فهرست

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات ۷

پاسخ سؤال‌های امتحانی ۳۲

فصل دوم: احتمال ۵۰

پاسخ سؤال‌های امتحانی ۷۵

فصل سوم: آمار توصیفی ۹۲

پاسخ سؤال‌های امتحانی ۱۱۲

فصل چهارم: آمار استنباطی ۱۲۱

پاسخ سؤال‌های امتحانی ۱۳۹

امتحان‌های نیم‌سال اول ۱۴۴

پاسخ‌نامهٔ امتحان‌های نیم‌سال اول ۱۴۶

امتحان‌های نیم‌سال دوم ۱۵۲

پاسخ‌نامهٔ امتحان‌های نیم‌سال دوم ۱۶۰

فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ آشنایی با منطق ریاضی

در بخش اول کتاب آمار و احتمال که منطق ریاضی نام دارد، مقدماتی را یاد می‌گیریم تا بتوانیم به وسیلهٔ آن‌ها ساختار استدلال‌ها را بررسی کنیم و درستی و نادرستی آن‌ها را تشخیص دهیم.

به جملات زیر که هر کدام یک استدلال منطقی هستند، دقت کنید:

الف) اگر دمای آب به 100° برسد، می‌جوشد.
ب) آب کتری هنوز نجوشیده است.
پ) نتیجه: دمای آب کتری به 100° نرسیده است.

الف) قطرهای لوزی برهم عمودند.
ب) قطرهای چهارضلعی ABCD بر هم عمود نیستند.
پ) نتیجه: چهارضلعی ABCD لوزی نیست.

در هر دو استدلال بالا، جمله‌های خبری (الف) و (ب) را «مقدمه‌های استدلال» یا «مفروضات استدلال» و جملهٔ خبری (پ) را «نتیجهٔ استدلال» می‌گوییم.

در حالت کلی هر استدلال از دو یا چند جملهٔ خبری به عنوان مفروضات استدلال و یک جملهٔ خبری به عنوان نتیجهٔ استدلال تشکیل می‌شود.

گزاره

هر جملهٔ خبری را یک **گزاره** می‌گوییم. هر گزاره فقط می‌تواند درست یا فقط نادرست باشد البته ممکن است درستی یا نادرستی آن جملهٔ خبری برای ما معلوم نباشد. اما همیشه حواسمان باشد که یک گزاره فقط دارای یک ارزش است و نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

مثلاً جملات زیر هر کدام یک گزاره هستند:

۱) ۱۵ بر ۳ بخش‌پذیر است.
۲) سعدی شاعر نیست.

گزارهٔ ۱ درست و گزارهٔ ۲ نادرست است.

به جملات زیر دقت کنید:

۱) به‌به چه صبح قشنگی!
۲) ای‌کاش بدون خواندن درس هم نمراتم بیست می‌شد!
۳) در را باز کن!
۴) آیا عدد π گنگ است؟
۵) سعدی شاعر بزرگ ایرانی است.

هیچ‌کدام از جملات بالا گزاره نیستند. جملات ۱ تا ۴ جملاتی عاطفی (بیان‌کنندهٔ احساس یا آرزو)، امری یا پرسشی هستند و جملات خبری محسوب نمی‌شوند؛ پس گزاره نیستند. جملهٔ پنجم جمله‌ای خبری است اما نمی‌توان درست و نادرست‌بودن آن را تشخیص داد. چون «شاعر بزرگ» تعریف نشده و نمی‌دانیم معیار این‌که یک شاعر بزرگ است یا کوچک، چیست؟!

هر گزاره را معمولاً با حروف کوچک p، q، r، s و... نمایش می‌دهیم.

ارزش یک گزاره

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش آن گزاره می‌گوییم.

ارزش گزارهٔ درست را با «د» یا «T» و ارزش گزارهٔ نادرست را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

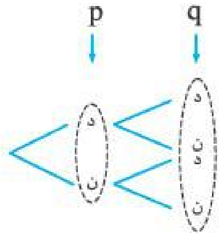
اگر دو گزارهٔ p و q ارزش یکسان داشته باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌گوییم گزاره‌های p و q معادل یا هم‌ارز هستند.

جدول ارزش گزاره‌ها

ارزش هر گزاره مانند p می‌تواند درست یا نادرست باشد. این مطلب را در جدول ارزش گزاره‌ها به شکل روبه‌رو نشان می‌دهیم:

p
د
ن

اگر بخواهیم حالت‌های مختلف برای درست یا نادرست‌بودن دو گزارهٔ p و q را بنویسیم، با توجه به این‌که برای هر کدام از این گزاره‌ها ۲ حالت «د» یا «ن» را داریم؛ پس طبق اصل ضرب برای ارزش ۲ گزارهٔ p و q در کنار هم، $\underbrace{۲\ \text{حالت}}_{p} \times \underbrace{۲\ \text{حالت}}_{q} = ۴$ حالت مختلف وجود دارد. این ۴ حالت را در جدول ارزش گزاره‌ها به شکل روبه‌رو نمایش می‌دهیم:



p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

هم‌چنین برای ارزش ۳ گزاره طبق اصل ضرب $۲^۳ = ۸$ حالت مختلف وجود دارد.

$$\underbrace{۲\text{حالت}}_{\text{ارزش } p} \times \underbrace{۲\ \text{حالت}}_{\text{ارزش } q} \times \underbrace{۲\ \text{حالت}}_{\text{ارزش } r} = ۸$$

جدول ارزش گزاره‌ها برای ۳ گزاره به شکل روبه‌رو است:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

نتیجه جدول ارزش گزاره‌ها برای n گزاره طبق اصل ضرب ۲^n سطر مختلف دارد.

$$\underbrace{۲\text{حالت}}_{\text{گزارهٔ } p_1} \times \underbrace{۲\text{حالت}}_{\text{گزارهٔ } p_2} \times \underbrace{۲\ \text{حالت}}_{\text{گزارهٔ } p_3} \times \dots \times \underbrace{۲\text{حالت}}_{\text{گزارهٔ } p_n} = ۲^n$$

سؤال‌های امتحانی

۱- نتیجهٔ استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱) **الف) اگر در شمال باران ببارد، هوای تهران خنک می‌شود.**
ب) هوای تهران گرم است.
نتیجه: ....

۲) **الف) اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع آن بر عدد ۲۴ برابر با یک است.**
ب) ۳۷ عددی اول است.
نتیجه: ....

۲- از بین جملات زیر، گزاره‌ها را مشخص کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

۱) مجموع هر دو عدد اول، زوج است.
۲) آیا درخت بلند است؟
۳) ۲۶۳۵۹۲۱۴۳۱ عددی اول است.
۴) نقره، فلزی گران‌بها است.
۵) آه، چه هوای سردی!
۶) آیا ۱۲ = ۲ + ۳ + ۷ است؟
۷) به امید کامیابی شما.
(کتاب درسی) ۸) حافظ، پزشک ایرانی است.
۹) عدد $8+5^9$ عددی اول است.
(کتاب درسی) ۱۰) علی دانش‌آموز بسیار خوبی است.

۳- آیا جملات زیر گزاره هستند؟

۱) ۱۰۰اُمین رقم بعد از ممیز در عدد π، عدد ۵ است. (کتاب درسی)

۲) هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع ۳ عدد اول نوشت. (حدس قوی گلدباخ) (کتاب درسی)

گزاره‌نما

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

۱ x عددی اول است.
۲ $2x^2+3x-2=0$

۳ دو برابر یک عدد طبیعی به علاوهٔ ۳ برابر عدد طبیعی دیگر از ۱۰ کم‌تر است. ($2x+3y<10$).

همان‌طور که می‌بینید درستی یا نادرستی جملات بالا را نمی‌توانیم مشخص کنیم و درستی یا نادرستی آن‌ها بستگی به مقادیری دارد که به جای متغیرهای آن‌ها یعنی x و y قرار داده می‌شود. مثلاً اگر در جملهٔ اول به جای x عدد ۵ بگذاریم، یک گزارهٔ درست به دست می‌آید؛ اما اگر به جای x عدد ۶ را قرار دهیم، یک گزارهٔ نادرست خواهیم داشت.

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای‌گذاری مقادیر مختلف به جای متغیرهای آن به یک گزاره تبدیل شود را **گزاره‌نما** می‌گوییم.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما

به مجموعهٔ مقادیری که می‌توانیم به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار دهیم تا گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست یا غلط تبدیل شود، «**دامنهٔ متغیر گزاره‌نما**» می‌گوییم و آن را با D نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌جواب گزاره‌نما

به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود، «**مجموعه‌جواب گزاره‌نما**» می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم ($S\subseteq D$).

مثال گزاره‌نمای $x^3-x^2-4x+4=0$ با قراردادن هر عدد حقیقی به جای x به یک گزارهٔ درست یا غلط تبدیل می‌شود، پس دامنهٔ متغیر این گزاره‌نما مجموعه‌اعداد حقیقی است. ($D=\mathbb{R}$) حالا برای این‌که مجموعه‌جواب این گزاره‌نما را به دست آوریم، باید معادله را حل کنیم:

$$x^3-x^2-4x+4=0 \Rightarrow x^2(x-1)-4(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2-4)=0$$
$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow (x=1) \text{ یا } (x=2) \text{ یا } (x=-2)$$

بنابراین گزاره‌نما به ازای $x\in\{1,2,-2\}$ به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود؛ پس مجموعه‌جواب گزاره‌نما $S=\{1,2,-2\}$ است.

سؤال‌های امتحانی

۴- دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه‌جواب هر یک را مشخص کنید.

۱) x مضرب ۷ است. ($D=\mathbb{Z}$) (کتاب درسی)
۲) x سه واحد از مضارب ۷ بیشتر است. ($D=\mathbb{Z}$) (کتاب درسی)
۳) $\frac{1}{2+x}\in\mathbb{N}$ ($D=\mathbb{Z}$)
۴) $\frac{6x+1}{2x-5}\in\mathbb{Z}$ ($D=\mathbb{Z}$)
۵) a مربع کامل است. ($D=\mathbb{Z}$)
۶) a فرد است. ($D=\mathbb{R}$)
۷) $2x^2+x-1=0$ ($D=\mathbb{R}$)
۸) $2x^2+x-1=0$ ($D=\mathbb{Z}$)
۹) $3^x=0$ ($D=\mathbb{R}$)
۱۰) $\frac{1}{x^2}\le\frac{1}{x^3}$ ($D=\mathbb{R}$)

۵- دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس احتمال آن‌که پیشامد A رخ دهد، برابر با $\frac{1}{2}$ است.» چند عضو دارد؟ چندتا از این اعضا گزاره‌نما را به یک گزارهٔ با ارزش درست تبدیل می‌کنند؟ *(کتاب درسی)*

۶- دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر a را عدد تاس اول و b را عدد تاس دوم در نظر بگیریم، دامنهٔ متغیر و مجموعه‌جواب گزاره‌نماهای زیر چند عضو دارد؟

۱) $a+b$ زوج است.
۲) $a<b$ است.
۳) a و b دو عدد متوالی‌اند.
۴) معادلهٔ درجه‌دوم $x^2-ax+b=0$ دارای ۲ ریشهٔ حقیقی متمایز است.

ترکیب گزاره‌ها

اگر دو یا چند گزاره را با استفاده از «رابط‌های گزاره‌ای» مثل «یا»، «و»، «اگر... آن‌گاه...»، «اگر و فقط اگر» و... به هم وصل کنیم، یک گزارهٔ مرکب ساخته می‌شود. مثلاً گزاره‌های: ۱ «مجید درس نمی‌خواند» و «حسین شاگرد اول است.» و ۲ «۵ عددی زوج است» یا «۵ عددی اول است»، با ترکیب ۲ گزاره به وسیلهٔ رابط‌های «و» و «یا» ساخته شده‌اند.

نقیض یک گزاره $(\sim p)$

نقیض گزارهٔ p را به صورت « $\sim p$ » نوشته و آن را به صورت «چنین نیست که p» می‌خوانیم. ارزش گزارهٔ « $\sim p$ » مخالف ارزش گزارهٔ p است. به علامت « ~ » ناقض گفته می‌شود.

جدول ارزش گزارهٔ $\sim p$ به صورت مقابل است:

p	~p
د	ن
ن	د

بنابراین اگر p درست باشد، $\sim p$ نادرست و اگر p نادرست باشد، $\sim p$ درست است.

