

مقدمه ناشر

قطعاً بیشترین علامت‌هایی که در درس‌های ریاضی (به خصوص حسابان) دیده می‌شد ایناست: $=$ ، $\neq$ ، $>$ و $<$. یه جورایی می‌شه گفت ریاضی بیشتر دنبال اینه که بگه چی با چی مساویه، چی با چی مساوی نیست. تساوی‌های مطلق ریاضی، دقیق و براساس منطق جبریه و مو لای درزش نمی‌ره. به نظرم یکی از چیزایی که ریاضی رو جذاب کرده، همینیه که برابریش واقعاً برابریه! اما تساوی بازی‌ها، تساوی حقوق آدم‌ها، تساوی همگان در برابر قانون و ...!

برابری‌هایی که خیلی وقتا برابر نیستند! مثلاً می‌بینید که دو تیم با هم مساوی می‌کنن ولی یکیشون حذف می‌شه. اون یکی می‌ره مرحله بعد. می‌گن بازی با تساوی به پایان رسید ولی به دلیل گل زده بیشتر در خانه حریف، فلان تیم می‌ره مرحله بعد! خب پس در واقع منظورمون اینه که این بازی مساوی، مساوی نشده! داوری و ناداوری و سلیقه شخصی و ... رو هم اضافه کنید به این داستان. از این مثال تو بازی‌ها و مسابقات فراوانه. اوضاع توی تساوی آدم‌ها و حق و حقوقشون خیلی پیچیده‌تر و عجیب‌تره؛ به قول جورج اورول در کتاب قلعه حیوانات (که کتابی بس جذاب است):

all animals are equal but some animals are more equal than others!

بی خیال تا گنج‌تر نشدم بریم سر همون ریاضی خودمون که لااقل راست و حسینی مساویش مساویه، نامساویش هم نامساوی! ممنونم از مؤلفای بی‌نظیرمون که با نوشتن این کتاب فرصتی برای موفقیت بیشتر علاقمندان به ریاضی فراهم کردند.

ممنونم از آقای محسن فراهانی عزیز که برای آماده‌شدن این کتاب واقعاً جنگید.

ممنونم از خانم زهرا خردمند به خاطر زحماتی که برای این کتاب کشیدند.

ممنونم از ویراستاران خوبمون که می‌دونم تمام تلاششون رو کردن تا کتاب بی‌غلط بشه.

ممنونم از تیم منسجم و منظم تولیدمون که در خاورمیانه هم‌تا ندارن!

ما دوستتون داریم < آن‌چه شما فکر می‌کنید

تقدیم به همه دانش آموزان و معلم های خوب ایران

مقدمه مولفان

به کتاب حسابان ۲ خیلی سبز خوش آمدید.

نحوه استفاده از کتاب:

(الف) اگر به مدرسه یا کلاس می روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمه محبت و موفقیت است»، پس از معلمان در مورد ترتیب خواندن درس نامه ها و حل کردن تست ها و بررسی پاسخ ها، کمک بگیرید.

(ب) اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می کنید توصیه ما این است که: **(۱)** اول درس نامه را خوب و کامل بخوانید. **(۲)** چیزهایی که از درس نامه مهم است مشخص کنید یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. **(۳)** یک بار دیگر فقط تست های درس نامه را حل کنید. **(۴)** بروید سراغ تست ها، پاسخ تست ها را اول از پاسخ نامه کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ ها را بخوانید. خیلی از وقت ها خواندن پاسخ تست هایی که درست حل کرده اید هم بسیار کمکتان می کند.

ساختار کتاب:

(۱) فصل های کتاب، به ترتیب فصل های حسابان ۲ (دوازدهم) آمده اند. در اول هر فصل مباحث مهم و پرسؤال و مباحث پیش نیاز را آورده ایم. حواستان باشد که وقتی می گوئیم پیش نیاز منظورمان این است که بهتر است روش های اصلی و مطالب بنیادی مباحث پیش نیاز را قبل از خواندن فصل مورد نظر بلد باشید. ممکن است لازم باشد مباحث پیش نیاز را از مطالب کتاب های سال های پیش یاد بگیرید.

(۲) در تست های هر درس، کنار تست های عادی یک آیکن ☹️ گذاشته ایم. قرار است شما بعد از حل تست ها و بررسی پاسخ نامه این آیکن ها را به 😊 یا 😐 یا ☹️ تبدیل کنید:

😊 یعنی تست آسان 😐 یعنی تست متوسط ☹️ یعنی تست دشوار

این نمادگذاری باعث می شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید بتوانید تصمیم بگیرید که از کدام تست ها برای دوره استفاده کنید و روی سؤال ها با نماد مورد نظر تمرکز کنید تا خوب یادشان بگیرید. (البته برای این ها از هر نماد دیگری هم که خودتان می خواهید می توانید استفاده کنید چون هدف اصلی این است که بتوانید بعداً به این سؤال ها برگردید) برای بعضی از تست ها هم نماد Ⓢ داریم که نشان دهنده تست های دشوار است. این تست ها مختص دانش آموزان علاقه مند است و قرار نیست همه دانش آموزان به این تست ها پاسخ دهند.

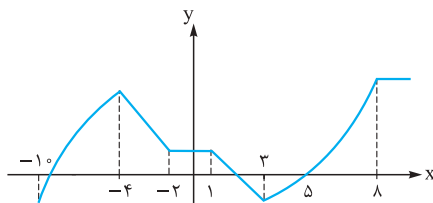
(۳) نماد کنار بعضی از تست ها به رنگ آبی (Ⓜ) آمده است. این ها تست های نشان دار هستند برای دوره سریع فصل و دوتا کاربرد دارند: **(الف)** دوره و جمع بندی فصل **(ب)** اگر قبل از یک آزمون وقت خیلی کمی دارید می توانید فقط این تست ها را حل کنید. ما معتقدیم که جمع بندی واقعی با این روش انجام می شود نه با جدول، نمودار و ...

(۴) در تست ها کامنت هایی به رنگ آبی می بینید. این ها صرفاً برای یک یادآوری ساده مطالب درس نامه یا یک اشاره کوچک به استراتژی حل تست است. کامنت ها را با فونت ریز و کم رنگ آورده ایم که اگر نخواستید برای بار اول حل تست ها از رویشان رد شوید.

فهرست

درس نامه	تست		
۸	۳۳	درس ۱: تبدیل نمودارها	فصل اول تابع
۱۶	۴۰	درس ۲: توابع چندجمله‌ای	
۱۹	۴۲	درس ۳: توابع یکنوا	
۲۶	۴۶	درس ۴: تقسیم	
۵۲	۷۵	درس ۱: توابع متناوب	فصل دوم مثلثات
۵۵	۷۷	درس ۲: نمودار توابع سینوسی و کسینوسی	
۵۹	۸۱	درس ۳: تانژانت	
۶۶	۸۶	درس ۴: معادله مثلثاتی	
۹۳	۱۱۲	درس ۱: حد بی نهایت	فصل سوم حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت
۹۹	۱۱۶	درس ۲: حد در بی نهایت	
۱۰۵	۱۲۲	درس ۳: مجانب	
۱۲۹	۱۷۰	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق	
۱۳۴	۱۷۲	درس ۲: قواعد مشتق گیری	فصل چهارم مشتق
۱۴۱	۱۷۸	درس ۳: مشتق گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده کردن)	
۱۴۶	۱۸۱	درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی	
۱۴۹	۱۸۴	درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق گیری در حضور براکت و قدرمطلق	
۱۵۳	۱۸۶	درس ۶: پیوستگی و مشتق پذیری (در نقطه و بازه)	
۱۵۵	۱۸۸	درس ۷: نقاط مشتق ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم	
۱۶۰	۱۹۲	درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق	
۱۶۳	۱۹۴	درس ۹: مشتق تابع مرکب	
۱۶۷	۱۹۹	درس ۱۰: آهنگ تغییر	
۲۰۲	۲۳۸	درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق	فصل پنجم کاربردهای مشتق
۲۰۶	۲۴۰	درس ۲: نقطه بحرانی	
۲۱۰	۲۴۳	درس ۳: اکسترم‌های نسبی	
۲۱۶	۲۴۶	درس ۴: اکسترم‌های مطلق	
۲۱۹	۲۴۸	درس ۵: بهینه‌سازی	
۲۲۳	۲۵۲	درس ۶: تقعر و نقطه عطف	
۲۳۳	۲۵۹	درس ۷: رسم نمودار	
	۲۶۴		پاسخ‌نامه تشریحی
	۴۵۳		پاسخ‌نامه کلیدی

درس سوم توابع یکنوا



نمودار روبه‌رو را ببینید:

۱ هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، مقدار y افزایش پیدا کند (یا نمودار رو به بالا برود)، می‌گوییم تابع در آن بازه **صعودی** اکید است.

مثلاً بازه‌های $[-1, 0]$ و $[3, 8]$ در نمودار روبه‌رو.

۲ هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، مقدار y کاهش پیدا کند (یا نمودار رو به پایین برود)، می‌گوییم تابع در آن بازه **نزولی** اکید است.

مثلاً بازه‌های $[-4, -2]$ و $[1, 3]$ در نمودار بالا.

نکته اگر تابعی در بازه‌ای **صعودی** اکید یا **نزولی** اکید باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه **یکنوا** اکید است.

مثلاً نمودار رسم‌شده در بازه‌های $[-1, 0]$ ، $[-4, -2]$ ، $[1, 3]$ و $[3, 8]$ ، یکنوا اکید است.

صعودی اکید نزولی اکید نزولی اکید صعودی اکید

۳ هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، مقدار y افزایش پیدا کند یا ثابت بماند (نمودار رو به بالا یا ثابت باشد)، می‌گوییم تابع در آن بازه **صعودی** است. مثلاً بازه‌های $[-1, 0]$ و $[3, +\infty)$ در نمودار بالا.

۴ هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، مقدار y کاهش پیدا کند یا ثابت بماند (نمودار رو به پایین یا ثابت باشد)، می‌گوییم تابع در آن بازه **نزولی** است. مثلاً بازه‌های $[-4, 3]$ و $[8, +\infty)$ در نمودار بالا.

نکته اگر تابعی در بازه‌ای **صعودی** یا **نزولی** باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه **یکنوا** است.

مثلاً نمودار رسم‌شده در بازه‌های $[-1, 0]$ ، $[-4, 3]$ و $[3, +\infty)$ یکنوا است.

صعودی نزولی صعودی

اشاره ۱ در تعریف تابع صعودی، در جمله «مقدار y افزایش پیدا کند یا ثابت بماند» به کلمه «یا» دقت کنید؛ یعنی هم‌گامش اتفاق بیفتد. صعودی است. حتی اگر فقط یک خط افقی باشد. (برای تابع نزولی، عکس همین جمله)

۵ اگر در بازه‌ای، نمودارمان یک خط افقی باشد، تابع در آن بازه ثابت است. مثلاً بازه‌های $[-2, 1]$ و $[8, +\infty)$ در نمودار بالا.

نکته تابع ثابت تنها تابعی است که هم صعودی محسوب می‌شود و هم نزولی. پس اگر گفتند «تابع $f(x) = \sqrt{x}$ تابعی صعودی و نزولی است»، جمله درستی است.

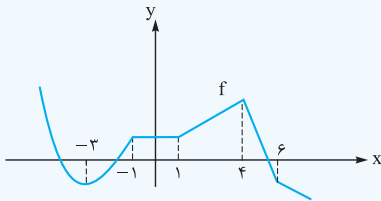
اشاره ۲ فرق بین «صعودی» و «صعودی اکید» در آن است که صعودی اکید فقط نمودار رو به بالا حرکت می‌کند ولی در صعودی، تابع می‌تواند هم رو به بالا برود و هم ثابت بماند (فقط حق ندارد رو به پایین برود). پس می‌توانیم نتیجه بگیریم «هم صعودی اکید، حتماً صعودی هم است» ولی عکسش درست نیست.

۶ اگر در بازه‌ای، قسمتی از نمودار صعودی اکید و قسمتی از آن نزولی اکید باشد، تابع در آن بازه **غیر یکنوا** است. مثلاً تابع رسم‌شده در بازه $[-6, -3]$ غیر یکنواست، چون در بازه $[-6, -4]$ صعودی اکید و در بازه $[-4, -3]$ نزولی اکید است.

در جدول زیر خلاصه مطالب صفحه قبل را ببینید: **جمع‌بندی**

تعریف ریاضی	مثال نموداری	وضعیت نمودار	نوع یکنوایی	
$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$		فقط رو به بالا می‌رود.	صعودی اکید	یکنوا اکید
$a > b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$		فقط رو به پایین می‌رود.	نزولی اکید	
$a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$		یا رو به بالا می‌رود یا ثابت است.	صعودی	یکنوا
$a > b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$		یا رو به پایین می‌رود یا ثابت است.	نزولی	
$a, b \in D_f \Rightarrow f(a) = f(b)$		روی یک خط افقی است.	ثابت	غیریکنوا
		قسمتی رو به بالا و قسمتی رو به پایین	غیریکنوا	

آزمون ۱ با توجه به نمودار رسم‌شده، چه تعداد از جملات زیر درست است؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

الف) f در بازه $[-3, 4]$ صعودی است.

ب) f در بازه $[5, 9]$ یکنوا اکید است.

پ) f در بازه $[-1, 1]$ هم صعودی است و هم نزولی.

ت) f در بازه $[2, 5]$ غیریکنوا است.

پاسخ ۴ همه جملات را بررسی می‌کنیم.

الف) چون نمودار در این بازه یا رو به بالا رفته یا ثابت بوده، پس صعودی است.

ب) در بازه $[5, 9]$ نمودار فقط رو به پایین رفته، پس نزولی اکید است. تابعی که نزولی اکید است، یکنوا اکید هم می‌باشد.

پ) در بازه $[-1, 1]$ تابع ثابت می‌باشد پس هم صعودی هم نزولی است.

ت) در بازه $[2, 5]$ ، قسمتی از نمودار صعودی اکید و قسمتی نزولی اکید است، پس غیریکنواست.

پس هر ۴ جمله درست بودند.

بررسی یکنوایی توابع (به کمک ضابطه)

در جدول زیر معروف‌ترین توابع یکنوا آورده شده‌اند.

