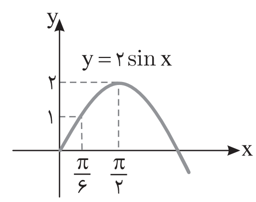
چون $x,y>1$، پس $a=\log_x y>0$، در نتیجه فقط $a=2$ قابل قبول است، پس

$$\log_x y=2\Rightarrow y=x^2$$

۲۸۸۰- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول اگر $x\to\frac{\pi}{6}^-$، آن‌گاه $\sin x\to\frac{1}{2}^-$ و در نتیجه $2\sin x\to 1^-$، پس $2\sin x-1\to 0^-$. بنابراین $[2\sin x-1]=-1$، یعنی

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=-1$$

راه‌حل دوم چون به‌ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح k، $[x+k]=[x]+k$، پس $[2\sin x-1]=[2\sin x]-1$. اکنون به نمودار تابع $y=2\sin x$ در شکل زیر توجه کنید.



از روی این نمودار معلوم می‌شود که

$$x\to\frac{\pi}{6}^-\Rightarrow 0<2\sin x<1\Rightarrow[2\sin x]=0$$

بنابراین

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}([2\sin x]-1)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}(0-1)=-1$$

۲۸۸۱- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ابتدا توجه کنید که برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=y=2+\sqrt{x-1}\Rightarrow y-2=\sqrt{x-1}\xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$(y-2)^2=x-1\Rightarrow x=(y-2)^2+1$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(x-2)^2+1$. اگر این نمودار را ۲ واحد در جهت مثبت محور x و سپس ۳ واحد در جهت منفی محور y انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f^{-1}(x-2)-3$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$g(4)=f^{-1}(4-2)-3=f^{-1}(2)-3=(2-2)^2+1-3=-2$$

راه‌حل دوم قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=2+\sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y=x$ نمودار تابع f^{-1} است. بنابراین $g(x)=f^{-1}(x-2)-3$. قرار می‌دهیم $g(4)=a$ و از تعریف تابع معکوس استفاده می‌کنیم. در نتیجه

$$g(4)=f^{-1}(2)-3=a\Rightarrow f^{-1}(2)=a+3$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}}f(a+3)=2$$

پس

$$2+\sqrt{a+3-1}=2\Rightarrow\sqrt{a+2}=0\Rightarrow a=-2$$

۲۸۸۲- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$(gof)(x)=g(f(x))=\begin{cases}1 & f(x)>0\\ 0 & f(x)=0\\ -1 & f(x)<0\end{cases}$$

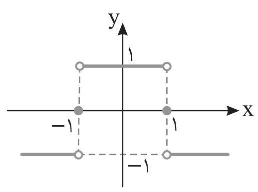
از طرف دیگر، جدول تعیین علامت $f(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بنابراین

$$(gof)(x)=\begin{cases}1 & x\in(-1,1)\\ 0 & x=\pm1\\ -1 & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

پس نمودار تابع gof به‌صورت زیر است، که در نقاط $x=\pm1$ ناپیوسته است.



۲۸۸۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2\geq 4\\[2mm] \dfrac{-x^2(x^2-4)}{x^2-1} & x^2\leq 4\,,\,x\neq\pm 1\end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $g(x)=\dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1}$، آن‌گاه

$$g'(x)=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x((x^2-1)^2+3)}{(x^2-1)^2}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x>2 \text{ یا } x<-2\\ -g'(x) & -2<x<2\,,\,x\neq\pm 1\end{cases}$$

توجه کنید که تابع f در نقطه‌های ۲ و ۲− مشتق‌پذیر نیست، زیرا این عددها ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدرمطلق هستند. همچنین،

$$f'(x)=0\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow x=0$$

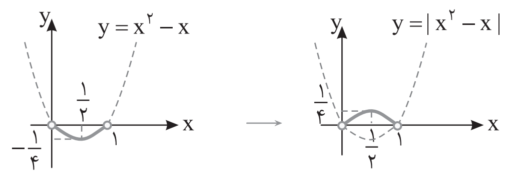
پس نقاط بحرانی تابع f نقطه‌های ۲، ۲− و صفر هستند، که مطابق جدول زیر هر سه طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند $(x\neq\pm 1)$:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

۲۸۸۴- گزینهٔ ۳ اگر مختصات نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^2$ به‌صورت (x,x^2) باشد، مختصات نقطهٔ A'، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم، به‌صورت (x^2,x) است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-x^2)^2+(x^2-x)^2}=\sqrt{2(x^2-x)^2}=\sqrt{2}|x^2-x|$$

از طرف دیگر، چون طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط نیمساز نواحی اول و سوم (خط $y=x$)، یعنی نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ قرار دارد، پس باید ماکزیمم AA' را در بازهٔ $(0,1)$ پیدا کنیم. برای پیدا کردن ماکزیمم تابع $y=|x^2-x|$ در بازهٔ $(0,1)$ از روش رسم نمودار تابع استفاده می‌کنیم.



بنابراین بیشترین مقدار AA' در بازهٔ $(0,1)$ به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید، که برابر می‌شود با

$$AA'=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۸۸۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$(fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}})=g'(\frac{3}{\sqrt{8}})f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}}))$$

توجه کنید که $g(\frac{3}{\sqrt{8}})=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\frac{3}{\sqrt{8}})^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}}=2$. پس باید مقدار $g'(\frac{3}{\sqrt{8}})f'(2)$ را حساب کنیم. مقدار $g'(\frac{3}{\sqrt{8}})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow g'(x)=(-\frac{1}{3})(2x)(x^2-1)^{-\frac{1}{3}-1}$$
$$=-\frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}$$
$$g'(\frac{3}{\sqrt{8}})=-\frac{2}{3}(\frac{3}{\sqrt{8}})(\frac{9}{8}-1)^{-\frac{4}{3}}=-8\sqrt{2}$$

برای پیدا کردن مقدار $f'(2)$ ابتدا ضابطهٔ تابع f را در یک همسایگی نقطهٔ $x=2$ پیدا می‌کنیم. توجه کنید که

$$x\to 2\Rightarrow x^2\to 4\Rightarrow 4<x^2+\frac{1}{2}<5\Rightarrow[x^2+\frac{1}{2}]=4$$

در نتیجه $f(x)=(4x)^2+1=16x^2+1\Rightarrow f'(x)=32x\Rightarrow f'(2)=64$

بنابراین $(fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}})=(-8\sqrt{2})(64)=4(-128\sqrt{2})$

۲۸۸۶- گزینهٔ ۳ توجه کنید که $g'(x)=2ax+b$ و $g''(x)=2a$.

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\geq k\\ g''(x) & x<k\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=k$ مشتق‌پذیر است، پس

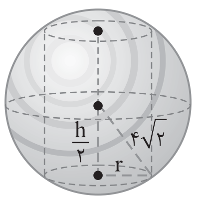
$$g(k)=g'(k)\Rightarrow ak^2+bk+c=2ak+b$$
$$g'(k)=g''(k)\Rightarrow 2ak+b=2a\Rightarrow b=2a-2ak$$

اکنون از تساوی $b=2a-2ak$ و شرط $b+c=a$ می‌توان نتیجه گرفت

$$ak^2+bk+a-b=2a\Rightarrow ak^2+(2a-2ak)k+a-(2a-2ak)=2a$$
$$a(k^2+2k-2k^2+1-2+2k)=2a\xrightarrow{a\neq 0}-k^2+4k-1=2$$
$$k^2-4k+3=0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(k-1)(k-3)=0\Rightarrow k=1\,,\,k=3$$

پس بیشترین مقدار k برابر با ۳ است.

۲۸۸۷- گزینهٔ ۲ شکل مقابل را ببینید.



مساحت جانبی استوانه برابر است با $S=2\pi rh$.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$r^2+(\frac{h}{2})^2=(4\sqrt{2})^2\Rightarrow r^2=32-\frac{h^2}{4}$$
$$r=\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}$$
$$S=2\pi\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}\times h=2\pi\sqrt{\frac{(128-h^2)h^2}{4}}=\pi\sqrt{-h^4+128h^2}$$

برای اینکه S ماکزیمم باشد، باید $-h^4+128h^2$ ماکزیمم باشد. توجه کنید که

$$y=-h^4+128h^2\Rightarrow y'=-4h^3+256h$$
$$y'=0\Rightarrow -4h(h^2-64)=0\Rightarrow h^2=64$$

بنابراین ماکزیمم S به‌ازای $h^2=64$ به‌دست می‌آید، که برابر است با

$$S=\pi\sqrt{-64^2+128\times 64}=64\pi$$

۲۸۸۸- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول ابتدا معادلهٔ خطی را که ضلع AB روی آن است، می‌نویسیم

$$y-۴=۳(x-۲)\Rightarrow ۳x-y-۲=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ C از خط به‌دست آمده برابر است با

$$CB=\frac{|۳(-۳)-(-۱)-۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{۱۰}$$

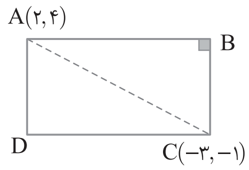
از طرف دیگر،

$$AC=\sqrt{(۲+۳)^۲+(۴+۱)^۲}=\sqrt{۵۰}$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC، طول AB را به‌دست می‌آوریم

$$AB^۲+BC^۲=AC^۲\Rightarrow AB^۲+۱۰=۵۰\Rightarrow AB=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

پس محیط مستطیل برابر است با $۲(\sqrt{۱۰}+۲\sqrt{۱۰})=۶\sqrt{۱۰}$.



راه‌حل دوم ابتدا معادلات اضلاع AB و BC را می‌نویسیم

$$AB: ۳x-y-۲=۰$$

$$BC\perp AB\Rightarrow m_{BC}=-\frac{۱}{m_{AB}}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow y-(-۱)=-\frac{۱}{۳}(x-(-۳))$$

$$BC: x+۳y+۶=۰$$

محل تلاقی اضلاع AB و BC همان نقطهٔ B است.

$$\begin{cases}۳x-y-۲=۰\\ x+۳y+۶=۰\end{cases}\Rightarrow B(۰,-۲)$$

اکنون طول پاره‌خط‌های AB و BC را به‌دست می‌آوریم و سپس محیط مستطیل را محاسبه می‌کنیم.

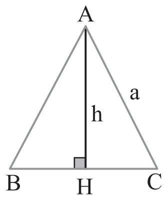
$$AB=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۴+۲)^۲}=\sqrt{۴+۳۶}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

$$BC=\sqrt{(۰+۳)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

در نتیجه

$$\text{محیط مستطیل}=۲(AB+BC)=۲(۲\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۰})=۶\sqrt{۱۰}$$

۲۸۸۹- گزینهٔ ۲ توجه کنید که $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=h$، پس $a=\frac{۲}{\sqrt{۳}}h$، در نتیجه $۳a=\frac{۳\times ۲h}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}h$، یعنی $\text{محیط مثلث}=۳a=۲\sqrt{۳}h$. از طرف دیگر، چون محیط مثلث برابر $\sqrt{۲۷۰}$ است، پس



$$۲\sqrt{۳}h=\sqrt{۲۷۰}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۲۷۰}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد، آن‌گاه

$$h=AH=\frac{|۳a-b-۵|}{\sqrt{۳^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|۳a-b-۵|}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$$|۳a-b-۵|=\frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}=۱۵\qquad (*)$$

از طرف دیگر، شیب خطی که ضلع BC روی آن است، برابر ۳ است. چون AH بر BC عمود است، پس شیب خطی که ارتفاع AH روی آن است، قرینهٔ معکوس ۳، یعنی برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. به این ترتیب،

$$\frac{b-۱}{a-۲}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳b-۳=۲-a\Rightarrow a=۵-۳b$$

بنابراین اگر در تساوی (*) به‌جای a قرار دهیم $۵-۳b$، به‌دست می‌آید

$$|۳(۵-۳b)-b-۵|=۱۵$$

$$|۱۰-۱۰b|=۱۵\Rightarrow\begin{cases}۱۰-۱۰b=۱۵\\ ۱۰-۱۰b=-۱۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱۳}{۲}\\ b=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

در نتیجه A می‌تواند یکی از نقطه‌های $(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ و $(-\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲})$ باشد.

