

قصص

عبرت های جیبی



حداکثر حدیث و کلام

اتحاد

یک تساوی است که به ازای تمامی مقادیر حقیقی متغیرها برقرار است؛ به طور مثال تساوی $x(x+1) = x^2 + x$ یک اتحاد است، زیرا هر عدد دلخواهی به جای x قرار دهیم، تساوی برقرار است. تساوی $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ نیز یک اتحاد است زیرا هر عدد دلخواهی را به جای y و x جای گذاری کنیم، تساوی برقرار است. در حالی که تساوی $x-1=0$ یک اتحاد نیست؛ زیرا فقط به ازای $x=1$ برقرار می شود.

برخی از اتحادهای معروف که سال گذشته فرا گرفتیم، عبارت اند از:

۱. اتحاد مربع مجموع دو جمله:

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)^2 & = & a^2 & + & 2ab & + & b^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{جمله اول} & & \text{مربع جمله اول} & & \text{دو برابر حاصل ضرب} & & \text{مربع جمله دوم} \\ & & \text{جمله دوم} & & \text{جمله اول در جمله دوم} & & \end{array}$$

$$(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(1) + (1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

در این جا داریم: $a=2x$ و $b=1$. در اتحاد جای گذاری می کنیم:

$$(a \ominus b)^2 = a^2 \ominus 2ab + b^2$$

۲. اتحاد مربع تفاضل دو جمله:

مشابه اتحاد قبلی است با این تفاوت که علامت جمله دوم آن منفی است.

$$(3t-2z)^2 = (3t)^2 - 2(3t)(2z) + (2z)^2 = 9t^2 - 12tz + 4z^2$$

در این جا داریم: $a=3t$ و $b=2z$

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a - b) & = & a^2 & - & b^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{جمله اول} & & \text{جمله اول} & & \text{مربع جمله اول} & & \text{مربع جمله دوم} \\ & & \text{جمله دوم} & & \text{جمله اول در جمله دوم} & & \end{array}$$

۳. اتحاد مزدوج:

$$(2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - (3)^2 = 4x^2 - 9$$

در این جا داریم: $a=2x$ و $b=3$

$$\begin{array}{ccccccc} (x+a)(x+b) & = & x^2 & + & (a+b)x & + & ab \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{جمله مشترک} & & \text{مربع جمله مشترک} & & \text{حاصل ضرب جمله مشترک در مجموع جمله های غیر مشترک} & & \text{حاصل ضرب جمله های غیر مشترک} \\ \text{بین دو پرانتز} & & & & & & \end{array}$$

۴. اتحاد جمله مشترک:

$$(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 2 \times 3 = x^2 + 5x + 6$$

در این جا $a=2$ و $b=3$ است.

دو اتحاد مهم و پرکاربرد دیگر نیز به اتحادهای قبلی اضافه می شود.

۵. اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)^3 & = & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{جمله اول} & & \text{مکعب جمله اول} & & \text{سه برابر حاصل ضرب} & & \text{سه برابر حاصل ضرب} & & \text{مکعب جمله دوم} \\ & & & & \text{جمله اول در مربع جمله دوم} & & \text{جمله اول در مربع جمله دوم} & & \end{array}$$

$$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

در این جا $a=x$ و $b=2$ است.

$$(2y+1)^3 = (2y)^3 + 3(2y)^2(1) + 3(2y)(1)^2 + 1^3 = 8y^3 + 12y^2 + 6y + 1$$

در این جا $a=2y$ و $b=1$ است.

۶ اتحاد مکعب تفاضل دو جمله:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مشابه اتحاد قبلی است با این تفاوت که منفی بودن جمله‌ی دوم باعث می‌شود علامت جملات در طرف راست اتحاد یکی درمیان مثبت و منفی شود.

$$(x-\sqrt{3})^3 = x^3 - 3x^2(\sqrt{3}) + 3x(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$$

در این جا $a=x$ و $b=\sqrt{3}$ است.

$$(x-\frac{1}{4})^3 = x^3 - 3x^2(\frac{1}{4}) + 3x(\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^3 = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$$

در این جا $a=x$ و $b=\frac{1}{4}$ است.

سوالات

۱ تساوی‌هایی که اتحاد هستند را با علامت  و تساوی‌هایی که اتحاد نیستند را با علامت  مشخص کنید.