اسم تابع	ضابطه	شرط اکیداً صعودی بودن	شرط اکیداً نزولی بودن
خطی	$y = mx + h$	$m > 0$	$m < 0$
درجه ۳	$y = a(x + \alpha)^3 + \beta$	$a > 0$	$a < 0$
رادیکالی	$y = \sqrt{ax + b} + c$	$a > 0$	$a < 0$
نمایی	$y = a^x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
لگاریتمی	$y = \log_a x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
آبشاری	$y = x - a - x - b $	$b \geq a$ (صعودی)	$a \geq b$ (نزولی)

اشاره ۱ تابع آبشاری، اکیداً یکنوا نیست، بلکه فقط یکنوا است.

آزمون ۲ اگر تابع $f(x) = (4 - a^2)x + a - 1$ و $g(x) = \sqrt{(2a - 1)x + 3} - a$ توابعی اکیداً صعودی باشند، محدوده کامل a کدام است؟

$$1) \frac{1}{2} < a < 2 \quad 2) \frac{1}{4} \leq a < 1 \quad 3) 0 < a < \frac{1}{4} \quad 4) -2 < a < \frac{1}{4}$$

پاسخ ۱ ۱) تابعی خطی است، برای اکیداً صعودی بودن باید شیبش مثبت باشد: $4 - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2$

۲) g تابعی رادیکالی به فرم $y = \sqrt{Ax + B} + C$ است. برای اکیداً صعودی بودن باید ضریب x مثبت باشد: $2a - 1 > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$

بین شرط ۱) و ۲) اشتراک می‌گیریم: $\Rightarrow (1) \cap (2) = (\frac{1}{2}, 2)$



آزمون ۱ تابع $f(x) = (\frac{a}{3} - 2)^{-x}$ یک تابع صعودی است. a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f(x) = (\frac{a}{3} - 2)^{-x} = (\frac{a-6}{3})^{-x} = (\frac{3}{a-6})^x$$

پاسخ ۲ ابتدا ضابطه را به شکل $y = A^x$ درمی‌آوریم:

برای آن که f صعودی باشد (دقت کنید نگفته f نامییه و کلمه اکیداً هم نیامده)، پس $\frac{3}{a-6}$ باید بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد. (اگر بزرگ‌تر از ۱ باشد، تابع نمایی اکیداً

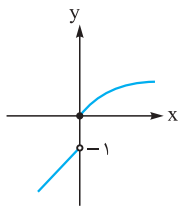
$$\frac{3}{a-6} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{a-6} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{3-a+6}{a-6} \geq 0 \Rightarrow \frac{-a+9}{a-6} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{a-9}{a-6} \leq 0 \quad (\text{می‌شود.})$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c} & 6 & 9 & & & \\ \hline & + & - & + & - & + \end{array} \xrightarrow{\leq 0} 6 < a \leq 9$$

پس مقادیر صحیح a ، سه عدد ۷، ۸ و ۹ هستند.

بررسی یکنوایی توابع (به کمک رسم نمودار)

خیلی وقت‌ها تشخیص یکنوایی از روی ضابطه کار سختی است. در این صورت باید سراغ رسم نمودار برویم.



مثلاً تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نمودارش را رسم می‌کنیم:

همان‌طور که معلوم است وقتی روی نمودار از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار فقط رو به بالا می‌رود، پس تابع ما یک تابع اکیداً صعودی است.

اشاره ۱ برای جواب‌دادن به سوالات این قسمت باید نمودار توابع معروف را بلد باشید.

آزمون ۲ کدام گزینه یک تابع اکیداً یکنوا است؟

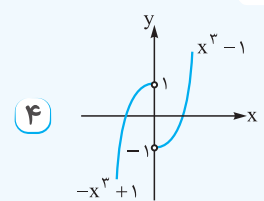
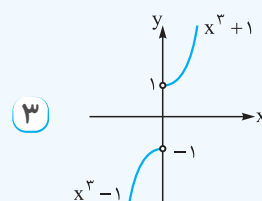
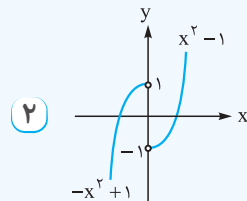
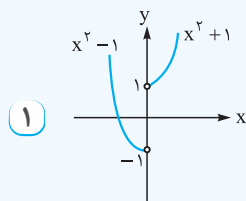
۴ (۴) $y = x^2 - \frac{x}{|x|}$

۳ (۳) $y = x^2 + \frac{x}{|x|}$

۲ (۲) $y = x|x| - \frac{|x|}{x}$

۱ (۱) $y = x^2 + \frac{x}{|x|}$

پاسخ ۳ اول هر تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم، بعد نمودار هر ۴ گزینه را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارها، گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ غیریکنوا هستند ولی ۳، چون نمودار فقط رو به بالا حرکت کرده، تابعی اکیداً صعودی است.

بعضی وقت‌ها بازه‌های یکنوایی را می‌خواهند. مثلاً می‌پرسند تابع در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟ نمودار را می‌کشیم و بازه را پیدا می‌کنیم.

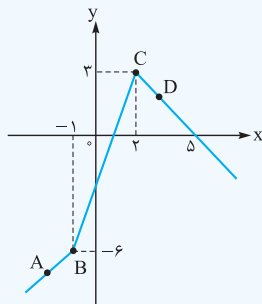
آزمون ۳ بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x+1| - |2x-4|$ در آن اکیداً نزولی است، کدام بازه می‌باشد؟

۴ (۴) $[2, +\infty)$

۳ (۳) $[-1, +\infty)$

۲ (۲) $(-\infty, 2]$

۱ (۱) $(-\infty, -1]$



	A	B	C	D
	قبلی	ریشه	ریشه	بعدی
x	-2	-1	2	3
y	-7	-6	3	2

پاسخ ۴ ریشه قدرمطلق‌ها را پیدا می‌کنیم و با نقطه‌یابی، نمودار f را رسم می‌کنیم:

۴ نقطه بالا را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم تا نمودار f به دست آید.

بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار رو به پایین می‌رود (اکیداً نزولی می‌باشد)، بازه $[2, +\infty)$ است.

یکی از توابع مورد علاقه طراحان سؤال در این قسمت، توابع به فرم $|خط| \pm |خط|$ y هستند. برای بررسی یکنوایی آن‌ها، می‌توانیم آن‌ها را دوضابطه‌ای بنویسیم و بعد از نکته زیر استفاده کنیم.

تابع به فرم $|خط| \pm |خط|$ y را اگر دوضابطه‌ای بنویسیم، به دو معادله خط می‌رسیم. حالا با توجه به علامت شیب‌ها:

- ۱ اگر هر دو مثبت باشند، تابع اکیداً صعودی است.
- ۲ اگر هر دو منفی باشند، تابع اکیداً نزولی است.
- ۳ اگر یکی مثبت و یکی صفر باشد، تابع صعودی است.
- ۴ اگر یکی منفی و یکی صفر باشد، تابع نزولی است.
- ۵ اگر یکی مثبت و یکی منفی باشد، تابع غیریکنواست.

مثلاً تابع $y = |2x - 4| + 3x$ را در نظر بگیرید. با توجه به ریشه قدرمطلق ($x = 2$)، آن را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = |2x - 4| + 3x = \begin{cases} (2x - 4) + 3x & x \geq 2 \\ (-2x + 4) + 3x & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 5x - 4 & x \geq 2 \\ x + 4 & x < 2 \end{cases}$$

چون شیب هر دو ضابطه مثبت شد پس تابع اکیداً صعودی است.

آزمون ۱ اگر تابع $f(x) = |2x + 1| + ax$ تابعی اکیداً نزولی باشد، محدوده a کدام است؟

- (۱) $a < -2$ (۲) $a > -2$ (۳) $-2 < a < 2$ (۴) $a < 2$

پاسخ ۱ شیب ضابطه‌ها مهم است. شیب یکی $2 + a$ و شیب دیگری $-2 + a$ می‌شود.

باید هر دو منفی باشند:

$$\begin{cases} a + 2 < 0 \Rightarrow a < -2 \\ a - 2 < 0 \Rightarrow a < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -2$$

بررسی یکنوایی در نمایش زوج مرتبی

برای بررسی یکنوایی تابعی با نمایش زوج مرتبی، ابتدا زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌نویسیم.

الان ۵ حالت ممکن است رخ دهد:

- ۱ با افزایش x ، y ها هم زیاد شوند. ← اکیداً صعودی
- ۲ با افزایش x ، y ها یا زیاد شوند یا ثابت بمانند. ← صعودی
- ۳ با افزایش x ، y ها هم کم شوند. ← اکیداً نزولی
- ۴ با افزایش x ، y ها یا کم شوند یا ثابت بمانند. ← نزولی
- ۵ با افزایش x ، y ها هم کم شوند، هم زیاد. ← غیریکنوا

آزمون ۲ تابع $f = \{(2, 5 - m), (-1, m + 11), (6, 2m - 1)\}$ تابعی اکیداً نزولی است. محدوده m کدام است؟

- (۱) $m > 2$ (۲) $m < -3$ (۳) $-3 < m < 2$ (۴) $-3 \leq m \leq 2$

$$f = \{(2, 5 - m), (-1, m + 11), (6, 2m - 1)\}$$

$$m + 11 > 5 - m > 2m - 1$$

پاسخ ۲ زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

در تابع اکیداً نزولی با افزایش x ، y ها کم می‌شوند، پس:

نامعادله بالا تبدیل به دو نامعادله می‌شود:

$$m + 11 > 5 - m \Rightarrow 2m > -6 \Rightarrow m > -3 \quad (1)$$

$$5 - m > 2m - 1 \Rightarrow -3m > -6 \Rightarrow m < 2 \quad (2)$$

$$-3 < m < 2$$

بین دو شرط بالا، اشتراک می‌گیریم:

معروف‌ترین توابع غیریکنوا

قبل از این در یک جدول توابع یکنوای معروف را دیدیم. الان می‌خواهیم معروف‌ترین توابع غیریکنوا را بررسی کنیم. در این توابع، بازه‌های یکنوایی مهم هستند؛ یعنی بدانیم کجا صعودی و کجا نزولی هستند. در جدول زیر این توابع را می‌بینیم:

تابع	ضابطه	نمودار	نقطه مرزی بازه‌های یکنوایی
سهمی	$y = ax^2 + bx + c$		رأس
قدرمطلق خطی	$y = \pm ax + b $		ریشه داخل قدرمطلق
گلدانی	$y = x - a + x - b $		ریشه‌های داخل قدرمطلق
هموگرافیک	$y = \frac{ax + b}{cx + d}$		ریشه مخرج

مثلاً در سهمی $y = x^2 - 6x + 1$ که دهانه‌اش رو به بالاست، طول رأس برابر است با:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

با توجه به نمودار، در بازه $(-\infty, 3]$ تابع نزولی و در بازه $[3, +\infty)$ صعودی است.

آزمون ۳ سهمی $y = -x^2 + (m - 3)x + 1$ در بازه $[-3, 2]$ ، صعودی است. محدوده m کدام است؟

- (۱) $m \geq 7$ (۲) $m \geq -1$ (۳) $m < 7$ (۴) $m > 1$

پاسخ ۳ طول رأس، نقطه مهم داستان است:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-m + 3}{-2} = \frac{m - 3}{2}$$

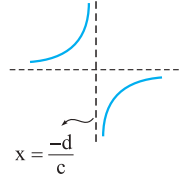


$$x_S = \frac{m-3}{2}$$

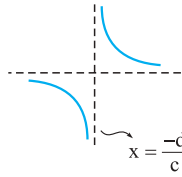
چون $a < 0$ است، پس سهمی این شکلی می‌شود:

$$2 \leq \frac{m-3}{2} \Rightarrow m-3 \geq 4 \Rightarrow m \geq 7$$

نکته نمودار هر تابع هموگرافیک با ضابطه $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ از دو شاخه تشکیل شده است. در مورد یکنوایی آن بدانید:



۱ اگر $ad - bc > 0$ باشد، تابع در هر شاخه‌اش صعودی اکید است و در کل غیریکنواست.



۲ اگر $ad - bc < 0$ باشد، تابع در هر شاخه‌اش نزولی اکید است و در کل غیریکنواست.

$$\left(\frac{-d}{c}, +\infty\right), \left(-\infty, \frac{-d}{c}\right)$$

۳ تابع در بازه‌هایی که قبل و بعد از ریشهٔ مخرج هستند، یکنوایی اکید است:

$$2(3) - (-1)(1) = 7$$

مثلاً در تابع $y = \frac{2x-1}{x+3}$ ، اول $ad - bc$ را تشکیل می‌دهیم:

چون مثبت شد، پس در هر شاخه‌اش صعودی است و در کل غیریکنواست. ریشهٔ مخرج $x = -3$ است، یعنی در بازه‌های $(-\infty, -3)$ و $(-3, +\infty)$ به طور جداگانه، صعودی اکید است.

آزمون ۱ تابع $f(x) = \frac{-4x+8}{2x-k}$ در بازهٔ $(3, +\infty)$ اکیداً صعودی است. محدودهٔ k کدام است؟

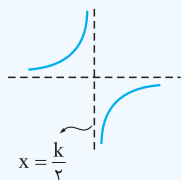
$$(2, 4) \quad (4)$$

$$[6, 8) \quad (3)$$

$$[5, 7) \quad (2)$$

$$(4, 6] \quad (1)$$

$$2x - k = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{2}$$



پاسخ ۱ ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم:

قرار است تابع هموگرافیکمان، در هر شاخه اکیداً صعودی باشد، این شکلی:

پس الان دوتا شرط لازم است:

$$(-4)(-k) - 8(2) > 0 \Rightarrow 4k - 16 > 0 \Rightarrow k > 4$$

۱ $ad - bc$ مثبت باشد:

$$3 \geq \frac{k}{2} \Rightarrow k \leq 6$$

۲ بازهٔ $(3, +\infty)$ بعد از $x = \frac{k}{2}$ باشد، یعنی ۳ باید بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{k}{2}$ باشد:

$$(k > 4) \cap (k \leq 6) = 4 < k \leq 6$$

اشتراک شرط ۱ و ۲ را می‌گیریم:

کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات

$$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$$

تابع اکیداً صعودی

$$a > b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

تابع اکیداً نزولی

یک بار دیگر تعریف ریاضی توابع اکیداً یکنوا را ببینید:

نکته دو جملهٔ بالا را به زبان دیگری می‌گوییم. از این دو جمله در حل نامعادلات و برخی سؤال‌های دامنه استفاده می‌کنیم.

$$a > b$$

۱ اگر f اکیداً صعودی و $f(a) > f(b)$ ، با حذف f ها، جهت عوض نمی‌شود:

$$a < b$$

۲ ولی اگر f اکیداً نزولی و $f(a) > f(b)$ ، با حذف f ها، جهت عوض می‌شود:

مثلاً اگر f اکیداً صعودی و $f(3x) > f(x+2)$ ، آنگاه $3x > x+2$ و در نتیجه $x > 1$ است.

