

فهرست

فصل اول: جبر و معادله

۸	درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۵	درس دوم: معادلات درجه دوم
۲۶	درس سوم: معادلات گویا و گنگ
۳۰	درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۴۱	درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

فصل دوم: تابع

۵۴	درس اول: آشنایی بیشتر با تابع
۵۹	درس دوم: انواع تابع
۷۰	درس سوم: وارون تابع
۷۵	درس چهارم: اعمال روی توابع

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی

۸۶	درس اول: تابع نمایی
۹۲	درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم
۹۸	درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

فصل چهارم: مثلثات

۱۰۹	درس اول: رادیان
۱۱۵	درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا
۱۲۰	درس سوم: توابع مثلثاتی
۱۲۵	درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

فصل پنجم: حد و پیوستگی

۱۳۲	درس اول: مفهوم حد و فرایندهای حدی
۱۳۶	درس دوم: حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)
۱۴۱	درس سوم: قضایای حد
۱۴۴	درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$)
۱۴۹	درس پنجم: پیوستگی

فصل



جبر و معادله

درس

مجموع جمله‌های حسابی و هندسی

سال گذشته با مفهوم دنباله و به ویژه دنباله حسابی و هندسی و چگونگی محاسبه جمله عمومی آن‌ها آشنا شدیم. حال می‌خواهیم روابطی برای محاسبه مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی و هندسی معرفی کنیم.

اعداد طبیعی متوالی ۱ تا n خود یک دنباله عددی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $d = 1$ هستند. برای محاسبه مجموع آن‌ها داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

مثال

در حالت کلی یک دنباله عددی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d را در نظر بگیرید:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}, \dots$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

مجموع n جمله اول این دنباله حسابی برابر است با:

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2 \times 1 + 9 \times 1] = 55$$

به طور مثال مجموع ۱۰ جمله اول دنباله عددی ۱، ۲، ۳، ... برابر است با:

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots, \underbrace{a_1 q^{n-1}}_{a_n}, \dots$$

یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q در نظر بگیرید:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مجموع n جمله اول این دنباله هندسی برابر است با:

$$S_5 = \frac{3 \times (1-2^5)}{1-2} = 93$$

به طور مثال مجموع ۵ جمله اول دنباله هندسی ۳، ۶، ۱۲، ... برابر است با:

پرسش‌ها



۱) درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با علامت‌های ☒ و ☐ تعیین کنید.

(الف) ☐ مجموع جملات $1 + 2 + 3 + \dots + 20$ برابر است با $\frac{20 \times 19}{2}$.

(ب) ☐ تعداد جملات دنباله حسابی ۳، ۵، ۷، ...، ۹۹ برابر ۴۹ است.

(پ) ☐ جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d از رابطه $a_n = a_1 + nd$ قابل محاسبه است.

(ت) ☐ جمله عمومی برخی از دنباله‌های حسابی را می‌توان به شکل یک عبارت درجه اول بر حسب n نوشت.

(ث) ☐ جمله دوازدهم دنباله حسابی ۱، ۴، ۹، ... برابر ۵۴ است.

(ج) ☐ برای محاسبه مجموع جملات یک دنباله حسابی می‌توانیم تعداد جملات را در میانگین جمله اول و آخر ضرب کنیم.



۲ دنباله حسابی $5, 0, -5, \dots$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار جمله اول (a_1) و هم‌چنین قدرنسبت دنباله (d) را بیابید.

$$a_1 = \dots$$

$$d = a_2 - a_1 = (\dots) - (\dots) = \dots$$

ب) جمله عمومی دنباله (a_n) را حساب کنید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = \dots$$

پ) مجموع n جمله اول دنباله را به کمک یکی از روابط $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ یا $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ حساب کنید.

ت) به کمک نتیجه قسمت (پ) مجموع چهل جمله اول دنباله را حساب کنید.