مثال **نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.**

p: باران می‌بارد.
$q: x \geq 3$

پاسخ

$\sim p$: چنین نیست که باران ببارد ≡ باران نمی‌بارد.
$\sim q$: چنین نیست که $x \geq 3$ باشد $\equiv x \not\geq 3 \equiv x < 3$

ترکیب فصلی دو گزاره $(p \vee q)$

عبارت «p یا q» که به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسیم را ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q می‌گوییم. رابط منطقی «یا» که به صورت « $\vee$ » نوشته می‌شود را «فاصل» می‌گوییم.

مثال
p: علی معلم است.
q: علی مغازه دارد.
$p \vee q$: علی معلم است یا علی مغازه دارد.

اگر «علی معلم باشد»، یا «مغازه داشته باشد» یا «هم معلم باشد و هم مغازه داشته باشد»، عبارت $p \vee q$ درست است و ارزش گزارهٔ $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که علی معلم نباشد و مغازه هم نداشته باشد. یعنی هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند.

نتیجه بنابراین ارزش گزارهٔ مرکب $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که p و q هر دو نادرست باشند. جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است:

p	q	p∨q
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

تذکر ممکن است چند گزاره به وسیلهٔ ترکیب فصلی به هم وصل شوند، در این صورت گزارهٔ $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ زمانی درست است که لااقل یکی از گزاره‌ها درست باشد. این گزاره تنها زمانی نادرست است که همهٔ گزاره‌ها نادرست باشند.

ترکیب عطفی دو گزاره $(p \wedge q)$

ترکیب «p و q» که به صورت « $p \wedge q$ » نمایش می‌دهیم را ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q می‌گوییم. رابط منطقی «و» که به صورت « $\wedge$ » نوشته می‌شود را «عاطف» می‌گوییم.

مثال
- p: ایران به جام جهانی فوتبال صعود کرد.
- q: علی از دانشگاه فارغ‌التحصیل شد.
- $p \wedge q$: ایران به جام جهانی فوتبال صعود کرد و علی از دانشگاه فارغ‌التحصیل شد.

تنها زمانی که ایران به جام جهانی صعود کند و علی از دانشگاه فارغ‌التحصیل شود، عبارت $p \wedge q$ درست است و اگر یکی از این گزاره‌ها یا هر دوی آن‌ها نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.

نتیجه ارزش گزاره یعنی مرکب «$p \wedge q$» تنها زمانی درست است که هر دو گزارهٔ p و q درست باشند. جدول ارزش گزاره‌ها برای $p \wedge q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

تذکر ترکیب عطفی n گزاره یعنی $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n$ تنها زمانی درست است که همهٔ گزاره‌ها درست باشند و اگر تنها یکی از آن‌ها نادرست باشد این عبارت نادرست خواهد بود.

هم‌ارزی‌های مهم در ترکیب فصلی و عطفی

الف قوانین و هم‌ارزی‌های منطقی زیر را که به راحتی با جدول ارزش گزاره‌ها قابل اثبات هستند را حتماً حفظ کنید.

۱ (قوانین جابه‌جایی) $\begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{cases}$

۲ (قوانین شرکت‌پذیری) $\begin{cases} (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \\ (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \end{cases}$

۳ (قوانین توزیع‌پذیری یا پخشی) $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$

۴ (قوانین جذب یا هم‌پوشانی) $\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$

۵ (قوانین شبه جذب) $\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$

۶ (قوانین دمورگان) $\begin{cases} \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{cases}$

ب اگر ارزش گزارهٔ درست را با T و ارزش گزارهٔ نادرست را با F نمایش دهیم، هم‌ارزی‌های زیر که تقریباً بدیهی هستند را نیز به خاطر بسپارید.

۱ $\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$

۲ $\begin{cases} p \wedge F \equiv F \\ p \vee F \equiv p \end{cases}$

۳ $\begin{cases} p \wedge T \equiv p \\ p \vee T \equiv T \end{cases}$

۴ $\begin{cases} p \wedge \sim p \equiv F \\ p \vee \sim p \equiv T \end{cases}$

۵ $\sim (\sim p) \equiv p$

مثال خواص زیر را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

۱) دمورگان $\begin{cases} \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{cases}$

۲) توزیع‌پذیری $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$

پاسخ ۱ **اثبات قانون دمورگان:** ابتدا ارزش گزاره‌های p و q را می‌نویسیم و سپس ارزش گزاره‌هایی که مورد نیاز است را در جدول به دست می‌آوریم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T

$\equiv$ $\equiv$

ستون‌های مربوط به $\sim (p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ با هم برابر شده‌اند. پس: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

ستون‌های مربوط به $\sim (p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$ با هم برابر شده‌اند پس: $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

۲ **اثبات قانون توزیع‌پذیری:** چون با سه گزارهٔ p، q و r سر و کار داریم، پس طبق اصل ضرب ۸ حالت برای درستی یا نادرستی این سه گزاره وجود دارد:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

چون دو ستون آخر یکسان شده‌اند، پس: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

رابطهٔ دوم در توزیع‌پذیری هم به همین ترتیب اثبات می‌شود.

سؤال‌های امتحانی

۷- قوانین جابه‌جایی و جذب در صفحهٔ قبل را به وسیلهٔ جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

۸- مقادیر x، y و z را بیابید به طوری که داشته باشیم:

۱) $(2y+z)^2 + (x-y)^2 + \sqrt{2x+6} = 0$

۲) $(2y+x)(x+1)(y-1) = 0$

ترکیب شرطی گزاره‌ها

گزارهٔ «اگر هوا بارانی باشد، آن‌گاه آسمان ابری است.» را در نظر بگیرید. گزاره‌هایی به این شکل را «گزاره‌های شرطی» می‌گوییم.

در حالت کلی اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «$p \Rightarrow q$» می‌نویسیم.

در این ترکیب شرطی گزارهٔ p را «فرض یا مقدم» و q را «حکم یا تالی» می‌گوییم.

مثال گزارهٔ شرطی روبه‌رو را در نظر بگیرید:

$p \Rightarrow q$: $\underbrace{\text{هوا بارانی است}}_{\text{فرض یا مقدم}} \Rightarrow \underbrace{\text{آسمان ابری است}}_{\text{حکم یا تالی}}$

گزارهٔ شرطی بالا تنها زمانی نادرست است که «هوا بارانی باشد» اما «آسمان ابری نباشد».

مثال گزارهٔ شرطی «اگر حسن خوب درس بخواند، آن‌گاه نمرهٔ خوبی می‌گیرد.» را در نظر بگیرید.

این گزارهٔ شرطی نیز تنها زمانی نادرست است که حسن خوب درس بخواند اما نمرهٔ خوبی نگیرد.

نتیجه گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p درست اما q نادرست باشد.

جدول ارزش گزارهٔ مرکب $p \Rightarrow q$ به صورت مقابل است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان‌طور که در جدول ارزش $p \Rightarrow q$ می‌بینید، اگر ارزش p (مقدم) نادرست باشد، بدون توجه به این‌که q (تالی) درست یا نادرست است، ارزش $p \Rightarrow q$ همواره درست است. در این حالت می‌گویند ارزش گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

مثال ارزش گزارهٔ «اگر ۴ عددی فرد باشد، آن‌گاه ۹ مربع کامل نیست.» با توجه به این‌که مقدم یعنی گزارهٔ «۴ عددی فرد است.» نادرست است، به انتفای مقدم درست می‌باشد.

قضیهٔ شرطی

اگر در یک گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ بتوان با فرض درستی p، درستی q را نتیجه گرفت، گزارهٔ شرطی به یک «قضیهٔ شرطی» تبدیل می‌شود.

مثلاً گزارهٔ شرطی «اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش همدیگر را نصف می‌کنند» یک قضیهٔ شرطی است. گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

الف اگر p آن‌گاه q

ب p شرط کافی برای q است.

پ q شرط لازم برای p است.

عکس گزارهٔ شرطی

گزارهٔ شرطی «$q \Rightarrow p$» را عکس گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» می‌گوییم.
ارزش این دو گزاره ربطی به هم ندارند و هر کدام می‌توانند درست یا نادرست باشند.

مثال عکس گزارهٔ شرطی «$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$» گزارهٔ شرطی «$x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$» است.

ارزش گزارهٔ شرطی «$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$» درست است اما ارزش گزارهٔ شرطی «$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$» نادرست است؛ زیرا مثال نقض دارد. مثلاً اگر $x = -2$ باشد، $x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 0$ است، اما $x - 2 = (-2) - 2 = -4 \neq 0$ می‌باشد.

عکس نقیض گزارهٔ شرطی

گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow q$ می‌گوییم. هر گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود، هم‌ارز است.

قانون عکس نقیض : $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

مثال **عکس نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید.**

۱) اگر در کوهستان باران ببارد، آن‌گاه در آن گیاه می‌روید.   **۲)** $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$

پاسخ ۱ برای نوشتن عکس نقیض یک گزارهٔ شرطی باید جای فرض و حکم را عوض کرده و هر دو را نقیض کنیم. عکس نقیض گزارهٔ (۱) به شکل زیر است:

(اگر در کوهستان باران ببارد) $\Rightarrow$ (در کوهستان گیاه می‌روید) $\equiv \sim$ (اگر در کوهستان گیاه بروید) $\Rightarrow \sim$ (در کوهستان باران می‌بارد)

$\equiv$ اگر در کوهستان گیاه نرویید باشد $\Rightarrow$ در کوهستان باران نباریده است

$\equiv$عکس نقیض ۱: اگر در کوهستان گیاه نروید، آن‌گاه در کوهستان باران نباریده است.

۲ $(x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2) \equiv (\sim(x > 2 \vee x < -2) \Rightarrow \sim(x^2 > 4)) \equiv (x \leq 2 \wedge x \geq -2 \Rightarrow x^2 \leq 4)$
$\equiv (-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4)$

عبارت آخر عکس نقیض عبارت اولیه است و با آن هم‌ارز است.

تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی

برای تبدیل گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به ترکیب فصلی می‌توان آن را به صورت $\sim p \vee q$ نوشت: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

مثال **هم‌ارزی‌های مقابل را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.** $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

پاسخ

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

چون ستون‌های مربوط به گزاره‌های $p \Rightarrow q$، $\sim p \vee q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ هر سه یکسان هستند، پس این سه گزاره هم‌ارزند.

قانون ادخال فاصل و حذف عاطف

اگر گزارهٔ p درست باشد، گزارهٔ $p \vee q$ حتماً درست است. زیرا برای درست‌بودن $p \vee q$ درست‌بودن یکی از گزاره‌های p یا q کافی است. به این قانون، «قانون ادخال فاصل» می‌گوییم. قانون ادخال فاصل: $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

اگر $p \wedge q$ گزاره‌ای درست باشد، حتماً گزاره‌های p و q هر دو درست هستند. پس اگر ترکیب عطفی $p \wedge q$ درست بود، با حذف گزارهٔ q، گزارهٔ باقی‌مانده یعنی p، همچنان درست است. این قانون را «قانون حذف عاطف» می‌گوییم. قانون حذف عاطف: $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

سؤال‌های امتحانی

۹- قوانین حذف عاطف و ادخال فاصل را به وسیلهٔ جدول ارزش گزاره‌ها اثبات کنید.

$\begin{cases} (p \Rightarrow p \vee q) \equiv T & \text{:قانون ادخال فاصل (۱)} \\ (p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T & \text{:قانون حذف عاطف (۲)} \end{cases}$

۱۰- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

۱) $x \geq -6 \vee x < 5$

۲) $\varnothing \in \{0,1,2,3\}$

۳) لوزی متوازی‌الاضلاع است و قطرهایش همدیگر را نصف می‌کنند.

۴) ۲۹ عددی زوج است.

۱۱- عکس نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

۱) $x \geq 2 \Rightarrow x^2 > 4$

۲) اگر حسن در تمرینات شرکت کند، برای تیم فوتبال مدرسه انتخاب می‌شود.

۱۲- وقتی می‌گوییم «ارزش یک گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم درست است» به چه معنی است؟

ترکیب دوشرطی

ترکیب دوشرطی دو گزارهٔ p و q را با نماد «$\Leftrightarrow$» نمایش می‌دهیم و به صورت $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ تعریف می‌کنیم و آن را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

۱ «p دوشرطی q»

۲ «اگر p آن‌گاه q و برعکس»

۳ «p شرط لازم و کافی برای q است.»

