



۷
۳۵

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر
پاسخنامه فصل اول

۴۷
۷۱

فصل دوم: هندسه
پاسخنامه فصل دوم



۸۳
۱۰۳

فصل سوم: تابع
پاسخنامه فصل سوم

۱۱۸
۱۴۹

فصل چهارم: مثلثات
پاسخنامه فصل چهارم



۱۶۱
۱۸۲

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی
پاسخنامه فصل پنجم

۱۹۲
۲۱۳

فصل ششم: حد و پیوستگی
پاسخنامه فصل ششم



۲۲۷
۲۴۰

فصل هفتم: آمار و احتمال
پاسخنامه فصل هفتم

۲۴۸
۲۵۲
۲۶۰
۲۶۸

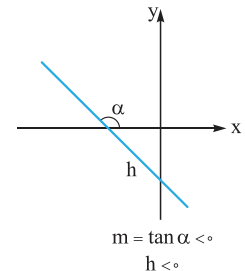
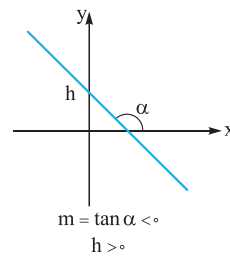
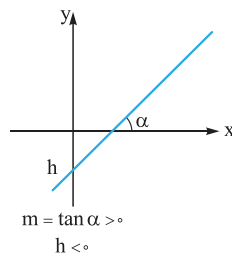
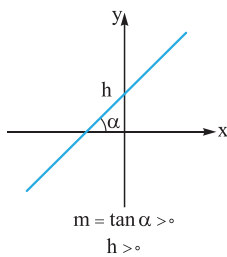
امتحان‌های نیم‌سال اول
پاسخنامه امتحان‌های نیم‌سال اول
امتحان‌های نیم‌سال دوم
پاسخنامه امتحان‌های نیم‌سال دوم



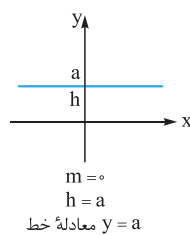
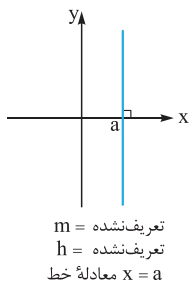
هندسه تحلیلی



معادله خط راست معادله هر خط راست به شکل $y = mx + h$ است (یعنی یک معادله درجه اول بر حسب x و y) که در این رابطه m شیب خط و h عرض از مبدأ آن است.



شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد اگر زاویه حاده باشد $m > 0$ و اگر این زاویه منفرجه باشد $m < 0$ است.



عرض از مبدأ خط برابر عرض نقطه‌ای است که خط در آن، محور عرض‌ها را قطع می‌کند. در حالتی که خط موازی محور عرض‌ها است شیب و عرض از مبدأ خط تعریف نشده‌اند و در حالتی که خط موازی محور طول‌ها است $m = 0$ است و h ممکن است هر عدد دلخواه باشد. اگر در معادله خط $h = 0$ باشد، خط از مبدأ مختصات عبور می‌کند. یعنی خط به معادله $y = mx$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند.

نوشتن معادله خط

برای نوشتن معادله خط دو حالت در نظر می‌گیریم:

1 اگر شیب (m) و مختصات یک نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط را داشته باشیم معادله را به یکی از دو روش زیر می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ یا } y = mx + h$$

2 اگر مختصات دو نقطه از خط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم معادله را به یکی از دو صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y = mx + h \end{cases}$$

مثال و پاسخ

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(2, 5)$ بگذرد و با محور طول‌ها زاویه 45° بسازد.

پاسخ: شیب خط برابر $m = \tan 45^\circ = 1$ است پس:

روش اول:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 1(x - 2)$$

$$y = x - 2 + 5$$

$$y = x + 3$$

$$y = mx + h$$

$$y = x + h$$

$$(2, 5) \Rightarrow 5 = 2 + h \Rightarrow h = 3$$

$$y = x + 3$$

معمولاً روش دوم روش سریع‌تری است و خیلی وقت‌ها بعد از نوشتن $y = mx$ با جاگذاری مقادیر x و y نقطه می‌توانیم h را به طور مستقیم حساب کنیم.

مثال و پاسخ

مثال: سه نقطه $A(2, 3)$ ، $B(5, 3)$ و $C(2, 1)$ سه رأس یک مثلث‌اند. معادله اضلاع مثلث را بنویسید.

پاسخ: باید معادله AB و AC و BC را بنویسیم:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{3-3}{5-2} = 0 \Rightarrow y = 3 \quad \text{معادله } AB$$

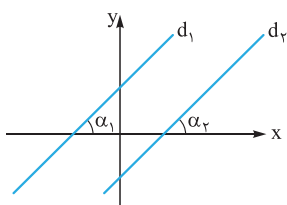
$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{3-1}{2-2} = \text{تعریف نشده} \Rightarrow x = 2 \quad \text{معادله } AC$$

$$B \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow m = \frac{1-3}{2-5} = \frac{2}{3} \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad \text{معادله } BC$$

نکته: همان‌طور که در مثال بالا دیدید معادله خط گذرنده از نقطه هم‌عرض به شکل $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ به شکل $y = y_1$ و معادله خط گذرنده از دو نقطه هم طول به شکل $A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ به شکل $x = x_1$ است.

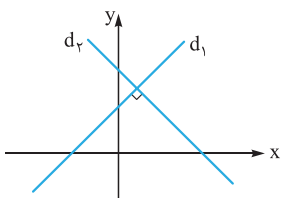
خط عمودی و موازی

۱ اگر دو خط با هم موازی باشند شیب‌هایشان با هم برابر است.



$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

۲ اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب هر کدام عکس قرینه شیب دیگری است، یعنی حاصل ضرب شیب‌هایشان برابر -1 است.



$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow \begin{cases} m_1 m_2 = -1 \\ \text{یا} \\ m_1 = -\frac{1}{m_2} \end{cases}$$

نکته: در حالتی که شیب خط صفر یا تعریف نشده است می‌گوییم:

دو خط به معادله‌های $x = a$ و $y = b$ بر هم عمودند چون یکی موازی محور y ها (اولی) و دیگری موازی محور x ها (دومی) است.