 $x(x-2)+2=x^2-2x+2$

 $x^2(x^2+4)=x^4+4x^2$

 $x^2-1=0$

 $x^2+2x=-1$

 $(x-q)^2=x^2-2qx+q^2$

 $x^2-x=0$

۲ هر یک از عبارت‌های زیر را به اتحاد مرتبط با خودش وصل کنید سپس جاهای خالی را کامل کنید.

$$(x+2)(x-2)=(\dots\dots\dots)^2-(\dots\dots\dots)^2=\dots\dots\dots$$

  اتحاد مربع مجموع دو جمله

$$(\Delta x-1)^2=(\dots\dots\dots)^2-2(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)+(1)^2=\dots\dots\dots+1$$

  اتحاد مربع تفاضل دو جمله

$$(x-1)^2=(\dots\dots\dots)^2-2(\dots\dots\dots)^2(\dots\dots\dots)+3x(1)^2-(1)^2=\dots\dots\dots x^2+\dots\dots\dots x-1$$

  اتحاد مزدوج

$$(y+\Delta)^2=y^2+(\dots\dots\dots)y(\dots\dots\dots)+(\dots\dots\dots)^2=y^2+\dots\dots\dots y+\dots\dots\dots$$

  اتحاد جمله‌مشترب

$$(3y+2)^2=(\dots\dots\dots)^2+3(\dots\dots\dots)^2(\dots\dots\dots)+3(3y)(\dots\dots\dots)^2+(2)^2=\dots\dots\dots y^2+\dots\dots\dots y^2+\dots\dots\dots y+8$$

  اتحاد مکعب مجموع دو جمله

$$(x+7)(x-4)=x^2+(\dots\dots\dots-\dots\dots\dots)x+(\dots\dots\dots)\times(\dots\dots\dots)=x^2+\dots\dots\dots x-\dots\dots\dots$$

  اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

۳ به کمک اتحادهای «مکعب مجموع دو جمله» و «مکعب تفاضل دو جمله» تساوی‌های زیر را کامل کنید.

 $(2a+3)^2=(\dots\dots\dots)^2+2(2a)(\dots\dots\dots)+3(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)^2+(3)^2=\dots\dots\dots a^2+\dots\dots\dots a^2+\dots\dots\dots a+\dots\dots\dots$

 $(\frac{x}{4}-1)^2=(\frac{x}{4})^2-2(\dots\dots\dots)^2(\dots\dots\dots)+3(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)^2-(\dots\dots\dots)^2=\dots\dots\dots x^2-\dots\dots\dots x^2+\dots\dots\dots x-\dots\dots\dots$

 $(\dots\dots\dots+\dots\dots\dots)^2=\frac{a^2}{8}+\dots\dots\dots a^2+\dots\dots\dots a+8$

 $(x-\sqrt{5})^2=(\dots\dots\dots)^2-2\sqrt{5}x^2+\dots\dots\dots x-5\sqrt{5}$

۴ هر یک از عبارت‌های زیر را به کمک اتحادهای گفته‌شده ساده کنید.

الف
$$\underbrace{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}_{\substack{\text{مزدوج } x^{(\dots)}-1 \\ \text{مزدوج } x^{(\dots)}-1 \\ \text{مزدوج } x^{(\dots)}-1}}$$

ب
$$\underbrace{(x-2)(x+2)(x^2+7)}_{\substack{\text{مزدوج } x^{(\dots)}-4 \\ \text{جمله مشترک } x^{(\dots)}+3x^{(\dots)}-(\dots)}}$$

پ
$$\underbrace{(x-3)(x+3)(x^2-9)}_{\substack{\text{مزدوج } x^{(\dots)}-9 \\ \text{مربع مجموع دو جمله } x^{(\dots)}-18x^{(\dots)}+(\dots)}}$$

ت
$$\underbrace{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-2)}_{\substack{\text{مزدوج } x^{(\dots)}-(\dots) \\ \text{مکعب تفاضل دو جمله } x^6-(\dots)x^4+(\dots)x^2-(\dots)}}$$

۵ محاسبات عددی زیر را به کمک اتحادها انجام دهید.

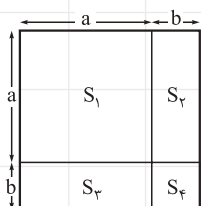
الف $98^2 = (100-2)^2 = (\dots)^2 - 2(\dots)(\dots) + 2^2 = \dots$

ب $1001^2 = (\dots + \dots)^2 = (\dots)^2 + 2(\dots)(\dots) + (\dots)^2 = \dots$

پ $105 \times 95 = (100 + \dots)(100 - \dots) = (100)^2 + (\dots) \times 100 - (\dots) = \dots + \dots - \dots = \dots$

ت $11^3 = (10+1)^3 = 10^3 + 3(\dots)^2(\dots) + 3(\dots)(1)^2 + 1^3 = \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$

۶ مربع زیر را در نظر گرفته، ضلع آن را به دو قسمت به طول‌های a و b تقسیم کنید. مساحت مربع را برابر S در نظر بگیرید.