۳ مجموع بیست جمله اول هر یک از دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

الف) $-5, -3, -1, \dots$

ب) $-7, -2, 3, \dots$

پ) $2, 6, 10, \dots$

ت) $3, 9, 15, \dots$

۴ مجموع همه عددهای طبیعی دورقمی مضرب ۵ را به دست آورید.

۵ مجموع همه عددهای طبیعی سه‌رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

۶ در هر یک از دنباله‌های حسابی داده‌شده در بخش‌های (الف) و (ب) حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟

(الف) ۳, ۹, ۱۵, ...

(ب) ۲, ۶, ۱۰, ...

۷ با کامل کردن جاهای خالی، در هر یک از بخش‌های زیر تعیین کنید:

(الف) در دنباله حسابی $-۳, ۱, ۵, \dots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۹ بیشتر شود.

$$S_n > \dots \Rightarrow \frac{n}{2} (2a_1 + \dots) > \dots \Rightarrow \frac{\dots}{2} \times (2 \times (\dots) + (\dots) \times 4) > \dots \Rightarrow (\dots) \times n > 39 \Rightarrow (\dots)n^2 - (\dots)n - 39 > 0$$

ابتدا به حل معادله $(\dots)n^2 - (\dots)n - 39 = 0$ به روش دلتا می‌پردازیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \dots$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{\dots}}{\dots} = \dots \text{ یا } \dots$$

n	$-\infty$	$(\dots)$	$(\dots)$	$+\infty$
$(\dots)n^2 - (\dots)n - 39$	$\dots$	$\circ$	$-$	$\circ$

حال به کمک جدول تعیین علامت داریم:

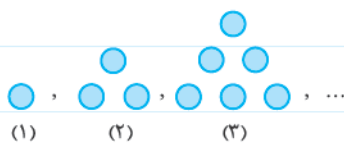
$$n \geq \dots$$

با توجه به طبیعی بودن n نتیجه می‌شود که $n > \dots$ ، یعنی:

(ب) در دنباله حسابی $-۱, ۲, ۵, \dots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟

(نهایی)

۸ دنباله زیر به دنباله مثلثی معروف است:



(الف) تعداد توپ‌های شکل nام را بر حسب n بیابید.

(ب) به کمک نتیجه قسمت (الف)، تعداد توپ‌های هر یک از شکل‌های هفتم، هشتم و نهم را حساب کنید و تعیین کنید مقدار کدام یک از آنها

برابر یک مربع کامل می‌شود.



۹ پیمان روز اول سال جدید ۲۰۰۰ تومان پس انداز می کند و با خودش قرار می گذارد که هر روز ۳۰۰۰ تومان نسبت به روز قبل بیشتر پس انداز کند. پس از گذشت چند روز، پس انداز پیمان به ۵۷۰۰۰ تومان می رسد؟

۱۰ برای این که تمام افراد یک گروه ۱۱ نفره دوبه دو با یکدیگر دست بدهند، عمل دست دادن چندبار باید انجام شود؟

۱۱ نقاط وسط اضلاع یک هشت ضلعی منتظم را مشخص کرده همه آن ها را به یکدیگر وصل می کنیم. تعداد کل پاره خط های حاصل از وصل کردن نقاط وسط اضلاع برابر چه عددی است؟

۱۲ به کمک رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ ، نشان دهید می توان مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به صورت یک چند جمله ای درجه دوم، بر حسب n نمایش داد. در ضمن بگویید در این نمایش ضریب n^2 نشان دهنده چیست؟

۱۳ درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با علامت های ☒ و ☐ تعیین کنید.