مثال و پاسخ

مثال: چهار خط با معادله‌های زیر مفروض اند:

$$d_1: 3x - 2y = 4$$

$$d_2: y = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$d_3: 6y + 4x = -1$$

$$d_4: y = \frac{3}{4}x + 5$$

تعیین کنید هر کدام از جفت خط‌های زیر نسبت به هم چه وضعی دارند:

$$d_1, d_3$$

$$d_2, d_3$$

$$d_1, d_4$$

$$d_1, d_2$$

پاسخ: اول شیب هر کدام از خط‌ها را به دست می‌آوریم:

$$d_1: 3x - 2y = 4 \Rightarrow -2y = -3x + 4 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}$$

$$d_2: y = -\frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$$

$$d_3: 6y + 4x = -1 \Rightarrow 6y = -4x - 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \Rightarrow m_3 = -\frac{2}{3}$$

$$d_4: y = \frac{3}{4}x + 5 \Rightarrow m_4 = \frac{3}{4}$$

حالا وضعیت خط‌ها را با توجه به شیبشان تعیین می‌کنیم:

الف $d_1, d_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ بر هم عمودند

ب $d_1, d_4 \Rightarrow m_1 = m_4$ با هم موازی‌اند

پ $d_2, d_3 \Rightarrow m_2 = m_3$ با هم موازی‌اند

ت $d_3, d_4 \Rightarrow m_3 \cdot m_4 = -1$ بر هم عمودند

مثال و پاسخ

مثال: مقدار a را طوری پیدا کنید که خط گذرنده از دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(5, 3)$ و خط $(a+1)x + (a-2)y = 2a+1$:

الف با هم موازی باشند

ب بر هم عمود باشند.

پاسخ: شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(5, 3)$ برابر صفر است یعنی خط گذرنده از A و B موازی محور x ها است پس:

الف خط $(a+1)x + (a-2)y = 2a+1$ هم باید موازی محور x ها باشد پس $a+1=0$ یعنی $a=-1$.

ب خط $(a+1)x + (a-2)y = 2a+1$ باید موازی محور y ها باشد پس $a-2=0$ یعنی $a=2$.

مثال و پاسخ

مثال: سه نقطه $A(1, 2)$ و $B(3, 5)$ و $C(1, 4)$ سه رأس یک مثلث‌اند. از نقطه A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. معادله

این خط را بنویسید.

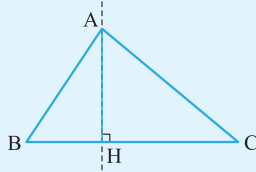
پاسخ: چون خط رسم شده (اسمش را می‌گذاریم d) موازی BC است پس شیبش با شیب BC مساوی است:

$$m_{BC} = \frac{5-4}{3-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_d = \frac{1}{2}$$

$$A(1, 2), m_d = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{معادله خط}$$

مثال و پاسخ

مثال: نقاط $A(3,1)$ و $B(2,3)$ و $C(1,1)$ سه رأس یک مثلث اند. مختصات نقطه H ، پای ارتفاع AH را پیدا کنید.



پاسخ: اگر یک شکل فرضی برای مثلث ABC رسم کنیم، نقطه H محل برخورد ارتفاع AH و ضلع BC است. یعنی باید اول معادله ارتفاع AH را پیدا کنیم و بعد نقطه برخورد AH و BC را که همان نقطه H است به دست آوریم.

AH بر BC عمود است پس شیبش عکس قرینه BC است:

$$m_{BC} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow m_{AH} = -\frac{1}{2}$$

$$AH \text{ معادله: } A(3,1), m_{AH} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y-1 = -\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$B(2,3), m_{BC} = 2 \Rightarrow y-3 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x-1$$

حالا معادله BC را پیدا می‌کنیم:

حالا نقطه برخورد BC و AH را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 2x - 1 \Rightarrow \frac{5}{2} + 1 = 2x + \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{5}{2}x \Rightarrow x = \frac{7}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5} \Rightarrow H\left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

مثال و پاسخ

مثال: مقدار m را چنان پیدا کنید که دو خط $3x + 2y = 4$ و $ax + (2a-1)y = 7$:

الف) با هم موازی باشند.

ب) برهم عمود باشند.

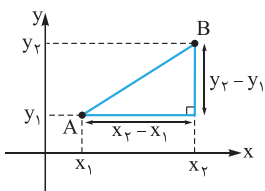
پاسخ: اول شیب هر کدام از خط‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$3x + 2y = 4 \Rightarrow 2y = -3x + 4 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$$

$$ax + (2a-1)y = 7 \Rightarrow (2a-1)y = -ax + 7 \Rightarrow y = \left(-\frac{a}{2a-1}\right)x + \frac{7}{2a-1} \Rightarrow m_2 = \frac{-a}{2a-1}$$

$$\text{حالا داریم: } m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{-a}{2a-1} \Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\text{برهم عمود باشند } m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-a}{2a-1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{3a}{4a-2} = -1 \Rightarrow 3a = -4a + 2 \Rightarrow 7a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{7}$$



طول پاره‌خط AB (یعنی فاصله بین دو نقطه A و B) را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

چند نکته:

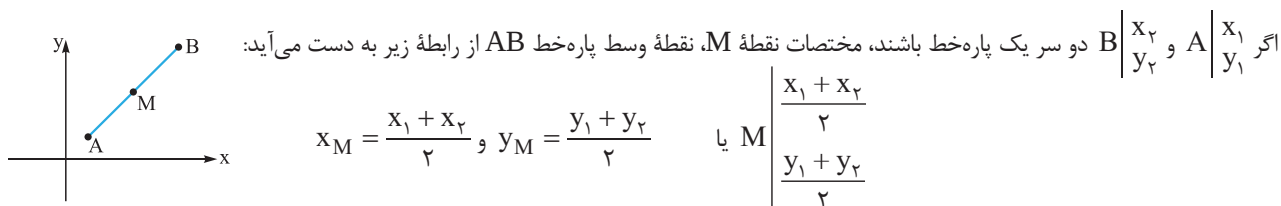
۱) رابطه طول پاره‌خط AB با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه به دست می‌آید.

۲) اگر $A\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$ و $B\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$ باشد (یعنی A و B هم‌طول باشند) داریم: $AB = |y_2 - y_1|$

۳) اگر $A\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$ و $B\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$ باشد (یعنی A و B هم‌عرض باشند) داریم: $AB = |x_2 - x_1|$

۴) چون مبدأ مختصات $O(0,0)$ است پس فاصله یک نقطه تا مبدأ مختصات برابر است با $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$

نقطه وسط پاره خط



مثال و پاسخ

مثال: نقاط $A(2, 5)$ و $B(2, 1)$ و $C(6, 1)$ سه رأس یک مثلث اند. نوع مثلث را تعیین کنید.