الف با توجه به این که مساحت مربع برابر مجذور اندازه‌ی ضلعش می‌باشد، حاصل S را بیابید.

ب این بار مساحت مربع (S) را به کمک جمع‌زدن مساحت بخش‌های داخلی آن بیابید.

پ حاصل S را از بخش‌های الف و ب با یکدیگر برابر قرار داده و به کمک آن اتحاد مربع مجموع دو جمله را نتیجه بگیرید.

ساده کردن $(a+b)^n$

تا این‌جا با جملات حاصل از ساده کردن عبارت‌های $(a+b)^2$ و $(a+b)^3$ آشنا شدیم. حال می‌خواهیم با نحوه‌ی محاسبه‌ی جملات حاصل از ساده کردن توان‌های بزرگ‌تر $a+b$ مانند $(a+b)^4$ ، $(a+b)^5$ و ... آشنا شویم. برای محاسبه‌ی جملات حاصل از ساده کردن عبارت $(a+b)^n$ در حالت کلی (با فرض این‌که n یک عدد حسابی باشد) باید به نکات زیر توجه کنیم:

۱. تعداد جملات حاصل از ساده کردن عبارت $(a+b)^n$ برابر $n+1$ خواهد بود.

تعداد جملات حاصل از ساده کردن $(a+b)^3$ برابر ۴ می‌باشد.

۲. در صورتی که جملات حاصل را نسبت به توان‌های a به صورت صعودی مرتب کنیم، اولین جمله a^n و آخرین جمله b^n خواهد بود.

اولین جمله‌ی حاصل از ساده کردن عبارت $(a+b)^3$ برابر a^3 و آخرین جمله برابر b^3 می‌باشد.

۳. در هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل یک واحد از توان a کم شده و به توان b یک واحد اضافه می‌شود.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

۴. برای محاسبه‌ی ضرایب جملات حاصل از ساده کردن عبارت $(a+b)^n$ از مثلث زیر که به «مثلث خیام» معروف است، کمک می‌گیریم.

		۱						
	۱		۱					
	۱	۲	۱					
	۱	۳	۳	۱				
	۱	۴	۶	۴	۱			
	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱		
	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱	

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید مثلث خیام، مثلثی به رأس ۱ است که مجموع هر دو عدد مجاور عدد پایین را تولید می‌کند. برای محاسبه‌ی ضرایب جملات حاصل از ساده کردن $(a+b)^n$ کافی است به سطر $(n+1)$ ام مثلث رجوع کنیم.

ضرایب جملات حاصل از ساده کردن $(a+b)^3$ در سطر چهارم مثلث خیام موجود است:

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

برای محاسبه‌ی ضرایب جملات حاصل از ساده کردن $(a+b)^n$ به جای مثلث خیام می‌توان از رابطه‌ی زیر نیز استفاده کرد:

$$\text{توان } a \text{ در جمله‌ی قبل} \times \text{ضریب جمله‌ی قبل} = \text{ضریب هر جمله} \\ \text{تعداد جملات قبل}$$

به طور مثال به نحوه‌ی ساده کردن $(a+b)^4$ توجه کنید:

با توجه به نکات گفته‌شده تعداد جملات حاصل برابر ۵ خواهد بود که اولین آن‌ها a^4 و آخرین آن‌ها b^4 است و در هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل یک واحد از توان a کم شده، یک واحد به توان b افزوده می‌شود، پس شکل کلی جملات حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$(a+b)^4 = a^4 + (\dots\dots)a^3b + (\dots\dots)a^2b^2 + (\dots\dots)ab^3 + b^4$$

اگر ضرایب را با توجه به رابطه‌ی بالا حساب کنیم، داریم:

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{1 \times 4}{1}a^3b + \frac{4 \times 3}{2}a^2b^2 + \frac{6 \times 2}{3}ab^3 + \frac{4 \times 1}{4}b^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ضرایب جملات حاصل از ساده کردن $(a+b)^4$ همان اعداد سطر پنجم مثلث خیام هستند.

برای محاسبه‌ی $(a-b)^n$ کافی است علامت جملات حاصل از $(a+b)^n$ را یکی درمیان مثبت و منفی کنیم.