آزمون ۲ اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، در چه بازه‌ای نمودار تابع $f(x^2+1)$ بالای نمودار تابع $f(2x+9)$ قرار دارد؟

$$(-4, 2) \quad (4)$$

$$(-2, 4) \quad (3)$$

$$\mathbb{R} - [-4, 2] \quad (2)$$

$$\mathbb{R} - [-2, 4] \quad (1)$$

$$f(x^2+1) > f(2x+9)$$

پاسخ ۲ قرار است تابع $f(x^2+1)$ بالای تابع $f(2x+9)$ باشد:

$$x^2+1 < 2x+9$$

چون f اکیداً نزولی است، پس با حذف f ها، جهت تغییر می‌کند:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -2 < x < 4$$

نامعادله را حل می‌کنیم:

ممکن است این موضوع را با دامنه یک تابع رادیکالی ادغام کنند. یک تست ببینید.

تست ۴ | توابع $f(x) = -(x-1)^3 + 12$ و $g(x) = \sqrt{f(|x|) - f(|2x-1|)}$ مفروض‌اند. اگر دامنه تابع g به صورت $\mathbb{R} - (a, b)$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ ۳ | برای دامنه تابع رادیکالی g ، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم: $f(|x|) - f(|2x-1|) \geq 0 \Rightarrow f(|x|) \geq f(|2x-1|)$ حالا باید بگوییم چون f نزولی است (چون ضریب x^3 منفی می‌شود)، پس با حذف f ، جهت عوض می‌شود:

$$f(|x|) \geq f(|2x-1|) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} |x| \leq |2x-1|$$

برای حل نامعادله‌های به فرم $|A| \geq |B|$ ، بهترین راه توان ۲ رساندن است (هیچ محدودیتی ایجاد نمی‌کند):

$$|x| \leq |2x-1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 \leq 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 \geq 0 \xrightarrow{\text{تأیید ریشه‌ها}} x \geq 1 \text{ یا } x \leq \frac{1}{3}$$

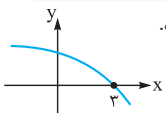
$$D_g = \mathbb{R} - \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 a b

پس:

$$a+b = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

در نتیجه:



اگر هم لازم شد یک نمودار فرضی برای تابع اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) f بکشید و بعد حل نامعادله یا محاسبه دامنه را انجام دهید. مثلاً اگر گفته شده بود، f اکیداً نزولی و $f(3) = 0$ ، شکل روبه‌رو را می‌کشیم:

تست ۴ | اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ و $f(-2) = 0$ باشد، جواب نامعادله $\frac{x^3 - 9x}{f(x)} \geq 0$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ ۳ | برای f یک شکل فرضی که نزولی باشد و محور x ها را در -2 قطع کند، می‌کشیم و نامعادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{x^3 - 9x}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x^2 - 9)}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x-3)(x+3)}{f(x)} \geq 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\downarrow$
 -2 3 -3

با توجه به ریشه‌ها و نمودار f ، کل کسر را تعیین علامت می‌کنیم:

	-3	-2	0	3	
$x^3 - 9x$	-	+	+	-	+
$f(x)$	+	+	-	-	-
کل	-	+	-	+	-

جواب
جواب

اشاره ۱ | برای تعیین علامت $f(x)$ ، قسمت‌هایی که نمودار بالای محور x هاست،

مثبت و قسمت‌هایی که زیر محور x هاست، منفی شده است.

$$[-3, -2] \cup [0, 3]$$

قسمت‌های مثبت و صفر جدول، جواب است:

$$\{-3, 0, 1, 2, 3\}$$

بازه بالا شامل ۵ عدد صحیح است:

یکنوایی و اعمال جبری

فرض کنید وضعیت یکنوایی توابع f و g را می‌دانیم و دنبال وضعیت یکنوایی توابع $f-g$ یا $f+g$ یا $f \times g$ یا ... هستیم. تعداد حالت‌های بررسی زیاد می‌شود. مهم‌ترین حالت‌ها را در جدول روبه‌رو می‌بینید:

اشاره ۱ | خانه‌های خالی جدول مقابل، یعنی وضعیت تابع نامشخص است (و هر چیزی می‌تونه بشه!)

صعودی، نزولی، غیر یکنوا

حالا نکات زیر را بخوانید:

(۱) f و $-f$ در یکنوایی کاملاً برعکس هم هستند. یعنی اگر f اکیداً صعودی باشد، $-f$ اکیداً نزولی است.

(۲) f و $\frac{1}{f}$ به شرطی که f تغییر علامت ندهد، در یکنوایی برعکس هم هستند ولی اگر f تغییر علامت بدهد، $\frac{1}{f}$ غیر یکنوا می‌شود.

(۳) اگر دو تابع f و g هر دو اکیداً صعودی (یا نزولی) باشند، جمعشان یعنی $f+g$ هم اکیداً صعودی (یا نزولی) می‌ماند ولی تفریقشان نامعلوم است.

(۴) برای تفریق دو تابع، می‌توانیم از نکته (۳) استفاده کنیم، مثلاً اگر f صعودی و g نزولی باشد، آن‌گاه چون $-g$ صعودی است، می‌توانیم $f-g$ را به شکل $f+(-g)$ ببینیم که مجموع دو تابع صعودی است و در نتیجه صعودی می‌شود.

(۵) یکی از خطرناک‌ترین اشتباهات در قسمت ضرب دو تابع صعودی رخ می‌دهد که بچه‌ها فکر می‌کنند ضرب دو تابع صعودی، تابعی صعودی است ولی این‌طور نیست! مثلاً x و $2x$ هر دو صعودی‌اند ولی ضربشان $2x^2$ یک سهمی است که غیر یکنواست.

f	g	$f+g$	$f-g$	fg
ص	ص	ص		
ص	ن		ص	
ن	ص		ن	
ن	ن	ن		

جمله درست این قسمت این است: «ضرب دو تابع صعودی با مقادیر مثبت، تابعی صعودی است.»
مثلاً $y = 2^x$ و $y = \sqrt{x}$ هر دو توابعی صعودی و مقادیرشان مثبت است، پس تابع $y = 2^x \sqrt{x}$ تابعی صعودی است.

آزمون ۱ تابع $y = x^3 + 2x - 6$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

(۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

پاسخ ۱ تابع داده شده را به صورت جمع دو تابع x^3 و $2x - 6$ ببینیم:

x^3 که اکیداً صعودی است. $2x - 6$ هم خطی با شیب مثبت است، پس اکیداً صعودی می باشد.

جمع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است:

پس $y = x^3 + 2x - 6$ اکیداً صعودی است.

$$y = (x^3) + (2x - 6)$$

$$y = \underbrace{x^3}_{\text{صعودی اکید}} + \underbrace{2x - 6}_{\text{صعودی اکید}}$$

دامنه توابع $f \times g$ از اشتراک دامنه f و g به دست می آید. ممکن است از توابع f و g ، یکی غیر یکنوا باشد ولی محدود شدن دامنه باعث یکنوا شدنش شود و بعد بتوانیم از نکات گفته شده استفاده کنیم. یک تست ببینید:

آزمون ۲ تابع $y = \log(2-x) + x^2 - 4x$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

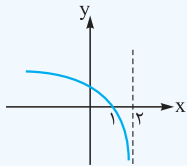
(۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی

(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

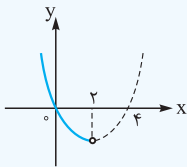
پاسخ ۲ تابع داده شده را به صورت جمع دو تابع می نویسیم:

نمودار تابع $f(x) = \log(2-x)$ به صورت زیر است:

$$y = \underbrace{\log(2-x)}_{f(x)} + \underbrace{x^2 - 4x}_{g(x)}$$



پس f نزولی است. از طرفی دامنه f ، به صورت $x < 2$ می باشد. این دامنه روی سهمی $g(x) = x^2 - 4x$ هم اثر می گذارد.



سهمی $g(x) = x(x-4)$ را با دامنه $x < 2$ رسم می کنیم:

g هم در این بازه، اکیداً نزولی است. مجموع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است: $y = \underbrace{\log(2-x)}_{\text{نزولی اکید}} + \underbrace{x^2 - 4x}_{\text{نزولی اکید}}$

نکته برای تعیین وضعیت ترکیب دو تابع یکنوا، از قانون «علامت ضرب دو عدد» می توانیم استفاده کنیم.

تابع صعودی را با علامت + و تابع نزولی را با علامت - نشان می دهیم. مثلاً اگر f صعودی و g نزولی باشد، fog هم نزولی است، چون مثبت ضربدر منفی می شود منفی.

$$fog \Rightarrow (+) \times (-) = (-)$$

کل حالات هم در جدول می بینید:

f	g	fog
ص	ص	ص
+	+	+
ص	ن	ن
+	-	-
ن	ص	ن
-	+	-
ن	ن	ص
-	-	+

آزمون ۳ اگر f تابعی اکیداً نزولی و gof تابعی اکیداً صعودی باشد، g کدام می تواند باشد؟

(۱) $g(x) = 2^x$ (۲) $g(x) = x^2 - 1$ (۳) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (۴) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

پاسخ ۳ چون منفی در منفی، می شود مثبت، پس g باید نزولی باشد. در بین گزینه ها فقط $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ اکیداً نزولی است.

دقت کنید $y = \sqrt{x}$ تابعی اکیداً صعودی است که تغییر علامت نمی دهد (چون $\sqrt{x} \geq 0$) پس $\frac{1}{\sqrt{x}}$ اکیداً نزولی می شود.

آزمون ۴ اگر f تابعی اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی باشد، کدام تابع زیر قطعاً اکیداً نزولی است؟

(۱) $(fogog)(x)$ (۲) $(gof)(-x)$ (۳) $(fof)(-x^2)$ (۴) $(gog)(-x^2)$



۱) $(f \circ g \circ g)(x) \Rightarrow (+) \times (-) \times (-) \times (+) \Rightarrow + \Rightarrow$ اکیداً صعودی

پاسخ ۴ | همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۲) $(g \circ f)(-x) \Rightarrow (-) \times (+) \times (-) \times (-) \Rightarrow + \Rightarrow$ اکیداً صعودی

۳) $(f \circ f)(-x^2) \Rightarrow (+) \times (+) \times ? = ? \Rightarrow$ نامشخص
غیریکنوا

۴) $(g \circ g)(-x^2) \Rightarrow (-) \times (-) \times (-) \times (-) \Rightarrow - \Rightarrow$ اکیداً نزولی

• **برد با یکنوایی** اگر f تابعی اکیداً یکنوا و پیوسته با دامنه $[a, b]$ یا (a, b) یا $[a, b]$ یا (a, b) باشد، با جای گذاری نقاط اول و آخر دامنه

در ضابطه تابع، به نقطه اول و آخر برد می‌رسیم:

۱) $f \xrightarrow{D_f=[a,b]} R_f = [f(a), f(b)]$ اکیداً صعودی و پیوسته

۲) $f \xrightarrow{D_f=[a,b]} R_f = [f(b), f(a)]$ اکیداً نزولی و پیوسته

آزمون ۴ | اگر $f(x) = 2(\sqrt{x-4} - \sqrt{20-4x})$ و برد f بازه $[a, b]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ ۳ | عبارتی که در توان آمده است را بررسی می‌کنیم:

$\sqrt{x-4} - \sqrt{20-4x}$
اکیداً صعودی اکیداً صعودی
اکیداً صعودی

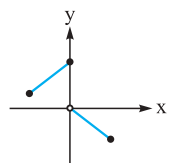
اگر A اکیداً صعودی باشد، 2^A هم اکیداً صعودی است. در نتیجه تابع f ، اکیداً صعودی است.
تابع f ، دو عبارت رادیکالی دارد، دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

$\begin{cases} \sqrt{x-4} \text{ دامنه } x \geq 4 \\ \sqrt{20-4x} \text{ دامنه } x \leq 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [4, 5]$

چون f اکیداً صعودی (و پیوسته) است، پس برای محاسبه برد باید مقدارش را در $x=4$ و $x=5$ حساب کنیم:

$\left. \begin{aligned} f(4) &= 2^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \\ f(5) &= 2^{1-0} = 2^1 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \left[\frac{1}{4}, 2 \right] \Rightarrow a+b = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$

• **رابطه یکنوایی و یک‌به‌یک بودن** رابطه بین یکنوایی و یک‌به‌یک بودن را به صورت کامل‌تر در چند جمله آورده‌ایم:



صعودی اکید
 $y = x^3 + x - 3$
صعودی اکید صعودی اکید

۱) هر تابع اکیداً یکنوا حتماً یک‌به‌یک است.

۲) هر تابع غیر یک‌به‌یک حتماً اکیداً یکنوا نیست. (عکس نقیض جمله ۱)

۳) هر تابع یک‌به‌یکی لزوماً یکنوا نیست، مثل شکل روبه‌رو:

۴) هر تابع یک‌به‌یک و پیوسته‌ای، حتماً اکیداً یکنوا است. (یعنی جمله ۳، شرط پیوستگی را کم داشت).

مثلاً تابع $y = x^3 + x - 3$ تابعی یک‌به‌یک است، زیرا:

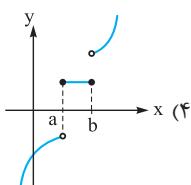
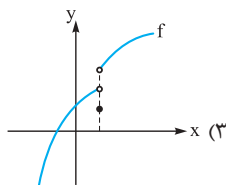
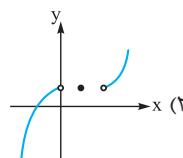
توابع x^3 و $x - 3$ صعودی اکیدند و مجموعشان نیز صعودی اکید است:

گفتیم هر تابع یکنوا اکیدی، یک‌به‌یک است، پس تابع بالا یک‌به‌یک است.