۴ «p اگر و فقط اگر q»

جدول ارزش گزاره‌ها برای $p \Leftrightarrow q$ به صورت مقابل است:

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q هم‌ارزش باشند یعنی p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

در واقع $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که هم $p \Rightarrow q$ و هم $q \Rightarrow p$ درست باشند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

مثال گزاره‌های زیر را به صورت شرطی بنویسید و در صورت امکان آن‌ها را به صورت شرط لازم و کافی بیان کنید.

۱) $\left.\begin{matrix} a = b : p \\ a^2 = b^2 : q \end{matrix}\right\}$

۲) $\left.\begin{matrix} b = 0 \vee a = 0 : p \\ ab = 0 : q \end{matrix}\right\}$

پاسخ ۱ عبارت شرطی «$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$» درست است؛ اما عکس آن یعنی «$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$» نادرست است؛ زیرا $(-1)^2 = 1^2$ است، اما $1 = -1$ نیست، پس عبارت داده‌شده دوشرطی نیست و ترکیب شرطی داده‌شده را به صورت‌های زیر می‌توانیم بخوانیم:

$(a = b \Rightarrow a^2 = b^2) \Leftrightarrow$ (است $a^2 = b^2$ شرط کافی برای $a = b$) $\Leftrightarrow$ (است $a = b$ شرط لازم برای $a^2 = b^2$)

۲ اگر $ab = 0$ باشد، a یا b یا هر دوی آن‌ها صفر هستند و برعکس اگر a یا b یا هر دوی آن‌ها صفر باشند، حتماً $ab = 0$ خواهد بود، پس این گزاره‌ها با هم یک ترکیب دوشرطی درست می‌سازند، پس داریم: $(p \Leftrightarrow q) \equiv (ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$

این ترکیب دوشرطی را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱ شرط لازم و کافی برای آن‌که $ab = 0$ باشد، این است که $a = 0$ یا $b = 0$ باشد.

۲ $ab = 0$ است، اگر و تنها اگر $a = 0$ یا $b = 0$ باشد.

۳ اگر $ab = 0$ باشد، $a = 0$ یا $b = 0$ است و برعکس.

نقیض گزاره‌های شرطی و دوشرطی

(این قسمت برای مطالعهٔ علاقه‌مندان به علم و دانش است و به درد امتحان نهایی نمی‌خورد.)

نقیض گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$ (نوشتن ترکیب شرطی به صورت فصلی)

$\equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q$ (دمورگان)

$\equiv p \wedge \sim q$ $(\sim(\sim p) \equiv p)$

نتیجه نقیض گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» به صورت «$p \wedge \sim q$» است:
$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

نقیض گزارهٔ دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر محاسبه می‌شود: (این اثبات در امتحانات نهایی مورد سؤال نخواهد بود.)

$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$ (تعریف)

$\equiv \sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)$ (دمورگان)

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ (نقیض گزارهٔ شرطی)

$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee \sim p]$ (توزیع‌پذیری)

$\equiv [p \vee q] \wedge [\sim q \vee \sim p]$ (شبه جذب)

$\equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)$ (تبدیل فصلی به شرطی)

$\equiv \sim p \Leftrightarrow q$ (تعریف دوشرطی)

نتیجه نقیض گزارهٔ دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:
$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

سؤال‌های امتحانی

۱۳- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید.

۱) $p \Rightarrow p \equiv T$

۲) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$ *(کتاب درسی)*

۳) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ *(کتاب درسی)*

۱۴- ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

۱) شرط لازم و کافی برای این‌که دو ضلع مثلثی با هم برابر باشند، این است که دو زاویهٔ مجاور اضلاع با هم برابر باشند.

۲) شرط لازم و کافی برای این‌که احتمال پیشامدی صفر باشد، این است که پیشامد تهی باشد. *(کتاب درسی)*

۳) شرط لازم و کافی برای این‌که نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، این است که فاصلهٔ نقطه از دو سر پاره‌خط یکی باشد. *(کتاب درسی)*

۴) $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0$

۵) $x > 3 \Leftrightarrow 20 - 6x < 2$

۱۵- در هر یک از موارد زیر به جای $\square$ چه تعداد از علامت‌های «$\vee$» یا «$\wedge$» یا «$\Rightarrow$» یا «$\Leftrightarrow$» را می‌توان قرار داد تا یک هم‌ارزی درست داشته باشیم؟ (T درست و F نادرست است.)

۱) $(\frac{2}{5} \neq \frac{8}{20}) \square (1 \in \{2,3,4\}) \equiv T$

۲) $(-2 > 3) \square (x^2 + 1 \neq 0) \equiv T$

۳) $(a \in \{b\} \Leftrightarrow a = b) \square$ (دو قطر متوازی‌الاضلاع با هم برابرند.) $\equiv F$

۱۶- با استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای هر عدد صحیح a ثابت کنید اگر a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a نیز عددی فرد است. *(کتاب درسی)*

۱۷- با استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای هر عدد صحیح a ثابت کنید اگر a^2 مضرب ۳ باشد، a نیز مضرب ۳ است.

۱۸- جدول ارزش گزاره‌های زیر را کامل کنید.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
	مجموع هر ۲ عدد اول بزرگ‌تر از ۲ همواره زوج است.								F
$ab < 0 \Rightarrow a > 0 \vee b > 0$				F					
۷- عددی اول است					T				
	$\underset{\text{زوج}}{(a+b)} \Leftrightarrow \underset{\text{فرد}}{(a)} \wedge \underset{\text{فرد}}{(b)}$							F	

۱۹- نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید.

۱) اگر p عددی اول باشد، $p = 6k \pm 1$ است.

۲) اگر عددی بر ۶ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر ۳ و بر ۲ بخش‌پذیر است.

۲۰- گزاره‌های زیر را به صورت یک ترکیب شرطی یا دوشرطی درست بنویسید و آن‌ها را به صورت شرط لازم و کافی بیان کنید.

۱) p: چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است. / q: زوایای $\hat{ABC}$ و $\hat{CDA}$ قائمه‌اند.

۲) p: $a \times b$ زوج است. / q: a و b زوج هستند.

۳) p: a زوج است. / q: $a+1$ فرد است.

۴) p: a و b گنگ و مثبت هستند. / q: ab گنگ است.

۵) p: $ABCD$ مربع است. / q: دو قطر $ABCD$ عمود و برابرند.

۲۱- جدول ارزش گزاره‌های زیر را با توجه به اطلاعات داده‌شده تکمیل کنید. (اطلاعات هر سطر فقط مربوط به همان سطر است.)

p	q	r	$(p \wedge r) \Rightarrow q$	$\sim p \wedge ((\sim p \vee \sim r) \Leftrightarrow q)$	$(p \vee q) \Rightarrow \sim r$	$[r \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$
	F		T			
		F		T		
				F		F

۲۲- الف) آیا از این‌که $p \wedge q \equiv p \wedge r$ می‌توان نتیجه گرفت $q \equiv r$؟ ب) آیا از این‌که $p \vee q \equiv p \vee r$ می‌توان نتیجه گرفت $q \equiv r$؟

پ) آیا از این‌که $p \Rightarrow r$ درست و $q \Rightarrow r$ نادرست هستند، می‌توان نتیجه گرفت $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

۲۳- x را چنان تعیین کنید که هم‌ارزی روبه‌رو همواره برقرار باشد: $(x \wedge \sim p) \vee (\sim x \wedge p) \vee (x \wedge p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q \vee x)$

۲۴- اگر ارزش گزارهٔ $[\sim q \Leftrightarrow (p \wedge S)] \wedge [\sim (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))]$ درست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۱) $S \Leftrightarrow (p \wedge \sim r)$ ۲) $[\sim q \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim q)] \Rightarrow r$

۲۵- اگر بدانیم ارزش گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ نادرست است، ارزش گزاره‌های الف) $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p$ و ب) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow (q \vee p))$ را تعیین کنید.

۲۶- اگر ارزش گزارهٔ $\sim p \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزارهٔ $(q \vee \sim r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \Rightarrow r))$ را تعیین کنید.

۲۷- بدون استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید.

۱) $p \wedge (q \Rightarrow \sim r) \Rightarrow p \equiv T$ ۲) $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$ ۳) $\sim p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \equiv T$

۴) $[p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim p)] \wedge (r \wedge p) \equiv F$ ۵) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

سورها

بعضی وقت‌ها می‌خواهیم یک خاصیت را به همهٔ اعضای یک مجموعه نسبت بدهیم؛ مثلاً می‌گوییم:

الف) «همهٔ» بچه‌های درسخوان موفق هستند.
ب) «همهٔ» اعداد زوج، مضرب ۲ هستند.
پ) «هر» مربع، مستطیل است.
ت) مربع «هر» عدد فرد به شکل $8k+1$ است.
ث) «به ازای جمیع مقادیر» x حقیقی، $x^2+x+1 \geq 0$ است.

در همهٔ این موارد از الفاظ «هر»، «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» استفاده کرده‌ایم. این الفاظ را «**سور عمومی یا کلی**» می‌گوییم. برای نشان‌دادن سور عمومی به زبان ریاضی از نماد «$\forall$» استفاده می‌کنیم.

مثلاً جملات قسمت‌های (ب)، (ت) و (ث) را به شکل‌های زیر به زبان ریاضی می‌توانیم بنویسیم:

ب) $\forall x \in E: x = 2k$ (E مجموعه‌اعداد زوج است.)

ت) $\forall x \in O: x^2 = 8k+1$ (O مجموعه‌اعداد فرد است.)

ث) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2+x+1 \geq 0$

اما گاهی وقت‌ها خاصیتی که می‌خواهیم بیان کنیم، برای همهٔ مقادیری که عضو دامنهٔ متغیر هستند، درست نیست، بلکه برای بعضی از آن‌ها یا حتی تنها برای یکی از آن‌ها درست است. مثلاً گزاره‌های زیر را ببینید:

الف) «وجود دارد» عدد اولی که زوج باشد.
ب) «بعضی» از لوزی‌ها مربع هستند.
پ) به ازای بعضی مقادیر حقیقی x، $x^2-5x+6=0$ است.

می‌بینیم که برای بیان این گزاره‌ها از الفاظی مثل «وجود دارد»، «بعضی» و «به ازای بعضی مقادیر» استفاده می‌کنیم. این الفاظ را «سور وجودی» می‌گوییم و آن‌ها را با نماد ریاضی « $\exists$ » نشان می‌دهیم. مثلاً جملات بالا را با زبان ریاضی به صورت زیر می‌نویسیم:

الف) $\exists x \in P : x = 2k$ (مجموعه‌اعداد اول است P)   ب) $\exists x \in \{\text{لوزی‌ها}\} : x = \text{مربع}$

پ) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0$

تذکر سورهای عمومی یا وجودی با قرارگرفتن قبل از گزاره‌نماها، گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌کنند. مثلاً وقتی می‌گوییم « $2x$ عددی زوج است.» یک گزاره‌نما داریم، اما وقتی می‌گوییم «به ازای هر عدد صحیح x، $2x$ عددی زوج است.» گزاره‌نما به یک گزاره تبدیل شده است.

نتیجه اگر بخواهیم بگوییم گزاره‌نمای $p(x)$ به ازای همهٔ عضوهای مجموعهٔ D (دامنهٔ متغیر گزاره‌نما) درست است، از سور عمومی $\forall$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم: $\forall x \in D : p(x) \Rightarrow$ «هر x عضو D خاصیت $p(x)$ را دارد.»

و اگر بخواهیم بگوییم این گزاره‌نما به ازای بعضی یا لااقل یکی از مقادیر مجموعهٔ D برقرار است، از سور وجودی استفاده می‌کنیم:

$\exists x \in D : p(x) \Rightarrow$ «وجود دارد x عضو D که خاصیت $p(x)$ را دارد.»

بدیهی است که گزارهٔ $\forall x \in D : p(x)$ زمانی درست است که همهٔ عضوهای D خاصیت $p(x)$ را داشته باشند و اگر حداقل یک عضو از D در $p(x)$ صدق نکند، یک گزارهٔ نادرست خواهیم داشت. پس تنها یک مثال نقض می‌تواند نادرستی گزارهٔ دارای سور عمومی را اثبات کند.