(الف) مجموع اعداد طبیعی متوالی ۱ تا n برابر است با $\frac{n(n-1)}{2}$. ☐

(ب) جمله n ام دنباله حسابی (a_n) به شکل یک چند جمله ای درجه دوم بر حسب n نوشته می شود. ☐

(پ) مجموع n جمله اول دنباله حسابی (S_n) به شکل یک چند جمله ای درجه دوم بر حسب n نوشته می شود. ☐

(ت) در یک دنباله حسابی، اگر مجموع n جمله اول با $S_n = 2n^2 - 5n$ مشخص شود، می توان نتیجه گرفت که قدرنسبت دنباله برابر ۵- است. ☐

۱۴ در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 3n^2 - 2n$ قابل محاسبه است.

(الف) مجموع پنج جمله اول دنباله را بیابید.

(ب) مجموع چهار جمله اول دنباله را بیابید.

(پ) مقدار جمله پنجم دنباله را حساب کنید.

ت) با توجه به نتیجه قسمت «پ» روشی برای محاسبه جمله n ام پیشنهاد کنید و رابطه جمله n ام (a_n) را پیدا کنید.

۱۵ جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

در یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d ، جملات ردیف فرد، خود تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول و قدرنسبت

می دهند. هم چنین جملات ردیف زوج خود تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول و قدرنسبت می دهند.

۱۶ در چهل جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات ردیف زوج برابر 120 و مجموع جملات ردیف فرد برابر 90 می باشد.

الف) قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله اول دنباله و هم چنین رابطه جمله n ام دنباله را تعیین کنید.

۱۷ در یک دنباله حسابی، مجموع پنج جمله دوم از مجموع پنج جمله اول، 10 واحد بیشتر است. قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

$$\underbrace{(a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10})}_{\text{مجموع پنج جمله دوم}} - \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)}_{\text{مجموع پنج جمله اول}} = 10 \Rightarrow (a_6 - a_1) + (a_7 - a_2) + \dots + (a_{10} - a_5) = \dots \Rightarrow d = \dots$$

۱۸ در دنباله حسابی $\{a_n\}$ با جملات $3, 7, 11, \dots$ مطلوب است محاسبه:

الف) حاصل عبارت $A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50}$

ب) حاصل عبارت $B = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{49}$

پ) حاصل عبارت $C = a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{48}$

۱۹ مجموع 8 جمله اول هر یک از دنباله های هندسی زیر را به دست آورید.

الف) $1, 2, 4, \dots$



ب) $9, 3, 1, \dots$

پ) $\frac{3}{4}, -1, \frac{2}{3}, \dots$

ت) $-5, 2, -\frac{4}{5}, \dots$

ث) $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$

ج) $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \dots$

چ) $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \dots$

ح) $\sqrt{3} + 1, 2, 2\sqrt{3} - 2, \dots$

۲۰ مجموع جملات هر یک از دنباله‌های هندسی زیر را حساب کنید و نشان دهید عدد به دست آمده در هر بخش بیشتر از ۲ میلیون خواهد شد.
(راهنمایی: در محاسبات خود می‌توانید از نامساوی $2^{10} = 1024 > 1000$ استفاده کنید.)

الف) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{20}$

ب) $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}$

(راهنمایی: در محاسبات خود می‌توانید از نامساوی $3^7 = 2187 > 2000$ استفاده کنید.)

۲۱ توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی رها می‌شود، پس از زمین خوردن به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم. تعیین کنید توپ مورد نظر حداقل چند مرتبه به زمین برخورد کند تا ارتفاع بالا آمده نسبت به ارتفاع اولیه ۹۹٪ کاهش یابد؟

۲۲ یک مثلث با محیط P در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچک‌تر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچک‌تر انجام دهید. چنانچه مثلث با محیط P را مثلث مرحله (۱) در نظر بگیریم، پس از مرحله چندم مجموع محیط‌های مثلث‌های موجود، حداقل ۹۵٪ نسبت به مثلث با محیط P افزایش می‌یابد؟



۲۳ در تمرین قبل اگر مساحت مثلث مرحله اول را S در نظر بگیریم، پس از مرحله چندم، مساحت‌های مثلث‌های موجود حداقل ۳۲٪ نسبت به مثلث مرحله (۱) افزایش می‌یابد؟