۲۸۹۰- گزینهٔ ۲ راه‌حل اول با استفاده از اتحاد مزدوج می‌توان نوشت

$$(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲=((a+\frac{۱}{a})^۲-(\sqrt{۲})^۲)^۲$$

$$=(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲-۲)^۲=(a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲=a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲$$

اکنون توجه کنید که $a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}\Rightarrow a^۴=۷-۴\sqrt{۳}$

$$\frac{۱}{a^۴}=\frac{۱}{۷-۴\sqrt{۳}}\times\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۷+۴\sqrt{۳}}=\frac{۷+۴\sqrt{۳}}{۴۹-۴۸}=۷+۴\sqrt{۳}$$

بنابراین عبارت مورد نظر برابر است با

$$a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲=(۷-۴\sqrt{۳})+(۷+۴\sqrt{۳})+۲=۱۶$$

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که

$$a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt[۴]{(۲-\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\Rightarrow a^۲=۲-\sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{a^۲}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲=((a+\frac{۱}{a})^۲-(\sqrt{۲})^۲)^۲=(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۲-۲)^۲$$

$$=(a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲=(۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳})^۲=۱۶$$

۲۸۹۱- گزینهٔ ۳ فرض می‌کنیم پول اولیهٔ علی x و پول اولیهٔ اکرم y باشد. در این صورت

$$\begin{cases}x+y=۱۰۰\\ (x-۱۰)(y+۱۰)=۴۷۵\end{cases}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید $x=۱۰۰-y$ و در نتیجه معادلهٔ دوم را می‌توان این‌طور نوشت

$$(۱۰۰-y-۱۰)(y+۱۰)=۴۷۵\Rightarrow(۱۰۰-(y+۱۰))(y+۱۰)=۴۷۵$$

$$۱۰۰(y+۱۰)-(y+۱۰)^۲=۴۷۵\Rightarrow(y+۱۰)^۲-۱۰۰(y+۱۰)+۴۷۵=۰$$

اگر فرض کنیم $y+۱۰=A$، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$A^۲-۱۰۰A+۴۷۵=۰$$

از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده و سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(A-۵)(A-۹۵)=۰\begin{cases}A=۵\Rightarrow y+۱۰=۵\Rightarrow y=-۵\ (\text{غ.ق.ق.})\\ A=۹۵\Rightarrow y+۱۰=۹۵\Rightarrow y=۸۵\ \text{تومان}\end{cases}$$

۲۸۹۲- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول توجه کنید که چون $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-x-۴=۰$ هستند، پس $x_۱+x_۲=۱$ و $x_۱x_۲=-۴$. اکنون می‌توانیم مجموع جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$S=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})+(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=x_۱^۳+x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}$$

با استفاده از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ و نیز مخرج مشترک گرفتن، عبارت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S=(x_۱+x_۲)^۳-۳x_۱x_۲(x_۱+x_۲)+\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=۱-۳(-۴)(۱)+\frac{۱}{-۴}=\frac{۵۱}{۴}$$

همچنین حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=x_۱^۳x_۲^۳+x_۱^۲+x_۲^۲+\frac{۱}{x_۱x_۲}$$
$$=(x_۱x_۲)^۳+(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲+\frac{۱}{x_۱x_۲}=(-۴)^۳+۱-۲(-۴)+\frac{۱}{-۴}$$
$$=-\frac{۲۲۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به صورت $x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰$ است، که اگر دو طرف آن را در ۴ ضرب کنیم، می‌شود $۴x^۲-۵۱x-۲۲۱=۰$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$\xrightarrow{\times x} x^۳=x^۲+۴x=(x+۴)+۴x=۵x+۴$$
$$x=x^۲-۴\Rightarrow x^۲=x+۴$$

بنابراین $x_۱^۳=۵x_۱+۴$ و $x_۲^۳=۵x_۲+۴$. از طرف دیگر،

$$x_۱x_۲=-۴\Rightarrow\frac{۱}{x_۱}=-\frac{x_۲}{۴},\quad \frac{۱}{x_۲}=-\frac{x_۱}{۴}$$

اکنون می‌توانیم مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ جدید را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$S=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})+(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=(۵x_۱+۴-\frac{x_۱}{۴})+(۵x_۲+۴-\frac{x_۲}{۴})$$
$$=\frac{۱۹}{۴}(x_۱+x_۲)+۸=\frac{۱۹}{۴}(۱)+۸=\frac{۵۱}{۴}$$
$$P=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})=(۵x_۱+۴-\frac{x_۱}{۴})(۵x_۲+۴-\frac{x_۲}{۴})$$
$$=(\frac{۱۹}{۴}x_۱+۴)(\frac{۱۹}{۴}x_۲+۴)=(\frac{۱۹}{۴})^۲x_۱x_۲+۱۹(x_۱+x_۲)+۱۶=-\frac{۲۲۱}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ جدید به‌صورت زیر است:

$$x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۵۱x-۲۲۱=۰$$

۲۸۹۳- گزینهٔ ۱ راه‌حل اول می‌توان نوشت

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=۳۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۲\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۴\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۸\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{۱۶\pi}{۱۲}$$
$$=۳۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{\pi}{۶}\cos^۲\frac{\pi}{۳}\cos^۲\frac{۲\pi}{۳}\cos^۲\frac{۴\pi}{۳}$$
$$=۳۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۳}{۸}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$$

اکنون برای اینکه $\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}$ را حساب کنیم، از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۲}(۱+\cos۲\alpha)$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{۳}{۸}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۳}{۸}(\frac{۱}{۲}(۱+\cos\frac{\pi}{۶}))=\frac{۳}{۱۶}(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۳۲}$$
$$=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

راه‌حل دوم $f(x)=۳۲(\cos x\cos۲x\cos۴x\cos۸x\cos۱۶x)^۲$

اکنون عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$f(x)=۳۲(\frac{\sin x\cos x\cos۲x\cos۴x\cos۸x\cos۱۶x}{\sin x})^۲$$

از اتحاد مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin۲x$ به‌دست می‌آید

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۲}\sin۲x\cos۲x\cos۴x\cos۸x\cos۱۶x}{\sin x})^۲$$

به‌طور مشابه $\sin۲x\cos۲x=\frac{۱}{۲}\sin۴x$، پس

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۴}\sin۴x\cos۴x\cos۸x\cos۱۶x}{\sin x})^۲$$

به‌طور مشابه با انجام سه مرحلهٔ دیگر عبارت را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$f(x)=۳۲(\frac{\frac{۱}{۸}\sin۸x\cos۸x\cos۱۶x}{\sin x})^۲=۳۲(\frac{\frac{۱}{۱۶}\sin۱۶x\cos۱۶x}{\sin x})^۲$$
$$=۳۲(\frac{\frac{۱}{۳۲}\sin۳۲x}{\sin x})^۲=\frac{\sin^۲۳۲x}{۳۲\sin^۲x}$$

بنابراین

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\sin^۲\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲(۳\pi-\frac{۴\pi}{۱۲})}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲\frac{\pi}{۳}}{۳۲\times\frac{۱}{۲}(۱-\cos\frac{۲\pi}{۱۲})}$$
$$=\frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}=\frac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲(۴-۳)}=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

۲۸۹۴- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})=\cos\alpha,\quad \sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha$$

از طرف دیگر، $\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$. چون انتهای کمان α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس $\sin\alpha<۰$، یعنی $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۳}$. در نتیجه

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین مقدار عبارت مورد نظر برابر است با

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^۲\alpha-۱|}=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{|\frac{۵}{۴}-۱|}=\frac{\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

۲۸۹۵- گزینهٔ ۲ معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$5\sin^2 x+2\cos 3x+2=0\Rightarrow 5\sin^2 x+2(\cos 3x+1)=0$$

$$5\sin^2 x+2(2\cos^2\frac{3x}{2})=0\Rightarrow 5\sin^2 x+4\cos^2\frac{3x}{2}=0$$

چون $5\sin^2 x$ و $4\cos^2\frac{3x}{2}$ غیرمنفی‌اند، پس باید هر دو برابر صفر باشند، بنابراین جواب‌های مشترک معادله‌های مثلثاتی $\sin^2 x=0$ و $\cos^2\frac{3x}{2}=0$ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی مورد نظر هستند:

$$\sin^2 x=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos^2\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\cos\frac{3x}{2}=0\Rightarrow\frac{3x}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=(2k+1)\frac{\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$$

برای اینکه جواب‌های در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را پیدا کنیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

k	-2	-1	0	1	2
$k\pi$	$\cancel{-2\pi}$	$-\pi$	0	π	$\cancel{2\pi}$
$(2k+1)\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\cancel{\frac{5\pi}{3}}$

از این جدول معلوم می‌شود که جواب‌های مورد نظر $x=-\pi$ و $x=\pi$ هستند که تعداد آن‌ها دوتاست.

۲۸۹۶- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** باید نامعادلهٔ $|x^2-2|-x>0$ را حل کنیم:

$$|x^2-2|-x>0\Rightarrow|x^2-2|>x$$

توجه کنید که همواره $|x^2-2|\geq 0$، پس تمام xهای منفی و نیز $x=0$ در این نامعادله صدق می‌کنند:

$$x\in(-\infty,0]\qquad(1)$$

اکنون فرض می‌کنیم x مثبت باشد. در این صورت

$$|x^2-2|>x\Rightarrow\begin{cases}x^2-2>x\Rightarrow x^2-x-2=\underbrace{(x+1)}_{+}(x-2)>0\\ x^2-2<-x\Rightarrow x^2+x-2=(x-1)\underbrace{(x+2)}_{+}<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2>0\\ x-1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(2,+\infty) & (2)\\ x\in(0,1) & (3)\end{cases}$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ مورد نظر، یعنی دامنهٔ تابع f برابر اجتماع جواب‌های (۱)، (۲) و (۳) است:

$$D_f=(-\infty,0]\cup(0,1)\cup(2,+\infty)=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$$

راه‌حل دوم توجه کنید که عدد ۲ در دامنهٔ تابع f نیست، زیرا $f(2)=\log_4(|4-2|-2)=\log_4 0$ که تعریف نشده است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند. زیرا عدد ۲ عضو آن‌ها هست. همچنین عدد صفر در دامنهٔ تابع f هست، زیرا $f(0)=\log_4(|0-2|-0)=\log_4 2=\frac{1}{2}$. بنابراین گزینهٔ (۱) حذف می‌شود، زیرا عدد صفر عضو آن نیست. در نتیجه گزینهٔ (۴) درست است.