اما برای اثبات درستی گزارهٔ $\exists x \in D : p(x)$ باید یک عضو از D پیدا کنیم که در $p(x)$ صدق کند. وجود همین یک عضو برای اثبات درستی این گزاره کافی است و تنها وقتی مجموعه‌جواب گزاره‌نما تهی باشد و هیچ عضو از D در $p(x)$ صدق نکند، گزارهٔ دارای سور وجودی نادرست خواهد شد.

مثال ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

۱) $\forall x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-25}{x-5} = x+5$ ۲) $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ ۳) $\exists x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x^3}$

۴) $\exists x \in \{1,2,3\} : \dfrac{x^2-1}{x+1} \in \{4,5,6\}$ ۵) $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n + 1 \in P$ (مجموعه‌اعداد اول است P) *(کتاب درسی)*

پاسخ ۱ نادرست، به ازای $x = 5$ عبارت به شکل $\dfrac{5^2-25}{5-5} = \dfrac{0}{0} = 5+5$ در می‌آید که نادرست است. همین یک مثال نقض (که تنها مثال نقض این تساوی هم هست) برای نادرستی گزارهٔ دارای سور عمومی کافی است.

۲ درست است، رابطهٔ داده‌شده در $\mathbb{R}^+$ هیچ مثال نقضی ندارد و به راحتی قابل اثبات است:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \xleftrightarrow[\text{در } x \text{ ضرب می‌کنیم}]{x>0} x^2+1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \quad \text{بدیهی}$$

۳ چون سور وجودی داریم، اگر تنها یک مقدار حقیقی x پیدا کنیم که عبارت $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x^3}$ درست شود، ارزش گزارهٔ داده‌شده درست خواهد بود. به ازای $x = \dfrac{1}{2}$ عبارت داده‌شده درست است.

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} < \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{4}} < \frac{1}{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow 4 < 8\right)$$

توجه مجموعه‌جواب گزارهٔ داده‌شده $0 < x < 1$ می‌باشد.

۴ نادرست است، به ازای هیچ‌یک از مقادیر $x \in \{1,2,3\}$ عبارت $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ عضو مجموعهٔ $\{4,5,6\}$ نمی‌شود. پس مجموعه‌جواب این گزاره‌نما در دامنهٔ متغیر داده‌شده، تهی است و گزارهٔ داده‌شده نادرست است:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{1^2-1}{1+1} = 0 \qquad x = 2 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{2^2-1}{2+1} = \frac{3}{3} = 1 \qquad x = 3 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{3^2-1}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$$

۵ نادرست است، به ازای $n = 3$ عدد $2^3 + 1 = 9$ عددی مرکب است. همین یک مثال نقض، برای این‌که بگوییم گزارهٔ دارای سور عمومی نادرست است، کافی است.

تذکر *بچه‌ها یادتون باشه که در حالت کلی هنوز فرمولی برای اعداد اول کشف نشده (البته تا حالا که من اینو می‌نویسم)، یعنی هیچ فرمولی نداریم که به ازای همهٔ مقادیر طبیعی عدد اول تولید کند.*

نقیض سورها

نقیض سور عمومی

نقیض گزارهٔ «۲ عددی اول است» می‌شود «۲ عددی اول نیست». گزارهٔ اول درست و گزارهٔ دوم نادرست است. گزاره‌هایی که دارای سور هستند را نمی‌توان با منفی‌کردن فعل نقیض کرد. مثلاً نقیض گزارهٔ «p: همهٔ دانش‌آموزان معدل بالای ۱۸ دارند.» گزارهٔ «q: همهٔ دانش‌آموزان معدل بالای ۱۸ ندارند.» **نیست**. چون هر دو این گزاره‌ها دارای ارزش نادرست هستند و نمی‌توانند نقیض همدیگر باشند.

توجه کنید که تنها در صورتی که دانش‌آموز یا دانش‌آموزانی وجود داشته باشند که معدلشان بالای ۱۸ نباشد، گزارهٔ p نقض می‌شود، پس می‌توانیم $\sim p$ را به صورت زیر بنویسیم: $[p \equiv$ (همهٔ دانش‌آموزان معدل بالای ۱۸ دارند.)$] \Rightarrow [\sim p \equiv$ (بعضی از دانش‌آموزان هستند که معدل بالای ۱۸ ندارند.)$]$

نتیجه نقیض گزاره‌های دارای سور عمومی را می‌توانیم به شکل روبه‌رو بنویسیم: $\sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$

نقیض سور وجودی

نقیض گزارهٔ «بعضی اعداد طبیعی مربع کامل هستند.» را می‌توان به صورت «هر عدد طبیعی که در نظر بگیریم، مربع کامل نیست.» بنویسیم.

نتیجه در حالت کلی نقیض گزارهٔ دارای سور وجودی به شکل روبه‌رو است: $\sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$

مثال ارزش هر گزاره را تعیین و نقیض آن را بنویسید.

۱) $\exists x \in \mathbb{Z}; ۱۲ \le x^۲ \le ۲۴$
۲) $\forall x \in \mathbb{N}; \frac{x^۲+۵x}{۱۰} \ge x+۵$

پاسخ ۱ درست است، زیرا به ازای $x=۴$ مقدار $x^۲$ در فاصلهٔ ۱۲ تا ۲۴ قرار دارد: $۱۲ \le x^۲ = ۱۶ \le ۲۴$

نقیض گزاره را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$۱۲ \le x^۲ \le ۲۴ \equiv x^۲ \ge ۱۲ \wedge x^۲ \le ۲۴$$

$$\sim(\exists x \in \mathbb{Z}; ۱۲ \le x^۲ \le ۲۴) \equiv \sim(\exists x \in \mathbb{Z}; x^۲ \ge ۱۲ \wedge x^۲ \le ۲۴) \equiv \forall x \in \mathbb{Z}; \sim(x^۲ \ge ۱۲ \wedge x^۲ \le ۲۴) \equiv \forall x \in \mathbb{Z}; x^۲ < ۱۲ \vee x^۲ > ۲۴$$

تذکر اگر $a \ge ۰$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} x^۲ \ge a^۲ \Leftrightarrow x \ge a \vee x \le -a \Leftrightarrow |x| \ge a \\ x^۲ \le a^۲ \Leftrightarrow x \le a \wedge x \ge -a \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow |x| \le a \end{cases}$$

۲ نادرست است، برای اثبات نادرستی باید یک عدد طبیعی x پیدا کنیم که در نابرابری داده‌شده صدق نکند. نابرابری داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^۲+۵x}{۱۰} \ge x+۵ \Rightarrow x^۲+۵x \ge ۱۰x+۵۰ \Rightarrow x^۲-۵x-۵۰ \ge ۰ \Rightarrow (x-۱۰)(x+۵) \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۱۰ \vee x \le -۵$$

بنابراین به ازای اعداد طبیعی بین ۵− و ۱۰ که همان اعداد طبیعی ۱ تا ۹ هستند، نابرابری برقرار نیست. نقیض گزاره به شکل زیر است:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{N}; \frac{x^۲+۵x}{۱۰} \ge x+۵) \equiv \exists x \in \mathbb{N}; \sim(\frac{x^۲+۵x}{۱۰} \ge x+۵) \equiv \exists x \in \mathbb{N}; \frac{x^۲+۵x}{۱۰} < x+۵$$

سؤال‌های امتحانی

۲۸- اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \| x+۵| \le ۲\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

۱) $\forall x \in A; x+۱۰ \ge ۳$ ۲) $\exists x \in A; (x+۶)^۴ = ۱$ ۳) $\forall x \in A; |x+۴| \in \mathbb{N}$ ۴) $\forall x \in A; x+۹ \in \mathbb{N}$

۲۹- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هر یک را بنویسید.

۱) $\forall x \in (-\infty, ۰); x - \frac{۱}{x} \le -۲$ (کتاب درسی)

۲) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^۲-۱}{x-۱} = x+۱$ (کتاب درسی)

۳) $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{۱}{x} > \frac{۱}{۲}$

۴) $\exists n \in P; n^۲+n+۴۱ \notin \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ مجموعه‌اعداد اول است)

۳۰- گزاره‌های زیر را با نماد $\forall$ و $\exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید و نقیض آن را بنویسید.

۱) هر عدد طبیعی، زوج یا فرد است. (کتاب درسی)

۲) همهٔ اعداد اول، فرد هستند. (کتاب درسی)

۳) مجموع هر عدد حقیقی و ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. (کتاب درسی)

۴) مجموع هر عدد حقیقی منفی با معکوسش، کم‌تر یا مساوی ۲− است.

۳۱- در جاهای خالی از میان سورهای $\forall$ یا $\exists$، آن را که مناسب‌تر است قرار دهید تا گزارهٔ داده‌شده درست باشد.

۱) $\ldots\ldots\ x \in \mathbb{R} ; \dfrac{x^2-1}{x^2-1}=1$

۲) $\ldots\ldots\ x \in \mathbb{R} ; \dfrac{x^2-16}{x+4}=0$

۳) $\ldots\ldots\ x \in \mathbb{R}^+ ; \dfrac{x+5}{x+5}=1$

۴) $\ldots\ldots\ a \in \mathbb{R}^- ; a^2 > a$

۵) $\ldots\ldots\ x,y,z \in \mathbb{R} ; (2x-y)^2+(y+z)^2+(x-1)^2=0$

۶) $\ldots\ldots\ x \in \mathbb{Z} ; \tan x . \cot x = 1$

۳۲- عکس، نقیض و عکس نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید. ارزش گزارهٔ اولیه و عکس آن را نیز تعیین کنید. آیا این گزاره‌ها می‌توانند یک قضیهٔ دوشرطی باشند؟

۱) $\forall a,b \in \mathbb{R} ; a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$

۲) $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq 25 \Rightarrow x \geq 5 \vee x \leq -5$

۳) $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \leq 25 \Rightarrow x \leq 5 \vee x \geq -5$

۳۳- نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید.

۱) عدد زوجی وجود دارد که اول نیست.

۲) پرنده‌ای یافت می‌شود که نمی‌پرد.

۳) توانا بود هر که دانا بود.

۴) بعضی آفریقایی‌ها، سیاه‌پوست نیستند.

۵) انسان‌هایی هستند که با همهٔ انسان‌ها دوست هستند.

۶) بعضی مردم همهٔ کتاب‌ها را می‌خوانند.

۳۴- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

۱) $(\forall a,b \in \mathbb{R} ; ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0) \wedge (\forall a,b \in \mathbb{R} ; a^2+b^2=0 \Rightarrow a=0 \wedge b=0)$

۲) $\forall x \in \mathbb{R} ; x \geq 2 \Rightarrow x < 10 \vee x \geq 4$

۳) $(\exists x \in \mathbb{R} ; \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^- ; \sqrt[3]{x^4} = -x\sqrt[3]{x})$

۲ مجموعه، زیرمجموعه

مجموعه به هر دسته از اشیای کاملاً مشخص یک مجموعه می‌گوییم. مثلاً مجموعه‌اعداد زوج ۲رقمی به صورت $A=\{10,12,14,\ldots,98\}$ می‌باشد. اگر x عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $x \in A$ و اگر x عضوی از مجموعهٔ A نباشد، می‌نویسیم $x \notin A$.

مثلاً در مجموعهٔ بالا $18 \in A$ و $21 \notin A$.

چند مجموعهٔ معروف

$\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\ldots\}$: مجموعه‌اعداد حسابی

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\ldots\}$: مجموعه‌اعداد طبیعی

$\mathbb{Q}=\{\dfrac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$: مجموعه‌اعداد گویا

$\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$: مجموعه‌اعداد صحیح

$\mathbb{Q}'=$ (مجموعه اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد) $=\{\ldots,-\sqrt{2},\sqrt{2},\pi,\ldots\}$: مجموعه‌اعداد گنگ

$\mathbb{E}=\{\ldots,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\}$: مجموعه‌اعداد زوج

$\mathbb{R}=\{x \mid x \in \mathbb{Q}$ یا $x \in \mathbb{Q}'\}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$: مجموعه‌اعداد حقیقی

$\mathbb{P}=\{2,3,5,7,11,\ldots\}$: مجموعه‌اعداد اول

$\mathbb{O}=\{\ldots,-3,-1,1,3,5,7,\ldots\}$: مجموعه‌اعداد فرد

روش‌های نمایش مجموعه‌ها

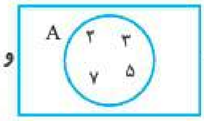
۱ نمایش تفصیلی: در این روش یک مجموعه را با نام‌بردن اعضای آن مشخص می‌کنیم. مثلاً مجموعه اعداد اول یک‌رقمی را به صورت $A=\{2,3,5,7\}$ نمایش می‌دهیم.