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

داریم:

با توجه به اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ درمی‌یابیم که مجموع ضرایب جملات حاصل برابر $1+2+1=4$ است. اما جالب این جاست که

مجموع ضرایب جملات حاصل از $(a+b)^n$ در حالت کلی برابر 2^n بوده و برای این منظور نیازی به ساده کردن $(a+b)^n$ نیست.

مجموع ضرایب جملات حاصل از ساده کردن $(a+b)^0$ برابر 2^0 می‌باشد.

حاصل هر یک از اعداد $11^1, 11^2, 11^3$ و 11^4 به ترتیب برابر اعداد سطرهای دوم، سوم، چهارم و پنجم مثلث خیام هستند:

$$11^1 = 11 \quad (\text{سطر دوم مثلث خیام})$$

$$11^2 = 121 \quad (\text{سطر سوم مثلث خیام})$$

$$11^3 = 1331 \quad (\text{سطر چهارم مثلث خیام})$$

$$11^4 = 14641 \quad (\text{سطر پنجم مثلث خیام})$$

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله

اتحادهای «مجموع مکعبات دو جمله» و «تفاضل مکعبات دو جمله» از دیگر اتحادهای مهم و پرکاربردی هستند که در این جا مطرح می‌شوند:

اتحاد مجموع مکعبات دو جمله:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$\downarrow$ جمله اول $\downarrow$ جمله دوم $\downarrow$ مربع جمله اول $\downarrow$ حاصل ضرب جمله اول در جمله دوم $\downarrow$ مربع جمله دوم $\downarrow$ مکعب جمله اول $\downarrow$ مکعب جمله دوم

اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله: مشابه اتحاد قبلی است با این تفاوت که یک تغییر جزئی در علامت‌هایش ایجاد شده است:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله به دلیل داشتن یک پرانتز بزرگ در یک پرانتز کوچک به اتحادهای «چاق و لاغر» نیز معروف‌اند.

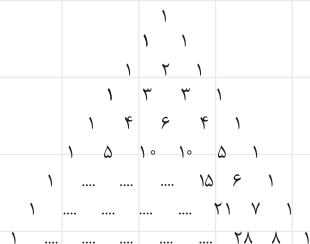
این اتحادها کاربرد زیادی در تجزیه‌ی عبارت‌های جبری دارند. به نمونه‌ای از تجزیه‌ی عبارت‌های جبری به کمک این اتحادها توجه کنید:

$$x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 = (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

سوالات

۷ مثلث خیام را کامل کرده سپس هر یک از عبارت‌های داده‌شده را ساده کنید.



$$(a+b)^5 = a^5 + (\dots) a^4 b + (\dots) a^3 b^2 + (\dots) a^2 b^3 + (\dots) a b^4 + b^5$$

$$(a-b)^6 = a^6 - (\dots) + (\dots) - 2a^4 b^2 + (\dots) - (\dots) + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + (\dots) + (\dots) + (\dots) + (\dots) + (\dots) + (\dots) + b^7$$

$$(a-b)^8 = a^8 - (\dots) + (\dots) - (\dots) + (\dots) - (\dots) + (\dots) - 8ab^7 + b^8$$

۸ مجموع ضرایب جملات حاصل از ساده کردن عبارت‌های $(a+b)^5$ و $(a+b)^6$ به ترتیب برابر و است.

۹ درست یا غلط بودن هر یک از جملات زیر را با علامت‌های  یا  مشخص کنید:

الف برای محاسبه‌ی حاصل 11^5 کافی است اعداد سطر ششم مثلث خیام را از چپ به راست کنار هم بنویسیم.

ب مجموع ضرایب جملات حاصل از ساده کردن $(a-b)^4$ برابر ۱۶ است.

۱۰ هر یک از عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد‌های «مجموع مکعبات دو جمله» و «تفاضل مکعبات دو جمله» تجزیه کنید:

الف $a^7 - 1 = (a - \dots)(a^6 + \dots + 1)$

ب $a^7 + 8 = (a + \dots)(a^6 - \dots + \dots)$

ب $8a^3 + 27 = (2a + \dots)(\dots - 6a + \dots)$

ت $a^3 - \frac{1}{27} = (a - \dots)(a^2 + \dots + \frac{1}{9})$

ث $a^6 + \frac{1}{27} = (a^2)^3 + (\frac{1}{3})^3 = (\dots + \dots)(a^4 - \dots + \dots)$

ج $125 - y^6 = (\dots)^3 - (\dots)^3 = (\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots)$

۱۱ عبارت $x^6 - 1$ را به کمک روش‌های الف و ب تجزیه کنید.