۲۸۹۷- گزینهٔ ۲ ابتدا نشان می‌دهیم تابع $f(x)=\sqrt{x+3}-1$ با دامنهٔ $D_f=[-3,+\infty)$ اکیداً صعودی است. می‌توان نوشت

$$x_1,x_2\geq-3:x_1<x_2\Rightarrow x_1+3<x_2+3\Rightarrow\sqrt{x_1+3}<\sqrt{x_2+3}$$

$$\sqrt{x_1+3}-1<\sqrt{x_2+3}-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

چون تابع f اکیداً صعودی است، پس نمودار تابع f نمودار تابع وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند. در نتیجه باید معادلهٔ $\sqrt{x+3}-1=x$ را حل کنیم تا طول نقطهٔ M به‌دست بیاید:

$$\sqrt{x+3}-1=x\Rightarrow\sqrt{x+3}=x+1\xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}}$$

$$x+3=(x+1)^2\Rightarrow x+3=x^2+2x+1\Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}(x-1)(x+2)=0\Rightarrow x=1,x=-2$$

توجه کنید که $x=-2$ در معادلهٔ مورد نظر صدق نمی‌کند. بنابراین $x=1$ و عرض نقطهٔ M برابر است با $f(1)=\sqrt{1+3}-1=2-1=1$

در نتیجه فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات برابر است با $OM=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

۲۸۹۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که هر بار که توپ بالا می‌رود، به همان اندازه هم پایین می‌آید. بنابراین مجموع مورد نظر برابر است با

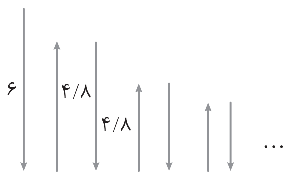
$$S=6+2(0/8\times6+(0/8)^2\times6+\cdots+(0/8)^{99}\times6)$$

$$=6+2\times6(0/8+(0/8)^2+\cdots+(0/8)^{99})$$

عبارت داخل پرانتز مجموع ۹۹ جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=0/8$ و قدرنسبت $q=0/8$ است. بنابراین

$$S=6+12\times0/8\times\frac{(0/8)^{99}-1}{0/8-1}$$

توجه کنید که می‌توانیم از $(0/8)^{99}$ صرف‌نظر کنیم، زیرا عددی بسیار کوچک است. بنابراین $S\simeq6+12\times0/8\times\frac{1}{1-0/8}=54$ متر



۲۸۹۹- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که ۳ واحد انتقال در امتداد محور x در جهت منفی معادل ۳ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال در امتداد محور y در جهت منفی معادل ۲ واحد انتقال به پایین است. اکنون به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y=2^{x+|x|}\xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}}y=2^{x+3+|x+3|}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=2^{x+3+|x+3|}-2$$

بنابراین با انجام انتقال‌های خواسته شده، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=2^{x+3+|x+3|}-2$ به‌دست می‌آید. برای یافتن طول نقطهٔ تلاقی نمودار این تابع با محور x باید جواب معادلهٔ زیر را پیدا کنیم:

$$2^{x+3+|x+3|}-2=0\Rightarrow2^{x+3+|x+3|}=2^1\Rightarrow x+3+|x+3|=1$$

$$|x+3|=-x-2\Rightarrow\begin{cases}x+3=-x-2\Rightarrow x=-\frac{5}{2}\\ -(x+3)=-x-2\ \ \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

۲۹۰۰- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول مقدار x را برابر ۹ قرار می‌دهیم و معادله را ساده می‌کنیم.

$$2\log_9 a+\log_a\sqrt{9}=2\Rightarrow 2\log_{3^2} a+\log_a 3=2$$

$$2\times(\frac{1}{2}\log_3 a)+\log_a 3=2\Rightarrow \log_3 a+\frac{1}{\log_3 a}=2$$

دو طرف معادله را در $\log_3 a$ ضرب می‌کنیم:

$$(\log_3 a)^2+1=2\log_3 a\Rightarrow(\log_3 a)^2-2\log_3 a+1=0$$

اکنون با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله می‌توان نوشت

$$(\log_3 a-1)^2=0\Rightarrow\log_3 a=1\Rightarrow a=3^1=3$$

راه‌حل دوم می‌توان نوشت

$$2\log_x a+\log_a\sqrt{x}=2\Rightarrow\log_{x^{\frac{1}{2}}} a+\log_a\sqrt{x}=2$$

$$\log_{\sqrt{x}} a+\log_a\sqrt{x}=2\Rightarrow\log_{\sqrt{x}} a+\frac{1}{\log_{\sqrt{x}} a}=2$$

چون هر عدد حقیقی و معکوسش هم‌علامت هستند و مجموع $\log_{\sqrt{x}} a$ و معکوسش برابر عددی مثبت است، پس $\log_{\sqrt{x}} a>0$. همچنین، چون مجموع عدد حقیقی مثبت $\log_{\sqrt{x}} a$ و معکوسش برابر ۲ است، پس این عدد برابر ۱ است. بنابراین

$$\log_{\sqrt{x}} a=1\xrightarrow{x=9}\log_{\sqrt{9}} a=1\Rightarrow\log_3 a=1\Rightarrow a=3^1=3$$

۲۹۰۱- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول چون خط $x=2$ محور تقارن سهمی است و سهمی از نقطهٔ $(0,0)$ می‌گذرد، پس سهمی از نقطهٔ $(4,0)$ نیز می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-0)(x-4)$ یا $y=ax(x-4)$ است. چون این سهمی از نقطهٔ $(2,1)$ نیز می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند. بنابراین

$$1=a\times2(2-4)\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه $f(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)$. از طرف دیگر، چون خط راست مورد نظر از نقطه‌های $(0,1)$ و $(4,0)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-0=\frac{0-1}{4-0}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{1}{4}(x-4)$$

بنابراین $g(x)=-\frac{1}{4}(x-4)$. اکنون توجه کنید که

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}=\lim_{x\to4^-}\frac{-\frac{1}{4}x(x-4)-\frac{1}{4}(x-4)}{4-x}$$

$$=\lim_{x\to4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x-4)(x+1)}{-(x-4)}=\lim_{x\to4^-}\frac{x+1}{4}=\frac{5}{4}$$

راه‌حل دوم چون $f(4)=g(4)=0$، پس حد مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}=-\lim_{x\to4^-}\frac{(f(x)-f(4))+(g(x)-g(4))}{x-4}$$

$$=-(\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}+\lim_{x\to4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4})=-(f'_-(4)+g'_-(4))$$

از طرف دیگر، سهمی f و خط راست g همه‌جا مشتق‌پذیرند. پس مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(f'(4)+g'(4))$. اکنون توجه کنید که

$$f(x)=-\frac{1}{4}x(x-4)=-\frac{1}{4}x^2+x\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x+1\Rightarrow f'(4)=-1$$

$$g'(4)=m=-\frac{1}{4}$$

در نتیجه مقدار حد مورد نظر برابر است با $-(-1-\frac{1}{4})=\frac{5}{4}$.

۲۹۰۲- گزینهٔ ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم. برای این کار x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow\sqrt{x}+1=y\sqrt{x}-y\Rightarrow\sqrt{x}-y\sqrt{x}=-y-1$$

$$\sqrt{x}(1-y)=-(y+1)\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow x=(\frac{y+1}{y-1})^2$$

بنابراین $f^{-1}(x)=(\frac{x+1}{x-1})^2$. به این ترتیب

$$(f^{-1})'(x)=2(\frac{x+1}{x-1})(\frac{-2}{(x-1)^2})=\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$\text{شیب خط مماس}=(f^{-1})'(2)=\frac{-4(2+1)}{(2-1)^3}=-12$$

۲۹۰۳- گزینهٔ ۱ توجه کنید که

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(1)=0 & x>0\\ f(0)=0 & x=0\\ f(-1)=0 & x<0\end{cases}$$

بنابراین $(fog)(x)=0$. در نتیجه

$$((fof)og)(x)=(fo(fog))(x)=f((fog)(x))=f(0)=0$$

یعنی $(fof)og$ تابع ثابت صفر است، پس نقطهٔ ناپیوستگی ندارد.

۲۹۰۴- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که مطابق جدول تعیین علامت زیر، عبارت $3-x^2$ روی بازهٔ $[-1/5,\sqrt{3}]$ نامنفی است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$	$-1/5$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x^2$		$-$			$+$		$-$	

بنابراین $|3-x^2|=3-x^2$ و در نتیجه $f(x)=x(3-x^2)=3x-x^3$

چون تابع f در هر نقطه از بازهٔ $(-1/5,\sqrt{3})$ مشتق‌پذیر است، پس طول‌های نقاط بحرانی آن در این بازه از حل معادلهٔ $f'(x)=0$ به‌دست می‌آیند. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=3-3x^2=3(1-x^2),\quad f'(x)=0\Rightarrow1-x^2=0\Rightarrow x=\pm1$$

بنابراین باید مقادیر $f(\pm1)$، $f(-1/5)$ و $f(\sqrt{3})$ را با هم مقایسه کنیم:

$$f(1)=2,\quad f(-1)=-2,\quad f(-1/5)=-\frac{9}{8},\quad f(\sqrt{3})=0$$

در نتیجه مینیمم مطلق تابع f برابر است با $f(-1)=-2$ (توجه کنید که چون مقادیر f به‌ازای عددهای مثبت، مثبت‌اند، پس کافی بود مقادیر تابع f را فقط برای عددهای منفی حساب می‌کردیم).

۲۹۰۵- گزینهٔ ۲ اگر A نقطهٔ $(x, \sqrt[3]{-x})$، یعنی نقطهٔ $(x, -\sqrt[3]{x})$ باشد، آن‌گاه A'، یعنی قرینهٔ A نسبت به نیمساز نواحی دوم و چهارم نقطهٔ $(\sqrt[3]{x}, -x)$ است. بنابراین

$$AA'=\sqrt{(x-\sqrt[3]{x})^2+(-\sqrt[3]{x}+x)^2}=\sqrt{2(x-\sqrt[3]{x})^2}=\sqrt{2}|x-\sqrt[3]{x}|$$

چون $x\in[0,1]$، پس $x\le\sqrt[3]{x}$ و در نتیجه $AA'=\sqrt{2}(\sqrt[3]{x}-x)$. بنابراین باید ماکزیمم مطلق تابع $g(x)=\sqrt{2}(\sqrt[3]{x}-x)$ را روی بازهٔ $[0,1]$ پیدا کنیم.

توجه کنید که

$$g'(x)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1\right)$$
$$g'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1=0\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{27}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

چون $g(1)=g(0)=0$، پس ماکزیمم مطلق تابع g به‌ازای $x=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ به‌دست می‌آید و برابر است با (توجه کنید که $\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{3}$، پس $\sqrt[3]{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$)

$$g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}\times\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{6}}$$

۲۹۰۶- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که وقتی $x\to(\frac{\sqrt{5}}{2})^-$، آن‌گاه $g(x)\to2^+$. پس در یک همسایگی چپ $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=(2x)^3$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$(fog)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)f'_+\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)=g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)f'_+(2)$$

مقدار $g'(\frac{\sqrt{5}}{2})$ را به‌سادگی می‌توان حساب کرد

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{2}(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}=\frac{-x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$
$$g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{(\frac{1}{2})^3}=-4\sqrt{5}$$

از طرف دیگر،

$$f(x)=(2x)^3=8x^3\Rightarrow f'(x)=24x^2\Rightarrow f'_+(2)=96$$

پس

$$(fog)'_-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=(-4\sqrt{5})\times96=(-48\sqrt{5})(8)$$

یعنی $(fog)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})$ هشت برابر $-48\sqrt{5}$ است.