۲ نمایش با نماد ریاضی: در این روش خاصیت مشترکی که اعضای مجموعه دارند را به صورت $P(x)$ نمایش می‌دهیم و مجموعه را به صورت $A=\{x \in U \mid P(x)\}$ یا $A=\{x \mid P(x), x \in U\}$ می‌نویسیم. (U مجموعهٔ مرجع می‌باشد.) مثلاً مجموعه‌اعداد اول یک‌رقمی را به صورت زیر می‌نویسیم:

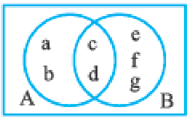
$A=\{x \in \mathbb{P} \mid x<10\}$ یا $A=\{x \mid x<10, x \in \mathbb{P}\}$

($\mathbb{P}$ مجموعه اعداد اول است.)

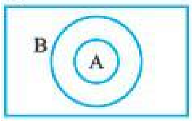
۳ **نمایش هندسی (نمایش با نمودار ون):** در این روش اعضای مجموعه را درون یک خم بسته نشان می‌دهند. مثلاً نمایش هندسی مجموعه‌اعداد اول کم‌تر از ۱۰ به صورت



و نمایش هندسی مجموعه‌های $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{c,d,e,f,g\}$ به صورت



و نمایش هندسی $A\subseteq B$ و $A\neq B$ به صورت



می‌باشد.

مجموعهٔ تهی مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعهٔ تهی می‌نامیم و آن را به صورت $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم.

مثال کدام‌یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

۱) $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,۲x^۲+x-۱\leq ۰\}$ ۲) $B=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^۳+۲m=۳m^۲\}$

پاسخ ۱ ابتدا باید عبارت $P(x)=۲x^۲+x-۱$ را تعیین علامت کنیم:

$$۲x^۲+x-۱\leq ۰ \Rightarrow (۲x-۱)(x+۱)\leq ۰$$

x		-۱		$\frac{۱}{۲}$	
P(x)	+	۰	−	۰	+

بنابراین $-۱\leq x\leq \frac{۱}{۲}$ می‌باشد که هیچ عدد طبیعی در این بازه وجود ندارد، پس $A=\varnothing$ است.

۲

$$m^۳+۲m=۳m^۲ \Rightarrow m^۳-۳m^۲+۲m=۰ \Rightarrow m(m^۲-۳m+۲)=۰$$
$$\Rightarrow m(m-۱)(m-۲)=۰ \Rightarrow m=۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } ۲ \Rightarrow B=\{۰,۱,۲\}\neq\varnothing$$

بنابراین B مجموعه‌ای تهی نیست.

عدد اصلی یک مجموعه تعداد عضوهای یک مجموعهٔ متناهی را «عدد اصلی» آن مجموعه می‌گوییم و آن را به صورت $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهیم.

تذکر تغییر ترتیب و یا تکرار عضوهای مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی دهد. مثلاً مجموعه‌های زیر با هم برابر بوده و عدد اصلی همهٔ آن‌ها برابر با ۳ است.

$$A=\{۱,۲,۳\}=\{۲,۱,۳\}=\{۱,۱,۳,۲,۲,۳,۳,۱,۱\} \Rightarrow n(A)=۳$$

سؤال‌های امتحانی

۳۵- مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی (با استفاده از گزاره‌نما) بنویسید.

۱) $A=\{-۱,۰,۱,۸,۲۷,\ldots\}$ ۲) $B=\{۰,۳,۸,۱۵,۲۴,\ldots\}$ ۳) $D=\{۱,۶,۱۱,۱۶,۲۱,\ldots\}$

۳۶- عدد اصلی هر یک از مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

۱) $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,|x|<۳\}$ ۲) $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۳x^۲-۵x-۲=۰\}$

۳) $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^۲+x+۱\leq ۰\}$ ۴) $D=\{\{a\},\{\{a,b\},a\},a,b,\{a,b\}\}$

زیرمجموعه‌ها

زیرمجموعه اگر هر عضو A عضوی از B نیز باشد، مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B می‌گوییم و می‌نویسیم $A\subseteq B$. مثلاً اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد، آن‌گاه $A\subseteq B$ است.

اما B زیرمجموعهٔ A نیست چون بعضی از اعضای B در A نیستند پس $B\not\subseteq A$.

$$\begin{cases} A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x\in A \Rightarrow x\in B) \\ A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x\in A \wedge x\notin B) \end{cases}$$

مجموعهٔ توانی اگر همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A را در یک مجموعه قرار دهیم، مجموعهٔ به دست آمده را مجموعهٔ توانی A می‌گوییم و آن را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم. بدیهی است اگر A مجموعه‌ای nعضوی باشد، تعداد عضوهای مجموعهٔ توانی A، ۲^n تا است.

مثال مجموعهٔ شامل تمام زیرمجموعه‌های، مجموعه‌های داده‌شده را بنویسید. (مجموعهٔ توانی هر یک از مجموعه ها موردنظر است.)

۱) $A=\varnothing$ ۲) $B=\{۱\}$ ۳) $C=\{۱,۲\}$ ۴) $D=\{۱,\{۱\}\}$

پاسخ ۱ $A=\varnothing \Rightarrow P(A)=\{\varnothing\}$

۲ $B=\{۱\} \Rightarrow P(B)=\{\varnothing,\{۱\}\}$

۳ $C=\{۱,۲\} \Rightarrow P(C)=\{\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{۱,۲\}\}$

۴ این مجموعه یک مجموعهٔ ۲عضوی است، پس مانند (۳) عمل می‌کنیم:

$$D=\{۱,\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{\{۱\}}\} \Rightarrow P(D)=\{\varnothing,\{۱\},\{\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{\{۱\}}\},\{۱,\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{\{۱\}}\}\}$$

مثال اگر $A=\{x,\{x\},\{x,\{x\}\}\}$ باشد، کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

۱) $\{x\}\subseteq A$ ۲) $\{\{x\}\}\in A$

پاسخ مجموعهٔ داده‌شده یک مجموعهٔ ۳عضوی با اعضای x، $\{x\}$ و $\{x,\{x\}\}$ می‌باشد، بنابراین (۱) درست و (۲) نادرست است.

$\{x,\{x\},\{x,\{x\}\}\}$

تذکر اگر $a\in A$ باشد $\{a\}\subseteq A$ است و برعکس. $a\in A \Leftrightarrow \{a\}\subseteq A$

بنابراین اگر خواستیم چک کنیم $\{x\}$ زیرمجموعهٔ A هست یا نه؟ می‌توانیم یک آکولاد خارجی را حذف کنیم و چک کنیم آیا $x\in A$ هست یا نه؟ مثلاً $\{\{x\}\}\subset\{\{x\},x\}$ می‌باشد زیرا $\{x\}\in\{\{x\},x\}$ است.

نکته تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی ۲^nتا است.

توجه هر زیرمجموعهٔ A غیر از خود A را یک زیرمجموعهٔ «محض» یا «سره» مجموعهٔ A می‌گوییم، پس تعداد زیرمجموعه‌های محض A، $۲^n-۱$ تا است.

توجه $\varnothing$ زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌ها است، پس غیر از مجموعهٔ $\varnothing$ تمام مجموعه‌ها زیرمجموعهٔ محض یا سره دارند.

یادآوری تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعهٔ nعضوی برابر است با: $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

در واقع برای به دست آوردن زیرمجموعه‌های k عضوی از بین n عضو، k عضو را بدون توجه به ترتیب انتخاب می‌کنیم.

مثال مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$ را در نظر بگیرید.

۱) A چند زیرمجموعه دارد؟ ۲) A چند زیرمجموعهٔ سره دارد؟

۳) A چند زیرمجموعهٔ ۶عضوی دارد؟ ۴) چه تعداد از زیرمجموعه‌های A شامل ۱ و ۲ و فاقد ۳ هستند؟

پاسخ ۱ تعداد کل زیرمجموعه‌ها $=۲^n=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$

۲ تعداد زیرمجموعه‌های محض $=۲^n-۱=۲^{۱۰}-۱=۱۰۲۳$

۳ باید ۶ عضو از میان ۱۰ عضو (بدون توجه به ترتیب) انتخاب کنیم:

$$\binom{۱۰}{۶}=\frac{۱۰!}{۶!\times۴!}=۲۱۰$$

۴ از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. هر عضو A یا در زیرمجموعهٔ مطلوب قرار دارد یا قرار ندارد پس هر عضو برای قرارگرفتن در زیرمجموعه ۲ حالت دارد. اما اعداد ۱ و ۲ باید در زیرمجموعه باشند پس هر کدام برای حضور در زیرمجموعه یک حالت دارند و عدد ۳ در زیرمجموعه قرار ندارد پس عدد ۳ هم ۱ حالت دارد، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های شامل ۱ و ۲ و فاقد ۳ برابر است با: $۱\times۱\times۱\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۲^۷=۱۲۸$

برای حل قسمت (۴) می‌توانیم بگوییم: هر زیرمجموعهٔ A با یک کد ۱۰ رقمی از اعداد صفر و یک متناظر است و چون ۱ و ۲ در زیرمجموعه هستند به جایشان یک و چون عدد ۳ در زیرمجموعه نیست به جایش ۰ می‌گذاریم، حالا ۷ عضو ۴ تا ۱۰ می‌ماند که هر کدام می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند، پس به جای هر کدام ۰ یا ۱ می‌توانیم بگذاریم. پس کد مربوط به زیرمجموعهٔ مطلوب $۲^۷$ حالت دارد.

$$۲^۷=\underset{\substack{\downarrow\\ ۰\ \text{یا}\ ۱}}{۲}\ ۲\ ۲\ ۲\ ۲\ \underset{\substack{\downarrow\\ ۰\ \text{یا}\ ۱}}{۲}\ \underset{\substack{\downarrow\\ ۰\ \text{یا}\ ۱}}{۲}\ ۰۱۱=$$ کد ۱۰ رقمی متناظر با زیرمجموعهٔ مطلوب

نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ nعضوی، شامل i عضو خاص و فاقد j عضو خاص برابر ۲^{n-i-j} و تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی مجموعهٔ nعضوی، شامل i عضو خاص و فاقد j عضو خاص برابر $\binom{n-i-j}{k-i}$ است.

مثلاً تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ ۱۰عضوی $A=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$ که شامل ۲ عضو ۱ و ۲ و فاقد عضو ۳ باشد برابر با $۱۲۸=۲^{۷}=۲^{۱۰-۲-۱}=۲^{n-i-j}$ و تعداد زیرمجموعه‌های ۶عضوی A با همین شرایط برابر با $۳۵=\binom{۷}{۴}=\binom{۱۰-۲-۱}{۶-۲}=\binom{n-i-j}{k-i}$ می‌باشد.

سؤال‌های امتحانی

۳۷- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (مشابه کتاب درسی)

۱) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$ ۲) $\varnothing=\{\varnothing\}$ ۳) $\varnothing\notin\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ۴) $\{\{\varnothing\}\}\subset\{\varnothing,\{\{\varnothing\},\varnothing\}\}$

۳۸- ثابت کنید $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

۳۹- اگر $A=\{\varnothing,۳\}$ و $B=\{a,\{a\},\varnothing\}$ باشد، همهٔ زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های A و B را در یک مجموعه بنویسید.

۴۰- مثال‌هایی از مجموعه‌های A، B و C بیاورید که برای آن‌ها حکم‌های زیر درست باشند. (کتاب درسی)

۱) $A\in B, A\subseteq B$ ۲) $A\in B, B\in C, A\in C$ ۳) $A\in B, B\in C, A\notin C$

۴۱- مجموعهٔ ۳عضوی مثال بزنید که هر عضو آن زیرمجموعهٔ آن نیز باشد.