الف $x^6 - 1 \xrightarrow{\text{مزدوج}} = \underbrace{(\dots - 1)}_{\substack{\text{تفاضل} \\ \text{مکعبات} \\ \text{دو جمله}}} \underbrace{(\dots + 1)}_{\substack{\text{مجموع} \\ \text{مکعبات} \\ \text{دو جمله}}} = (x-1)(\dots + \dots + \dots)(x+1)(\dots - \dots + \dots)$

ب $x^6 - 1 = (\dots)^3 - (\dots)^3 \xrightarrow[\text{مزدوج}]{\text{تفاضل مکعبات دو جمله}} = (\underbrace{x^2}_{\text{مزدوج}} - 1)(\dots + \dots + \dots) = (x-1)(\dots + \dots)(\dots + \dots + \dots)$

هر دو روش برای تجزیه قابل قبول است ولی توجه کنید که به کمک روش الف موفق شدیم عبارت داده شده را به عبارت‌های ساده‌تری تجزیه کنیم.

۱۲ عبارت $y^6 - 64$ را به کمک روش‌های الف و ب تجزیه کنید. کدام روش $y^6 - 64$ را به عبارت‌های ساده‌تری تجزیه می‌کند؟

الف $y^6 - 64 \xrightarrow{\text{مزدوج}} = \underbrace{(\dots - 8)}_{\substack{\text{تفاضل} \\ \text{مکعبات} \\ \text{دو جمله}}} \underbrace{(\dots + 8)}_{\substack{\text{مجموع} \\ \text{مکعبات} \\ \text{دو جمله}}} = (y-2)(\dots + \dots + \dots)(y+2)(\dots - \dots + \dots)$

ب $y^6 - 64 = (\dots)^3 - (\dots)^3 \xrightarrow{\text{تفاضل مکعبات دو جمله}} = (y^2 - 4)(\dots + \dots + \dots) = (y-2)(\dots + \dots)(\dots + \dots + \dots)$

می‌توان تجزیه به روش ب را بیشتر از این نیز ادامه داد تا به سادگی نتیجه‌ی روش الف برسد اما به دلیل پیچیده شدن، تجزیه توصیه نمی‌شود و تأکید می‌شود که تجزیه تا همین مرحله نیز کافی است.

عبارت‌های گویا

قبل از تعریف عبارت‌های گویا یکی دو اصطلاح از سال گذشته را یادآوری می‌کنیم.

یک جمله‌ای: حاصل ضرب یک عدد حقیقی در یک یا چند متغیر با توان حسابی $(0, 1, 2, \dots)$ را یک جمله‌ای می‌نامیم. با توجه به تعریف، عبارت‌های

روبه‌رو یک جمله‌ای محسوب می‌شوند:

در حالی که عبارت‌های روبه‌رو یک جمله‌ای نیستند:

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در تعریف یک جمله‌ای محدودیتی در مورد ضریب عددی وجود ندارد. یعنی ضریب عددی هر عددی از جمله گویا یا غیرگویا، مثبت یا منفی و ... می‌تواند باشد. نکته‌ای که باید به آن توجه شود، این است که توان **حروف** باید حسابی باشد.

چندجمله‌ای: به جمع جبری چند یک جمله‌ای غیرمتشابه (یعنی چند یک جمله‌ای که بخش حرفی‌شان یکسان نباشد) چندجمله‌ای می‌گوییم.

$2x^2 + 3x$ دو جمله‌ای و $x^5 - x^2 + 1$ سه جمله‌ای است.

عبارت‌گویا

عبارتی جبری است که بتوان آن را به صورت کسری نمایش داد که صورت و مخرج آن یک یا چندجمله‌ای باشد.

عبارت‌های روبه‌رو عبارت گویا محسوب می‌شوند:

در حالی که عبارت‌های زیر عبارت گویا محسوب نمی‌شوند:

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x}, \frac{2^x}{x^2+1}, \frac{\sqrt{x+y}}{y^2}, \frac{|x|}{2x-2}$$

یک عبارت کسری تنها در صورتی از نظر ریاضی تعریف شده است که مخرج آن مخالف صفر باشد؛ به طور مثال عبارت $\frac{x+1}{x-2}$ به ازای $x=2$

تعریف نشده است. زیرا $x=2$ موجب صفرشدن مخرج کسر می‌شود. عبارت $\frac{2x}{x^2+2x}$ نیز به ازای $x=0$ و $x=-2$ تعریف نشده است.