۲۹۰۷- گزینهٔ ۱ توجه کنید که $g'(x)=2ax+5$ و $g''(x)=2a$. بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\le2\\ g'(x) & x>2\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & x\le2\\ g''(x) & x>2\end{cases}$$

چون تابع f در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است، پس

$$\left.\begin{aligned}&g(2)=g'(2)\Rightarrow4a+10+b=4a+5\Rightarrow b=-5\\&g'(2)=g''(2)\Rightarrow4a+5=2a\Rightarrow a=-\frac{5}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow a+b=-\frac{15}{2}$$

۲۹۰۸- گزینهٔ ۳ هر نقطه روی سهمی $y^2=4x$ به‌صورت $A(\frac{t^2}{4},t)$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ $M(3,0)$ برابر است با

$$AM=\sqrt{\left(\frac{t^2}{4}-3\right)^2+(t-0)^2}=\sqrt{\frac{t^4}{16}-\frac{3}{2}t^2+9+t^2}$$
$$=\sqrt{\frac{t^4-8t^2+144}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{(t^2-4)^2+128}$$

بنابراین کمترین مقدار AM به‌ازای $t^2=4$ به‌دست می‌آید و برابر است با

$$\frac{1}{4}\sqrt{128}=2\sqrt{2}$$

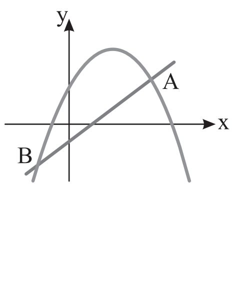
۲۹۰۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که چون عرض از مبدأ خط مورد نظر برابر -1 است، پس این خط از نقطهٔ $(0,-1)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ این خط به‌صورت زیر است:

$$y-0=\frac{0+1}{1-0}(x-1)\Rightarrow y=x-1$$

طول نقطه‌های برخورد این خط و سهمی داده شده، یعنی A و B جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$-x^2+2x+1=x-1\Rightarrow x^2-x-2=0\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}$$
$$(x+1)(x-2)=0\Rightarrow x_A=2, x_B=-1$$

چون این نقطه‌ها روی خط $y=x-1$ هستند، پس عرض آن‌ها برابر است با $y_A=2-1=1$ و $y_B=-1-1=-2$. بنابراین نقطه‌های مورد نظر $A(2,1)$ و $B(-1,-2)$ هستند که نقطهٔ وسط آن‌ها $M(\frac{2-1}{2},\frac{1-2}{2})$، یعنی $M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ است. از طرف دیگر، رأس سهمی $y=-x^2+2x+1$ نقطهٔ $(1,2)$ است. بنابراین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با $\sqrt{(1-\frac{1}{2})^2+(2+\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$. پس این فاصله $\frac{1}{2}$ برابر $\sqrt{26}$ است.



۲۹۱۰- گزینهٔ ۲ فرض کنید مختصات نقطهٔ A به‌صورت (a,b) باشد. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس میانهٔ AM ارتفاع نیز هست، یعنی خط AM بر خط BC عمود است. اما شیب خط BC برابر $m_{BC}=-\frac{۱}{۲}$ است و شیب خط AM برابر $m_{AM}=\frac{b-۲}{a-۳}$ است. اکنون می‌توان نوشت

$$BC\perp AM\Rightarrow m_{BC}\times m_{AM}=-۱$$

$$-\frac{۱}{۲}\times\frac{b-۲}{a-۳}=-۱\Rightarrow b-۲=۲(a-۳)\Rightarrow b=۲a-۴$$

از طرف دیگر، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط BC برابر با $۵\sqrt{۵}$ است. بنابراین

$$\frac{|a+۲b-۷|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}}=۵\sqrt{۵}\xrightarrow{b=۲a-۴}\frac{|a+۴a-۸-۷|}{\sqrt{۵}}=۵\sqrt{۵}$$

$$|۵a-۱۵|=۲۵\Rightarrow\begin{cases}۵a-۱۵=۲۵\\۵a-۱۵=-۲۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\a=-۲\end{cases}$$

در نتیجه طول نقطهٔ A هرکدام از دو مقدار ۸ و ۲− می‌تواند باشد که با توجه به گزینه‌ها، $a=-۲$ درست است.

۲۹۱۱- گزینهٔ ۴ فرض کنید جملهٔ نخست دنباله برابر a و قدرنسبت آن برابر r باشد، که $r\geq۲$. چون جمله‌های این دنباله عضو مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۱۰۰\}$ هستند، پس

$$a\geq۱,\quad ar^۴\leq۱۰۰$$

اکنون توجه کنید که $r\geq۲$، پس

$$r^۴\leq ar^۴\leq۱۰۰\Rightarrow r^۴\leq۱۰۰\Rightarrow r\leq\sqrt[۴]{۱۰۰}<۴$$

چون r عددی طبیعی است و $۲\leq r<۴$، پس $r=۲$ یا $r=۳$.

اگر $r=۲$، آن‌گاه بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله $۱۶a$ است، که چون $۱۶a\leq۱۰۰$، پس $a\leq۶$، یعنی a یکی از شش عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است. بنابراین در این حالت شش دنباله با ویژگی مورد نظر به‌دست می‌آیند.

اگر $r=۳$، آن‌گاه بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله $۸۱a$ است، که چون $۸۱a\leq۱۰۰$، پس $a\leq۱$، در نتیجه $a=۱$. بنابراین در این حالت یک دنباله با ویژگی مورد نظر به‌دست می‌آید.

در کل تعداد دنباله‌های مورد نظر هفت‌تا است.

۲۹۱۲- گزینهٔ ۱ کمترین مقدار تابع درجهٔ دوم داده شده برابر است با

$$-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۱۴۴-۴m(۵m-۱)}{۴m}=\frac{m(۵m-۱)-۳۶}{m}$$

بنابراین

$$\frac{m(۵m-۱)-۳۶}{m}=۲\Rightarrow۵m^۲-m-۳۶=۲m\Rightarrow۵m^۲-۳m-۳۶=۰$$

$$(m-۳)(۵m+۱۲)=۰\Rightarrow m=۳,m=-\frac{۱۲}{۵}$$

چون تابع درجهٔ دوم داده شده کمترین مقدار دارد، پس ضریب $x^۲$ باید عددی مثبت باشد، یعنی فقط $m=۳$ قابل قبول است. در نتیجه معادلهٔ سهمی به صورت $y=۳x^۲-۱۲x+۱۴$ است، که معادلهٔ محور تقارن آن به صورت $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۱۲}{۶}=۲$ است.

۲۹۱۳- گزینهٔ ۱ **راه‌حل اول** جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۶x+a=۰$ به صورت زیر هستند:

$$\frac{-۶-\sqrt{۳۶-۴a}}{۲}=-۳-\sqrt{۹-a},\quad\frac{-۶+\sqrt{۳۶-۴a}}{۲}=-۳+\sqrt{۹-a}$$

چون $\alpha<\beta$، پس $\alpha=-۳-\sqrt{۹-a}$ و $\beta=-۳+\sqrt{۹-a}$. در نتیجه

$$۳\alpha^۲=۳(-۳-\sqrt{۹-a})^۲=۲۷+۲۷-۳a+۱۸\sqrt{۹-a}=۵۴-۳a+۱۸\sqrt{۹-a}$$

$$۲\beta^۲=۲(-۳+\sqrt{۹-a})^۲=۱۸+۱۸-۲a-۱۲\sqrt{۹-a}=۳۶-۲a-۱۲\sqrt{۹-a}$$

بنابراین

$$۳\alpha^۲+۲\beta^۲=۹۰-۵a+۶\sqrt{۹-a}$$

در نتیجه

$$۳\alpha^۲+۲\beta^۲=۱۲\sqrt{۲}+۸۵\Rightarrow۹۰-۵a+۶\sqrt{۹-a}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$۵-۵a+۶\sqrt{۹-a}=۱۲\sqrt{۲}$$

توجه کنید که لازم نیست این معادله را حل کنیم و کافی است ببینیم عدد کدام گزینه در این معادله صدق می‌کند. به این ترتیب معلوم می‌شود که $a=۱$.

راه‌حل دوم توجه کنید که

$$۳\alpha^۲+۲\beta^۲=\frac{۵}{۲}\alpha^۲+\frac{۱}{۲}\alpha^۲+\frac{۵}{۲}\beta^۲-\frac{۱}{۲}\beta^۲=\frac{۵}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲)+\frac{۱}{۲}(\alpha^۲-\beta^۲)$$

از طرف دیگر،

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=(-۶)^۲-۲a=۳۶-۲a$$

$$\alpha^۲-\beta^۲=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(-\frac{\Delta}{۱})(-۶)=۶\Delta=۶\sqrt{۳۶-۴a}=۱۲\sqrt{۹-a}$$

بنابراین

$$۳\alpha^۲+۲\beta^۲=۱۲\sqrt{۲}+۸۵\Rightarrow\frac{۵}{۲}(۳۶-۲a)+\frac{۱}{۲}(۱۲\sqrt{۹-a})=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$۹۰-۵a+۶\sqrt{۹-a}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵\Rightarrow۵-۵a+۶\sqrt{۹-a}=۱۲\sqrt{۲}$$

در میان گزینه‌ها فقط $a=۱$ جواب این معادله است.

۲۹۱۴- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{a^۳+۱}+\frac{۱}{a^۳-۱}=۲\Rightarrow\frac{a^۳-۱+a^۳+۱}{(a^۳+۱)(a^۳-۱)}=۲\Rightarrow\frac{۲a^۳}{a^۶-۱}=۲$$

$$a^۳=a^۶-۱\Rightarrow a^۶=a^۳+۱$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}+\frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱}=\frac{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱+a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}{(a^۳+۱)^۲-(\sqrt{a^۳})^۲}$$

$$=\frac{۲a^۳+۲}{a^۶+۲a^۳+۱-a^۳}=\frac{۲(a^۳+۱)}{a^۶+a^۳+۱}=\frac{۲(a^۳+۱)}{a^۳+۱+a^۳+۱}=\frac{۲(a^۳+۱)}{۲(a^۳+۱)}=۱$$

پس

$$\left(\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}+\frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱}\right)^{۱۴۰۱}=۱$$

۲۹۱۵- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x)=x^{۲}\sqrt{x^{۲}}=x^{۲}|x|=\begin{cases} x^{۳} & x\geq ۰ \\ -x^{۳} & x\leq ۰ \end{cases}$$

تابع $g(x)=-x^{۳}$ روی بازهٔ $(-\infty,۰]$ نزولی است. پس تابع f نیز روی بازهٔ $(-\infty,۰]$ نزولی است. در نتیجه باید وارون تابع $g(x)=-x^{۳}$ با دامنهٔ $(-\infty,۰]$ را به‌دست بیاوریم. توجه کنید که

$$y=-x^{۳}\Rightarrow x^{۳}=-y\Rightarrow x=\sqrt[۳]{-y}=-\sqrt[۳]{y}$$

در نتیجه $g^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x}$. از طرف دیگر،

$$D_g=(-\infty,۰]\Rightarrow R_g=[۰,+\infty)\Rightarrow D_{g^{-۱}}=[۰,+\infty)$$

۲۹۱۶- گزینهٔ ۱ فرض می‌کنیم A نقطهٔ $(x_{۰},y_{۰})$ باشد. چون نقطهٔ A روی خط $x+y=a$ است، پس $x_{۰}+y_{۰}=a$. اکنون توجه کنید که

$$AB=\sqrt{۲۹}\Rightarrow\sqrt{(x_{۰}-(-۳))^{۲}+(y_{۰}-۲)^{۲}}=\sqrt{۲۹}$$

$$(x_{۰}+۳)^{۲}+(y_{۰}-۲)^{۲}=۲۹\Rightarrow x_{۰}^{۲}+y_{۰}^{۲}+۶x_{۰}-۴y_{۰}=۱۶ \quad (۱)$$

$$AC=۵\Rightarrow\sqrt{(x_{۰}-(-۱))^{۲}+(y_{۰}-۴)^{۲}}=۵$$

$$(x_{۰}+۱)^{۲}+(y_{۰}-۴)^{۲}=۲۵\Rightarrow x_{۰}^{۲}+y_{۰}^{۲}+۲x_{۰}-۸y_{۰}=۸ \quad (۲)$$

اگر تساوی (۲) را از تساوی (۱) کم کنیم، به‌دست می‌آید

$$۴x_{۰}+۴y_{۰}=۸\Rightarrow x_{۰}+y_{۰}=۲\Rightarrow a=۲$$

۲۹۱۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \\ a=-d \end{cases}\Rightarrow f^{-۱}(x)=f(x)\Rightarrow (fof)(x)=x$$

بنابراین در تابع داده شده $(fofof)(x)=f((fof)(x))=f(x)$

در نتیجه $(fofof)(\sqrt{۲})=f(\sqrt{۲})=\dfrac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}=\dfrac{۲}{۲\sqrt{۲}}=\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}$

۲۹۱۸- گزینهٔ ۳ توجه کنید که

$$۲^{f(x)}=۲۰\Rightarrow f(x)=\log_{۲}۲۰=\log_{۲}۴+\log_{۲}۵=۲+\log_{۲}۵$$

از طرف دیگر $۵^{x}=۱۰\Rightarrow x=\log_{۵}۱۰=\log_{۵}۲+\log_{۵}۵=\log_{۵}۲+۱$

در نتیجه $\log_{۵}۲=x-۱\Rightarrow\log_{۲}۵=\dfrac{۱}{x-۱}$

بنابراین $f(x)=۲+\log_{۲}۵=۲+\dfrac{۱}{x-۱}=\dfrac{۲x-۱}{x-۱}$.