پاسخ: طول هر کدام از اضلاع مثلث را پیدا می کنیم:

$$A(2, 5), B(2, 1) \Rightarrow AB = |5 - 1| = 4$$

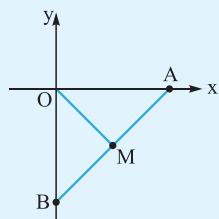
$$B(2, 1), C(6, 1) \Rightarrow BC = |6 - 2| = 4$$

$$A(2, 5), C(6, 1) \Rightarrow AC = \sqrt{(2-6)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

می بینیم که $AB = BC$ ، پس مثلث متساوی الساقین است و از طرف دیگر $AB^2 + BC^2 = AC^2$ چون $4^2 + 4^2 = (4\sqrt{2})^2$ ، یعنی مثلث قائم الزاویه هم هست پس مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است.

مثال و پاسخ

مثال: نقطه A به طول ۸ روی محور x ها و نقطه B به عرض ۶- روی محور y ها مفروض اند. اگر A و B و O سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه OM را به دست آورید.



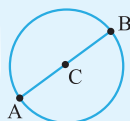
پاسخ: با توجه به شکل باید اول مختصات نقطه M ، وسط پاره خط AB را پیدا کنیم و بعد طول پاره خط OM را به دست آوریم:

$$A(8, 0), B(0, -6) \Rightarrow M \begin{vmatrix} \frac{8+0}{2} \\ \frac{0+(-6)}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix} \quad OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

مثال و پاسخ

مثال: نقاط $A(6, -1)$ و $B(-2, 5)$ دو سر قطر یک دایره اند مختصات مرکز و طول شعاع دایره را پیدا کنید.

پاسخ: طبق شکل روبه رو مرکز دایره، نقطه وسط پاره خط AB است، پس:



$$A \begin{vmatrix} 6 \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix} \Rightarrow C_{\text{مرکز}} \begin{vmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{6 + (-2)}{2} \\ \frac{-1 + 5}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

از طرف دیگر طول پاره خط AB برابر قطر دایره است پس:

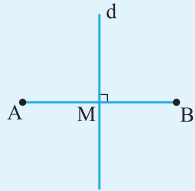
$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

پس اندازه شعاع دایره برابر نصف قطر یعنی $R = \frac{10}{2} = 5$ است.

مثال و پاسخ

مثال: اگر $A(2, -1)$ و $B(4, 7)$ دو سر یک پاره خط باشند، معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم عمود منصف یک پاره خط، خطی است که از نقطه وسط پاره خط بر آن عمود می‌شود. پس باید مختصات نقطه M وسط پاره خط AB و شیب پاره خط AB را به دست آوریم و سپس معادله عمود منصف را بنویسیم:



$$A \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - (-1)}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{4} \quad (d \perp AB \text{ چون})$$

حالا با داشتن مختصات M و شیب عمود منصف، معادله عمود منصف را می‌نویسیم:

$$M \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}, m_d = -\frac{1}{4} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$$

مثال و پاسخ

مثال: مختصات نقطه‌ای از محور طول‌ها را پیدا کنید که از دو نقطه $A(-1, -1)$ و $B(7, 7)$ به یک فاصله باشد.

پاسخ: **روش اول:** می‌دانیم نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند، روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند. پس باید معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسیم و بعد نقطه برخورد عمود منصف و محور X ‌ها را پیدا کنیم:

$$A \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 7 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{\text{وسط } AB} \begin{vmatrix} \frac{-1+7}{2} = 3 \\ \frac{-1+7}{2} = 3 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - (-1)}{7 - (-1)} = 1 \Rightarrow m_{\text{عمود منصف}} = -1$$

$$M \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}, m_d = -1 \Rightarrow y = -x + 6 \quad \text{معادله عمود منصف}$$

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6, y = 0 \Rightarrow C(6, 0)$$

حالا عمود منصف را با محور X ‌ها قطع می‌دهیم:

نقطه $C(6, 0)$ جواب سؤال است.

روش دوم: چون نقطه مورد نظر (C) باید روی محور X ‌ها باشد، پس مختصاتش به صورت $C(x_1, 0)$ است از طرف دیگر باید $AC = BC$

باشد پس:

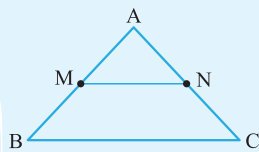
$$AC = BC \Rightarrow \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1 - x_1)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{(7 - x_1)^2 + (7 - 0)^2} \Rightarrow \sqrt{1 + 2x_1 + x_1^2 + 1} = \sqrt{49 - 14x_1 + x_1^2 + 49}$$

$$2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 + 2 = x_1^2 - 14x_1 + 98 \Rightarrow 16x_1 = 96 \Rightarrow x_1 = 6$$

پس مختصات نقطه C به صورت $C(6, 0)$ است.

مثال و پاسخ



مثال: نقاط $A(2,3)$ و $B(4,7)$ و $C(6,1)$ سه رأس یک مثلث هستند. از نقطه M وسط ضلع AB به نقطه N وسط ضلع AC رسم می‌کنیم، طول پاره خط MN را پیدا کنید.

پاسخ: روش اول: مختصات M وسط AB و N وسط AC را پیدا و طول پاره خط MN را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} \frac{2+4}{2} \\ \frac{3+7}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \\ A \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 6 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow N \begin{vmatrix} \frac{2+6}{2} \\ \frac{3+1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (5-2)^2} \\ = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

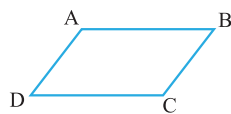
روش دوم: می‌دانیم پاره خطی که نقطه وسط ضلع AB را به نقطه وسط ضلع AC وصل می‌کند موازی ضلع BC و نصف آن است. پس می‌توانیم طول BC را محاسبه و بعد نصف کنیم:

$$B \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 6 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(4-6)^2 + (7-1)^2} \\ = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(2\sqrt{10}) = \sqrt{10}$$