هرگاه بخواهیم دو طرف یک تساوی و یا صورت و مخرج یک کسر را بر عبارتی تقسیم کنیم، حتماً باید شرط کنیم که آن عبارت مخالف

صفر باشد؛ به طور مثال عبارت $\frac{2ax}{3a}$ را به شرط $a \neq 0$ می‌توان به صورت $\frac{2x}{3}$ ساده کرد. همچنین در عبارت $\frac{(x+2)(x+3)}{2(x+2)}$ در صورتی که $x \neq -2$ باشد، می‌توان عبارت $x+2$ را از صورت و مخرج حذف نموده و آن را به شکل $\frac{x+3}{2}$ نوشت. توجه‌کردن به این موضوع می‌تواند باعث اشتباه در

محاسبات شود. در زیر نمونه‌ای از یک نتیجه‌گیری غلط در اثر عدم توجه به این موضوع را مشاهده می‌کنید:

$$x = 5 \xrightarrow{\text{از دو طرف ۲۵ واحد کم می‌کنیم}} x^2 - 25 = 5x - 25 \xrightarrow{\text{دو طرف را در } x \text{ ضرب می‌کنیم}} x^2 = 5x$$

$$\xrightarrow{\text{از } x-5 \text{ صورت و مخرج کسرها خط می‌زنیم (فقط می‌توان یک عبارت مخالف صفر را از صورت و مخرج ساده کرد)}} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{5x - 25}{x - 5} \xrightarrow{\text{دو طرف را بر } x-5 \text{ تقسیم می‌کنیم (} x-5 \text{ برابر صفر است و ما اجازه تقسیم بر آن را نداریم)}} \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = \frac{5(x-5)}{x-5} \rightarrow x+5 = 5$$

$$(x=5 \rightarrow 10=5)$$

نتیجه‌ی غلط:

تنها وقتی می‌توان عبارتی مشترک را از صورت و مخرج یک کسر حذف نمود که آن عبارت مشترک در صورت و مخرج **ضرب** شده باشد؛

به طور مثال می‌توان در عبارت $\frac{y(x+4)}{x+4}$ با شرط $x \neq -4$ از صورت و مخرج $x+4$ را حذف نمود و آن را برابر y نوشت. این در حالی است که

نمی‌توان عبارت $\frac{y+x+4}{x+4}$ را به صورت بالا ساده کرد. به بیان دیگر، ساده‌سازی عبارت $\frac{y+x+4}{x+4}$ به y کاملاً غلط است.

جمع و تفریق عبارت‌های گویا برای جمع و تفریق دو عدد کسری مانند $\frac{1}{18}$ و $\frac{1}{12}$ باید ابتدا مخرج مشترک گرفت. از آنجایی که تجزیه‌ی اعداد ۱۲ و ۱۸ به صورت $12 = 2^2 \times 3$ و $18 = 2 \times 3^2$ است، لذا (ک.م.م) آن‌ها برابر $2^2 \times 3^2 = 36$ خواهد بود. حال اگر به جای دو عدد کسری، دو عبارت جبری گویا داشته باشیم، برای محاسبه‌ی مخرج مشترک باید ابتدا مخرج هر یک از کسرها را تا جایی که ممکن است تجزیه کنیم، سپس «حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارت‌های غیرمشترک» را به عنوان مخرج مشترک بنویسیم؛ به طور مثال چنانچه مخرج یک کسر $(x-1)(x+1)$ و مخرج دیگری $(x+1)^2$ باشد، مخرج مشترک $\underbrace{(x+1)^2}_{\text{غیرمشترک}} \underbrace{(x-1)}_{\text{مشترک}}$ خواهد بود. عبارت حاصل را اصطلاحاً «مضرب مشترک با کوچک‌ترین توان» می‌نامیم.

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-1}$$

حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

$$x^2 - x = x(x-1), \quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

ابتدا مخرج هر یک از کسرها را تجزیه می‌کنیم:

$x-1$ مشترک بین دو عبارت و x و $x+1$ غیرمشترک هستند. لذا داریم:

$$\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1 \times (x+1)}{x(x-1)(x+1)} + \frac{1(x)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+1+x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x-1)(x+1)}$$

چون مخرج در $(x+1)$ ضرب می‌شود صورت نیز در آن ضرب می‌شود

چون مخرج در x ضرب می‌شود صورت نیز در آن ضرب می‌شود

سوالات

۱) تمام گزاره‌های زیر غلط هستند. آن‌ها را با استدلال مناسب اصلاح کنید.

الف) عبارت $x^2 + 5$ گویا نیست، زیرا عبارت گویا حتماً باید کسری باشد.