۴۲- اگر دو عضو از مجموعهٔ A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعهٔ A چند زیرمجموعه دارد؟ (تمرین کتاب درسی)

۴۳- اگر به تعداد زیرمجموعه‌های سرهٔ یک مجموعهٔ $۲n$ عضوی ۵ واحد اضافه کنیم، حاصل برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $n+۲$ عضوی خواهد بود. مجموعهٔ $n+۵$ عضوی A چند زیرمجموعهٔ ۳عضوی دارد؟

۴۴- دو مجموعهٔ A و B روی هم ۱۴ عضو دارند. اگر تعداد زیرمجموعه‌های A، ۱۶ برابر تعداد اعضای مجموعهٔ توانی B باشد، مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۴۵- تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعهٔ $k+۱$عضوی از تعداد اعضای مجموعهٔ توانی یک مجموعهٔ $k-۱$عضوی ۴۷ واحد بیشتر است. مقدار k را بیابید.

۴۶- اگر $A=\{\{۱\},\{\{۱\}\}\}$ باشد، کدام نادرست است؟

۱) $\{۱\}\subseteq A$ ۲) $\{۱\}\in A$ ۳) $\{\{۱\}\}\in A$

۴) $\{\{۱\}\}\subseteq A$ ۵) $۱\in A$ ۶) $\{\{\{۱\}\}\}\subseteq A$

۴۷- مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,\dots,۸\}$:

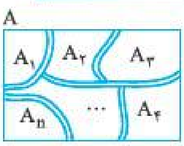
۱) چند زیرمجموعه دارد؟ ۲) چند زیرمجموعهٔ محض یا سره دارد؟

۳) چند زیرمجموعه شامل ۱ و ۲ و فاقد ۳ و ۴ و ۵ دارد؟

۴۸- مجموعهٔ شامل تمام زیرمجموعه‌های، مجموعه‌های $A=\{۱,\{۱,۲\}\}$ و $B=\{۱,\{۱\},\{۱,\{۱\}\}\}$ را بنویسید.

۴۹- اگر ۲ عضو به مجموعهٔ A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد. A چند عضو دارد؟ (کتاب درسی)

افراز یک مجموعه



می‌گوییم مجموعهٔ A به زیرمجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n افراز شده است، اگر هر ۳ شرط زیر برقرار باشد:

الف هیچ‌کدام از مجموعه‌های $A_۱$ تا A_n تهی نباشند.

ب هیچ دو مجموعه از مجموعه‌های $A_۱$ تا A_n اشتراکی نداشته باشند.

پ اجتماع مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n برابر A باشد.

مثلاً مجموعه‌اعداد صحیح را می‌توان به ۲ زیرمجموعه‌اعداد زوج و اعداد فرد افراز کرد. بدیهی است این دو مجموعه غیرتهی بوده، هیچ اشتراکی ندارند و اجتماع آن‌ها برابر مجموعهٔ اولیه یعنی اعداد صحیح است.

مثال **تعداد افرازهای مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ چندتا است؟ آن‌ها را بنویسید.**

پاسخ مجموعهٔ داده‌شده را به ۵ صورت زیر می‌توان افراز کرد:

۱ $\{۱\},\{۲\},\{۳\}$ ۲ $\{۱,۲\},\{۳\}$ ۳ $\{۱,۳\},\{۲\}$

۴ $\{۲,۳\},\{۱\}$ ۵ $\{۱,۲,۳\}$

مثال تمام افرازهای سه‌عضوی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ را بنویسید.

پاسخ باید مجموعهٔ A را به ۳ مجموعه افراز کنیم. برای این کار آن را به یک مجموعهٔ ۲عضوی و دو مجموعهٔ یک‌عضوی تقسیم می‌کنیم.
این کار به ۶ حالت زیر امکان‌پذیر است:

۱ $\{۱,۲\},\{۳\},\{۴\}$ ۲ $\{۱,۳\},\{۲\},\{۴\}$ ۳ $\{۱,۴\},\{۲\},\{۳\}$

۴ $\{۲,۳\},\{۱\},\{۴\}$ ۵ $\{۲,۴\},\{۱\},\{۳\}$ ۶ $\{۳,۴\},\{۱\},\{۲\}$

سؤال‌های امتحانی

۵۰- مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ چند افراز دارد؟ آن‌ها را بنویسید.

۵۱- کدام‌یک از حالت‌های زیر یک افراز از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ محسوب می‌شود؟

۱) $\{a,c,d\}\{b,e\}\{b,g\}$ ۲) $\{b,d,f\}\{a,e,g\}\{\varnothing,c\}$ ۳) $\{a,b,c,d,e,f,g\}$

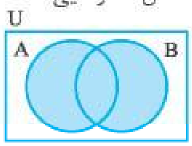
۴) $\{a,g\}\{b,e,f\}\{c\}\{d\}$ ۵) $\{c,b,e\}\{a,d,f\}\{e,b\}$

جبر مجموعه‌ها

در سال گذشته با ترکیب مجموعه‌ها، مجموعه‌های جدید می‌ساختیم، بعضی راه‌های ترکیب مجموعه‌ها را در ادامه یادآوری می‌کنیم.

اجتماع دو مجموعه

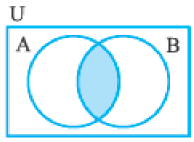
مجموعهٔ $A\cup B$ عضوهایی که در A یا در B یا در هر دو مجموعه A و B باشند را شامل می‌شود، به عبارت دیگر $A\cup B$ شامل عضوهایی است که حداقل در یکی از مجموعه‌های A یا B باشند.



$A\cup B$

$$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$$
$$x\notin A\cup B \Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$$

اشتراک دو مجموعه

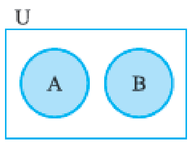


$A\cap B$

اشتراک دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که همهٔ عضوهای مشترک A و B را دارد.

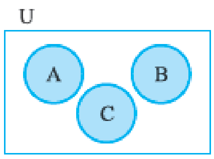
$$A\cap B=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\in B\}$$
$$x\notin A\cap B \Rightarrow x\notin A\vee x\notin B$$

تذکر اگر دو مجموعهٔ غیرتهی A و B عضو مشترکی نداشته باشند، $A\cap B=\varnothing$ بوده، دو مجموعهٔ A و B را جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

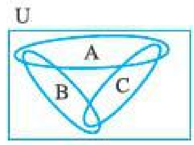


$A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow$ A و B دو مجموعهٔ جدا از هم هستند.

تذکر اگر $A\cap B\cap C=\varnothing$ باشد، نمی‌توانیم بگوییم A، B و C جدا از هم هستند، بلکه برای این‌که ۳ مجموعه جدا از هم باشند، باید A، B و C دو به دو جدا از هم باشند، یعنی $A\cap B=\varnothing$، $B\cap C=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$ باشد.



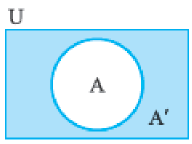
A، B و C جدا از هم هستند.



$A\cup B\cap C=\varnothing$ است، اما A، B و C جدا از هم نیستند.

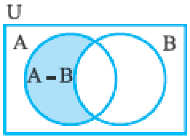
متمم مجموعهٔ A

متمم مجموعهٔ A که با A' نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است شامل تمام عضوهایی از مجموعهٔ مرجع که در A نباشند.



$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$
$$\begin{cases} x\in A' \Leftrightarrow x\notin A \\ x\notin A' \Leftrightarrow x\in A \end{cases}$$

تفاضل دو مجموعه



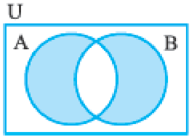
مجموعهٔ $A-B$ شامل تمام عضوهایی از A است که در B نیستند.

$$A-B=\{x\in A \mid x\notin B\}$$

$$\begin{cases} x\in A-B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \\ x\notin A-B \Leftrightarrow x\notin A \vee x\in B \end{cases}$$

تذکر $A-B=A\cap B'$

تفاضل متقارن دو مجموعه



$A\Delta B$

$A\Delta B$ عبارت است از مجموعهٔ تمام اعضایی که دقیقاً به یکی از دو مجموعهٔ A یا B تعلق دارند.

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$$

با توجه به نمودار ون $A\Delta B$ را می‌توان به صورت $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$ نیز نمایش داد.

$$x\in(A\Delta B) \Rightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)$$

مثال اگر $U=\{2,3,5,7,9,11,13\}$ ، $A=\{3,5,7,11\}$ و $B=\{2,3,11,13\}$ باشد، مطلوب است:

۱) A' ۲) $(A\cap B)'$ ۳) $A-B$ ۴) $A\cup B$ ۵) $A\Delta B$

پاسخ

۱ $A'=\{x\in \mathbb{U} \mid x\notin A\}=\{2,9,13\}$

۲ $(A\cap B)'=\{x\in \mathbb{U} \mid x\in A\wedge x\in B\}'=\{3,11\}'=\{2,5,7,9,13\}$

۳ $A-B=\{x\in A \mid x\notin B\}=\{5,7\}$

۴ $A\cup B=\{x\in \mathbb{U} \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}=\{2,3,5,7,11,13\}$

۵ $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\{5,7\}\cup\{2,13\}=\{2,5,7,13\}$

تذکر اجتماع n مجموعهٔ A_1 تا A_n را به صورت $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ و اشتراک این n مجموعه را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

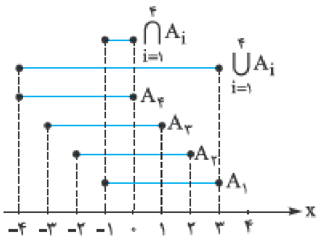
مثال اگر $A_i=[-i,4-i]$ و $i\in\mathbb{N}$ باشد، مطلوب است $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ و $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$.

پاسخ به ازای مقادیر ۱ تا ۴ برای i ، A_i را به دست آورده و مجموعه‌های به دست آمده را با هم اجتماع و اشتراک می‌گیریم. برای حل این مسائل بهتر است بازه‌ها را روی محور مختصات نشان دهیم تا کم‌تر اشتباه کنیم.

$$A_1=[-1,3]$$
$$A_2=[-2,2]$$
$$A_3=[-3,1]$$
$$A_4=[-4,0]$$

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_i=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=[-4,3]$$

$$\bigcap_{i=1}^{4} A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=[-1,0]$$



سؤال‌های امتحانی

۵۲- اگر $A=\{\varnothing,2\}$ ، $B=\{\varnothing,\{2\}\}$ و $C=\{\varnothing,\{\varnothing,2\}\}$ باشد، مجموعه‌های $A\cap C$ ، $A-B$ و $B\Delta C$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۵۳- اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z} \mid -n\le m, 2^m\le n, n\in\mathbb{N}\}$ باشد، مطلوب است $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$ و $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$.

۵۴- اگر $A_n=(-\frac{1}{n},\frac{2n-1}{n}]$ باشد، مطلوب است $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ ، $\bigcap_{i=1}^{4} A_i$.

روش عضوگیری

روش «عضوگیری» یکی از روش‌های مهم در اثبات روابط مجموعه‌ها می‌باشد. مثلاً اگر بخواهیم با این روش ثابت کنیم $A \subseteq B$ است باید به شکل زیر عمل کنیم:

۱ فرض می‌کنیم x عضوی دلخواه از مجموعهٔ A باشد. **۲ با کمک فرضیات مسئله ثابت می‌کنیم حتماً $x \in B$ نیز هست.**

۳ حالا با توجه به این‌که ثابت کردیم هر عضو A عضوی از B هم هست، پس $A \subseteq B$ می‌باشد.

تعریف $\begin{cases} A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x \in A \Rightarrow x \in B) \\ A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x \in A \wedge x \notin B) \end{cases}$

مثال به روش عضوگیری ثابت کنید:

۱) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$ ۲) $\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

پاسخ ۱ برای این‌که ثابت شود $B' \subseteq A'$ است، باید ثابت کنیم هر عضو B' عضوی از A' است. پس ابتدا فرض می‌کنیم x عضوی دلخواه از B' باشد، پس داریم:

$$\forall x;(x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A')$$

بنابراین ثابت شد هر عضو B' عضوی از A' است. پس $B' \subseteq A'$ می‌باشد:

$$\forall x;(x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

۲ این رابطه را حفظ کنید چون در حل بعضی مسئله‌ها از آن استفاده خواهیم کرد و یادتان باشد اگر به جای اجتماع، اشتراک بگذاریم هم برقرار است.

برای اثبات این رابطه باید نشان دهیم که هر عضو دلخواه مانند x از $A \cup C$ حتماً عضوی از $B \cup D$ است.

$$\forall x;[x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ \quad\vee \qquad\qquad\quad \vee \\ x \in C \xrightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in (B \cup D)$$

بنابراین داریم:

$$\forall x;[x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$$

مثال برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A با مجموعهٔ مرجع U ثابت کنید: $\varnothing \subseteq A$

پاسخ برای اثبات این‌که $\varnothing \subseteq A$ باید ثابت کنیم $(\forall x;(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A))$، همواره درست است.