درس سوم: توابع یکنوا

۹۶- کدام تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست؟

$$f = \{(1, 2), (-1, 0), (3, 3)\} \quad (۱)$$



بررسی یکنوایی توابع

☞ اگر با تابعی که همیشه یکنوا هستند، آشنا نیستید حتماً درس‌نامه را نگاه کنید.

☞ ۹۷- اگر تابع $f(x) = (1-a^2)x + a + 3$ ، تابعی اکیداً صعودی باشد، عرض نقطه برخورد f با محور y ها در چه بازه‌ای است؟

- (۱) $(1, 3)$ (۲) $(2, 4)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(4, 6)$

☞ ۹۸- کدام تابع زیر، اکیداً صعودی است؟

- (۱) $y = \sqrt{-2x + 4}$ (۲) $y = -(2-x)^3 - 1$ (۳) $y = \log_{1/2} x$ (۴) $y = (\cos \frac{\pi}{6})^x$

☞ ۹۹- به ازای $k \in (a, b)$ ، تابع نمایی $y = (\frac{k+1}{3-k})^x$ تابعی صعودی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

☞ ۱۰۰- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = (\frac{3m+1}{4})^x$ با دامنه $\mathbb{R}$ ، نزولی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار m

☞ ۱۰۱- اگر تابع $f(x) = |x + 2m - 1| - |x - m + 5|$ تابعی نزولی باشد، محدوده کامل m کدام است؟

- (۱) $m \geq 2$ (۲) $m \leq 2$ (۳) $m > 2$ (۴) $m < 2$

☞ برای تعیین یکنوایی توابعی که چندضابطه‌ای، قدرمطلق یا برابری هستند، همیشه تابع را رسم می‌کنیم.

☞ ۱۰۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$ چگونه است؟

- (۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

☞ ۱۰۳- تابع $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی، نه نزولی (۴) هم صعودی، هم نزولی

☞ ۱۰۴- تابع $f(x) = \log_{1/2} x^2$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی، نه نزولی (۴) هم صعودی، هم نزولی

☞ ۱۰۵- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$ چگونه تابعی است؟

- (۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی (۳) همواره صعودی (۴) همواره نزولی

☞ ۱۰۶- کدام یک از توابع زیر در دامنه خود اکیداً صعودی نیست؟

- (۱) $f(x) = \frac{|x|}{x} + x$ (۲) $f(x) = x - \frac{x}{|x|}$ (۳) $f(x) = 2x - |x - 1|$ (۴) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$

☞ ۱۰۷- کدام یک از توابع زیر در دامنه خود اکیداً نزولی است؟

- (۱) $f(x) = x^2 |x|$ (۲) $f(x) = -x^2 |x|$ (۳) $f(x) = x |x|$ (۴) $f(x) = -x |x|$

☞ ۱۰۸- یکنوایی تابع $f: (-1, 1) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ چگونه است؟
 $f(x) = x |x| + \frac{x}{|x|}$

- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

☞ ۱۰۹- تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ و $x \geq 0$ در بازه (a, b) نزولی اکید است. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

☞ ۱۱۰- بازه $[a, b]$ ، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x) = x |x - 2|$ در آن اکیداً نزولی است. کدام خط، نمودار f را در ۳ نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) $y = b$ (۲) $y = a$ (۳) $y = \frac{a}{b}$ (۴) $y = \frac{b}{a}$

☞ ۱۱۱- اگر $f(x) = x^3 + x^2$ و $g(x) = |x|$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ در چه بازه‌ای نزولی است؟

- (۱) $(-1, -\frac{1}{2})$ (۲) $(-\frac{1}{2}, 0)$ (۳) $(0, \frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{1}{2}, 1)$

(تجربی خارج ۹۸)

☞ ۱۱۲- تابع با ضابطه $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$ ، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

(تجربی ۹۸)

☞ ۱۱۳- تابع با ضابطه $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

- (۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

☞ ۱۱۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 3x + a & x < 0 \end{cases}$ بر دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۱۵- به ازای چه حدودی از k تابع $f(x) = \begin{cases} 4 - |x-1| & x \leq 0 \\ k + x^2 & x > 0 \end{cases}$ تابعی اکیداً یکنواست؟

- (۱) $k > 3$ (۲) $k \leq 3$ (۳) $k \geq 3$ (۴) $k < 3$

۱۱۶- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ g(x) & x > -1 \end{cases}$ تابعی نزولی باشد، ضابطه g کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $y = |x|$ (۲) $y = -x^2$ (۳) $y = -|x| - x$ (۴) $y = x + |x|$

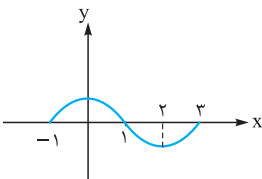
۱۱۷- کدام تابع اکیداً یکنواست؟

- (۱) $y = |2x| + x$ (۲) $y = |2x - 4| - x$ (۳) $y = |x + 1| + 2x$ (۴) $y = |x - 1| + x$

۱۱۸- اگر تابع $f(x) = ax + 4 - |\frac{x}{4} + 1|$ تابعی غیر یکنوا باشد، محدوده a کدام است؟

- (۱) $a > \frac{1}{4}$ (۲) $a < \frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$

۱۱۹- شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $y = f(1-x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



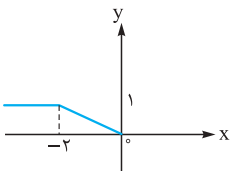
- (۱) $(-3, -1)$

- (۲) $[-4, -3]$

- (۳) $(-1, 1)$

- (۴) $[1, 2]$

۱۲۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $g(x) = 2 - |x|$ ، آن‌گاه تابع $f \circ g$ در کدام یک از بازه‌های زیر صعودی است؟



- (۱) $(-2, 2)$ (۲) $(-4, 0)$

- (۳) $(-1, 3)$ (۴) $(1, 5)$

۱۲۱- اگر $f(x) = \frac{|x| + x^2}{1 + |x|}$ ، $g(x) = 2x^2 + x - 1$ و تابع $f \circ g$ در بازه $[-a^2, -b^2]$ صعودی باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $0/75$ (۲) 1 (۳) $1/25$ (۴) $1/5$

۱۲۲- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ، $g(x) = x^2 - x$ و تابع $(f \circ g)(x+1)$ در بازه $(a, +\infty)$ صعودی باشد، کم‌ترین مقدار a کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۱۲۳- تابع $f(x) = |a + x^2|$ در بازه $(-\infty, a-2)$ نزولی است. چند عدد طبیعی در مجموعه مقادیر a وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) بی‌شمار

در نمایش زوج مرتبی، ابتدا باید زوج مرتب‌ها را از کوچک به بزرگ بنویسیم.

۱۲۴- اگر تابع $f = \{(1, 1), (3, 6), (\sqrt{2}, m^2 - 2), (10, 20)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) 2 (۳) 4 (۴) 6

۱۲۵- اگر $f = \{(1, 3a+1), (-1, a+1), (2, 4a+3)\}$ تابعی صعودی باشد، مقادیر a در کدام بازه است؟

- (۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $[0, +\infty)$

۱۲۶- توابع $f = \{(2, 2m), (-3, m), (5, -m), (1, m^2 - 1)\}$ و $g = \{(-3, 12), (1, 1), (4, -m), (5, 2)\}$ مفروض‌اند. اگر $f + g$ تابعی نزولی باشد، چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

بازه‌های یکنوایی توابع غیر یکنوا

در سهمی‌ها، یک سمت رأس صعودی و سمت دیگر رأس نزولی است.

۱۲۷- تابع $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ روی بازه $[-1, 2]$ چگونه است؟

- (۱) ابتدا صعودی سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی (۳) نزولی (۴) صعودی

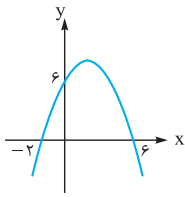
۱۲۸- مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x : |x-1| < 2\}$ همواره چگونه است؟

- (۱) نزولی (۲) مثبت (۳) صعودی (۴) منفی

۱۲۹- تابع $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 1$ در بازه $[-1, 2]$ غیر یکنوا است. بازه m کدام است؟

- (۱) $-1 \leq m \leq \frac{1}{4}$ (۲) $-1 < m < \frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$

(سراسری ۹۱)



۱۳۰- اگر تابع $f(x) = \left(\frac{1}{m}\right)x^2 - x + 3$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، محدوده m کدام است؟

- (۱) $-2 \leq m < 0$ (۲) $0 < m \leq 2$ (۳) $m \leq -2$ (۴) $m \geq 2$

۱۳۱- با توجه به نمودار سهمی $y = f(x)$ ، اگر تابع $g(x) = kx^2 + 4f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{2}$

- (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۱

تابع همواره افیک. هیچ گاه یکنوا نیست. مگر این که دامنه تابع محدود شده باشد.

۱۳۲- تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ در بازه $(-\infty, a)$ اکیداً نزولی است. حداکثر a کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳۳- تابع $f(x) = \frac{-1}{x-2}$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار صحیح a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۳۴- کدام یک از توابع زیر در بازه $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است؟

- (۱) $y = \frac{x-1}{x+3}$ (۲) $y = \frac{2x-3}{x+1}$ (۳) $y = \frac{-x+1}{x+3}$ (۴) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

۱۳۵- اگر در بازه $(1, +\infty)$ تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x-a}$ اکیداً یکنوا باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $(-\infty, 2) - \{-2\}$ (۴) $(-\infty, 2] - \{-2\}$

۱۳۶- تابع $f(x) = \frac{2x+b}{3x+d}$ در بازه‌های $(-2, +\infty)$ و $(-\infty, -2)$ یکنوا اکید است و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. کدام تابع زیر اکیداً صعودی است؟

- (۱) $y = d^{-x}$ (۲) $y = bx^2$ (۳) $y = dx + b|x|$ (۴) $y = bx + d$

کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات

۱۳۷- اگر f تابعی نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ و $f(2a-1) > f(5-a)$ باشد، محدوده a کدام است؟

- (۱) $a \geq 2$ (۲) $a \leq 2$ (۳) $a > 2$ (۴) $a < 2$

۱۳۸- اگر $g(x) = \sqrt{f(2x+1)} - f(x-2)$ و f اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع $g(x)$ کدام است؟ ($D_f = \mathbb{R}$)

- (۱) $[-3, +\infty)$ (۲) $(-3, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -3]$ (۴) $(-\infty, -3)$

۱۳۹- اگر $f(x) = \frac{1-x}{x}$ ، آن گاه در کدام یک از بازه‌های زیر، نمودار تابع $y = f(1+x^2)$ بالای نمودار تابع $y = f(3+x^2)$ قرار دارد؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(1, 3)$ (۴) $(2, 4)$

۱۴۰- اگر $f(x) = -x^2 + 2$ باشد، جواب نامعادله $f(x^2) > f(fof)(x)$ کدام است؟

- (۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $\mathbb{R} - [-1, 1]$

۱۴۱- اگر f یک تابع اکیداً نزولی بوده و $f(3) = 0$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ ($D_f = \mathbb{R}$)

- (۱) $[0, 3]$ (۲) $\mathbb{R} - (0, 3)$ (۳) $(-\infty, 3]$ (۴) $(3, +\infty)$

۱۴۲- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(2) = 0$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(x^2-x)f(x)}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴۳- اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-1, 1)$ (۲) $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (۳) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

۱۴۴- اگر $f(x) = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟

- (۱) $[-2, 0]$ (۲) $\mathbb{R} - (-2, 0)$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $\mathbb{R} - (0, 2)$

یکنوایی و اعمال جبری

۱۴۵- چندتا از عبارات زیر درست است؟

- (الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است.
(ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.
(ت) اگر f تابعی صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f \times g$ اکیداً صعودی است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(خارج ۹۳)

(سراسری ۹۳ با تغییر)

۱۴۶- اگر $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی باشد، تابع $y = f(-x^3)$ چگونه تابعی است؟

- (۱) اکیداً نزولی (۲) اکیداً صعودی (۳) غیریکنوا (۴) نامشخص می باشد.

۱۴۷- اگر f تابعی اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی باشد، کدام یک از توابع زیر نزولی است؟

- (۱) $y = f(x) + \sqrt{x}$ (۲) $y = g \circ g(x)$ (۳) $y = g(x^2)$ (۴) $y = (f \circ g \circ f)(x)$

۱۴۸- تابع $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}+1}$ چگونه است؟

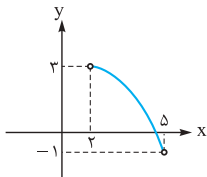
- (۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱۴۹- اگر f تابعی اکیداً نزولی و زیر محور x ها باشد، توابع $g(x) = -xf(x)$ و $h(x) = \frac{1}{f(-x)}$ به ترتیب چگونه اند؟

- (۱) صعودی - صعودی (۲) صعودی - نزولی (۳) نزولی - صعودی (۴) نزولی - نزولی

۱۵۰- در شکل مقابل، نمودار تابع f به طور کامل رسم شده است. برد تابع $y = [\sqrt{x} - f(x)]$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳



۱۵۱- توابع $f(x) = \frac{-1}{x} + \sqrt{x}$ و $g(x) = |x| + \sqrt{-x}$ به ترتیب چگونه اند؟

- (۱) غیریکنوا - غیریکنوا (۲) غیریکنوا - نزولی (۳) صعودی - غیریکنوا (۴) صعودی - نزولی

۱۵۲- تابع $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt{1-x}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

(سراسری ۱۴۰۰)

۱۵۳- کدام عبارت، برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2-1}}$ درست است؟

- (۱) تابع f در بازه $(1, \infty) \cup (0, 1)$ صعودی است.
(۲) تابع f در بازه های $(1, \infty)$ و $(0, 1)$ صعودی است.
(۳) تابع f در بازه $(1, \infty)$ صعودی و در بازه $(0, 1)$ نزولی است.
(۴) تابع f در بازه $(1, \infty)$ نزولی و در بازه $(0, 1)$ صعودی است.