استدلال: عبارت $x^2 + 5$ گویاست و می‌توان آن را به شکل کسر $\frac{x^2+5}{1}$ نوشت.

ب) عبارت $\frac{2x-\sqrt{5}}{\sqrt{3x^2+6}}$ یک عبارت غیرگویاست؛ زیرا اعداد گنگ $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ در آن به کار رفته است.

استدلال: عبارت بالا یک عبارت گویا محسوب می‌شود؛ زیرا شرط لازم برای گویابودن عبارت و به بیان دیگر یک جمله‌ای یا چندجمله‌ای بودن صورت و مخرج عبارت این است که $\frac{\text{مخرج}}{\text{صورت}}$ زیر رادیکال نباشند.

پ) عبارت $\sqrt{x^2}$ گویاست، زیرا حاصل $\sqrt{x^2}$ برابر x می‌باشد.

استدلال: عبارت $\sqrt{x^2}$ گویا نیست زیرا حاصل $\sqrt{x^2}$ برابر x نیست بلکه برابر $|x|$ است.

ت) هیچ‌یک از اعداد ۲ و $\sqrt{5}$ یک عبارت گویا محسوب نمی‌شوند.

استدلال: هر عدد $\frac{\text{عدد}}{1}$ چه گویا چه گنگ یک عبارت گویا محسوب می‌شود.

۲) هر یک از عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{2t+1}{2t-1}$

ب) $\frac{x^2+3}{x}$

ب $\frac{x^2 + 7x}{(x-1)(x-2)}$

ت $\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x^2+x}$

ث $\frac{2x-4}{x^2-16}$

ج $\frac{2x-4}{x^2+16}$

چ $\frac{x+\sqrt{5}y}{9y^2-x^2}$

ح $\frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$

۳ برای تشخیص این که هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده اند، جاهای خالی را پر کنید.

الف $\frac{2x-4}{x^2+8x+15}$

باید ابتدا مخرج را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه کنیم، سپس باید به دنبال دو عدد بگردیم که جمعشان برابر ۸ و ضربشان برابر — شود؛ یعنی ۳ و —، پس شکل تجزیه شده ی مخرج به صورت $(x+3)(x+\dots\dots\dots)$ خواهد بود و از این جا نتیجه می گیریم که به ازای $x = -3$ و $x = \dots\dots\dots$ تعریف نشده خواهد بود.

ب $\frac{x^2+5}{x^2+3x-10}$

برای تجزیه ی $x^2+3x-10$ به کمک اتحاد جمله مشترک به دنبال دو عدد می گردیم که جمعشان برابر — و ضربشان -10 باشد؛ یعنی — و -2 ، پس تجزیه ی آن به صورت $(x-2)(x+\dots\dots\dots)$ بوده و در نتیجه کسر داده شده به ازای $x=2$ و $x = \dots\dots\dots$ تعریف نشده خواهد بود.

پ $\frac{x^2-x+1}{4x^2+16x+15}$

اگر مخرج را به صورت $(2x)^2+8(2x)+15$ بنویسیم، درمی یابیم که برای تجزیه ی آن باید از اتحاد جمله مشترک استفاده کنیم. پس باید به دنبال دو عدد بگردیم که جمعشان برابر ۸ و ضربشان — است؛ یعنی ۳ و — پس شکل تجزیه شده ی مخرج به صورت $(2x+3)(2x+\dots\dots\dots)$ خواهد بود. مخرج را برابر صفر قرار می دهیم.

$$(2x+3)(2x+\dots\dots\dots) = 0 \Rightarrow \underbrace{2x = -3}_{x = \frac{-3}{2}} \text{ یا } \underbrace{2x = \dots\dots\dots}_{x = \dots\dots\dots}$$

ت $\frac{2x+5x^2}{9x^2-18x+8}$

$$9x^2-18x+8 = (3x)^2 - (\dots\dots\dots) \times 3x + 8 = (3x - \dots\dots\dots)(3x - \dots\dots\dots) = 0 \Rightarrow \underbrace{3x = \dots\dots\dots}_{x = \dots\dots\dots} \text{ یا } \underbrace{3x = \dots\dots\dots}_{x = \dots\dots\dots} \Rightarrow x = \dots\dots\dots \text{ یا } x = \dots\dots\dots$$

ث $\frac{x^2+5x+12}{x^2-81x^2}$



$$x^4 - 81x^2 = x^2(\dots\dots\dots) = x^2(\dots\dots\dots)(x^2 + 9) = x^2(\dots\dots\dots - 3)(\dots\dots\dots + \dots\dots\dots)(x^2 + 9) = 0$$

$$\Rightarrow x = \dots\dots\dots \text{ یا } x = \dots\dots\dots \text{ یا } x = \dots\dots\dots$$

ج $\frac{b^2c^4 + ab^2c^2}{a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2}$

$$a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2 = a^2b^2c^2(c - \dots\dots\dots) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0 \text{ یا } \dots\dots\dots = 0 \text{ یا } \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

۴ صحیح یا غلط بودن هر یک از گزاره‌های زیر را با علامت‌های و مشخص کنید.