درس

معادلات درجه دوم



سال گذشته با معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) و روش های حل آن آشنا شدیم. براساس روش کلی یک معادله درجه دوم حداکثر دو

جواب دارد: $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

برای محاسبه مجموع و حاصل ضرب ریشه (صفر)های معادله درجه دوم نیازی به محاسبه هر یک از ریشه ها نیست. اگر مجموع ریشه ها را با S و ضرب ریشه ها را با P نمایش دهیم، داریم:

$$S = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

به طور مثال در معادله درجه دوم $3x^2 - 5x - 2 = 0$ ، اگر α و β ریشه های معادله باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{5}{3}$$

$$P = \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

تشکیل معادله درجه دوم

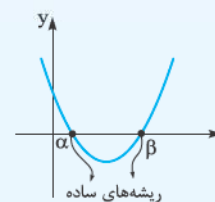
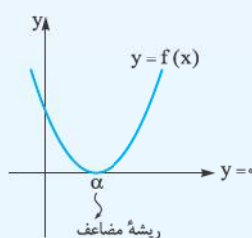
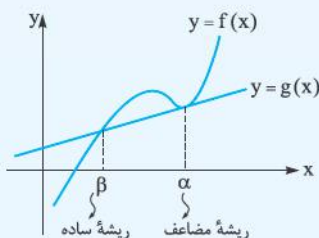
اگر مجموع (S) و حاصل ضرب (P) ریشه های یک معادله درجه دوم را داشته باشیم، آن معادله به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود. به طور مثال معادله درجه دومی که جمع ریشه هایش ۵ و ضرب ریشه هایش ۲ باشد، به شکل $x^2 - 5x + 2 = 0$ خواهد بود.

روش هندسی

منظور از حل معادله $f(x) = g(x)$ به روش هندسی، این است که نمودار هر یک از توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم تا طول نقاط برخورد دو نمودار، ریشه های معادله را به ما نشان دهد. این روش معمولاً محل تقریبی ریشه ها را مشخص می کند و از این رو بیشتر برای محاسبه تعداد ریشه های معادله کاربرد دارد.

بیشتر بدانیم

در حل معادله $f(x) = g(x)$ به روش هندسی، اگر نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در نقطه ای به طول α بر یکدیگر مماس باشند، $x = \alpha$ را اصطلاحاً ریشه مضاعف معادله می نامیم؛ اما اگر در نقطه ای به طول β یکدیگر را قطع کنند، $x = \beta$ ریشه ساده معادله خواهد بود. به عنوان نمونه به شکل های زیر توجه کنید:



پرسش‌ها



۲۴ مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای:

(الف) $g(x) = 5x^2 - 5x + m - 7$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد.

(ب) $h(x) = 2x^3 - mx^2 + 2x + 1$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد.

۲۵ مقادیر m و n را چنان به دست آورید که چندجمله‌ای $x^2 + mx + n$ بر $(x - 2)$ و $(x + 1)$ بخش پذیر باشد.

۲۶ معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

(ب) $3x^3 - 2x^2 - x = 0$

(پ) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(ت) $x^4 - 12x^2 + 2 = 0$

(ث) $(2 - x^2)^2 - 5(2 - x^2) = 14$

(ج) $(\frac{x^2}{2} - 1)^2 + (\frac{x^2}{2} - 1) - 2 = 0$

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$(x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0 \quad (\text{ح})$$

۲۷ اگر $x = -2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

۲۸ مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + kx - 6$ برابر ۱ باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را بیابید.

۲۹ جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

برای محاسبه بیشترین یا کمترین مقدار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ کافی است، طول رأس سهمی را از رابطه $x_s = \dots\dots\dots$ حساب کرده و سپس آن را در معادله سهمی جای گذاری کنیم تا مقدار عرض رأس سهمی به دست آید. بدیهی است اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد، عرض رأس سهمی نشان دهنده $\dots\dots\dots$ مقدار تابع خواهد بود.