چون در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم یعنی $x \in \varnothing$ نادرست است، پس طبق آن‌چه در بخش اول گفتیم ارزش این گزارهٔ شرطی به انتفای مقدم درست است و $\varnothing \subseteq A$ می‌باشد.

سؤال‌های امتحانی

۵۵- به روش «عضوگیری دلخواه» ثابت کنید:

۱) $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

۲) $\begin{cases} \text{الف) } A \subseteq (A \cup B) \\ \text{ب) } (A \cap B) \subseteq A \end{cases}$

۳) $\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

۴) $\left.\begin{matrix} A \subseteq C \\ B \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

۵) $\left.\begin{matrix} C \subseteq A \\ C \subseteq B \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \subseteq (A \cap B)$

۶) $A - B \subseteq A$

تساوی دو مجموعه

دو مجموعهٔ A و B مساوی‌اند، اگر و تنها اگر همهٔ عضوهای آن‌ها یکسان باشند. تساوی دو مجموعه را با استفاده از قضیهٔ زیر می‌توان بیان نمود:

قضیه: دو مجموعهٔ A و B مساوی‌اند، اگر و تنها اگر هر یک زیرمجموعهٔ دیگری باشد: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

مثال اگر $A \subseteq B$ باشد، ثابت کنید $A - B = \varnothing$ است.

پاسخ برای اثبات $A - B = \varnothing$ باید ثابت کنیم $A - B \subseteq \varnothing$ و $\varnothing \subseteq A - B$.

برای اثبات $A - B \subseteq \varnothing$ از «روش عضوگیری» استفاده می‌کنیم:

$$\forall x;(x \in A - B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in B \wedge x \in B' \Rightarrow x \in (B \cap B') \Rightarrow x \in \varnothing$$

$A \subseteq B$

بنابراین ثابت کردیم $(\forall x; x \in A - B \Rightarrow x \in \varnothing)$، پس $A - B \subseteq \varnothing$ می‌باشد و چون تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای می‌باشد، پس $\varnothing \subseteq A - B$ است.

بنابراین داریم:

$$\left.\begin{matrix} A - B \subseteq \varnothing \\ \varnothing \subseteq A - B \end{matrix}\right\} \Rightarrow A - B = \varnothing$$

مثال اگر مجموعهٔ $\{a^2 - 3a, 5, 4\}$ و $\{4, b+a, -2\}$ مساوی باشند، مقادیر a و b را بیابید.

پاسخ باید اعضای ۲ مجموعه با هم برابر باشند:

$$\{a^2-3a, 5, 4\} = \{4, b+a, -2\} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 3a = -2 \\ b + a = 5 \end{cases}$$

$$a^2 - 3a = -2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = 2$$

$$\begin{cases} a = 1 \Rightarrow b + 1 = 5 \Rightarrow b = 4 \\ a = 2 \Rightarrow b + 2 = 5 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow (a,b) \in \{(1,4),(2,3)\}$$

سؤال‌های امتحانی

۵۶- هر یک از موارد زیر را ثابت کنید: (کتاب درسی)

۱) $A \subseteq \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

۲) $U \subseteq A \Rightarrow A = U$

۳) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A - B = A$

۴) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow B \subseteq A'$

۵۷- اگر $\{2x^2 - 3x, 4x - 6\} = \{a^2 + 1\}$ باشد، مقادیر a و x را بیابید.

۵۸- اگر $A = \{2, x+2y, 4\}$ و $B = \{4, 5, x-y\}$ و $A = B$ باشد، مقادیر x و y را بیابید. (کتاب درسی)

۵۹- با استفاده از نمودار «ون» و هم‌چنین روش «عضوگیری دلخواه»، هر یک از موارد زیر را اثبات کنید.

۱) $\begin{cases} \text{الف) } A \cap B = B \cap A \\ \text{ب) } A \cup B = B \cup A \end{cases}$

۲) $\begin{cases} \text{الف) } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ \text{ب) } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \text{الف) } (A \cap B)' = A' \cup B' \\ \text{ب) } (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$

۳ قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

قبلاً دیدیم که یکی از روش‌های اثبات روابط موجود در مجموعه‌ها، روش «عضوگیری» است و در بخش قبل تعدادی از روابط و قوانین موجود در مجموعه‌ها را با این روش اثبات کردیم.

چند قانون ساده در مجموعه‌ها وجود دارد که اگر این قوانین را یاد بگیریم بسیاری از روابط دیگر را می‌توانیم با استفاده از این قوانین خیلی راحت‌تر از قبل اثبات کنیم، بنابراین چندتا از این قانون‌های مهم را برایتان می‌نویسیم که آن‌ها را خوب حفظ کنید تا بتوانیم در اثبات روابط بعدی از آن‌ها استفاده کنیم.

۱ قانون جابه‌جایی $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

۲ قانون شرکت‌پذیری $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$

۳ قانون توزیع‌پذیری (پخشی) $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

۴ قانون دمورگان $\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$

تذکر هر ۴ قانون بالا را در تمرینات بخش قبل با روش «عضوگیری دلخواه» برایتان ثابت کردیم. اثبات‌ها مهم هستند پس سعی کنید آن‌ها را خوب یاد بگیرید.

۵ قانون جذب (هم‌پوشانی) $\begin{cases} \text{الف) } A \cup (A \cap B) = A \\ \text{ب) } A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$

اثبات این قانون بسیار ساده و البته مهم است:

اثبات (الف): $A \cup (A \cap B) = \underbrace{(A \cap U)}_{A = A \cap U} \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A$

اثبات (ب): $A \cap (A \cup B) = \underbrace{(A \cup \varnothing)}_{A = A \cup \varnothing} \cap (A \cup B) = A \cup (\varnothing \cap B) = A \cup \varnothing = A$

۶ قانون شبه‌جذب $\begin{cases} \text{الف) } A \cup (A' \cap B) = A \cup B \\ \text{ب) } A \cap (A' \cup B) = A \cap B \end{cases}$

اثبات (الف): $A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B) = A \cup B$

اثبات (ب): $A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B$

این چند قانون مهم و نتیجهٔ کوچک را نیز به یاد داشته باشید:

۱) $(A')' = A$

۲) $\begin{cases} A' \cap A = \varnothing \\ A' \cup A = U \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \varnothing' = U \\ U' = \varnothing \end{cases}$

۴) $\begin{cases} A \cup U = U \\ A \cap U = A \end{cases}$

۵) $\begin{cases} A \cup \varnothing = A \\ A \cap \varnothing = \varnothing \end{cases}$

۶) $\begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$

۷) $\begin{cases} A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \\ A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B \end{cases}$

۸) $\begin{cases} A \Delta B = B \Delta A \\ A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C \end{cases}$

سؤالات جبر مجموعه‌ها پای ثابت امتحانات پایانی هستند. در بعضی از این سؤال‌ها از ما خواسته می‌شود که یک تساوی را اثبات کنیم. برای حل این سؤالات باید یک طرف تساوی را با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها آن‌قدر ساده کنیم تا به طرف دیگر تساوی برسیم.

مثال **با استفاده از جبر مجموعه‌ها تساوی‌های زیر را ثابت کنید.**

۱) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ *(تمرین کتاب درسی)* ۲) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

تذکر ($A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$)

پاسخ ۱)

(تعریف تفاضل) سمت چپ تساوی $= A - (B \cap C)$

(قانون دمورگان) $= A \cap (B \cap C)'$

(توزیع‌پذیری) $= A \cap (B' \cup C')$

(تعریف تفاضل) $= (A \cap B') \cup (A \cap C')$

سمت راست تساوی $= (A - B) \cup (A - C)$

۲) سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم تا به سمت چپ تساوی برسیم:

(تعریف تفاضل) سمت راست تساوی $= (A - C) - (B - C)$

(تعریف تفاضل) $= (A \cap C') - (B \cap C')$

(دمورگان) $= (A \cap C') \cap (B \cap C')'$

(شرکت‌پذیری) $= (A \cap C') \cap (B' \cup C)$

(توزیع‌پذیری) $= A \cap (C' \cap (B' \cup C))$

(جابه‌جایی) $= A \cap [(C' \cap B') \cup \underbrace{(C' \cap C)}_{\varnothing}]$

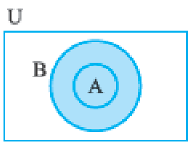
(شرکت‌پذیری) $= A \cap (B' \cap C')$

(تعریف تفاضل) $= (A \cap B') \cap C'$

(تعریف تفاضل) $= (A - B) \cap C'$

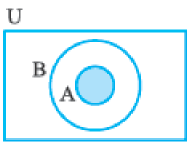
سمت چپ تساوی $= (A - B) - C$

قضیه **الف)** اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A \cup B = B$ است و برعکس.



$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

ب) اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A \cap B = A$ است و برعکس.



$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

درست‌بودن این قضیه از روی نمودار ون تقریباً بدیهی است، پس فعلاً این قضیه رو حفظ کنید چون برای اثبات بعضی روابط بین مجموعه‌ها خیلی به این قضیه نیاز داریم. این قضیه را بعداً در تمرینات برایتان اثبات می‌کنیم.

مثال **قوانین جذب را با استفاده از قضیهٔ قبل اثبات کنید.** *(کتاب درسی)*

پاسخ

$$\begin{cases} A \cap B \subseteq A \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} A \cup (A \cap B) = A \\ A \subseteq A \cup B \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$

در سؤالات جبر مجموعه‌ها گاهی از ما خواسته می‌شود که یک گزارهٔ شرطی را اثبات کنیم، معمولاً در اثبات این گزارهٔ شرطی از قضیهٔ قبل استفاده می‌کنیم.

مثال به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

۱) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

۲) $A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

پاسخ ۱

$$A \subseteq B \xrightarrow{\text{قضیه}} A \cup B = B \Rightarrow (A \cup B)' = B' \xrightarrow{\text{دمورگان}} A' \cap B' = B' \xrightarrow{\text{قضیه}} B' \subseteq A'$$

۲

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C \\ B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cup C) \cup (B \cup C) = C \cup C \Rightarrow (A \cup C) \cup (B \cup C) = C$$

$$\xrightarrow{\text{جابه‌جایی}} (A \cup B) \cup (C \cup C) = C \Rightarrow (A \cup B) \cup C = C \xrightarrow{\text{قضیه}} (A \cup B) \subseteq C$$

برای این‌که در حل سؤالات جبر مجموعه‌ها که معمولاً پای ثابت سؤالات امتحان نهایی هستند تسلط پیدا کنید، هیچ‌وقت تنها به خواندن جواب‌ها و فهمیدن آن‌ها اکتفا نکنید. حتماً خودتان دست به کار شوید و مسئله‌ها را حل کنید تا در استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها و ساده‌کردن روابط بین مجموعه‌ها کاملاً خبره شوید.

سؤال‌های امتحانی

۶۰- هر یک از موارد زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید.

۱) $A - B = B' - A'$ *(تمرین کتاب درسی)*

۲) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$ *(تمرین کتاب درسی)*

۳) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$ *(تمرین کتاب درسی)*

۴) $(A - B) \cup (A \cup B)' = B'$

۵) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ *(تمرین کتاب درسی)*

۶) $(A - B) \cup (A \cap C) = A - (B - C)$

۷) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$

۸) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - (B \cap C)$

۶۱- هر یک از موارد زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ساده کنید.

۱) $(A \cap B) \cup [(B \cup C) \cap (B \cup A) \cap B]$

۲) $(A \cup B') \cap [(B \cap C) \cup (B' \cup A)]$ *(کتاب درسی)*

۳) $[(U - A)' - (A' - U)']' \cap [(U' \cup A')' \cap (A' - \varnothing)]'$

۴) $(A' \cap B) \cup ([(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A))$

۵) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$ *(کتاب درسی)*

۶۲- درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

۱) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

۲) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ *(کتاب درسی)*

۳) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ *(کتاب درسی)*

۴) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \varnothing$ *(کتاب درسی)*

۵) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

۶۳- درستی هر یک از موارد زیر را بررسی کنید.