الف عبارت $\frac{x}{x(x-2)}$ به ازای $x=0$ و $x=2$ تعریف نشده است.

ب از آنجایی که در عبارت $\frac{x}{x(x-2)}$ جمله‌ی x از صورت و مخرج ساده می‌شود، پس این عبارت فقط به ازای $x=2$ تعریف نشده است.

۵ کسرهای زیر را ساده کنید.

الف $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

ب $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 8}$

ب $\frac{25x^2 - 25x - 6}{25x^2 - 1}$

ب $\frac{x^2 - 27}{x^2 - x - 6}$

ث $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 + 15x^2 + 75x + 125}$

ج $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x^2 + 3x - 1}$

ج $\frac{4x^2 - 49}{4x^2 + 8x - 21}$

ح $\frac{9x^2 - 4}{27x^2 - 8}$

خ $\frac{x^2 + 9x - 22}{x^2 - 6x^2 + 12x - 8}$

د $\frac{2x^2(x^2-1)^2 - x(x^2-1)^2}{x^5 + x^2}$

۶ در هر یک از قسمت‌های زیر «مضرب‌مشترب با کوچک‌ترین توان» را بیابید.

الف $x^4 + 10x^3 + 21x^2, x^3 + 6x^2 - 7x$

ب $x^3 - y^3, x^2 - y^2$

ب $x^4 - y^4, x^2 + y^2$

ت $x^2 + 3\sqrt{3}x^2 + 9x + 3\sqrt{3}, x^2 - 3$

۷ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف $\frac{2}{\underbrace{x^2 + x^2}_{(\dots)(\dots+\dots)}} + \frac{x}{\underbrace{x^2 - x^2}_{(\dots)(\dots-\dots)}} = \frac{2(\dots-\dots) + x(\dots+\dots)}{x^2(\dots+\dots)(\dots-\dots)} = \frac{x^2 + \dots x - \dots}{x^2(\dots+\dots)(\dots-\dots)}$

ب $\frac{x+2}{\underbrace{x^2+x}_{x(x+1)}} - \frac{x-1}{\underbrace{x^2-2x}_{x(\dots-\dots)}} = \frac{(x+2)(\dots-\dots) - (x-1)(\dots+\dots)}{x(\dots+\dots)(\dots-\dots)} = \frac{\dots}{x(\dots+\dots)(\dots-\dots)}$

پ $\frac{1}{x^2+x} - \frac{2}{x} + \frac{3x+4}{x+1}$

ت $\frac{x^2-3}{x+5} + 2x + 10$

۸ در محاسبات زیر صحیح یا غلط بودن هر مرحله را با علامت‌های  یا  مشخص کنید.

$$x = 3 \xrightarrow{\quad} x^2 = 3x \xrightarrow{\quad} x^2 - 9 = 3x - 9 \xrightarrow{\quad} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \frac{3(x-3)}{x-3} \xrightarrow{\quad} x+3=3 \xrightarrow{x=3} 6=3$$

(کنکور ۹۴)

۹ حاصل عبارت $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \left(\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x-2} \right)$ کدام است؟

۲x 

۲x - 1 

۲x - 2 

۲x - 4 

(کنکور ۹۲)

۱۰ خلاصه‌شده‌ی $(x + \frac{2}{x-3}) \times (1 - \frac{1}{x-2})$ کدام است؟

۲x + 1 

x + 2 

x + 1 

x - 1 

(کنکور ۹۰)

۱۱ خلاصه‌شده‌ی عبارت $(1 - \frac{6}{x+2}) (\frac{5x-2}{x-4} + x)$ کدام است؟

x + 2 

x + 1 

x - 1 

x - 2 

(کنکور ۸۹)

۱۲ خلاصه‌شده‌ی عبارت $(x - 5 + \frac{6}{x+2}) \div (1 - \frac{1}{x+2})$ کدام است؟

x - 6 

x - 4 

x - 2 

x + 3 