۳۰ کمترین مقدار هر یک از تابع‌های بخش‌های (الف) و (ب) و بیشترین مقدار هر یک از تابع‌های بخش‌های (پ) و (ت) را بیابید.

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 1 \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 3 \quad (\text{ب})$$

$$h(x) = -x^2 + 4x + 1 \quad (\text{پ})$$

$$k(x) = -\frac{x^2}{2} + 20x \quad (\text{ت})$$

۳۱ درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را به کمک علامت‌های ☒ و ☐ مشخص کنید.

☐ الف) منظور از صفرهای تابع $f(x)$ ، محل برخورد نمودار تابع $f(x)$ با محور عرض‌هاست.

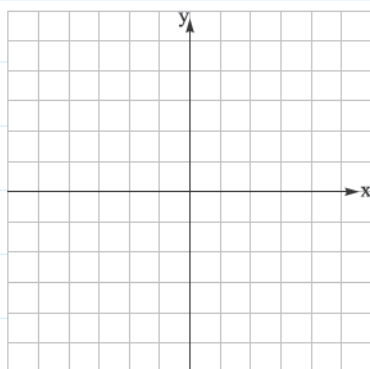
☐ ب) چنانچه سهمی $y = f(x)$ در یک نقطه بر محور x مماس باشد، آن‌گاه معادله $f(x) = 0$ تنها یک ریشه دارد.

☐ پ) طول رأس یک سهمی برابر مجموع صفرهای آن است.

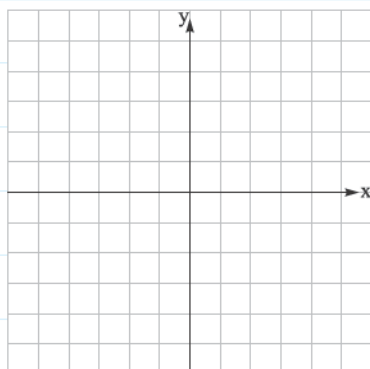
☐ ت) اگر یک سهمی محور x را در دو نقطه با طول‌های ۵ و -۱ قطع کند، طول رأس سهمی برابر ۲ خواهد بود.

۳۲ نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید و هم‌چنین تعداد صفرهای هر یک از آن‌ها را بیابید.