۲۹۱۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $\hat{C}=۱۸۰^{\circ}-(\hat{A}+\hat{B})$. در نتیجه

$$\sin\hat{C}=\sin(۱۸۰^{\circ}-(\hat{A}+\hat{B}))=\sin(\hat{A}+\hat{B})$$
$$=\sin\hat{A}\cos\hat{B}+\cos\hat{A}\sin\hat{B}$$

بنابراین

$$۲\cos\hat{A}\sin\hat{B}-\sin\hat{C}=۲\cos\hat{A}\sin\hat{B}-\sin\hat{A}\cos\hat{B}-\cos\hat{A}\sin\hat{B}$$
$$=\cos\hat{A}\sin\hat{B}-\sin\hat{A}\cos\hat{B}=\sin(\hat{B}-\hat{A})$$
$$=\sin(\hat{B}-(\hat{B}+۴۵^{\circ}))=\sin(-۴۵^{\circ})$$
$$=-\sin ۴۵^{\circ}=-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۹۲۰- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که چون نمودار تابع f در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=۰$ نزولی است، پس $a>۰$. همچنین مینیمم تابع f برابر با $-|a|$ است و چون از روی نمودار معلوم می‌شود که این مینیمم برابر $-\dfrac{۱}{۴}$ است، پس $-|a|=-\dfrac{۱}{۴}\Rightarrow a=\dfrac{۱}{۴}$

همچنین، یک‌چهارم دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\dfrac{۵}{۴}-\dfrac{۳}{۴}=\dfrac{۱}{۲}$. پس $\dfrac{۱}{۴}\times\dfrac{۲\pi}{|b|}=\dfrac{۱}{۲}$، پس $|b|=\pi$ و چون $b>۰$، پس $b=\pi$. بنابراین $f(x)=\dfrac{۱}{۴}\cos(\pi x+c)$. از طرف دیگر،

$$f(\tfrac{۵}{۴})=۰\Rightarrow\tfrac{۱}{۴}\cos(\tfrac{۵}{۴}\pi+c)=۰\Rightarrow\cos(\tfrac{۵}{۴}\pi+c)=۰$$

$$\frac{۵}{۴}\pi+c=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow c=k\pi-\frac{۳\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

چون $۰<c<\pi$، پس $c=\pi-\dfrac{۳\pi}{۴}=\dfrac{\pi}{۴}$. در نتیجه $\dfrac{ac}{b}=\dfrac{۱}{۱۶}$.

۲۹۲۱- گزینهٔ ۳ دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۳}\sin x+\sin\frac{\pi}{۳}\cos x=\sin\frac{\pi}{۴}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{۳}=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi-\dfrac{\pi}{۱۲} \\ x+\dfrac{\pi}{۳}=۲k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\dfrac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

k	۰	۱	−۱
$۲k\pi-\frac{\pi}{۱۲}$	$-\frac{\pi}{۱۲}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}$	$\cancel{-۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}}$
$۲k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\cancel{۲\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}}$	$\cancel{-۲\pi+\frac{۵\pi}{۱۲}}$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ برابر است با

$$-\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}+۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۹\pi}{۴}$$

۲۹۲۲- گزینهٔ ۴ **راه‌حل اول** با استفاده از اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{۳x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to -۱}\frac{(۲x+۳)-(۳x+۴)}{۱+x}\times\frac{۱-\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}}{\sqrt{۲x+۳}+\sqrt{۳x+۴}}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{-x-۱}{۱+x}\times\frac{۱-\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}}{\sqrt{۲x+۳}+\sqrt{۳x+۴}}=\lim_{x\to -۱}(-۱)\times\frac{۱-\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}}{\sqrt{۲x+۳}+\sqrt{۳x+۴}}$$

$$=(-۱)\times\frac{۱+۱+۱}{۱+۱}=-\frac{۳}{۲}$$

راه‌حل دوم با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{۳x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to -۱}\frac{\dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}-\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۴}}}{\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}}$$

$$=\frac{\dfrac{۲}{۲\times۱}-\dfrac{۳}{۲\times۱}}{\dfrac{۱}{۳\times۱}}=\frac{۱-\dfrac{۳}{۲}}{\dfrac{۱}{۳}}=-\frac{۳}{۲}$$

۲۹۲۳- گزینهٔ ۳ ابتدا شرط‌هایی را که دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنند ساده می‌کنیم:

$$|x^۳|<x^۲ \Rightarrow |x|^۳<|x|^۲ \Rightarrow |x|<۱\,,\, x\neq ۰ \Rightarrow x\in(-۱,۰)\cup(۰,۱)$$

$$|x^۳|=x^۲ \Rightarrow |x|^۳=|x|^۲ \Rightarrow |x|=۱ \text{ یا } x=۰ \Rightarrow x\in\{۰,-۱,۱\}$$

$$|x^۳|>x^۲ \Rightarrow |x|^۳>|x|^۲ \Rightarrow |x|>۱\,,\, x\neq ۰ \Rightarrow x\in(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$$

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases} |x|+[-x] & x\in(-۱,۰)\cup(۰,۱) \\ ۱+\cos \pi x & x\in\{۰,-۱,۱\} \\ [x^۲]-[x] & x\in(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty) \end{cases}$$

توجه کنید که تابع $y=[x^۲]$ در نقاطی که $x^۲$ عددی صحیح (به‌جز صفر) است ناپیوسته است. همچنین تابع $y=[x]$ در همهٔ نقاطی که x صحیح است ناپیوسته است. بنابراین تابع $y=[x^۲]-[x]$ در همهٔ نقاطی که $x^۲$ صحیح است و x صحیح نیست ناپیوسته است، که تعداد این نقطه‌ها در بازهٔ $(۱,+\infty)$ یا $(-\infty,-۱)$ بی‌شمار است.

۲۹۲۴- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $p(x)$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. بنابراین اگر $n=۱$، آن‌گاه

$$p(x)=x^۴+۲x^۳+x^۶+۳x^۵+۱۶a$$

بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. در نتیجه

$$p(-۲)=۰ \Rightarrow ۱۶-۱۶+۶۴-۹۶+۱۶a=۰ \Rightarrow -۳۲+۱۶a=۰ \Rightarrow a=۲$$

بنابراین $\quad p(x)=x^۴+۲x^۳+x^۶+۳x^۵+۳۲$

چون $x^۲+۲x-۳$ یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم است، پس می‌توان باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر آن را به صورت $cx+d$ نوشت. اکنون توجه کنید که بنابر قضیهٔ تقسیم،

$$p(x)=(x^۲+۲x-۳)Q(x)+cx+d=(x-۱)(x+۳)Q(x)+cx+d$$

اگر در این تساوی به جای x مقادیر ۱ و ۳- را قرار دهیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} p(۱)=c+d \\ p(-۳)=-۳c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳۹=c+d \\ ۵۹=-۳c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-۵ \\ d=۴۴ \end{cases}$$

بنابراین برای $n=۱$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x^۲+۲x-۳$ برابر $-۵x+۴۴$ است.

۲۹۲۵- گزینهٔ ۳ عددهای آخر دسته‌ها به صورت زیر هستند:

$$۱,۳,۶,۱۲,۲۴,\ldots$$

توجه کنید که این عددها به جز عدد اول، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند. بنابراین آخرین عدد دستهٔ دوازدهم برابر ۳×۲^{۱۰} است. در نتیجه اولین عدد دستهٔ سیزدهم برابر $۳\times ۲^{۱۰}+۱$ است. همچنین، آخرین عدد دستهٔ سیزدهم برابر ۳×۲^{۱۱} است. چون عضوهای دستهٔ سیزدهم دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، پس میانگین آن‌ها برابر است با میانگین جمله‌های اول و آخر این دنبالهٔ حسابی، که می‌شود

$$\frac{۳\times ۲^{۱۰}+۱+۳\times ۲^{۱۱}}{۲}=\frac{۳\times ۲^{۱۰}(۱+۲)+۱}{۲}=\frac{۹\times ۲^{۱۰}+۱}{۲}=۴۶۰۸/۵$$

۲۹۲۶- گزینهٔ ۱ مجانب‌های قائم نمودار تابع f خط‌های $x=-b$ و $x=b$ هستند (یعنی ریشه‌های مخرج تابع f). مجانب‌های افقی نمودار تابع f خط‌های زیر هستند:

$$y=\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{|ax|+۲x}{|x|}=\lim_{x\to +\infty}\frac{|a|x+۲x}{x}=|a|+۲$$

$$y=\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{|ax|+۲x}{|x|}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-|a|x+۲x}{-x}=|a|-۲$$

توجه کنید که اگر $b=۰$، آن‌گاه نمودار تابع f فقط یک مجانب قائم دارد و اگر $b>۰$، آن‌گاه نمودار تابع f مجانب قائم ندارد، زیرا مخرج تابع ریشه ندارد. بنابراین b منفی است و نمی‌تواند با $|a|+۲$ برابر باشد. پس

$$\begin{cases} b=|a|-۲ \\ -b=|a|+۲ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲|a|=۰ \Rightarrow a=۰ \Rightarrow b=-۲$$

بنابراین $f(x)=\frac{۲x+۱}{|x|-۲}$ و $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x+۱}{|x|-۲}=\frac{۲+۱}{۱-۲}=-۳$

۲۹۲۷- گزینهٔ ۲ ابتدا نقطهٔ تلاقی منحنی‌ها را در بازهٔ $[۰,\pi]$ پیدا می‌کنیم. طول این نقطه جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ است:

$$\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{۳}{۲}\sin x \Rightarrow \cos x=\sin x$$

$$\tan x=۱ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

چون جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ است، پس $k=۰$ و در نتیجه $x=\frac{\pi}{۴}$. چون $f(\frac{\pi}{۴})=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$، بنابراین نقطهٔ تلاقی منحنی‌ها نقطهٔ $(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\sqrt{۲}}{۴})$ است. اکنون توجه کنید که

$$f'(x)=\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

پس شیب خط مماس مورد نظر برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ است و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$y-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(x-\frac{\pi}{۴})$$

طول نقطهٔ برخورد این خط با محور x به ازای $y=۰$ به‌دست می‌آید که می‌شود

$$-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}(x-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow -۳=x-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۴}-۳$$

۲۹۲۸- گزینهٔ ۳ چون f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۵ است، پس

$$f(x+۵)=f(x) \Rightarrow f'(x+۵)=f'(x) \qquad (۱)$$

از طرف دیگر،

$$g(x)=f(x+۱)+f(۳x+۱۰)$$

$$g'(x)=f'(x+۱)+۳f'(۳x+۱۰) \Rightarrow g'(-۲)=f'(-۱)+۳f'(۴) \qquad (۲)$$

چون $f'(-۱)=\frac{۳}{۲}$، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$f'(-۱+۵)=f'(-۱) \Rightarrow f'(۴)=f'(-۱)=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین از تساوی (۲) نتیجه می‌شود

$$g'(-۲)=\frac{۳}{۲}+۳(\frac{۳}{۲})=۴\times\frac{۳}{۲}=۶$$

۲۹۲۹- گزینهٔ ۲ بنابر قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(-۱)f(۵-h)f'(۵-h)-۳(-۱)f'(۵-h)}{۵-۲h}$$
$$=\frac{-۲f(۵)f'(۵)+۳f'(۵)}{۵}$$

اکنون توجه کنید که $f(۵)=۲$ و

$$f'(x)=\sqrt[۳]{x+۳}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}\times(x-۴)$$
$$f'(۵)=\sqrt[۳]{۸}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}\times(۵-۴)=۲+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲۵}{۱۲}$$

بنابراین مقدار حد مورد نظر برابر است با

$$\frac{-۲\times۲\times\frac{۲۵}{۱۲}+۳\times\frac{۲۵}{۱۲}}{۵}=\frac{-\frac{۲۵}{۱۲}}{۵}=-\frac{۵}{۱۲}$$

۲۹۳۰- گزینهٔ ۱ چون نقطهٔ $A(-۱,۱)$ روی نمودار تابع $f(x)=x^۲|x|+۳ax^۲+b$ است، پس

$$f(-۱)=۱\Rightarrow ۱+۳a+b=۱\Rightarrow b=-۳a\quad (۱)$$

همچنین چون نقطهٔ $A(-۱,۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، پس $f'(-۱)=۰$. اکنون توجه کنید که در یک همسایگی $x=-۱$،

$$f(x)=x^۲(-x)+۳ax^۲+b=-x^۳+۳ax^۲+b\Rightarrow f'(x)=-۳x^۲+۶ax$$
$$f'(-۱)=۰\Rightarrow -۳-۶a=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه $b=-۳a=-۳(-\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$. بنابراین $\frac{b}{a}=\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=-۳$. البته توجه کنید که بدون اینکه مقدارهای a و b را حساب کنیم، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $\frac{b}{a}=-۳$.