برد با یکنوایی

۱۵۴- برد تابع $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x-1}$ شامل چند عدد طبیعی نمی شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۵۵- اگر برد تابع $f(x) = 2\sqrt{2+x} - \sqrt{7-x}$ بازه $[a, b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۵۶- اگر برد تابع $f(x) = -x^3 + \sqrt{-x} + 1$ با دامنه $[-4, -1]$ به صورت $(a, b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۶۶ (۴) ۶۸

(سراسری ۱۴۰۰)

۱۵۷- فرض کنید برد تابع $f(x) = 2\sqrt{1-\cos^2(x)} - 2\sqrt{1-\cos^2(x)-1}$ به صورت $[a, b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{21}{4}$

هم تابع اکیداً یکنوا، حتماً یک به یک است.

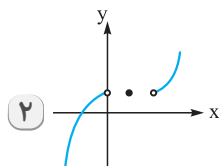
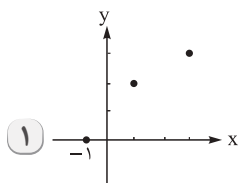
۱۵۸- کدام یک از تابع های زیر یک به یک است؟

- (۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$ (۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$ (۳) $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$ (۴) $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$

(سراسری ۹۷)



۹۶. گزینه ۴ | نمودارها را کنار هم ببینید:



۱۰۱. گزینه ۲ تابع آبشاری $y = |x - a| - |x - b|$ ، به شرطی که ریشه قدرمطلق اولش بزرگتر از ریشه قدرمطلق دوم باشد نزولی است (یعنی $a > b$):



در هر دو شرط بالا، اگر مساوی قرار دهیم، نمودارمان به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود که هم صعودی است و هم نزولی. ریشه قدرمطلقها را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = |x + 2m - 1| - |x - m + 5|$$

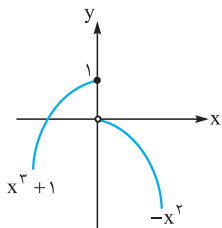
ریشه: $-2m+1$ ریشه: $m-5$

شرط نزولی بودن را اعمال می‌کنیم:

$$-2m+1 \geq m-5 \Rightarrow -3m \geq -6 \Rightarrow m \leq 2$$

۱۰۲. گزینه ۳ اول نمودار تابع را رسم

می‌کنیم:

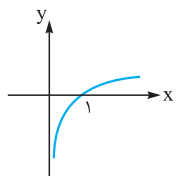


با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی (در $x \leq 0$) رو به بالا و سپس نزولی (در $x > 0$) رو به پایین است.

۱۰۳. گزینه ۱ ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_7 \sqrt[3]{x} = \log_7 x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_7 x$$

نمودار تابع $y = \log_7 x$ به صورت روبه‌رو است:



تابع صعودی اکید است.

اگر عددی مثبت مثل $\frac{1}{3}$ در ضابطه ضرب شود، تغییری در یکنوایی ایجاد نمی‌کند.

۱۰۴. گزینه ۳

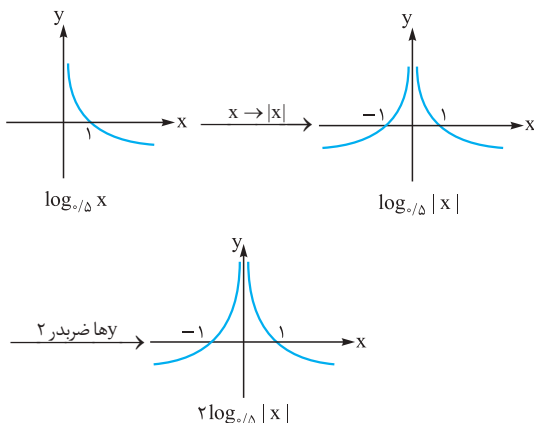
$$\begin{cases} \log x^2 = 2 \log |x| & (\text{توان زوج}) \\ \log x^3 = 3 \log x & (\text{توان فرد}) \end{cases}$$

نکته

$$f(x) = \log_{5/2} x^2 = 2 \log_{5/2} |x|$$

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

نمودار f را مرحله‌به‌مرحله رسم می‌کنیم:



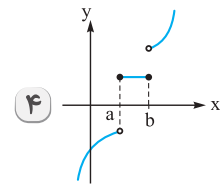
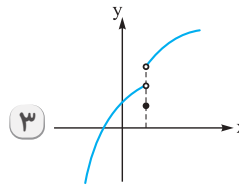
چون تابع f ، در قسمت‌هایی صعودی اکید ($x < 0$) و در قسمت‌هایی نزولی اکید است ($x > 0$)، پس غیریکنواست.

۱۰۵. گزینه ۴ دامنه تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{matrix} x \geq 0 \\ x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \end{matrix} \right\} \cap \rightarrow x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x| \sqrt{x}} = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x > 0} f(x) = \frac{1}{x}$$



در گزینه‌های ۱ و ۲ وقتی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار فقط رو به بالا رفته، پس صعودی اکیدند.

در ۳، ابتدا نمودار رو به بالا رفته و سپس در یک نقطه به پایین آمده، پس غیریکنواست.

در ۴، نمودار یا رو به بالا رفته یا ثابت بوده، پس صعودی است ولی صعودی اکید نیست.

۹۷. گزینه ۲ تابع خطی زمانی اکیداً صعودی است که شیبش مثبت باشد، پس:

$$1 - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 1 \Rightarrow |a| < 1 \Rightarrow -1 < a < 1$$

عرض از مبدأ خط $f(x) = (1 - a^2)x + (a + 3)$ می‌شود $a + 3$.

به کمک $-1 < a < 1$ ، محدوده عرض از مبدأ درمی‌آید:

$$-1 < a < 1 \xrightarrow{+3} 2 < a + 3 < 4 \Rightarrow 2 < \text{عرض از مبدأ} < 4$$

۹۸. گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱. $y = \sqrt{-2x + 4}$ با شرط $a < 0$ ، اکیداً نزولی است، پس اکیداً نزولی می‌باشد.

۲. چون توان فرد است، منفی را می‌توانیم به داخل پرانتز ببریم:

$$y = -(2 - x)^3 - 1 = (x - 2)^3 - 1$$

توابع به فرم $y = a(x + \alpha)^3 + \beta$ با شرط $a > 0$ اکیداً صعودی هستند، پس این تابع اکیداً صعودی است.

۳. تابع لگاریتمی $y = \log_{1/2} x$ ، چون مبنایش بین صفر و ۱ است، اکیداً نزولی است.

۴. می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. پس با تابع نمایی $y = (\frac{\sqrt{3}}{2})^x$ طرفیم که چون پایه‌اش بین ۰ و ۱ است، تابعی اکیداً نزولی محسوب می‌شود.

۹۹. گزینه ۲ تابع نمایی $y = A^x$ با شرط $A > 1$ ، تابعی صعودی (یا

اکیداً صعودی) است. پس در تابع $y = (\frac{k+1}{3-k})^x$ ، باید پایه بزرگتر از ۱ باشد:

$$\frac{k+1}{3-k} > 1 \Rightarrow \frac{k+1}{3-k} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{k+1-3+k}{3-k} > 0 \Rightarrow \frac{2k-2}{3-k} > 0$$

ریشه صورت ۱ و ریشه مخرج ۳ است. جدول تعیین علامت می‌کشیم:

	۱	۳	
+	-	+	-

$k \in (1, 3)$

قسمت‌های مثبت را می‌خواهیم:

$$\max(b - a) = 3 - 1 = 2$$

پس:

۱۰۰. گزینه ۲ برای آن که تابع $y = A^x$ نزولی باشد باید $0 < A < 1$ باشد.

اشاره

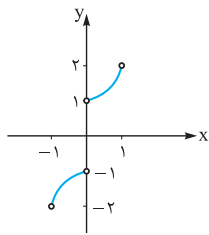
اگر در صورت سؤال، می‌گفت تابع نمایی فلان، نزولی باشد،

شرطمان $0 < A < 1$ می‌شد. پس در تابع $f(x) = (\frac{3m+1}{4})^x$ برای

نزولی شدن، باید:

$$0 < \frac{3m+1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} 0 < 3m+1 \leq 4 \xrightarrow{-1} -1 < 3m \leq 3 \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3} < m \leq 1$$

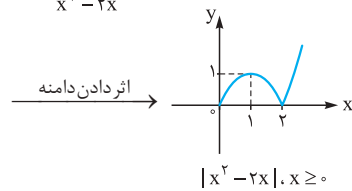
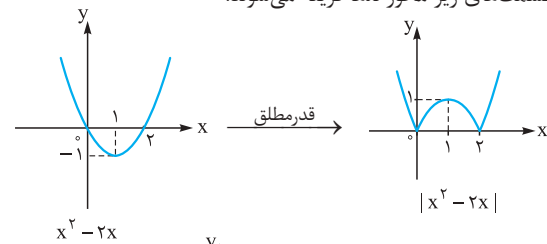
پس m دو مقدار صحیح دارد: صفر و ۱



تابع را در دامنه $\{0\} - (-1, 1)$ رسم می‌کنیم:

نمودار f فقط رو به بالا حرکت کرده، پس صعودی اکید (یا صعودی) است.

۱۰۹. گزینه ۳ ابتدا سهمی $y = x(x-2)$ را با داشتن ریشه‌هایش $(x=2, x=0)$ و دهانه رو به بالا رسم می‌کنیم. بعد که قدم‌مطلق را اثر می‌دهیم، قسمت‌های زیر محور x ها قرینه می‌شوند:



نمودار آخر در بازه $(1, 2)$ یا $[1, 2]$ نزولی اکید است، پس:

$$\max(b-a) = 2-1 = 1$$

۱۱۰. گزینه ۳ اول تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = x|x-2| = \begin{cases} x(x-2) & x \geq 2 \\ -x(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

هر دو ضابطه سهمی با ریشه‌های صفر و ۲ هستند. نمودار را رسم می‌کنیم:

تابع رسم‌شده در بازه $[1, 2]$ نزولی اکید است.

خطوط داده‌شده در گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

فقط خط $y = \frac{a}{b}$ یعنی $y = \frac{1}{3}$ ، نمودار f را در ۳ نقطه قطع می‌کند.

۱۱۱. گزینه ۲ تابع $\frac{f}{g}$ را می‌نویسیم:

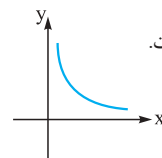
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 + x^2}{|x|} = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2}{x} & x > 0 \\ \frac{x^3 + x^2}{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + x & x > 0 \\ -(x^2 + x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x(x+1) & x > 0 \\ -x(x+1) & x < 0 \end{cases}$$

هر دو ضابطه سهمی با ریشه‌های $x=0$ و $x=-1$ هستند. رأس هر دو سهمی هم میانگین ریشه‌ها یعنی $x = -\frac{1}{2}$ است.

نمودار $\frac{f}{g}$ را رسم می‌کنیم:

پس تابع $\frac{f}{g}$ در بازه $(-\frac{1}{2}, 0)$ نزولی است.

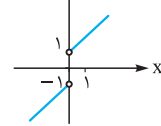


پس ضابطه f ، به صورت $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه $x > 0$ است.

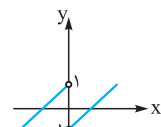
نمودارش به شکل روبه‌رو است:

پس f ، همواره نزولی است.

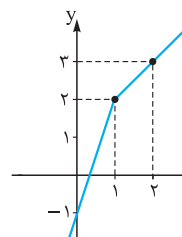
۱۰۶. گزینه ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



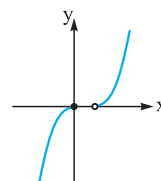
$$f(x) = \frac{|x|}{x} + x = \begin{cases} 1+x & x > 0 \\ -1+x & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = 2x - |x-1| = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودارها، $f(x) = x - \frac{x}{|x|}$ غیریکنوا است و بقیه تابع‌ها صعودی اکید هستند.

۱۰۷. گزینه ۴ نمودار تمام توابع را رسم می‌کنیم:

۱ غیریکنوا $y = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$

۲ شکل بالا را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. $y = -x^2|x| \Rightarrow$

غیریکنوا $y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

۳ اکیداً صعودی $y = -x|x| \Rightarrow$

شکل بالا را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. $y = x|x| \Rightarrow$

اکیداً نزولی $y = -x|x| \Rightarrow$

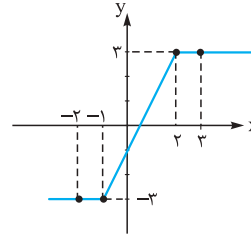
۱۰۸. گزینه ۱ با توجه به ریشه قدم‌مطلق $(x=0)$ ، تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = x|x| + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x(x) + \frac{x}{x} & x > 0 \\ x(-x) + \frac{x}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ -x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۱۱۲. گزینه ۳ نمودار رسم می‌کنیم. اگر یادتان باشد شکل این توابع، آشنایی می‌شود! کافی است چهارتا نقطه بدهیم:

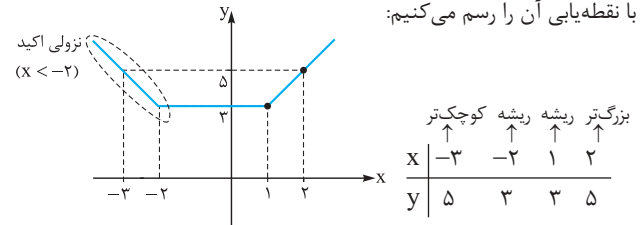
	کوچکتر	ریشه	ریشه	بزرگتر
x	-۲	-۱	۲	۳
y	-۳	-۳	۳	۳

این تابع در بازه $[-۱, ۲]$ یا $(-۱, ۲)$ اکیداً صعودی است.



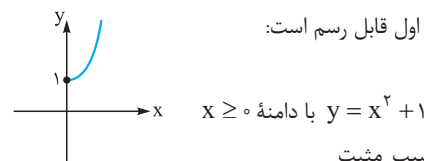
اشاره اگر جای «اکیداً صعودی» می‌گفت «صعودی»، جواب $\mathbb{R}$ می‌شد.

۱۱۳. گزینه ۱ تابع $f(x) = |x+۲| + |x-۱|$ یک تابع گلدانی است. با نقطه‌یابی آن را رسم می‌کنیم:

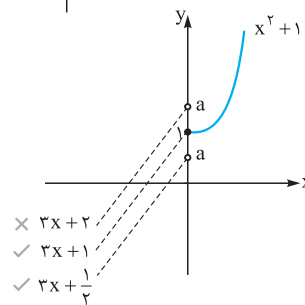


پس f در بازه $(-\infty, -۲)$ نزولی اکید است.