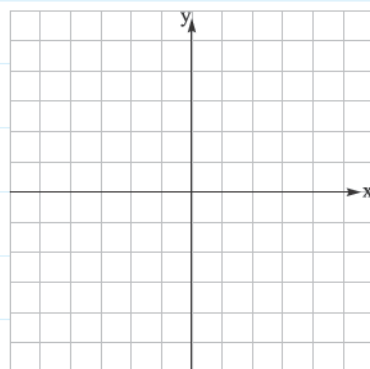
الف) $f(x) = 3 - x^2$

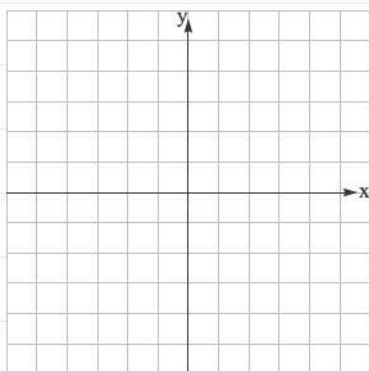


ب) $g(x) = x^2 - 4x + 4$

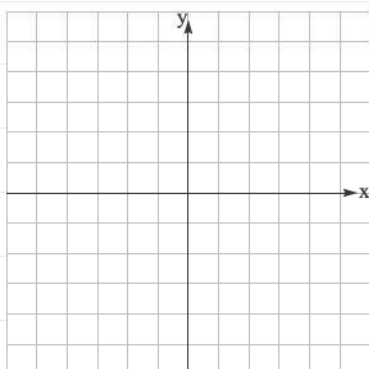


پ) $h(x) = x^2 - 3x - 10$

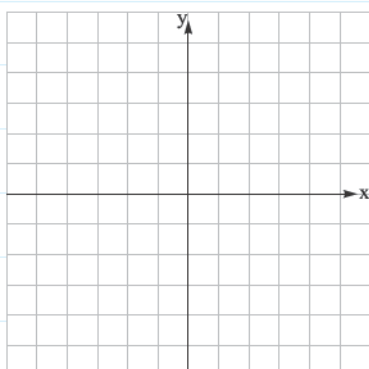




ت) $i(x) = 2x^2 + 3$

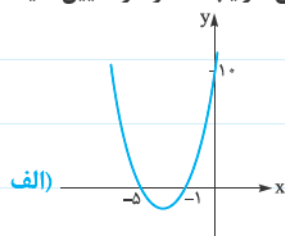


ث) $k(x) = -x^2 - 2$



ج) $l(x) = x^2 - 6x + 10$

🔗 در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. با پر کردن جاهای خالی ضرایب a ، b و c را تعیین کنید.

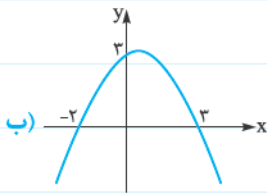


از آنجایی که و صفرهای سهمی بالا هستند، پس ضابطه سهمی به شکل $y = a(x \dots)(x \dots)$ است. برای پیدا کردن a نیز کافی است مختصات نقطه $(0, 10)$ که روی سهمی قرار دارد را در معادله سهمی جای گذاری کنیم:

$$10 = a \times (\dots) \times (\dots) \Rightarrow a = \dots$$

$$y = (\dots)x^2 + (\dots)x + (\dots)$$

پس معادله سهمی برابر است با:



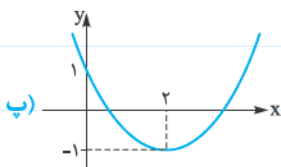
از آن جایی که و صفرهای سهمی بالا هستند، پس ضابطه سهمی به شکل $y = a(x - \dots)(x - \dots)$ است. برای پیدا کردن a نیز کافی است مختصات نقطه $(0, \dots)$ که روی سهمی قرار دارد را در معادله سهمی جای گذاری کنیم:

$$\dots \Rightarrow a = \dots$$

$$y = \dots$$

پس معادله سهمی برابر است با:

$$c = \dots$$



از آن جایی که سهمی بالا محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده است، پس:

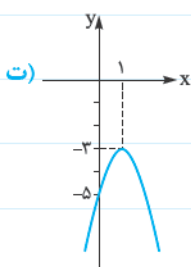
$$x_s = \frac{-b}{a} = 2 \Rightarrow \boxed{b = (\dots)a} \quad (1)$$

چون طول رأس سهمی برابر ۲ است، داریم:

از طرفی عرض رأس سهمی نیز برابر ۱- است پس از جای گذاری $x_s = 2$ در معادله سهمی داریم:

$$y_s = a \times 2^2 + b \times 2 + \dots = -1 \Rightarrow \boxed{\dots} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{از حل معادلات (۱) و (۲)}} a = \dots, b = \dots$$



از آن جایی که سهمی بالا محور y ها را در نقطه‌ای به عرض قطع کرده است، پس:

چون طول رأس سهمی برابر است داریم:

$$x_s = \frac{\dots}{\dots} = \dots \Rightarrow \boxed{b = (\dots)a} \quad (1)$$

از طرفی عرض رأس سهمی نیز برابر است. پس از جای گذاری $x_s = \dots$ در معادله سهمی داریم:

$$y_s = \dots \Rightarrow \boxed{\dots} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{از حل معادلات (۱) و (۲)}} a = \dots, b = \dots$$