نکته: برای پیدا کردن نقطه برخورد میانه‌های مثلث (مرکز ثقل مثلث) باید معادله دوتا از میانه‌ها را بنویسیم و محل تقاطعشان را مشخص کنیم. اما اگر این سؤال را در حالت کلی حل کنیم می‌بینیم که در یک مثلث با رئوس A, B و C مختصات نقطه برخورد میانه‌ها برابر است با:

$$G \text{ نقطه هم‌رسی میانه‌ها} \begin{vmatrix} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{vmatrix}$$

نکته: در هر چهارضلعی که قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند (مثل متوازی الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی) مجموع طول‌ها و مجموع عرض‌های دو رأس مقابل با هم برابر است. یعنی به عنوان مثال اگر متوازی الاضلاع $ABCD$ به شکل روبه‌رو باشد داریم:



$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

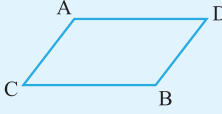
$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

مثال و پاسخ

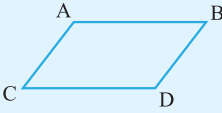
مثال: سه نقطه $(2,1)$ و $(-3,2)$ و $(7,3)$ سه رأس یک متوازی الاضلاع‌اند. مختصات رأس چهارم را پیدا کنید.

پاسخ: چون در صورت سؤال مشخص نشده است که کدام رأس‌ها روبه‌روی هم هستند پس باید رأس‌ها را نام‌گذاری کنیم و تمام حالت‌هایی را که ممکن است این چهار رأس دوبه‌دو روبه‌روی هم باشند بررسی کنیم؛ پس اگر $A(2,1)$ و $B(-3,2)$ و $C(7,3)$ سه رأس متوازی الاضلاع باشند و رأس چهارم را D بنامیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 7 \\ 3 \end{vmatrix} \\ \left. \begin{array}{l} \text{روبه‌روی هم } A, C \\ \text{روبه‌روی هم } B, D \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2+7 = (-3) + x_D \\ \Rightarrow x_D = 12 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1+3 = 2 + y_D \\ \Rightarrow y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow D \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix}$$



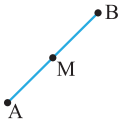
$\left. \begin{array}{l} \text{روبه‌روی هم } B, A \\ \text{روبه‌روی هم } D, C \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = x_C + x_D \Rightarrow 2 + (-3) = 1 + x_D \\ \Rightarrow x_D = -8 \\ y_A + y_B = y_C + y_D \Rightarrow 1 + 2 = 3 + y_D \\ \Rightarrow y_D = 0 \end{cases} \Rightarrow D \begin{vmatrix} -8 \\ 0 \end{vmatrix}$



$\left. \begin{array}{l} \text{روبه‌روی هم } D, A \\ \text{روبه‌روی هم } B, C \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_D = y_B + y_C \Rightarrow 2 + x_D = -3 + 1 \\ \Rightarrow x_D = -6 \\ y_A + y_D = y_B + y_C \Rightarrow 1 + y_D = 2 + 3 \\ \Rightarrow y_D = 4 \end{cases} \Rightarrow D \begin{vmatrix} -6 \\ 4 \end{vmatrix}$

قرینه نقطه A نسبت به نقطه M

اگر دو نقطه $A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ و $M \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ را داشته باشیم و بخواهیم قرینه نقطه A نسبت به نقطه M پیدا کنیم طبق شکل زیر اگر این نقطه را B بنامیم نقطه M وسط پاره خط AB است، پس:



قرینه نقطه A نسبت به نقطه M برابر است با $B \begin{vmatrix} 2\alpha - x_A \\ 2\beta - y_A \end{vmatrix}$

مثال و پاسخ

مثال: قرینه نقطه (2, 5) را نسبت به نقطه M پیدا کنید.

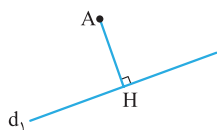
پاسخ: راه اول: از همان روشی که در بالا گفتیم استفاده می‌کنیم:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}, \text{ وسط } M \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B + 2 = 6 \Rightarrow x_B = 4 \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \Rightarrow y_B + 5 = 2 \Rightarrow y_B = -3 \end{cases} \Rightarrow B \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix}$$

راه دوم: از روابطی که به دست آوردیم استفاده می‌کنیم:

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}, M \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow B \begin{vmatrix} 2\alpha - x_A \\ 2\beta - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(3) - 2 \\ 2(1) - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix}$$

فاصله نقطه از خط



فاصله نقطه A از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر طول پاره خط عمودی است که از A بر خط رسم می‌شود:

d_1 فاصله نقطه A از خط d_1 = AH

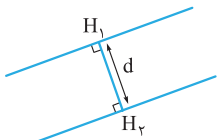
$$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

این فاصله را از رابطه زیر پیدا می‌کنیم:

یعنی مختصات نقطه را در معادله خط قرار می‌دهیم (معادله‌ای که همه اجزای آن به یک طرف منتقل شده است) و حاصلش را داخل قدرمطلق می‌گذاریم و بر جذر مجموع مربع‌های ضریب x و ضریب y در معادله خط تقسیم می‌کنیم.

فاصله دو خط موازی

اگر معادله دو خط موازی به صورت $ax + by + c_1 = 0$ و $ax + by + c_2 = 0$ باشد (دقت کنید که ضریب‌های x و y یکسان‌اند) فاصله این دو خط از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$H_1 H_2 = d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال و پاسخ

مثال: نقطه $A(2, 3)$ به کدام خط زیر نزدیک تر است؟

$$d_1 = 3x + 4y - 7 = 0$$

$$d_2 = 4x + 3y - 1 = 0$$

پاسخ: فاصله نقطه A را از هر کدام از خطها پیدا می کنیم:

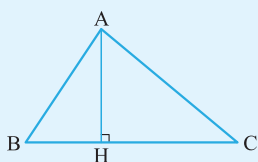
$$A(2, 3), d_1: 3x + 4y - 7 = 0 \Rightarrow AH = \frac{|3(2) + 4(3) - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 12 - 7|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

$$A(2, 3), d_2: 4x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow AH' = \frac{|4(2) + 3(3) - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 + 9 - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{16}{5}$$

و چون $\frac{11}{5} < \frac{16}{5}$ است، پس نقطه A به خط اول نزدیک تر است.

مثال و پاسخ

مثال: نقاط $A(2, 4)$ و $B(3, 5)$ و $C(1, 7)$ سه رأس یک مثلث اند. مساحت مثلث را پیدا کنید.