۲۹۳۱- گزینهٔ ۴ مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{(a+۱)x+a-۱}$ خط‌های $x=\frac{۱-a}{a+۱}$ و $y=\frac{a}{a+۱}$ هستند که محل تلاقی آن‌ها نقطهٔ $(\frac{۱-a}{a+۱},\frac{a}{a+۱})$ است. از طرف دیگر نقطهٔ مینیمم تابع $g(x)=\frac{۳}{۲}x^۲+x+\frac{۵}{۶}$ نقطهٔ $(-\frac{۱}{۳},g(-\frac{۱}{۳}))$ است. بنابراین

$$\frac{۱-a}{a+۱}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳-۳a=-a-۱\Rightarrow a=۲$$

به این ترتیب، $f(x)=\frac{۲x+۳}{۳x+۱}$. بنابراین طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور x به صورت مقابل به‌دست می‌آید:

$$f(x)=۰\Rightarrow\frac{۲x+۳}{۳x+۱}=۰\Rightarrow ۲x+۳=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

۲۹۳۲- گزینهٔ ۱ اگر طول ضلع مربع اول برابر a باشد، مساحت آن برابر $a^۲$ است و مساحت مربع دوم برابر $۹a^۲$ می‌شود. بنابراین طول ضلع مربع دوم $۳a$ است. در نتیجه محیط‌های مربع‌های اول و دوم به‌ترتیب برابر $۴a$ و $۱۲a$ هستند. بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مورد نظر برابر است با $\frac{۱۲a}{۴a}=۳$.

۲۹۳۳- گزینهٔ ۳ چون نمودار سهمی بر خط $y=-x$ مماس است، پس معادلهٔ $۳x^۲+(۲m-۱)x+m+\frac{۴}{۳}=-x$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد. در نتیجه

$$۳x^۲+(۲m-۱)x+m+\frac{۴}{۳}+x=۰\Rightarrow ۳x^۲+۲mx+m+\frac{۴}{۳}=۰\quad(۱)$$
$$\Delta=۰\Rightarrow ۴m^۲-۴\times۳(m+\frac{۴}{۳})=۰\Rightarrow m^۲-۳m-۴=۰$$
$$(m+۱)(m-۴)=۰\Rightarrow m=-۱,\ m=۴$$

اکنون باید ببینیم به ازای کدام مقدار m طول نقطهٔ تماس (ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱)) منفی می‌شود تا نقطهٔ تماس در ناحیهٔ دوم واقع شود. توجه کنید که

$$\text{طول نقطهٔ تماس}=-\frac{۲m}{۶}=-\frac{m}{۳}$$

که فقط به ازای $m=۴$ منفی است. بنابراین طول رأس سهمی مورد نظر برابر است با

$$-\frac{۲m-۱}{۶}=-\frac{۲\times۴-۱}{۶}=-\frac{۷}{۶}$$

۲۹۳۴- گزینهٔ ۴ چون a واسطهٔ هندسی α و β است، پس $a^۲=\alpha\beta$. از طرف دیگر، چون α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۲(a+۱)x+۲a-۱=۰$ هستند، پس $\alpha\beta=۲a-۱$. در نتیجه

$$a^۲=۲a-۱\Rightarrow a^۲-۲a+۱=۰\Rightarrow(a-۱)^۲=۰\Rightarrow a=۱$$

۲۹۳۵- گزینهٔ ۳ ابتدا توجه کنید که α و β جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^۲-t-۲=۰\Rightarrow(t+۱)(t-۲)=۰\Rightarrow t=-۱,\ t=۲$$

بنابراین یکی از عددهای α و β برابر ۱- است. در نتیجه، ۱- جواب معادلهٔ درجهٔ سوم داده شده است، یعنی

$$۴(-۱)^۳+k(-۱)^۲-۹(-۱)-۲=۰\Rightarrow -۴+k+۹-۲=۰\Rightarrow k=-۳$$

۲۹۳۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$y=f(x)=\sqrt{(x+۱)^۲}-|۳x-۶|=|x+۱|-۳|x-۲|$$

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}-(x+۱)+۳(x-۲) & x\le-۱\\ x+۱+۳(x-۲) & -۱\le x\le ۲\\ x+۱-۳(x-۲) & x\ge ۲\end{cases}=\begin{cases}۲x-۷ & x\le-۱\\ ۴x-۵ & -۱\le x\le۲\\ -۲x+۷ & x\ge۲\end{cases}$$

چون شیب خط $y=-۲x+۷$ منفی است، پس تابع f روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ نزولی است. اکنون توجه کنید که

$$y=-۲x+۷\Rightarrow x=\frac{y-۷}{-۲}=-\frac{۱}{۲}y+\frac{۷}{۲}$$

بنابراین $f^{-۱}(x)=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}$. از طرف دیگر

$$x\ge۲\Rightarrow -۲x\le-۴\Rightarrow -۲x+۷\le-۴+۷=۳$$

بنابراین برد تابع f روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ برابر $(-\infty,۳]$ است، در نتیجه

$$D_{f^{-۱}}=R_f=(-\infty,۳]$$

۲۹۳۷- گزینهٔ ۱ نقطه‌های تقاطع نمودارهای دو تابع را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که ضابطهٔ تابع دوم به‌صورت زیر است:

$$3y+x=17 \Rightarrow y=\frac{17-x}{3}$$

بنابراین طول نقطه‌های برخورد دو تابع جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$|x+2|+|x-1|=\frac{17-x}{3}$$

از طرف دیگر

$$x\geq 1 \Rightarrow x+2+x-1=\frac{17-x}{3} \Rightarrow x=2$$

$$-2\leq x\leq 1 \Rightarrow x+2-(x-1)=\frac{17-x}{3} \Rightarrow x=8 \quad (\text{غ.ق.ق.})$$

$$x\leq -2 \Rightarrow -(x+2)-(x-1)=\frac{17-x}{3} \Rightarrow x=-4$$

بنابراین طول نقطه‌های برخورد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x=2 \Rightarrow y=\frac{17-x}{3}=\frac{17-2}{3}=5$$

$$x=-4 \Rightarrow y=\frac{17-x}{3}=\frac{17+4}{3}=7$$

بنابراین نقطه‌های برخورد $(2,5)$ و $(-4,7)$ هستند، که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با

$$\sqrt{(2-(-4))^2+(5-7)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

۲۹۳۸- گزینهٔ ۳ تابع‌های $y=x^3$ و $y=3x-12$ اکیداً صعودی‌اند، پس مجموع آن‌ها نیز اکیداً صعودی است. در نتیجه تابع $f(x)=x^3+3x-12$ اکیداً صعودی است. بنابراین نقطه‌های برخورد نمودارهای تابع‌های f و f^{-1} روی خط $y=x$ هستند. در نتیجه طول‌های این نقطه‌ها جواب‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$f(x)=x \Rightarrow x^3+3x-12=x \Rightarrow x^3+2x-12=0 \Rightarrow x^3-8+2x-4=0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)+2(x-2)=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+6)=0 \quad (1)$$

چون دلتای معادلهٔ $x^2+2x+6=0$ منفی است، پس این معادله جواب ندارد. در نتیجه تنها جواب معادلهٔ (۱) برابر $x=2$ است. چون نقطهٔ برخورد نمودارهای تابع‌های f و f^{-1} روی خط $y=x$ است، پس عرض نقطهٔ برخورد برابر است با $y=2$، یعنی نقطهٔ برخورد نمودارهای تابع‌های f و f^{-1} نقطهٔ $(2,2)$ است، که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر است با

$$\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

۲۹۳۹- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که

$$a^2+9b^2=10ab \Rightarrow a^2+9b^2+6ab=16ab$$

$$(a+3b)^2=16ab \Rightarrow \left(\frac{a+3b}{4}\right)^2=ab$$

اگر از دو طرف این تساوی در مبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید

$$\log\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2=\log(ab) \Rightarrow 2\log\left(\frac{a+3b}{4}\right)=\log a+\log b$$

$$\log\left(\frac{a+3b}{4}\right)=\frac{\log a+\log b}{2}$$

بنابراین $\log\left(\frac{a+3b}{4}\right)$ واسطهٔ حسابی $\log a$ و $\log b$ است.

۲۹۴۰- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4 \Rightarrow 1-\sin x=4(1+\sin x) \Rightarrow 5\sin x=-3$$

$$\sin x=-\frac{3}{5}$$

در نتیجه

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow -\frac{3}{5}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$-3\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)=10\tan\frac{x}{2} \Rightarrow 3\tan^2\frac{x}{2}+10\tan\frac{x}{2}+3=0$$

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{2\times 3}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-10\pm 8}{6}$$

بنابراین $\tan\frac{x}{2}=-3$ یا $\tan\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}$. در نتیجه مقدار صحیح $\tan\frac{x}{2}$ برابر -3 است.

۲۹۴۱- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع f در یک همسایگی راست نقطهٔ $x=0$ نزولی است، پس ضریب $\cos x$، یعنی a باید مثبت باشد. از طرف دیگر ماکزیمم مقدار تابع f برابر ۳ و مینیمم مقدار آن برابر -7 است. در نتیجه

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -a+b=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$$

در نتیجه $f(x)=5\cos x-2$ و $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\cos\frac{\pi}{3}-2=5\times\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}$

۲۹۴۲- گزینهٔ ۲ **راه‌حل اول** توجه کنید که

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$$

بنابراین معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)=1 \Rightarrow (\sin x+\cos x)^2=2$$

$$1+\sin 2x=2 \Rightarrow \sin 2x=1 \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابرند با $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$، که مجموع آن‌ها می‌شود $\frac{3\pi}{2}$.

راه‌حل دوم ابتدا توجه کنید که $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. بنابراین معادلهٔ مورد نظر به‌صورت روبه‌رو درمی‌آید: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$

از طرف دیگر زاویه‌های $x+\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}-x$ متمم یکدیگرند، بنابراین

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin^2(x+\frac{\pi}{4})=1$$

$$\begin{cases} \sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\ , \quad k\in\mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ \sin(x+\frac{\pi}{4})=-1 \Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ , \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ هستند، که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{3\pi}{2}$.