۱۱۴. گزینه ۲ ضابطه اول قابل رسم است:



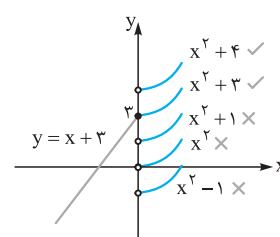
ضابطه دوم، یک خط با شیب مثبت می‌باشد (یعنی صعودی است) که عرض از مبدأش a است. باید $a \leq ۱$ انتخاب شود تا تابع صعودی اکید باشد:



پس حداکثر مقدار a برابر با ۱ است.

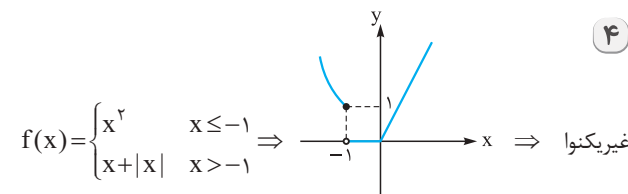
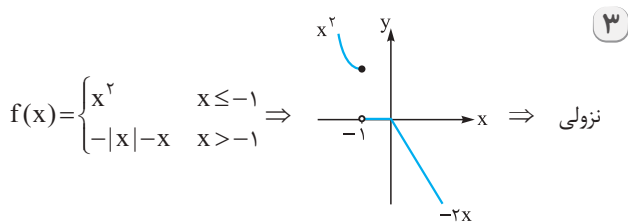
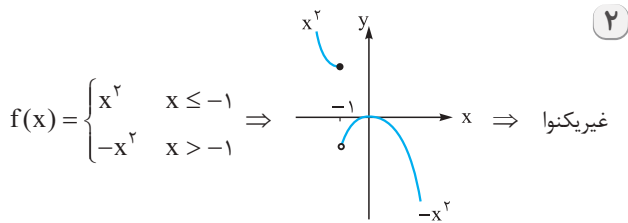
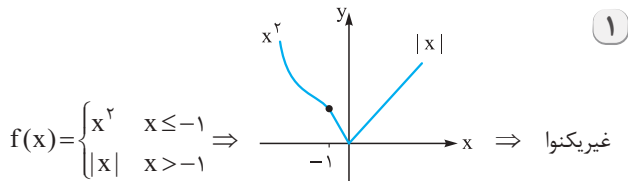
۱۱۵. گزینه ۳ به ازای $x \leq ۰$ ، عبارت داخل قدرمطلق منفی می‌شود، پس ضابطه بالا این‌جوری می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x+۳ & x \leq ۰ \\ x^2+k & x > ۰ \end{cases}$$



ضابطه اول را می‌توانیم رسم کنیم. ضابطه دوم هم قسمت راست سهمی x^2 است که با توجه به مقدار k ، از مبدأ بالا یا پایین می‌رود. با توجه به نمودار، فقط وقتی $k \geq ۳$ انتخاب شود، نمودار رو به بالا می‌رود و صعودی اکید می‌شود.

۱۱۶. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -۱ \\ g(x) & x > -۱ \end{cases}$ را به ازای هر کدام از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:



۱۱۷. گزینه ۳ در توابع $|x|$ خط $\pm y$ شرط اکیداً یکنوایی آن است که شیب هر دو ضابطه، هم‌علامت باشد.

۱ $y = |۲x| + x = \begin{cases} ۲x+x & x \geq ۰ \\ -۲x+x & x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۳x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$

۲ $y = |۲x-۴| - x = \begin{cases} (۲x-۴)-x & x \geq ۲ \\ -(۲x-۴)-x & x < ۲ \end{cases} = \begin{cases} x-۴ & x \geq ۲ \\ -۳x+۴ & x < ۲ \end{cases}$

۳ $y = |x+۱| + ۲x = \begin{cases} (x+۱)+۲x & x \geq -۱ \\ -(x+۱)+۲x & x < -۱ \end{cases} = \begin{cases} ۳x+۱ & x \geq -۱ \\ x-۱ & x < -۱ \end{cases}$

۴ $y = |x-۱| + x = \begin{cases} (x-۱)+x & x \geq ۱ \\ -(x-۱)+x & x < ۱ \end{cases} = \begin{cases} ۲x-۱ & x \geq ۱ \\ ۱ & x < ۱ \end{cases}$

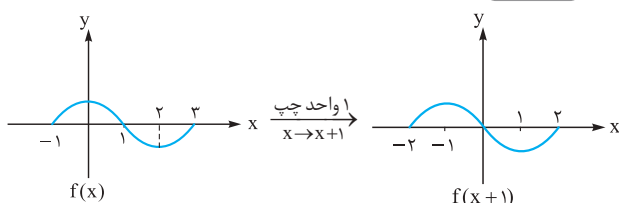
فقط در **۳**، شیب هر دو ضابطه هم‌علامت (هر دو مثبت) شد، پس اکیداً یکنواست.

اشاره در **۴**، شیب یکی از ضابطه‌ها ۲ و شیب دیگری صفر شد، پس صعودی (یکنوا) است ولی اکید نیست.

۱۱۸. گزینه ۳ برای آن که تابع $|x|$ خط $\pm y$ ، تابعی غیریکنوا باشد باید شیب ضابطه‌هایش هم‌علامت نباشد.

با توجه به ضابطه $y = ax + ۴ - |\frac{x}{۲} + ۱|$ ، شیب ضابطه‌ها $a - \frac{۱}{۲}$ و $a + \frac{۱}{۲}$ است. برای هم‌علامت نبودن، باید ضربشان منفی شود:

۱۱۹. گزینه ۴ مرحله به مرحله از نمودار $f(x)$ به $f(-x+۱)$ می‌رسیم.



۱۲۲. گزینه ۲ ضابطه اول f را ساده تر می نویسیم:

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

پس کل ضابطه f به این صورت می شود:

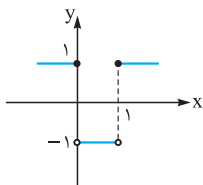
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ادغام ضابطه اول و سوم}} \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

با داشتن ضابطه $g(x) = x^2 - x$ ، ضابطه $f \circ g$ را تشکیل می دهیم.

جای تمام x های ضابطه f ، $x^2 - x$ قرار می دهیم:

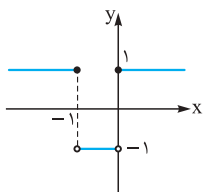
$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 & x^2 - x \geq 0 \\ -1 & x^2 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

نمودار $f \circ g$ را رسم می کنیم:



نمودار بالا را ۱ واحد به چپ می بریم تا به

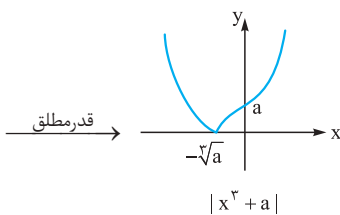
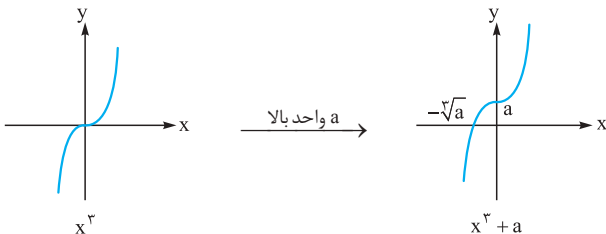
نمودار $(f \circ g)(x+1)$ برسیم:



تابع نهایی در بازه $(-1, +\infty)$ رو به بالا یا ثابت است، پس صعودی است. در نتیجه کمترین مقدار a برابر -1 است.

۱۲۳. گزینه ۲ نمودار تابع $y = x^3 + a$ ، همان نمودار تابع $y = x^3$

که a واحد بالا (چون $a \in \mathbb{N}$) رفته است. پس نمودار $f(x) = |x^3 + a|$ این شکلی می شود:



برای به دست آوردن محل برخورد با محور x ها، y را صفر می دهیم:

$$x^3 + a = 0 \Rightarrow x^3 = -a \Rightarrow x = -\sqrt[3]{a}$$

تابع نهایی در بازه $(-\infty, \sqrt[3]{a}]$ و هر بازه ای که زیرمجموعه اش باشد، نزولی اکید است.

پس الان $(-\infty, a-2)$ باید زیرمجموعه $(-\infty, \sqrt[3]{a})$ باشد، یعنی $a-2$ باید

$$a-2 \leq -\sqrt[3]{a} \Rightarrow a + \sqrt[3]{a} - 2 \leq 0$$

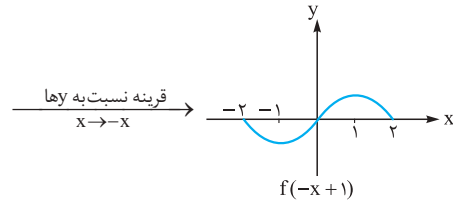
کوچک تر یا مساوی از $-\sqrt[3]{a}$ باشد. برای حل نامعادله، تغییر متغیر $\sqrt[3]{a} = t$ را می دهیم:

$$t^3 + t - 2 \leq 0 \xrightarrow{\text{بر } t-1 \text{ بخش پذیر}} (t-1)(t^2 + t + 2) \leq 0$$

$$(t-1)(t^2 + t + 2) \leq 0 \xrightarrow{\text{همواره مثبت}} t-1 \leq 0 \Rightarrow t \leq 1$$

$$\Rightarrow t \leq 1 \xrightarrow{t = \sqrt[3]{a}} \sqrt[3]{a} \leq 1 \Rightarrow a \leq 1$$

پس a فقط یک مقدار طبیعی $a = 1$ را می تواند داشته باشد.



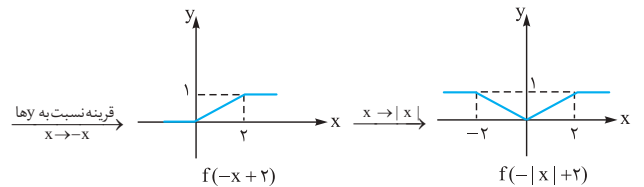
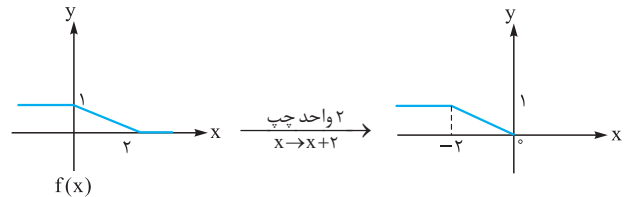
تابع نهایی در بازه های $[-2, -1]$ و $[1, 2]$ اکیداً نزولی است.

۱۲۰. گزینه ۴ با توجه به ضابطه $g(x) = -|x| + 2$ ، ضابطه $f \circ g$ به

$$f(g(x)) = f(-|x| + 2)$$

صورت مقابل می شود:

مرحله به مرحله از نمودار $f(x)$ به $f(-|x| + 2)$ می رسمیم.



نمودار نهایی در بین گزینه های داده شده در بازه $(1, 5)$ صعودی است (چون یا ثابت بوده یا رو به بالا حرکت کرده).

۱۲۱. گزینه ۴ اگر جای x^2 ، $|x|$ را بنویسیم، ضابطه f ساده می شود:

$$f(x) = \frac{|x| + x^2}{1 + |x|} = \frac{|x| + |x|^2}{1 + |x|} = \frac{|x|(1 + |x|)}{1 + |x|} = |x|$$

با توجه به این که مخرج f ریشه نداشت، پس دامنه هم $\mathbb{R}$ می ماند.

با توجه به $f(x) = |x|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 1$ ، ضابطه $f \circ g$ را تشکیل

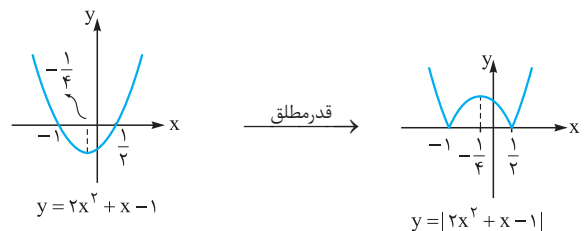
$$f(g(x)) = |g(x)| = |2x^2 + x - 1|$$

می دهیم:

اول سهمی $y = 2x^2 + x - 1$ را رسم می کنیم و بعد قدرمطلق را اثر می دهیم. با توجه به رابطه $a + c = b$ ، ریشه های سهمی -1 و $\frac{1}{2}$ هستند.

$$x_S = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

طول رأس برابر است با:



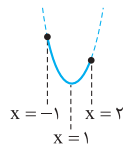
با توجه به منفی بودن $-a^2$ و $-b^2$ ، باید دنبال یک بازه دو سر منفی باشیم.

تابع نهایی در بازه $[-1, -\frac{1}{4}]$ صعودی است، پس:

$$\begin{cases} -a^2 = -1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ -b^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

بیشترین مقدار $b - a$ زمانی است که $b = \frac{1}{2}$ و $a = -1$ باشد:

$$\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2} = 1.5$$



بازه $[-1, 2]$ را روی سهمی مشخص می‌کنیم:

قسمت باقی‌مانده، ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۱۲۸. گزینه ۴ دامنه تابع از حل نامعادله $|x-1| < 2$ به دست می‌آید:

$$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \xrightarrow{+1} -1 < x < 3$$

ریشه‌های سهمی $f(x) = x^2 - 2x - 3$ را حساب می‌کنیم:

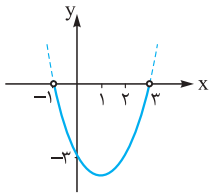
$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x_S = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

طول رأس هم میانگین ریشه‌ها است:

$$y_S = f(1) = -4$$

سهمی را رسم می‌کنیم:



در دامنه داده‌شده، سهمی غیریکنوا است

و چون زیر محور x هاست، پس مقادیرش

منفی است.