پاسخ: طبق شکل مقابل برای پیدا کردن مساحت مثلث باید طول ضلع BC و طول ارتفاع AH را پیدا کنیم و سپس از رابطه $S = \frac{1}{2}(BC)(AH)$ مساحت را به دست آوریم. برای محاسبه طول BC داریم:

$$B \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 1 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

و برای پیدا کردن طول ارتفاع AH ، باید معادله ضلع BC را بنویسیم و فاصله نقطه A را از این خط پیدا کنیم:

$$B \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 1 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow m_{BC} = \frac{y-5}{x-3} = -1 \Rightarrow y-5 = -(x-3) \Rightarrow x+y-8=0$$

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} \Rightarrow AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(2) + 1(4) - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2+4-8|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

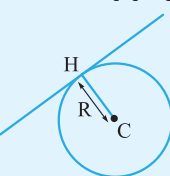
$$S = \frac{1}{2}(BC)(AH) = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 2 \Rightarrow S = 2$$

پس مساحت مثلث برابر است با:

مثال و پاسخ

مثال: نقطه $C(2, -1)$ مرکز دایره ای است که بر خط به معادله $y = \frac{3}{4}x$ مماس است. اندازه مساحت دایره را پیدا کنید.

پاسخ: طبق شکل روبه رو، چون شعاع نقطه مماس خط و دایره بر خط مماس عمود است پس اندازه شعاع دایره برابر فاصله نقطه



$$C(2, -1), y = \frac{3}{4}x \Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow 3x - 4y = 0$$

از خط $y = \frac{3}{4}x$ است:

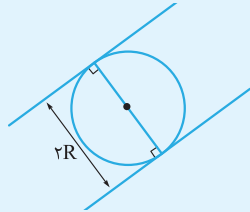
$$CH = R = \frac{|3(2) - 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6+4|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

و چون شعاع دایره $R = 2$ است، پس مساحت دایره برابر است با $S = \pi R^2 = 4\pi$.

مثال و پاسخ

مثال: دایره‌ای بر دو خط $y = \frac{1}{4}x + 4$ و $x - 2y - 2 = 0$ مماس است. اندازه شعاع دایره را پیدا کنید.

پاسخ: خط $y = \frac{1}{4}x + 4$ که مرتب شده‌اش می‌شود $2y = x + 8$ یا $x - 2y + 8 = 0$ و خط $x - 2y - 2 = 0$ با هم موازی‌اند. پس طبق شکل شعاع دایره برابر نصف فاصله بین این دو خط است.



$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

پس شعاع دایره برابر است با $R = \frac{1}{2}(2\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

سؤال‌های امتحانی

۱- نقاط $A(1, 6)$ و $B(2, 3)$ و $C(5, 9)$ سه رأس یک مثلث‌اند. ارتفاع گذرنده از رأس A را رسم می‌کنیم. نقطه برخورد ارتفاع با ضلع مقابل را پیدا کنید.

۲- نقاط $A(1, -3)$ و $B(1, 1)$ و $C(4, 1)$ سه رأس یک مثلث‌اند. محیط مثلث را پیدا کنید.

۳- نقاط $A(1, 2)$ و $B(-1, 8)$ و $C(-3, 4)$ سه رأس یک مثلث‌اند. معادله و طول میانه AM را پیدا کنید.

۴- نقاط $A(2, 3)$ و $B(3, 5)$ و $C(-1, 7)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم و محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۵- قرینه نقطه $A(3, 2)$ را نسبت به نقطه $B(5, -1)$ پیدا کنید.

۶- نقطه‌ای روی محور y بیابید که از دو نقطه $A(1, -3)$ و $B(5, 5)$ به یک فاصله باشد.

۷- مقدار a را طوری پیدا کنید که سه نقطه $A(3, 4)$ و $B(5, 8)$ و $C(a, -2)$ روی یک خط راست باشند.

۸- نقاط $A(-1, 2)$ و $B(9, 2)$ دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و شعاع دایره را پیدا کنید و مشخص کنید کدام یک از نقاط زیر روی دایره هستند:

۹- نقاط $A(2, 0)$ و $B(6, 2)$ و $C(0, 2)$ سه رأس یک مثلث‌اند. محل برخورد عمود منصف‌های مثلث را پیدا کنید.

۱۰- اگر $A(1, 2)$ مختصات یک رأس و $3x + 4y + 4 = 0$ معادله یکی از اضلاع یک مربع باشد، محیط و مساحت مربع را پیدا کنید.

۱۱- نقطه $A(-1, 1)$ یک رأس و نقطه $M(2, 1)$ نقطه برخورد قطرهای یک مربع‌اند. مختصات سه رأس دیگر مربع را پیدا کنید.

۱۲- نقاط $O(0, 0)$ و $A(6, 0)$ دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند مختصات رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

۱۳- از نقاط $A(1, 0)$ و $B(1, 1)$ هر کدام یک خط موازی خط $y = \frac{3}{4}x$ رسم کرده‌ایم. مساحت مربعی را که دو ضلع مقابلش روی این دو خط قرار دارند پیدا کنید.

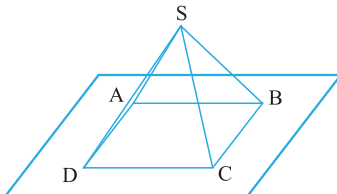
۱۴- نقاط $A(3, -2)$ و $B(8, 1)$ دو رأس مربع $ABCD$ هستند. اگر رأس D روی محور y واقع باشد، مختصات رأس C و D را پیدا کنید.

۱۵- نقاط $A(-2, -1)$ و $B(4, 5)$ و $C(-1, 7)$ طبق شکل روی صفحه

مختصات واقع‌اند. مختصات نقطه D را چنان پیدا کنید که اگر از نقطه S خارج از صفحه‌ای

که این سه نقطه روی آن قرار دارند، چهار نخ به نقاط A, B, C و D وصل کنیم به طوری

که یک هرم منتظم ساخته شود.



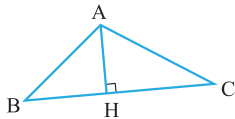
۱۶- نقاط $A(2, 3)$ و $B(3, 5)$ و $C(-1, 7)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مساحت متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۱۷- طول و عرض جغرافیایی شهر A ، 21° درجه شرقی و 13° درجه شمالی و طول و عرض جغرافیایی شهر B ، 66° درجه شرقی و 73° درجه شمالی است. اگر مسافت فیزیکی هر درجه طول یا عرض جغرافیایی برابر 110 کیلومتر باشد، فاصله مستقیم این دو شهر را حساب کنید.