۲۹۴۳- گزینهٔ ۳ **راه‌حل اول** ابتدا توجه کنید که

$$\sqrt{2-2\cos x}=\sqrt{2(1-\cos x)}=\sqrt{2(2\sin^2\frac{x}{2})}=2|\sin\frac{x}{2}|$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{2|\sin\frac{x}{2}|}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2-3x-(2-5x)}{-2\sin\frac{x}{2}(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{-2\times\frac{x}{2}(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

راه‌حل دوم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}-\frac{-5}{2\sqrt{2-5x}}}{-2\times\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۹۴۴- گزینهٔ ۳ باید $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}([x]-2a)=-1-2a$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{2bx^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2bx^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{x}{2})^2}{bx^2}=\frac{1}{4b}$$

$$f(0)=|b-0|=|b|$$

اکنون توجه کنید که باید $|b|=\frac{1}{4b}$. چون سمت راست این تساوی غیرمنفی است، پس سمت چپ آن، یعنی $\frac{1}{4b}$ هم غیرمنفی است. بنابراین b غیرمنفی است. در نتیجه $|b|=b$.

بنابراین $\frac{1}{4b}=b \Rightarrow b^2=\frac{1}{4} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

در نتیجه $-1-2a=\frac{1}{4b} \Rightarrow -1-2a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=-\frac{3}{4}$

پس $b-a=\frac{5}{4}$.

۲۹۴۵- گزینهٔ ۴ با توجه به گزینه‌ها خارج قسمت را یک چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌صورت $ax+b$ در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ تقسیم،

$$f(x)=(x^2+4x+5)(ax+b)+x+2$$

در نتیجه

$$\begin{cases} f(1)=(1+4+5)(a+b)+3 \\ f(-1)=(1-4+5)(-a+b)+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13=10(a+b)+3 \\ 11=2(-a+b)+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$$

بنابراین خارج قسمت می‌تواند برابر $-2x+3$ باشد.

۲۹۴۶- گزینهٔ ۱ بزرگ‌ترین عضو دستهٔ nام برابر 2^n است. بنابراین بزرگ‌ترین عضو دستهٔ سیزدهم برابر 2^{13} است. همین‌طور، بزرگ‌ترین عضو دستهٔ دوازدهم برابر 2^{12} است. بنابراین کوچک‌ترین عضو دستهٔ سیزدهم برابر $2^{12}+1$ است. چون تعداد عضوهای دستهٔ سیزدهم عددی زوج است، پس میانهٔ این دسته برابر با میانگین دو عدد وسطی این دسته است. از طرف دیگر، چون عضوهای دستهٔ سیزدهم دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند، پس میانگین دو عدد وسطی برابر با میانگین عدد اول و عدد آخر دسته است، که برابر است با $\frac{2^{12}+1+2^{13}}{2}=6144.5$.

۲۹۴۷- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx^2+7}{4x^2+ax+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx^2}{4x^2}=\frac{b}{4}$$

پس مجانب افقی نمودار تابع خط $y=\frac{b}{4}$ است. چون مجانب‌ها در نقطهٔ $(-\frac{1}{2},3)$ تلاقی می‌کنند، پس $\frac{b}{4}=3$، یعنی $b=12$. همین‌طور، چون مجانب قائم از نقطهٔ به طول $-\frac{1}{2}$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن $x=-\frac{1}{2}$ است، یعنی $x=-\frac{1}{2}$ ریشهٔ مخرج تابع است، یعنی

$$4(-\frac{1}{2})^2+a(-\frac{1}{2})+1=0 \Rightarrow a=4$$

پس $\frac{b}{a}=\frac{12}{4}=3$.

۲۹۴۸- گزینهٔ ۳ شیب خط $6y-3x=1$ برابر است با $-\frac{-3}{6}=\frac{1}{2}$. اگر نقطهٔ مورد نظر (x_0,y_0) باشد، آن‌گاه $f'(x_0)=-2$. از طرف دیگر

$$f(x)=x^2-4x+5 \Rightarrow f'(x)=2x-4$$

پس $f'(x_0)=-2 \Rightarrow 2x_0-4=-2 \Rightarrow x_0=1$

چون نقطهٔ مورد نظر روی نمودار تابع f است، پس عرض آن برابر است با $f(1)=1-4+5=2$. بنابراین نقطهٔ مورد نظر $(1,2)$ است.

۲۹۴۹- گزینهٔ ۴ توجه کنید که

$$g(x)=f(\tan^2 x+\sqrt{2}\cos x)$$

$$g'(x)=(\tan^2 x+\sqrt{2}\cos x)'f'(\tan^2 x+\sqrt{2}\cos x)$$

$$=(2\tan x(1+\tan^2 x)-\sqrt{2}\sin x)f'(\tan^2 x+\sqrt{2}\cos x)$$

پس

$$g'(\frac{\pi}{4})=(2\times1\times(1+1)-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})f'(1+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})=(4-1)f'(1+1)=3f'(2)$$

در نتیجه $\sqrt{3}=3f'(2)\Rightarrow f'(2)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۹۵۰- گزینهٔ ۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sin x\cos 2x$ در بازهٔ $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ برابر است با

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}=\frac{1\times(-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times0}{\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}$$

همین‌طور، آهنگ تغییر متوسط تابع $g(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$ در بازهٔ $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ برابر است با

$$\frac{g(\frac{\pi}{2})-g(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}=\frac{(1-0)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{4})}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

پس نسبت مورد نظر برابر -1 است.

۲۹۵۱- گزینهٔ ۲ چون نقطهٔ $(0,0)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ است و $f'(x)=3ax^2+2bx+c$، پس

$$\begin{cases}f(0)=0\\f'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=0\\c=0\end{cases}\Rightarrow f(x)=ax^3+bx^2\ ,\ f'(x)=3ax^2+2bx$$

چون نقطهٔ $(1,1)$ نیز نقطهٔ اکسترمم نسبی این تابع است، پس

$$\begin{cases}f(1)=1\\f'(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\3a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$$

پس $ab=-6$.

۲۹۵۲- گزینهٔ ۲ فرض کنید جمله‌های متوالی دنبالهٔ هندسی a, ar, ar^2 باشند. در این صورت، طبق فرض مسئله $4a, 8ar, 16ar^2$ دنباله‌ای حسابی است. بنابراین

$$8ar=\frac{4a+16ar^2}{2}\Rightarrow 4r=1+4r^2\Rightarrow 4r^2-4r+1=0$$

$$(2r-1)^2=0\Rightarrow r=\frac{1}{2}$$

از طرف دیگر، چون مجموع مربع‌های جمله‌های دنبالهٔ هندسی با مجموع جمله‌های دنبالهٔ حسابی برابر است، پس

$$a^2+a^2r^2+a^2r^4=4a+8ar+16ar^2\Rightarrow a(1+r^2+r^4)=4(1+2r+4r^2)$$

$$a(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16})=4(1+1+1)\Rightarrow a(\frac{16+4+1}{16})=4\times3\Rightarrow a=\frac{64}{7}$$

۲۹۵۳- گزینهٔ ۴ طول رأس سهمی $y=kx^2-4x-6$ برابر $-\frac{-4}{2k}$، یعنی $\frac{2}{k}$ است. پس عرض آن برابر است با

$$y=k(\frac{2}{k})^2-4(\frac{2}{k})-6=\frac{4}{k}-\frac{8}{k}-6=-\frac{4}{k}-6$$

پس نقطهٔ $(\frac{2}{k},-\frac{4}{k}-6)$ رأس سهمی است که روی خط $y=-4x-4$ قرار دارد. پس مختصات آن در معادلهٔ این خط صدق می‌کنند:

$$-\frac{4}{k}-6=-4(\frac{2}{k})-4\Rightarrow\frac{4}{k}=2\Rightarrow k=2$$

بنابراین عرض رأس سهمی برابر است با $-\frac{4}{k}-6=-\frac{4}{2}-6=-8$.

۲۹۵۴- گزینهٔ ۳ فرض کنید α جواب مشترک معادله‌های مورد نظر باشد. در این صورت α در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases}\alpha^2+6\alpha+m=0\\\alpha^2+2\alpha-3m=0\end{cases}\Rightarrow(\alpha^2+6\alpha+m)-(\alpha^2+2\alpha-3m)=0$$

$$4\alpha+4m=0\Rightarrow m=-\alpha$$

اکنون در معادلهٔ اول به جای m مقدار $-\alpha$ را قرار می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\alpha^2+6\alpha+m=0\Rightarrow\alpha^2+6\alpha-\alpha=0\Rightarrow\alpha^2+5\alpha=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0 & (\text{غ.ق.ق.})\\\alpha=-5\end{cases}$$

پس $m=5$. بنابراین معادله‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$x^2+6x+m=0\Rightarrow x^2+6x+5=0\Rightarrow(x+1)(x+5)=0$$

$$x^2+2x-3m=0\Rightarrow x^2+2x-15=0\Rightarrow(x-3)(x+5)=0$$

پس جواب‌های غیرمشترک دو معادله $x=-1$ و $x=3$ هستند که اختلاف آن‌ها برابر ۴ است.

۲۹۵۵- گزینهٔ ۴ باید مقدارهای صحیح x را پیدا کنیم که نابرابری‌های زیر درست باشند:

$$-2<\frac{2}{x^2-3x+2}<0$$

ابتدا نامعادلهٔ سمت راست را حل می‌کنیم:

چون صورت کسر $\frac{2}{x^2-3x+2}$ مثبت است، خود کسر وقتی منفی است که مخرجش منفی باشد.

اکنون توجه کنید که جدول تعیین علامت عبارت $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
x^2-3x+2		+	۰	−	۰	+	

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-3x+2<0$ بازهٔ $(1,2)$ است، که چون هیچ عدد صحیحی در این بازه قرار ندارد، پس هیچ عدد صحیحی در نابرابری $\frac{2}{x^2-3x+2}<0$ صدق نمی‌کند. بنابراین دیگر لازم نیست نامعادلهٔ سمت چپ را حل کنیم.

۲۹۵۶- گزینهٔ ۳ شیب خط AB برابر است با $\frac{1+2}{0-4}=-\frac{3}{4}$ و طول پاره‌خط AB برابر است با $AB=\sqrt{(4-0)^2+(-2-1)^2}=5$. چون خط AD بر خط AB عمود است، پس شیب آن برابر $\frac{4}{3}$ است. همچنین $AD=AB=5$.

اکنون اگر D را نقطهٔ (a,b) بگیریم، شیب خط AD برابر است با

$$\frac{b-1}{a-0}=\frac{4}{3}\Rightarrow b-1=\frac{4}{3}a$$

همچنین

$$AD=5\Rightarrow\sqrt{(a-0)^2+(b-1)^2}=5\Rightarrow a^2+(b-1)^2=25$$

$$a^2+(\frac{4}{3}a)^2=25\Rightarrow\frac{25a^2}{9}=25\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=\pm3$$

چون نقطهٔ D در ربع سوم است، پس طول آن منفی است، در نتیجه $a=-3$.

۲۹۵۷- گزینهٔ ۲ توجه کنید که طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $g^{-1}of^{-1}$ با محور y برابر با صفر و عرض آن برابر α است. بنابراین

$$(g^{-1}of^{-1})(0)=\alpha\Rightarrow(fog)^{-1}(0)=\alpha\Rightarrow(fog)(\alpha)=0$$

$$f(g(\alpha))=0\Rightarrow\log(2g(\alpha)-5)=0\Rightarrow 2g(\alpha)-5=1\Rightarrow g(\alpha)=3$$

اکنون توجه کنید که

$$g(\alpha)=3\Rightarrow\alpha+\sqrt{2\alpha-4}=3\Rightarrow\sqrt{2\alpha-4}=3-\alpha\quad(1)$$

$$2\alpha-4=(3-\alpha)^2\Rightarrow2\alpha-4=9+\alpha^2-6\alpha\Rightarrow\alpha^2-8\alpha+13=0$$

$$\alpha=4\pm\sqrt{3}$$

از معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود که $2\le\alpha\le3$. بنابراین $\alpha=4-\sqrt{3}$.