۱۲۹. گزینه ۴ طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2m+1}{2}$$

ضریب x^2 مثبت است، پس دهانه سهمی رو به بالاست:



برای آن که سهمی در بازه $[-1, 2]$ غیریکنوا باشد، باید x_S در این بازه قرار گیرد:

$$-1 < x_S < 2 \Rightarrow -1 < \frac{2m+1}{2} < 2$$

$$\xrightarrow{\times 2} -2 < 2m+1 < 4 \xrightarrow{-1} -3 < 2m < 3$$

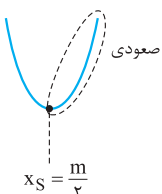
$$\xrightarrow{\div 2} -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$$

۱۳۰. گزینه ۲ اول طول رأس سهمی $y = (\frac{1}{m})x^2 - x + 3$ را پیدا می‌کنیم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(\frac{1}{m})} = \frac{m}{2}$$

چون علامت a را نداریم، باید در دو حالت بررسی کنیم:

(۱) ضریب x^2 یعنی $\frac{1}{m}$ مثبت باشد ($m > 0$). در این حالت سهمی این‌شکلی است:

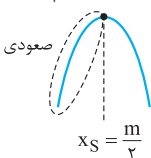


برای آن که در بازه $[1, +\infty)$ صعودی باشد باید ۱ روی رأس باشد یا بعد از رأس، پس:

$$1 \geq \frac{m}{2} \Rightarrow m \leq 2$$

از اشتراک دو شرط $m > 0$ و $m \leq 2$ به $0 < m \leq 2$ می‌رسیم.

(۲) ضریب x^2 یعنی $\frac{1}{m}$ منفی باشد ($m < 0$). در این حالت سهمی این‌شکلی است:



۱۲۴. گزینه ۲ زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$(1, 1), (\sqrt{2}, m^2 - 2), (3, 6), (1, 0), (2, 0)$$

در تابع اکیداً صعودی، با افزایش x ، باید y ها هم زیاد شوند:

$$1 < m^2 - 2 < 6 < 2 < 0$$

فقط باید $6 < m^2 - 2 < 1$ را حل کنیم:

$$1 < m^2 - 2 < 6 \xrightarrow{+2} 3 < m^2 < 8 \Rightarrow \sqrt{3} < |m| < 2\sqrt{2} \xrightarrow{\begin{matrix} \sqrt{3}=1/\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}=2/\sqrt{2} \end{matrix}} \begin{cases} 1/\sqrt{3} < m < 2/\sqrt{2} \\ \text{یا} \\ -2/\sqrt{2} < m < -1/\sqrt{3} \end{cases}$$

پس m فقط دو مقدار صحیح ± 2 را می‌گیرد.

۱۲۵. گزینه ۴ زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$(-1, a+1), (1, 3a+1), (2, 4a+3)$$

در تابع صعودی، با افزایش x ، باید y ها یا زیاد شوند یا ثابت بمانند:

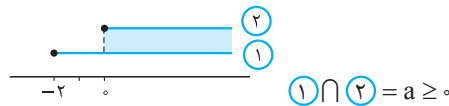
$$\begin{matrix} (2) \\ a+1 \leq 3a+1 \leq 4a+3 \\ (1) \end{matrix}$$

نامعادله بالا به دو نامعادله تقسیم می‌شود:

$$1) a+1 \leq 3a+1 \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$2) 3a+1 \leq 4a+3 \Rightarrow a \geq -2$$

اشتراک می‌گیریم:



۱۲۶. گزینه ۳ برای تشکیل $f+g$ ، اول دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-3, 1, 5\}$$

در x های مشترک، مقدار $f+g$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix} x = -3: f(-3) + g(-3) = m + 12 \\ x = 1: f(1) + g(1) = (m^2 - 1) + 1 = m^2 \\ x = 5: f(5) + g(5) = -m + 2 \end{matrix}$$

در تابع نزولی با افزایش x ، باید مقادیر y کم شوند یا ثابت بمانند:

$$\begin{matrix} (2) \\ -m+2 \leq m^2 \leq m+12 \\ (1) \end{matrix}$$

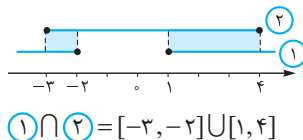
دو نامعادله را حل می‌کنیم: $1) m^2 \geq -m+2 \Rightarrow m^2 + m - 2 \geq 0$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1) \geq 0 \xrightarrow{\text{نابینا ریشه‌ها}} m \geq 1 \text{ یا } m \leq -2$$

$$2) m^2 \leq m+12 \Rightarrow m^2 - m - 12 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m-4)(m+3) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین}} -3 \leq m \leq 4$$

اشتراک می‌گیریم:



$$1) \cap 2) = [-3, -2] \cup [1, 4]$$

$$\xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} \{-3, -2, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \text{مقدار } 6$$

۱۲۷. گزینه ۲ طول رأس سهمی $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ مهم است:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

دهانه هم که رو به بالاست. پس شکلش این‌جوری است:



چون می‌خواهیم تابع اکیداً یکنوا باشد، پس تابع ما نباید تابع ثابت باشد.

برای آن که تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ثابت نباشد، باید شرط $ad-bc \neq 0$ را داشته

باشد، پس در تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x-a}$ باید:

$$(1)(-a) - (1)(2) \neq 0 \Rightarrow -a-2 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$$

از دو شرط $a \leq 2$ و $a \neq -2$ به مجموعه $\{-2\} - (-\infty, 2]$ می‌رسیم.

۱۳۶. گزینه ۳ از آن جایی که تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{2x+b}{3x+d}$ در

بازه‌های $(-\infty, -2)$ و $(-2, +\infty)$ یکنوا اکید است، نتیجه می‌گیریم عدد -2 ، ریشهٔ مخرج است:

تا این‌جا ضابطهٔ f به شکل $f(x) = \frac{2x+b}{3x+6}$ درآمد. این تابع، محور x ها را در

نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b=-2$$

با جای‌گذاری $d=6$ و $b=-2$ ، یکنوایی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ نزولی اکید $\rightarrow$ نمایی با پایهٔ بین صفر و ۱ $y = 6^{-x} = (\frac{1}{6})^x$

۲ نزولی اکید $\rightarrow$ نمودار $y = -2x^3$

$$۳ y = 6x - 2|x| = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 8x & x < 0 \end{cases}$$

چون شیب هر دو ضابطه مثبت شد و تابع ناپویستگی ندارد، پس صعودی اکید است.

۴ نزولی اکید $\rightarrow$ شیب منفی $y = -2x + 6$

پس جواب ۳ است.

۱۳۷. گزینه ۴ چون f نزولی است، پس بعد از حذف f ، جهت نامساوی

عوض می‌شود: $2a-1 < 5-a \xrightarrow{\text{تغییر جهت}} f(2a-1) > f(5-a)$

$$\Rightarrow 3a < 6 \Rightarrow a < 2$$

۱۳۸. گزینه ۳ برای دامنهٔ تابع رادیکالی g ، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی

صفر قرار دهیم: $f(2x+1) - f(x-2) \geq 0 \Rightarrow f(2x+1) \geq f(x-2)$

حالا باید بگوییم چون f نزولی است، پس با حذف f ها، جهت عوض می‌شود:

$$f(2x+1) \geq f(x-2) \xrightarrow{\text{نزولی } f} 2x+1 \leq x-2 \Rightarrow x \leq -3$$

پس، $D_g = (-\infty, -3]$.

۱۳۹. گزینه ۱ $f(x) = \frac{-x+1}{x}$ یک تابع هموگرافیک است. $ad-bc$

$$(-1)(0) - (1)(1) = -1$$

را حساب می‌کنیم:

ریشهٔ مخرج هم $x=0$ است.

پس این تابع در بازه‌های قبل و بعد ریشهٔ مخرج، اکیداً نزولی است.

با توجه به این‌که $1+x^4$ و $3+x^2$ هر دو بزرگ‌تر از صفر هستند، پس هر دو

در شاخهٔ $(0, +\infty)$ قرار دارند. می‌خواهیم نمودار تابع $f(1+x^4)$ بالای نمودار

$$f(1+x^4) > f(3+x^2) \quad \text{باشد: } f(3+x^2)$$

چون f اکیداً نزولی است (در شاخهٔ $(0, +\infty)$)، پس با حذف f ها، جهت عوض

$$1+x^4 < 3+x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 2 < 0$$

می‌شود:

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x^2-2)(x^2+1) < 0$$

همواره مثبت

که با کمی دقت متوجه می‌شویم که امکان ندارد تابع در بازهٔ $[1, +\infty)$ صعودی

باشد، چون تابع در بازهٔ $[\frac{m}{p}, +\infty)$ نزولی است، هر چه که باشد باز هم امکان

ندارد که با $(1, +\infty)$ اشتراکی پیدا نکند! پس این حالت کلاً اتفاق نمی‌افتد.

حالا بین جواب‌های دو حالت، اجتماع می‌گیریم: $(0, 2] \cup \emptyset = (0, 2]$

۱۳۱. گزینه ۲ ضابطهٔ سهمی را با داشتن ریشه‌هایش می‌نویسیم:

$$y = a(x-6)(x+2)$$

سهمی رسم‌شده از نقطهٔ $(0, 6)$ می‌گذرد، پس: $a = \frac{-1}{p} \Rightarrow a = \frac{-1}{6}$

در نتیجه ضابطهٔ سهمی به این شکل می‌شود:

$$f(x) = \frac{-1}{6}(x-6)(x+2) = \frac{-1}{6}x^2 + 2x + 6$$

حالا ضابطهٔ g را تشکیل می‌دهیم: $g(x) = kx^2 + 4(\frac{-1}{6}x^2 + 2x + 6)$

$$= kx^2 - 2x^2 + 8x + 24 = (k-2)x^2 + 8x + 24$$

می‌دانیم توابع درجهٔ ۲، یکنوا نیستند، پس برای آن‌که g یکنوا باشد باید ضریب

$$k-2=0 \Rightarrow k=2$$

۱۳۲. گزینه ۴ ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم: $x-3=0 \Rightarrow x=3$

پس تابع در بازه‌های $(-\infty, 3)$ و $(3, +\infty)$ یکنواست.

با توجه به بازهٔ یکنوایی $(-\infty, a)$ ، حداکثر a برابر ۳ است. (دقت کنید که چون

$$ad-bc = -7 < 0$$

پس تابع روی هر کدام از بازه‌ها نزولی است.)

۱۳۳. گزینه ۱ ریشهٔ مخرج تابع $y = \frac{-1}{x-2}$ را پیدا می‌کنیم.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

پس تابع در بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ اکیداً یکنواست.

با توجه به بسته‌بودن انتهای بازهٔ $(-\infty, a]$ ، حداکثر مقدار صحیح a ، عدد ۱

است نه ۲.

(دقت کنید که $ad-bc = 1 > 0$ ، پس تابع در هر یک از بازه‌های

$$(-\infty, +\frac{d}{c}), (+\frac{d}{c}, +\infty)$$

۱۳۴. گزینه ۱ $ad-bc$ باید مثبت باشد.

$$۱ y = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow ad-bc = 3+1=4 \checkmark$$

$$۲ y = \frac{2x-3}{x+1} \Rightarrow ad-bc = 2+3=5 \checkmark$$

$$۳ y = \frac{-x+1}{x+3} \Rightarrow ad-bc = -3-1=-4 \times$$

$$۴ y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow ad-bc = -2-1=-3 \times$$

در بین دو گزینهٔ باقی‌مانده باید چک کنیم، ریشهٔ مخرج تابع، داخل بازهٔ $(-2, +\infty)$ نباشد.

$$۱ y = \frac{x-1}{x+3} \xrightarrow{x=-2} -3 \notin (-2, +\infty) \times$$

$$۲ y = \frac{2x-3}{x+1} \xrightarrow{x=-1} -1 \in (-2, +\infty) \times$$

پس جواب، ۱ است.

۱۳۵. گزینه ۴ ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم:

$$2x-a=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2}$$

کافی است ریشهٔ مخرج در بازهٔ $(1, +\infty)$ نباشد، پس $\frac{a}{2}$ باید از ۱ کوچک‌تر یا

$$\frac{a}{2} \leq 1 \Rightarrow a \leq 2$$

مساوی باشد:

پس: $D_g = [0, 1] \cup [2, +\infty)$ دامنه g و شامل تمام اعداد طبیعی می باشد.

راه II می توانیم برای f یک تابع ساده (مثلاً خطی) مثال بزنییم که اکیداً

صعودی باشد و محور طول ها را در نقطه $x = 2$ قطع کند یعنی $f(x) = x - 2$.

حالا دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$ را پیدا می کنیم:

$$y = \sqrt{(x^2 - x)(x - 2)} = \sqrt{x(x - 1)(x - 2)}$$

$$x(x - 1)(x - 2) \geq 0$$

حالا جدول تعیین علامت می کشیم:

x		0	1	2	
	-	+	-	+	
		جواب		جواب	

$$D_g = [0, 1] \cup [2, +\infty)$$

پس:

گزینه ۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می دهیم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) \geq f(x)$$

$f(x) = 2^x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف f ها، علامت برنمی گردد:

$$\frac{1}{x} \geq x$$

نامعادله به دست آمده را حل می کنیم:

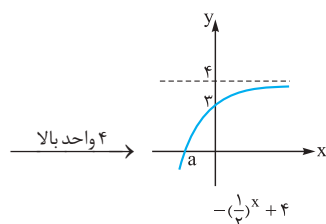
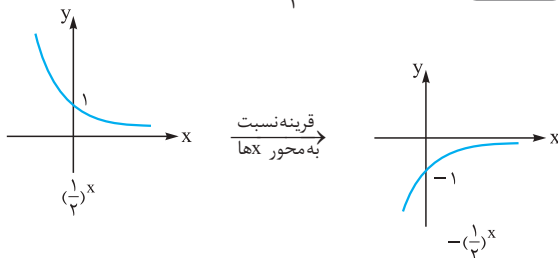
$$\frac{1}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(1 - x)(1 + x)}{x} \geq 0$$

جدول تعیین علامت می کشیم:

x		-1	0	1	
	+	-	+	-	
کل		جواب		جواب	

پس: $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

گزینه ۲ نمودار تابع $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ را می کشیم:



محل برخورد تابع نهایی با محور x ها مهم است:

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow x = -2$$

پس f تابعی اکیداً صعودی با ریشه $x = -2$ است.