۱۸- نشان دهید دو نقطه $M(a, b)$ و $N(b, a)$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- اگر یک مثلث فرضی رسم کنیم، می‌دانیم که برای پیدا کردن نقطه H یعنی محل برخورد ارتفاع AH با ضلع BC باید معادله AH و BC را در یک دستگاه حل کنیم؛ پس باید معادله BC و AH را بنویسیم:



$$BC: B(2, 2), C(5, 9) \Rightarrow m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{9 - 2}{5 - 2} = 2 \Rightarrow y - 2 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{2}, A(1, 6) \Rightarrow AH: y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$$

حالا معادله AH و BC را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x = \frac{15}{2} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow H(3, 5)$$

۲- برای پیدا کردن محیط مثلث باید طول اضلاع آن را پیدا و با هم جمع کنیم:

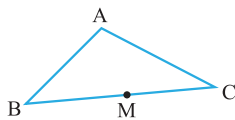
$$A(1, -3), B(1, 1) \Rightarrow AB = |y_A - y_B| = |-3 - 1| = 4$$

$$A(1, -3), C(4, 1) \Rightarrow AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$B(1, 1), C(4, 1) \Rightarrow BC = |x_B - x_C| = |1 - 4| = 3$$

پس محیط مثلث برابر است با $AB + AC + BC = 4 + 5 + 3 = 12$

۳- اگر یک مثلث فرضی رسم کنیم، می‌بینیم که M وسط BC است و برای پیدا کردن معادله و طول میانه AM اول باید مختصات نقطه M را پیدا کنیم.



$$B(-1, 8), C(-3, 4) \Rightarrow M \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) \Rightarrow M \left(\frac{-1 - 3}{2}, \frac{8 + 4}{2} \right) \Rightarrow M(-2, 6)$$

حالا طول AM را پیدا می‌کنیم:

$$A(1, 2), M(-2, 6) \Rightarrow AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$A(1, 2), M(-2, 6) \Rightarrow m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{6 - 2}{-2 - 1} = -\frac{4}{3}$$

و برای پیدا کردن معادله میانه AM داریم:

$$AM: y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

۴- چون A، B و C سه رأس متوالی متوازی‌الاضلاع ABCD هستند، پس رأس A مقابل رأس C و رأس B مقابل رأس D است؛ یعنی:

$$A(2, 3), B(3, 5), C(-1, 7)$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + (-1) = 3 + x_D \\ 3 + 7 = 5 + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 5 \end{cases} \Rightarrow D(-2, 5)$$

$$O \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) \Rightarrow O \left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{3 + 7}{2} \right) \Rightarrow O \left(\frac{1}{2}, 5 \right)$$

محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع نقطه وسط دو رأس مقابل آن است، پس:

$$A \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 5 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} 2x_B - x_A \\ 2y_B - y_A \end{vmatrix} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} 2(5) - 3 \\ 2(-1) - 2 \end{vmatrix} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} 7 \\ -4 \end{vmatrix}$$

۵- از رابطه نقطه قرینه استفاده می‌کنیم:

۶- روش اول: چون نقطه مورد نظر روی محور y ‌ها است، پس طولش برابر صفر است و می‌توانیم مختصاتش را به شکل $M(0, a)$ در نظر بگیریم:

$$A(1, -3), B(5, 5), MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(0-1)^2 + (a+3)^2} = \sqrt{(0-5)^2 + (a-5)^2} \xrightarrow{\text{توان}^2} 1 + (a+3)^2 = 25 + (a-5)^2$$

$$\Rightarrow 1 + a^2 + 6a + 9 = 25 + a^2 - 10a + 25 \Rightarrow 16a = 40 \Rightarrow a = \frac{40}{16} = \frac{5}{2} \Rightarrow M(0, \frac{5}{2})$$

روش دوم: چون قرار است فاصله نقطه M از نقاط A و B یکسان باشد، پس روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد؛ یعنی می‌توانیم معادله عمودمنصف AB را بنویسیم و بعد محل برخوردش را با محور y ‌ها پیدا کنیم.

$$A(1, -3), B(5, 5) \Rightarrow N_{AB} \text{ وسط } \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+5}{2} \end{cases} \Rightarrow N \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

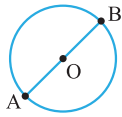
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-3)}{5 - 1} = 2 \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{معادله عمودمنصف: } y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow M(0, \frac{5}{2})$$

۷- اگر سه نقطه $A(3, 4)$ ، $B(5, 8)$ و $C(a, -2)$ روی یک خط راست باشند، باید شیب AB و BC یکسان باشد؛ پس:

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{4-8}{3-5} = \frac{8-(-2)}{5-a} \Rightarrow 2 = \frac{10}{5-a} \Rightarrow 5-a=5 \Rightarrow a=0$$

۸- طبق شکل روبه‌رو مرکز دایره نقطه وسط قطر AB و طول شعاع دایره برابر نصف طول پاره‌خط AB است:



$$A(-1, 2), B(9, 2) \Rightarrow O \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow O \begin{cases} \frac{-1+9}{2} \\ \frac{2+2}{2} \end{cases} \Rightarrow O(4, 2)$$

$$AB = |x_A - x_B| = |-1 - 9| = 10 \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5$$

برای آن‌که هر کدام از نقاط داده‌شده روی دایره باشد، باید فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد. مرکز دایره نقطه $O(4, 2)$ است، پس فاصله هر کدام از نقاط داده‌شده را از مرکز دایره حساب می‌کنیم:

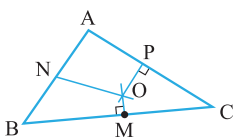
$$O(4, 2), M(7, 6): OM = \sqrt{(4-7)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \checkmark$$

$$O(4, 2), N(1, -1): ON = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \times$$

$$O(4, 2), P(8, 5): OP = \sqrt{(4-8)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \checkmark$$

$$O(4, 2), Q(0, -6): OQ = \sqrt{(4-0)^2 + (2-(-6))^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \times$$