۲۹۵۸- گزینهٔ ۱ $x=1$ جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است، پس

$$f(1)=g(1)\Rightarrow2+2^{b-a}=-1-3+8\Rightarrow2^{b-a}=2\Rightarrow b-a=1$$

از طرف دیگر،

$$f^{-1}(10)=-1\Rightarrow f(-1)=10\Rightarrow2+2^{b+a}=10\Rightarrow2^{b+a}=8\Rightarrow b+a=3$$

پس

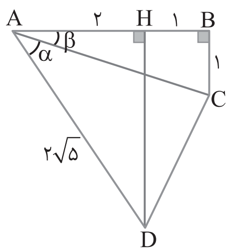
$$\begin{cases}b-a=1\\b+a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow2b-a=2\times2-1=3$$

۲۹۵۹- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$. بنابراین اگر دو طرف معادله را در $(x+2)(x^2-2x+4)$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید

$$x^2-2x+4-(x^2-9x-2)=6x(x+2)\Rightarrow7x+6=6x^2+12x$$

$$6x^2+5x-6=0\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{12}=\frac{-5\pm13}{12}\Rightarrow x=-\frac{3}{2},x=\frac{2}{3}$$

بنابراین $x=\frac{2}{3}$ تنها جواب مثبت معادلهٔ مورد نظر است.



۲۹۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$AC^2=AB^2+BC^2=3^2+1^2=10$$

$$AC=\sqrt{10}$$

همین‌طور، بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD،

$$AD^2=AH^2+HD^2$$

$$(2\sqrt{5})^2=2^2+HD^2$$

$$HD^2=20-4=16\Rightarrow HD=4$$

اکنون توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC،

$$\sin\beta=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{10}}\ ,\quad\cos\beta=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD،

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{HD}{AD}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AH}{AD}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

بنابراین

$$\cos\alpha=\cos((\alpha+\beta)-\beta)=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5\sqrt{2}}+\frac{2}{5\sqrt{2}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۹۶۱- گزینهٔ ۳ از روی نمودار معلوم می‌شود که دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\frac{4\pi}{3}-(-\frac{2\pi}{3})=2\pi$. از طرف دیگر دورهٔ تناوب تابع برابر است با $\frac{2\pi}{|c|}$. در نتیجه

$$\frac{2\pi}{|c|}=2\pi\Rightarrow|c|=1\Rightarrow c=\pm1$$

چون نمودار تابع $f(x)=a+b\cos(cx-\frac{\pi}{3})$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس

$$f(0)=0\Rightarrow a+b\cos(-\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow a+\frac{b}{2}=0\Rightarrow b=-2a$$

اکنون توجه کنید که مقدار ماکزیمم تابع برابر است با $a+|b|$ و از روی نمودار تابع معلوم می‌شود که این مقدار برابر ۱ است. در نتیجه $a+|b|=1$. بنابراین

$$\begin{cases}b=-2a\\a+|b|=1\end{cases}\Rightarrow a+2|a|=1$$

$$\begin{cases}a>0\Rightarrow3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}\Rightarrow b=-\frac{2}{3}\\a<0\Rightarrow-a=1\Rightarrow a=-1\Rightarrow b=2\end{cases}$$

اکنون توجه کنید که

$$f(-\frac{2\pi}{3})<0\Rightarrow a+b\cos(-\frac{2\pi c}{3}-\frac{\pi}{3})<0$$

$$f(\frac{4\pi}{3})<0\Rightarrow a+b\cos(\frac{4\pi c}{3}-\frac{\pi}{3})<0$$

اگر $c=1$، آن‌گاه

$$a+b\cos(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3})<0\Rightarrow a-b<0\Rightarrow a<b$$

$$a+b\cos(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3})<0\Rightarrow a-b<0\Rightarrow a<b$$

پس در این حالت $a=-1$ و $b=2$ قابل قبول است.

اگر $c=-1$، آن‌گاه

$$a+b\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3})<0\Rightarrow a+\frac{b}{2}<0$$

ولی می‌دانیم $a+\frac{b}{2}=0$، پس این حالت قابل قبول نیست.

بنابراین $a=-1$، $b=2$ و $c=1$، پس $b(c-a)=4$.

۲۹۶۲- گزینهٔ ۴ ابتدا توجه کنید که $\frac{17\pi}{8}+x+\frac{3\pi}{8}-x=\frac{5\pi}{2}$. بنابراین

$$\cos(\frac{17\pi}{8}+x)=\cos(\frac{5\pi}{2}-(\frac{3\pi}{8}-x))=\sin(\frac{3\pi}{8}-x)$$

در نتیجه معادلهٔ مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید

$$\sin(\frac{3\pi}{8}-x)\cos(\frac{3\pi}{8}-x)=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}\sin(2(\frac{3\pi}{8}-x))=\frac{1}{4}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{4}-2x)=\frac{1}{2}=\sin(\frac{\pi}{6})$$

در نتیجه

$$\begin{cases}\frac{3\pi}{4}-2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ \frac{3\pi}{4}-2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-k\pi+\frac{7\pi}{24}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=-k\pi-\frac{\pi}{24}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

پس جواب‌های واقع در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ عبارت‌اند از

$$k=0\Rightarrow x=\frac{7\pi}{24},\ x=-\frac{\pi}{24}$$

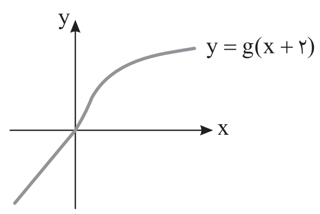
که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{\pi}{4}$.

۲۹۶۳- گزینهٔ ۲ توجه کنید که از روی نمودار معلوم می‌شود که فقط $g(2)$ برابر صفر است. در نتیجه

$$g(f(g(x+2)))=0\Rightarrow f(g(x+2))=2\Rightarrow|\frac{1}{2}g(x+2)-1|=2$$

$$|g(x+2)-2|=4\Rightarrow g(x+2)-2=\pm4\Rightarrow g(x+2)=6 \text{ یا } g(x+2)=-2$$

اکنون توجه کنید که نمودار تابع $y=g(x+2)$ به‌صورت زیر است:



پس خط‌های $y=6$ و $y=-2$ هر کدام نمودار تابع $y=g(x+2)$ را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کنند. بنابراین معادلهٔ مورد نظر دو جواب دارد.

۲۹۶۴- گزینهٔ ۱ چون نمودار تابع خطی f^{-1} از نقطه‌های $(0,\pi)$ و $(m,0)$ گذشته است، پس شیب آن برابر است با $\frac{\pi-0}{0-m}=-\frac{\pi}{m}$. پس ضابطهٔ تابع f^{-1} به‌صورت زیر است:

$$f^{-1}(x)-0=-\frac{\pi}{m}(x-m)\Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{\pi}{m}x+\pi$$

اکنون ضابطهٔ تابع f را پیدا می‌کنیم:

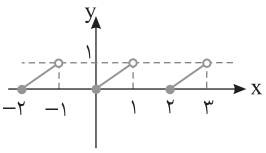
$$y=-\frac{\pi}{m}x+\pi\Rightarrow x=\frac{y-\pi}{-\frac{\pi}{m}}=-\frac{m}{\pi}y+m$$

در نتیجه $f(x)=-\frac{m}{\pi}x+m$. بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x+\pi}{-\frac{m}{\pi}x+m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x}=\frac{\pi^2}{m^2}$$

در نتیجه $\frac{\pi^2}{m^2}=\pi\Rightarrow m^2=\pi\xrightarrow{m<0}m=-\sqrt{\pi}$

۲۹۶۵- گزینهٔ ۱ ابتدا توجه کنید که نمودار تابع $y=x-[x]$ با شرط اینکه $[x]$ زوج باشد به‌صورت زیر است:



بنابراین نمودار تابع f وقتی که $[x]$ زوج است به همین صورت است. چون تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در نقطه‌های $x=0$ و $x=-1$ نیز پیوسته است. از طرف دیگر تابع f روی بازهٔ $[-1,0]$ خطی است و باید از نقطه‌های $(-1,1)$ و $(0,0)$ عبور کند. پس ضابطهٔ تابع f روی این بازه به صورت زیر است:

$$y-0=\frac{1-0}{-1-0}(x-0)\Rightarrow y=-x$$

در نتیجه باید تساوی $|x-[x-a]|=-x$ به ازای هر x در بازهٔ $[-1,0]$ درست باشد.

$$x=0\Rightarrow|0-[-a]|=0\Rightarrow[-a]=0\Rightarrow0\le-a<1\Rightarrow-1<a\le0$$

که چون $a<-1$، به تناقض رسیده‌ایم، یعنی هیچ مقداری برای a قابل قبول نیست.

۲۹۶۶- گزینهٔ ۲ ابتدا توجه کنید که $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ و

$$f(x)=\frac{x}{1-x|x|}=\begin{cases}\frac{x}{1-x^2} & x\ge0\ ,\ x\ne1\\ \frac{x}{1+x^2} & x\le0\end{cases}$$

به علاوه، تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است. اکنون اگر $x\ne0,1$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f' به‌صورت زیر است:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} & x>0\ ,\ x\ne1\\ \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} & x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & x>0\ ,\ x\ne1\\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x<0\end{cases}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}=1\Rightarrow f'_+(0)=1$$

$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=1\Rightarrow f'_-(0)=1$$

پس $f'(0)=1$. بنابراین تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. همچنین

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x>0\ ,\ x\ne1:1+x^2=0 & \text{(غ.ق.ق.)}\\ x<0:1-x^2=0\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

پس تنها نقطه‌ای که مشتق تابع f در آن برابر صفر است، $x=-1$ است و تابع f فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد.

۲۹۶۷- گزینهٔ ۳ به کمک تعریف مشتق، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۴}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'_+(\frac{۳}{۴})=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^+}\frac{f(x)-f(\frac{۳}{۴})}{x-\frac{۳}{۴}}=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^+}\frac{(۴x-۳)\sqrt{ax}}{x-\frac{۳}{۴}}=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^+}۴\sqrt{ax}$$
$$=۴\sqrt{\frac{۳a}{۴}}=۲\sqrt{۳a}$$

$$f'_-(\frac{۳}{۴})=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^-}\frac{f(x)-f(\frac{۳}{۴})}{x-\frac{۳}{۴}}=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^-}\frac{-(۴x-۳)\sqrt{ax}}{x-\frac{۳}{۴}}=\lim_{x\to\frac{۳}{۴}^-}(-۴\sqrt{ax})$$
$$=-۴\sqrt{\frac{۳a}{۴}}=-۲\sqrt{۳a}$$

پس شیب نیم‌خط مماس راست در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۴}$ برابر $۲\sqrt{۳a}$ و شیب نیم‌خط مماس چپ در این نقطه برابر $-۲\sqrt{۳a}$ است. در نتیجه

$$۲\sqrt{۳a}-(-۲\sqrt{۳a})=۲\sqrt{۶}\Rightarrow ۴\sqrt{۳a}=۲\sqrt{۶}$$
$$\sqrt{۳a}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\Rightarrow ۳a=\frac{۶}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۲۹۶۸- گزینهٔ ۱ توجه کنید که دلتای چندجمله‌ای f مثبت است. در واقع

$$\Delta=(۲-m)^۲+۲۰(m^۲+۱)>۰$$

از طرف دیگر $S=\alpha+\beta=\frac{m-۲}{m^۲+۱}$. پس باید m را طوری پیدا کنیم که تابع S بیشترین مقدار شود. اکنون توجه کنید که

$$S'(m)=\frac{m^۲+۱-۲m(m-۲)}{(m^۲+۱)^۲}=\frac{-m^۲+۴m+۱}{(m^۲+۱)^۲}$$
$$S'(m)=۰\Rightarrow m^۲-۴m-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۲+\sqrt{۵}\\ m=۲-\sqrt{۵}\end{cases}$$

بـا توجه بـه جدول تغییرات زیر برای تابع S، بیشتـرین مقدار ایـن تابع به ازای $m=۲+\sqrt{۵}$ رخ می‌دهد.

m	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
S'(m)		−	۰	+	۰	−	
		↘	min	↗	max	↘	