برای محاسبه دامنه تابع رادیکالی $g(x) = \sqrt{x f(x)}$ ، زیرش را بزرگتر یا

مساوی صفر قرار می دهیم:

$$x f(x) \geq 0$$

جدول تعیین علامت می کشیم:

	-۲	۰	
x	-	-	+
f(x)	-	+	+
کل	+	-	+

جواب

جواب

$$D_g = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 0)$$

پس:

$$\Rightarrow x^2 - 2 < 0 \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow |x| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

فقط بازه $(-1, 1)$ ، زیرمجموعه بازه $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ است.

گزینه ۱ با توجه به ضابطه $f(x) = -x^3 + 2$ ، می فهمیم f تابعی

اکیداً نزولی است.

$$f(f(x)) > f(x^2)$$

نامعادله را به شکل روبه رو می نویسیم:

$$f(x) < x^2$$

با حذف f ها، جهت نامساوی عوض می شود:

حالا جای $f(x)$ ، ضابطه اش را می نویسیم:

$$-x^3 + 2 < x^2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2 > 0$$

عبارت $x^3 + x^2 - 2$ به ازای $x = 1$ صفر می شود، پس بر $x - 1$ بخش پذیر است.

اگر $x^3 + x^2 - 2$ را بر $x - 1$ تقسیم کنیم، خارج قسمت $x^2 + 2x + 2$

می شود، پس: $(x - 1)(x^2 + 2x + 2) > 0$

چون دلتای $x^2 + 2x + 2$ منفی و ضرب x^2 اش مثبت است، پس همواره

مثبت است و می توانیم حذفش کنیم:

$$(x - 1)(x^2 + 2x + 2) > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

گزینه ۱ **راه I** برای f یک نمودار

اکیداً نزولی که محور x ها را در ۳ قطع کند، رسم می کنیم:

برای دامنه تابع رادیکالی g ، باید زیرش را بزرگتر یا

مساوی صفر قرار دهیم:

$$x f(x) \geq 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

جدول می کشیم:

x		0	3	
	-	+	+	+
$f(x)$	+	+	-	-
کل		جواب		

جدول می کشیم:

$$D_g = [0, 3]$$

راه II می توانیم برای f یک تابع مثال بزنییم. ساده ترین تابع، تابع خطی

است پس $f(x) = -x + 3$ را در نظر می گیریم (۳+ را برای این نوشتیم که

تابع، محور x ها را در نقطه $x = 3$ قطع کند). حالا دامنه تابع $y = \sqrt{x f(x)}$

$$y = \sqrt{x(-x + 3)}$$

را پیدا می کنیم:

$$x(-x + 3) \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 3$$

گزینه ۱

راه I برای f یک نمودار اکیداً صعودی که محور

x ها را در ۲ قطع کند، رسم می کنیم:

برای دامنه تابع رادیکالی $g(x) = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$ ،

باید زیرش را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$(x^2 - x)f(x) \geq 0 \Rightarrow x(x - 1)f(x) \geq 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

جدول تعیین علامت می کشیم:

x		0	1	2	
	-	-	-	+	+
$f(x)$	-	-	-	+	+
$(x^2 - x)$	+	-	+	+	+
کل		جواب		جواب	

برای به دست آوردن بُرد تابع اکیداً صعودی که ناپیوستگی ندارد، مقادیر تابع را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه حساب می‌کنیم. دامنه $\sqrt{x}$ بازه $[0, +\infty)$ و دامنه f ، بازه $(2, 5)$ است که اشتراکشان $(2, 5)$ می‌شود، پس:

$$g(x) = \sqrt{x} - f(x) \xrightarrow{\text{بُرد}} \begin{cases} g(2) = \sqrt{2} - f(2) = \sqrt{2} - 3 \\ g(5) = \sqrt{5} - f(5) = \sqrt{5} + 1 \end{cases}$$

پس بردمان محدوده $[\sqrt{2} - 3, \sqrt{5} + 1]$ است که تقریباً $[-1/6, 3/2]$ می‌شود. الان اگر برکت بگیریم، بردمان شامل $2, -1, 0, 1, 2, 3$ می‌شود.

گزینه ۴ دقت کنید دامنه‌های هر دو تابع محدود است. هر دو تابع را بررسی می‌کنیم.

$$(1) f(x) = \frac{-1}{x} + \sqrt{x} \quad \text{دامنه } f \text{ بازه } (0, +\infty) \text{ است.}$$

نمودار $y = \frac{-1}{x}$ در این بازه به صورت روبه‌رو است:

$$f(x) = \frac{-1}{x} + \sqrt{x} \Rightarrow \text{صعودی}$$

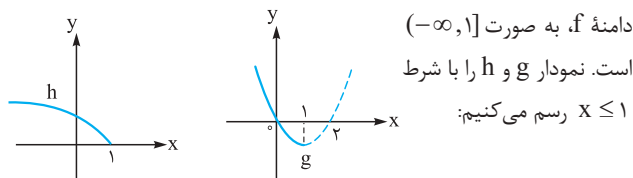
$$(2) g(x) = |x| + \sqrt{-x} \quad \text{دامنه } g, \text{ بازه } (-\infty, 0] \text{ است.}$$

پس جای $|x|$ می‌توانیم $-x$ قرار دهیم:

$$g(x) = -x + \sqrt{-x} \Rightarrow \text{نزولی}$$

گزینه ۲ تابع f را به صورت جمع دو تابع $g(x) = x^2 - 2x$ و $h(x) = \sqrt{1-x}$ می‌بینیم:

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 2x}_{g(x)} + \underbrace{\sqrt{1-x}}_{h(x)}$$



هر دو تابع، اکیداً نزولی هستند. چون جمع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است، پس f اکیداً نزولی است.

گزینه ۲ دامنه تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x} &\Rightarrow x \geq 0 \\ 2\sqrt{x^2 - 1} &\Rightarrow x \neq \pm 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

در دو بازه $[0, 1)$ و $(1, +\infty)$ ، یکنوایی تابع را بررسی می‌کنیم.

(۱) تابع $y = 2\sqrt{x}$ در هر دو بازه بالا صعودی اکید است.

(۲) تابع $y = \frac{-3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ را مرحله‌به‌مرحله بررسی می‌کنیم:

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{صعودی اکید}} y = x^2 - 1$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}} y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = \frac{-3}{2\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{صعودی اکید}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی اکید، تابعی صعودی اکید است، پس

$$f(x) = \underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{صعودی اکید}} + \underbrace{\frac{-3}{2\sqrt{x^2 - 1}}}_{\text{صعودی اکید}} \quad \text{تابع } f(x) \text{ صعودی اکید است.}$$

گزینه ۲ همه جملات را بررسی می‌کنیم:

(الف) جمع تابع صعودی و نزولی، نامشخص است یعنی می‌تواند صعودی یا نزولی یا ثابت یا غیریکنوا شود. مثلاً اگر $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = -x - 1$ باشد، آن وقت $(f+g)(x) = 2x$ که تابعی صعودی است.

(ب) جمع صعودی اکید و صعودی، تابعی صعودی اکید است.

(پ) اگر g نزولی باشد، آن‌گاه $-g$ صعودی است، پس:

$$\text{صعودی اکید} = (\text{صعودی}) + \text{صعودی اکید} = f - g = f + (-g)$$

(ت) اگر f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، fg می‌تواند صعودی اکید یا نزولی اکید یا ثابت باشد:

$$\text{صعودی اکید} \Rightarrow (fg)(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x, g(x) = 2$$

$$\text{نزولی اکید} \Rightarrow (fg)(x) = -2x \Rightarrow f(x) = x, g(x) = -2$$

$$\text{ثابت} \Rightarrow (fg)(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x, g(x) = 0$$

پس دو جمله (ب) و (پ) درست بودند.

گزینه ۲ با فرض $g(x) = -x^3$ ، جای $f(-x^3)$ می‌توانیم بنویسیم $f \circ g$.

سؤال گفته f اکیداً نزولی است، از طرفی $g(x) = -x^3$ هم اکیداً نزولی است. با توجه به این که ضرب دو عدد منفی، عددی مثبت است: $(-)(-) \Rightarrow (+)$ ، $f \circ g$ پس:

گزینه ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

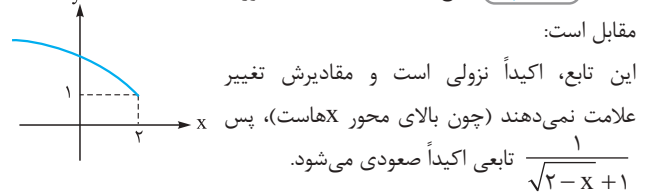
$$(1) f(x) + \sqrt{x} = \text{صعودی} + \text{صعودی} = \text{صعودی}$$

$$(2) g \circ g(x) \Rightarrow (-) \times (-) \times (+) = (+) \Rightarrow \text{صعودی}$$

$$(3) g(x^2) \Rightarrow (-) \times \text{نامشخص} \Rightarrow \text{نامشخص}$$

$$(4) (f \circ g \circ f)(x) \Rightarrow (+) \times (-) \times (+) \times (+) = - \Rightarrow \text{نزولی}$$

گزینه ۱ تابع $\sqrt{2-x} + 1$ به صورت



مقابل است:

این تابع، اکیداً نزولی است و مقادیرش تغییر

علامت نمی‌دهند (چون بالای محور x هاست)، پس

تابعی اکیداً صعودی می‌شود.

گزینه ۲ برای f یک ضابطه در نظر می‌گیریم؛ مثلاً $y = -(2^x)$.

f نزولی اکید و زیر محور x هاست.

حالا دو ضابطه را تشکیل می‌دهیم و با مقایسه مقادیر در $x = 1$ و $x = 2$ ، وضعیت یکنوایی را مشخص می‌کنیم (چون در گزینه‌ها غیریکنوا نداریم، مشکلی پیش نمی‌آید).

$$\text{اکیداً صعودی} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g(2) = 8 \end{cases} \Rightarrow g(x) = -x, f(x) = x, 2^x \Rightarrow$$

$$h(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{-2^{-x}} = \frac{1}{-(\frac{1}{2})^x} = -(2^x) \Rightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

گزینه ۱ با توجه به نمودار، $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی است، پس

$-f(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی جمع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی

اکیداً صعودی است:

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{اکید صعودی}} + \underbrace{(-f(x))}_{\text{اکید صعودی}}$$

دامنه به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} A = -1 \Rightarrow y = 2^{-1} + \frac{-1}{2^{-1}} &= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ A = 2 \Rightarrow y = 2^2 + \frac{-1}{2^2} &= 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{برد} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right]$$

پس: $b - a = \frac{15}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$

۱۵۸. گزینه ۱ | تابع $y = x$ و $y = \sqrt{x}$ توابعی اکیداً صعودی هستند، پس مجموعه‌شان هم اکیداً صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک است.

۱۵۴. گزینه ۲ | در تابع $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x-1}$ عامل $2x+1$ صعودی اکید و $\sqrt{x-1}$ هم صعودی اکید است. پس f هم صعودی اکید است؛ بنابراین برای پیدا کردن برد می‌توانیم نقاط ابتدا و انتهای دامنه را در تابع قرار دهیم. دامنه تابع f برابر است با بازه $[1, +\infty)$ ، پس بردش می‌شود:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 + 1 + \sqrt{0} = 3 \Rightarrow f \geq 3$$

$$\Rightarrow R_f = [3, +\infty)$$

پس برد تابع f شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ یعنی دو عدد طبیعی نیست.

۱۵۵. گزینه ۲ | تابع f از جمع دو عبارت اکیداً صعودی تشکیل شده، پس خودش هم اکیداً صعودی است:

$$f(x) = \underbrace{2\sqrt{2+x}}_{\text{اکیداً صعودی}} + \underbrace{(-\sqrt{-x+7})}_{\text{اکیداً صعودی}}$$

اکیداً صعودی

تابع f ، دو عبارت رادیکالی دارد، دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2+x} &\xrightarrow{\text{دامنه}} x \geq -2 \\ \sqrt{7-x} &\xrightarrow{\text{دامنه}} x \leq 7 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [-2, 7]$$

چون f اکیداً صعودی (و پیوسته) است، پس برای محاسبه برد باید مقدارش را در $x = -2$ و $x = 7$ حساب کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= 2\sqrt{0} - \sqrt{9} = -3 \\ f(7) &= 2\sqrt{9} - \sqrt{0} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \left[-3, 6\right]$$

a b

پس: $b - a = 6 - (-3) = 9$

۱۵۶. گزینه ۲ | توابع $-x^3$ و $\sqrt{-x+1}$ هر دو اکیداً نزولی هستند، پس مجموعه‌شان هم اکیداً نزولی است:

$$f(x) = \underbrace{-x^3}_{\text{اکیداً نزولی}} + \underbrace{(\sqrt{-x+1})}_{\text{اکیداً نزولی}}$$

اکیداً نزولی

چون f اکیداً نزولی (و پیوسته) است، پس برای محاسبه برد باید مقدارش را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه یعنی $x = -4$ و $x = -1$ حساب کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(-4) &= -(-4)^3 + \sqrt{4+1} = 67 \\ f(-1) &= -(-1)^3 + \sqrt{1+1} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = (3, 67]$$

بسته بسته
باز باز

پس: $b - a = 67 - 3 = 64$

۱۵۷. گزینه ۴ | ضابطه f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = 2\sqrt{9\cos^2 x - 1} - 2\sqrt{9\cos^2 x - 1}$$

$$f(x) = 2\sqrt{9\cos^2 x - 1} - \frac{1}{2\sqrt{9\cos^2 x - 1}}$$

توان منفی را اثر می‌دهیم:

محدوده تغییرات عبارت $2\sqrt{9\cos^2 x - 1}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\xrightarrow{\text{توان } 2} 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \\ \xrightarrow{\times 9} 0 \leq 9\cos^2 x \leq 9 &\xrightarrow{-1} -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8 \\ \xrightarrow{\text{فرجه } 3} -1 \leq \sqrt{9\cos^2 x - 1} \leq 2 \end{aligned}$$

با فرض $A = \sqrt{9\cos^2 x - 1}$ ، می‌دانیم: $-1 \leq A \leq 2$.

توابع $y = 2^A$ و $y = -\frac{1}{2^A}$ ، توابعی صعودی و پیوسته هستند، پس مجموعه‌شان نیز صعودی و پیوسته است:

برای به دست آوردن برد این تابع، کافی است مقدار تابع را در نقطه ابتدا و انتهای