۹- در شکل می‌بینیم که سه عمودمنصف مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند، پس برای پیدا کردن محل برخورد عمودمنصف‌ها باید معادله دوتا از آن‌ها را بنویسیم و با هم قطع دهیم. معادله عمودمنصف اضلاع AB و BC را می‌نویسیم:



$$A(2, 0), B(6, 2) \Rightarrow N_{AB} \text{ وسط } \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow N(4, 1)$$

$$m_{AB} = \frac{2-0}{6-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = -2 \Rightarrow y - 1 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 9$$

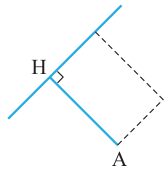
$$B(6,2), C(0,2) \Rightarrow M_{BC} \text{ وسط} \left| \begin{array}{l} \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6+0}{2} = 3 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{array} \right. \Rightarrow M(3,2)$$

$$m_{BC} = \frac{2-2}{6-0} = 0 \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = \text{تعریف نشده} \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف: } x = 3$$

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow O(3,3)$$

حالا معادله دو عمودمنصف را با هم قطع می‌دهیم:

۱۰- طبق شکل چون مختصات $A(1,2)$ در معادله $3x + 4y + 4 = 0$ صدق نمی‌کند، پس نقطه A روی ضلع داده شده نیست و بنابراین فاصله نقطه A با خط داده شده برابر ضلع مربع است:

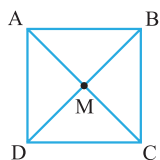


$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(1) + 4(2) + 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{محیط} = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{مساحت} = 3^2 = 9$$

بنابراین محیط و مساحت مربع برابرند با:



۱۱- با استفاده از مختصات نقطه $A(-1,1)$ و $M(2,1)$ مختصات رأس C را می‌توانیم به راحتی حساب کنیم. چون M وسط AC است، پس C قرینه A نسبت به M است:

$$\begin{cases} x_C = 2x_M - x_A = 2(2) - (-1) = 5 \\ y_C = 2y_M - y_A = 2(1) - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C(5,1)$$

برای پیدا کردن مختصات نقاط B و D می‌دانیم اولاً نقاط D و B روی عمودمنصف AC قرار دارند و ثانیاً فاصله نقطه B و D از نقطه M برابر اندازه AM یا CM است. برای اولاً داریم:

$$A(-1,1), C(5,1) \Rightarrow m_{AC} = 0 \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = \text{تعریف نشده}, M(2,1) \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف: } x = 2$$

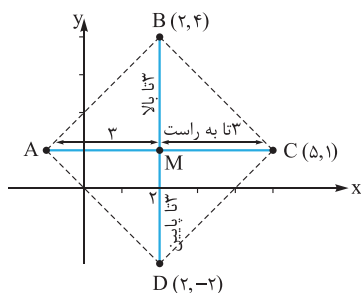
حالا باید نقطه‌ای روی خط $x = 2$ پیدا کنیم که فاصله‌اش از نقطه M برابر AM باشد. AM برابر است با:

$$A(-1,1), M(2,1) \Rightarrow AM = |x_A - x_M| = |-1 - 2| = 3$$

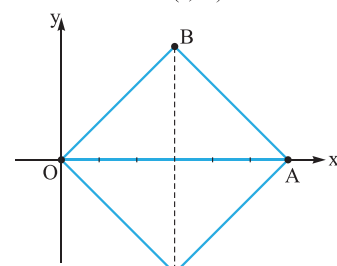
بنابراین اگر B یا D به صورت $B(2,a)$ باشد (چون روی عمودمنصف واقع‌اند پس طولشان برابر ۲ است)، باید داشته باشیم:

$$BM = 3 \Rightarrow |y_B - y_M| = 3 \Rightarrow |y_B - 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} y_B - 1 = 3 \Rightarrow y_B = 4 \\ y_B - 1 = -3 \Rightarrow y_B = -2 \end{cases}$$

پس مختصات نقاط B و D به صورت $B(2,4)$ و $D(2,-2)$ است.



نکته: این سؤال با کمک شکل خیلی سریع‌تر حل می‌شود:



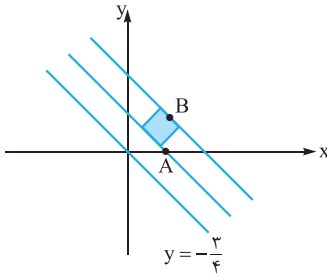
۱۲- طبق شکل مقابل چون قرار است مثلث OAB متساوی‌الاضلاع باشد، نقطه B باید روی

عمودمنصف ضلع OA قرار داشته باشد؛ یعنی از همین اول مشخص است که مسئله دو جواب دارد و نقطه B می‌تواند با عرض مثبت یا با عرض منفی (روی شکل نقطه D) باشد. طول نقطه B برابر ۳ است، پس می‌توانیم آن را به صورت $B(3,a)$ در نظر بگیریم. از طرف دیگر فاصله O تا B یعنی طول پاره‌خط OB باید برابر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع یعنی برابر ۳ باشد، پس:

$$O(0,0), B(3,a), OB = 3 \Rightarrow \sqrt{(x_O - x_B)^2 + (y_O - y_B)^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{(0-3)^2 + (0-a)^2} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} 9 + a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

پس مختصات رأس سوم $B(3,3\sqrt{3})$ و یا $D(3,-3\sqrt{3})$ است.



۱۳- طبق شکل روبه‌رو اندازه ضلع مربع برابر است با فاصله دو خط موازی، پس اول معادله خط‌هایی را که از نقاط $A(1,0)$ و $B(1,1)$ موازی خط $y = -\frac{3}{4}x$ رسم می‌شوند، می‌نویسیم:

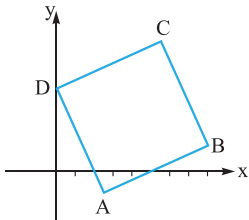
$$A(1,0), m = -\frac{3}{4} \Rightarrow y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow 4y = -3x + 3 \Rightarrow 3x + 4y - 3 = 0$$

$$B(1,1), m = -\frac{3}{4} \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \Rightarrow 4y = -3x + 7 \Rightarrow 4y + 3x - 7 = 0$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-3 - (-7)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5}$$

حالا فاصله این دو خط موازی را پیدا می‌کنیم:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$



۱۴- رأس $A(3, -2)$ و $B(8, 1)$ را داریم، پس اول رأس D را پیدا می‌کنیم. چون رأس D روی محور y ها است، پس می‌توانیم D را به مختصات $D(0, a)$ در نظر بگیریم.

طول پاره‌های AB و AD باید با هم برابر باشد، چون هر دو ضلع مربع‌اند، پس:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3 - 8)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-2 - a)^2} = \sqrt{9 + a^2 + 4a + 4}$$

$$\sqrt{a^2 + 4a + 13} = \sqrt{34} \xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + 4a + 13 = 34 \Rightarrow a^2 + 4a - 21 = 0 \Rightarrow (a + 7)(a - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ a = 3 \end{cases}$$

پس باید داشته باشیم:

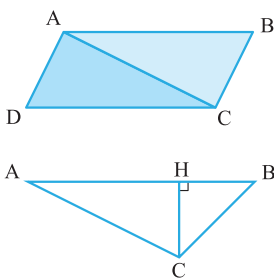
که با توجه به شکل $a = 3$ قابل قبول است، پس مختصات D به صورت $D(0, 3)$ است. حالا رأس C را با توجه به این که مربع یک متوازی‌الاضلاع است، پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + x_C = 8 + 0 \Rightarrow x_C = 5 \\ -2 + y_C = 1 + 3 \Rightarrow y_C = 6 \end{cases} \Rightarrow C(5, 6)$$

۱۵- برای این که هرم ساخته شده منظم باشد باید چهارضلعی $ACBD$ متوازی‌الاضلاع باشد، پس:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 - 1 = 4 + x_D \Rightarrow x_D = -7 \\ -1 + 7 = 5 + y_D \Rightarrow y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(-7, 1)$$

۱۶- طبق شکل روبه‌رو مساحت متوازی‌الاضلاع دو برابر مساحت مثلث ABC است، پس لازم نیست رأس چهارم متوازی‌الاضلاع را پیدا کنیم بلکه کافی است مساحت مثلث ABC را پیدا و دو برابر کنیم.



برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC ، با رئوس $A(2, 3)$ ، $B(3, 5)$ و $C(-1, 7)$ ، طول قاعده AB و طول ارتفاع AH را پیدا می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{3 - 2} = 2 \Rightarrow y - 5 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

$$CH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-1) - (7) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

حالا فاصله C را از خط AB پیدا می‌کنیم:

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} (\sqrt{5}) \times \frac{10}{\sqrt{5}} = 5$$

پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = 2 \times 5 = 10$$

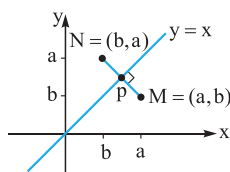
و در نتیجه مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با:

۱۷- فاصله دو نقطه $A(21, 13)$ و $B(66, 73)$ را حساب و در عدد ۱۱۰ ضرب می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(21 - 66)^2 + (13 - 73)^2} = \sqrt{45^2 + 60^2} = \sqrt{15^2(3^2 + 4^2)} = 15\sqrt{9 + 16} = 15 \times 5 = 75$$

۷۵ × ۱۱۰ = ۸۲۵۰ کیلومتر

پس فاصله دو شهر بر حسب کیلومتر برابر است با:



۱۸- **روش اول:** برای آن که نشان دهیم دو نقطه $M(a, b)$ و $N(b, a)$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند،

نشان می‌دهیم اولاً پاره خط MN بر خط $y = x$ عمود است و ثانیاً نقطه وسط پاره خط MN روی خط

$y = x$ قرار دارد:

پاره خط AB بر خط $y = x$ عمود است. $m_{MN} = \frac{b-a}{a-b} = -1 \Rightarrow$ اولاً

$$\begin{aligned} \frac{x_M + x_N}{2} &= \frac{a+b}{2} \\ \frac{y_M + y_N}{2} &= \frac{b+a}{2} \end{aligned} \Rightarrow P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow \text{نقطه } P \text{ روی خط } y = x \text{ قرار دارد.} \quad \text{ثانیاً: } P_{\text{وسط } MN}$$

روش دوم: اگر دو نقطه M و N نسبت به خط $y = x$ قرینه باشند، خط $y = x$ باید عمود منصف پاره خط MN باشد؛ یعنی باید فاصله هر نقطه

دلخواه از خط $y = x$ از دو نقطه M و N یکی باشد. نقاط روی خط $y = x$ دارای مختصات به شکل $Q(t, t)$ هستند، پس:

$$MQ = \sqrt{(x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2} = \sqrt{(a - t)^2 + (b - t)^2}$$

$$NQ = \sqrt{(x_N - x_Q)^2 + (y_N - y_Q)^2} = \sqrt{(b - t)^2 + (a - t)^2}$$

همان‌طور که می‌بینیم $MQ = NQ$ است؛ یعنی خط $y = x$ عمود منصف پاره خط MN است.

۱۹- در هر کدام از معادله‌ها، مجهول معادله دارای یک توان و توان دو برابر آن است، توان کوچک‌تر را برابر u فرض می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{الف) } x^4 - x^2 - 12 &= 0 \xrightarrow{x^2=u} u^2 - u - 12 = 0 \Rightarrow (u-4)(u+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=4 \\ u=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^2=-3 \Rightarrow \text{غ ق} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } x^4 - 2 \cdot x^2 + 64 &= 0 \xrightarrow{x^2=u} u^2 - 2u + 64 = 0 \Rightarrow (u-4)(u-16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=4 \\ u=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^2=16 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-4 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } x^6 + 9x^3 + 8 &= 0 \xrightarrow{x^3=u} u^2 + 9u + 8 = 0 \Rightarrow (u+1)(u+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=-1 \\ u=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^3=-8 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } x^4 - 17x^2 + 16 &= 0 \xrightarrow{x^2=u} u^2 - 17u + 16 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=1 \\ u=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ x^2=16 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-4 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

۲۰- باز هم در هر کدام از معادله‌ها یک توان از x و توان دو برابرش را داریم. توان کوچک‌تر را برابر u فرض می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{الف) } x + 2\sqrt{x} - 8 &= 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=u} u^2 + 2u - 8 = 0 \Rightarrow (u+4)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=-4 \\ u=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=-4 \Rightarrow \text{غ ق} \\ \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{6}} - 6 &= 0 \xrightarrow{x^{\frac{1}{6}}=u} u^2 - u - 6 = 0 \Rightarrow (u-3)(u+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u=3 \\ u=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{1}{6}}=3 \Rightarrow x=3^6=729 \\ x^{\frac{1}{6}}=-2 \Rightarrow \text{غ ق} \end{cases} \end{aligned}$$