۱) *(کتاب درسی)*
$$\begin{cases} \text{الف) } (X \subseteq A) \wedge (X \subseteq A') \Rightarrow X = \varnothing \\ \text{ب) } (A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U \end{cases}$$

۲) $[(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C)] \Rightarrow B = C$ *(کتاب درسی)*

۳) $A - B = B - A \Rightarrow A = B$

۴) $A' \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A$

۵) $B \subseteq A \Rightarrow (A - B) \cup B = A$

۶) $A \subseteq B, A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq (B \cap C)$

۷) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$

۸) $A - B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$

۹) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B'$

۱۰) $A - B = A \Rightarrow B - A = B$

۱۱) $\left.\begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ A' \cap B = A' \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow B = C$

۱۲) $A - B = A - C \Rightarrow B = C$

۶۴- قضیهٔ زیر را ثابت کنید. *(کتاب درسی)*

$$\begin{cases} \text{الف) } A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \\ \text{ب) } A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \end{cases}$$

۶۵- برای ۳ مجموعهٔ A، B و C هر یک از بخش‌های زیر را که به صورت توصیفی مشخص‌شده‌اند را با نمودار ون نشان دهید و آن را با استفاده از نمادهای $\cup$، $\cap$، $-$ و یا Δ (تفاضل متقارن) بنویسید.

۱) اعضایی که در هر ۳ مجموعه باشند.

۲) اعضایی که حداقل در یکی از ۳ مجموعه باشند.

۳) اعضایی که در هیچ‌یک از ۳ مجموعه نباشند.

۴) اعضایی که فقط در A باشند. (کتاب درسی)

۵) اعضایی که در A و B باشند ولی در C نباشند. (کتاب درسی)

۶) اعضایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند. (کتاب درسی)

۷) اعضایی که فقط در A یا فقط در B هستند.

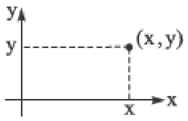
۶۶- اگر $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ باشد، ثابت کنید:

۱) $(A\Delta B)\cup(A\cap B)=A\cup B$

حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌ها

زوج مرتب

اعداد x و y با هم تشکیل یک زوج می‌دهند. در صورتی‌که ترتیب این دو عدد برایمان مهم باشد آن را به صورت (x,y) می‌نویسیم. x را مؤلفه یا مختص اول و y را مؤلفه یا مختص دوم می‌گوییم. زوج مرتب (x,y) یک نقطه در صفحهٔ مختصات را نشان می‌دهد.



در حالت کلی $(x,y)\neq(y,x)$ مثلاً $(۱,۴)\neq(۴,۱)$، در واقع هرکدام از این زوج مرتب‌ها یک نقطهٔ مجزا در صفحهٔ مختصات را نشان می‌دهند، پس با هم برابر نیستند.

دو زوج مرتب زمانی با هم برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان هم با هم برابر باشند.
$$(x_۱,y_۱)=(x_۲,y_۲)\Leftrightarrow\begin{cases}x_۱=x_۲\\ y_۱=y_۲\end{cases}$$

مثال مقادیر (x,y) را طوری بیابید که زوج مرتب‌های داده‌شده با هم برابر باشند.

۱) $(۱۵,x-y)$ و $(x^۲-y^۲,۳)$ ۲) $(۱۲۸,۳^{۲x-y})$ و $(۲^{۲x+y},۲۷)$

پاسخ ۱

$$(۱۵,x-y)=(x^۲-y^۲,۳)\Rightarrow\begin{cases}x^۲-y^۲=۱۵\\ x-y=۳\end{cases}$$

$$x^۲-y^۲=۱۵\Rightarrow(x-y)(x+y)=۱۵\Rightarrow۳(x+y)=۱۵\Rightarrow x+y=۵\Rightarrow\begin{cases}x+y=۵\\ x-y=۳\end{cases}\Rightarrow x=۴,y=۱$$

بنابراین $(x,y)=(۴,۱)$ است.

۲

$$(۲^{۲x+y},۲۷)=(۱۲۸,۳^{۲x-y})\Rightarrow(۲^{۲x+y},۳^۳)=(۲^۷,۳^{۲x-y})\Rightarrow\begin{cases}۲^{۲x+y}=۲^۷\\ ۳^{۲x-y}=۳^۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x+y=۷\\ ۲x-y=۳\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۵}{۲},y=۲$$

بنابراین $(x,y)=(\frac{۵}{۲},۲)$ می‌باشد.

ضرب دکارتی دو مجموعه

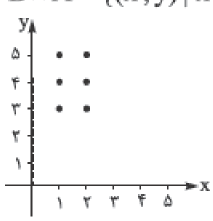
اگر A و B دو مجموعه باشند، $A\times B$ را حاصل‌ضرب دکارتی مجموعهٔ A در مجموعهٔ B می‌گوییم. این حاصل‌ضرب شامل همهٔ زوج مرتب‌هایی است که مؤلفهٔ اول آن‌ها در A و مؤلفهٔ دوم آن‌ها در B باشد. $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$

مثلاً اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ باشد، داریم:

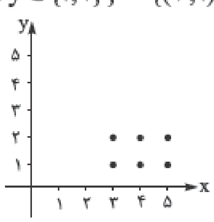
$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in\{۱,۲\}\wedge y\in\{۳,۴,۵\}\}=\{(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵)\}$$

$$B\times A=\{(x,y)\,|\,x\in\{۳,۴,۵\}\wedge y\in\{۱,۲\}\}=\{(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۵,۱),(۵,۲)\}$$

با توجه به این که هر زوج مرتب نشان‌دهندهٔ یک نقطه در صفحهٔ مختصات است، نمودارهای $A\times B$ و $B\times A$ در صفحهٔ مختصات به صورت مقابل هستند:



$A\times B$



$B\times A$

همان‌طور که می‌بینید در مثال بالا $A\times B$ با $B\times A$ برابر نیست، بنابراین در حالت کلی «**حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی ندارد.**»

حاصل‌ضرب دکارتی $A\times A$ را به صورت A^2 نشان می‌دهیم که شامل تمام زوج مرتب‌هایی است که مؤلفهٔ اول و دوم آن‌ها هر دو در A باشند.
مثلاً اگر $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حاصل‌ضرب دکارتی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^2$ شامل تمام نقاط صفحهٔ مختصات می‌باشد.

نکته

اگر A دارای m عضو و B دارای n عضو باشد، حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ طبق اصل ضرب دارای mn عضو و در نتیجه 2^{mn} زیرمجموعه و حاصل‌ضرب دکارتی A^2 دارای m^2 عضو و 2^{m^2} زیرمجموعه خواهد بود.

$$\begin{cases} n(A\times B)=n(A).n(B)=mn \\ n(A^2)=n(A\times A)=n(A).n(A)=m^2 \end{cases}$$

مثلاً اگر مجموعهٔ A چهار عضو و مجموعهٔ B سه عضو داشته باشد، حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ دارای $12=4\times 3$ عضو و 2^{12} زیرمجموعه و A^2 دارای $16=4^2$ عضو و 2^{16} زیرمجموعه خواهد بود.

مثال اگر $A=\{2x+1 \mid x\in\mathbb{Z}, x^3=x\}$ و $B=\{|x-1| \mid x\in\mathbb{Z}, |x+1|\le 1\}$ باشد، مجموعه‌های $(A\times B)\cap(B\times A)$، $B\times A-A^2$ و B^2-A^2 را با نوشتن اعضا مشخص کرده و در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

پاسخ ابتدا باید مجموعه‌های A و B را با اعضایشان بنویسیم:

$$x^3=x \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=1 \text{ یا } x=-1$$

$$\Rightarrow A=\{2\times 0+1, 2\times 1+1, 2\times(-1)+1\}=\{1,3,-1\} \Rightarrow A=\{-1,1,3\}$$

$$|x+1|\le 1 \Rightarrow -1\le x+1\le 1 \Rightarrow -2\le x\le 0 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{-2,-1,0\} \Rightarrow |x-1|\in\{3,2,1\} \Rightarrow B=\{1,2,3\}$$

حالا مجموعه‌های A^2 ، B^2 ، $A\times B$ و $B\times A$ را به دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\{-1,1,3\}\times\{-1,1,3\}=\{(-1,-1),(-1,1),(-1,3),(1,-1),(1,1),(1,3),(3,-1),(3,1),(3,3)\}$$

$$B^2=B\times B=\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

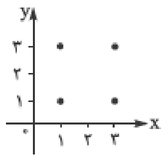
$$A\times B=\{-1,1,3\}\times\{1,2,3\}=\{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

$$B\times A=\{1,2,3\}\times\{-1,1,3\}=\{(1,-1),(1,1),(1,3),(2,-1),(2,1),(2,3),(3,-1),(3,1),(3,3)\}$$

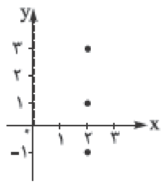
$$(A\times B)\cap(B\times A)=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$$

$$(B\times A)-A^2=\{(2,-1),(2,1),(2,3)\}$$

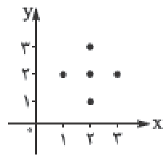
$$B^2-A^2=\{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2)\}$$



$(A\times B)\cap(B\times A)$



$(B\times A)-A^2$



B^2-A^2

سؤال‌های امتحانی

۶۷- در هر یک از موارد زیر x و y را چنان بیابید که زوج مرتب‌ها با هم برابر باشند.

۱) $(16, x+y)$ و $(x^2-y^2, 8)$

۲) $(64, 5^{3y})$ و $(2^{3x+y}, 125)$

۶۸- مجموعه‌های $A=\{2^x \mid x\in\mathbb{Z}, -1\le x\le 1\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x^2+x-20=0\}$ مفروض‌اند:

۱) اعضای A و B را به دست آورده و سپس $B\times A$ را با اعضا مشخص کنید.

۲) نمودار $B\times A$ را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

۶۹- جاهای خالی را پر کنید.

اگر A دارای ۲ عضو و B دارای ۵ عضو باشد:

۱) مجموعهٔ B دارای .... زیرمجموعه و .... زیرمجموعهٔ محض یا سره می‌باشد.

۲) حاصل‌ضرب دکارتی B^2 دارای .... عضو و .... زیرمجموعه است.

۳) حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ دارای .... عضو و .... زیرمجموعه است.

۷۰- اگر $A=\{1,-2,3\}$ و $B=\{-1,1\}$ باشد، مجموعه‌های $A\times B$، A^2 و $A^2-A\times B$ را با نوشتن اعضا مشخص کرده و رسم کنید.

۷۱- اگر $A=\{2^k \mid k\in\mathbb{N}, k\le 2\}$ و $B=\{x^2 \mid x\in\mathbb{N}, x\le 3\}$ باشد:

۱) A و B را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۲) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۷۲- مجموعه‌های $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -1\le x, 2^x\le 4\}$ و $B=\{y \mid y\in\mathbb{N}, y^2\le 9\}$ را در نظر بگیرید. اعضای مجموعه‌های $A\times B-B^2$ و $(A\times B)\Delta B^2$ را با نوشتن اعضا مشخص کرده و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

۷۳- اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x^2<10\}$ و $B=\{2x+1 \mid x\in\mathbb{Z}, |x|\le 1\}$ دو مجموعه باشند، مجموعه‌های A، B، $A\times B$، $B\times A$ و A^2-B^2 را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ضرب دکارتی مجموعه‌هایی که لااقل یکی از آن‌ها پیوسته است

اگر یکی از مجموعه‌های A یا B بازه‌ای پیوسته از اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه $A\times B$ شامل بی‌نهایت نقطه خواهد بود. برای نشان‌دادن این حاصل‌ضرب، بهتر است نمودار هندسی $A\times B$ را در صفحهٔ مختصات رسم کنیم.

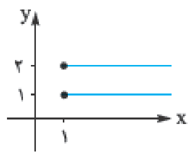
مثال اگر $A=[-2,3]$، $B=[1,4)$، $C=[-1,1]$، $D=\{1,2\}$، $E=[1,+\infty)$ و $F=(-\infty,-1)$، مطلوب است رسم نمودار هر یک از موارد زیر:

۱) $E\times D$ ۲) $D\times A$ ۳) $F\times D$ ۴) $D\times E$ ۵) $A\times B$ ۶) $E\times F$ ۷) $F\times C$

پاسخ

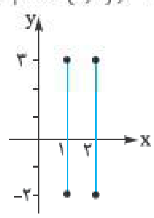
۱) $E\times D=[1,+\infty)\times\{1,2\}$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 1, y\in\{1,2\}\}$



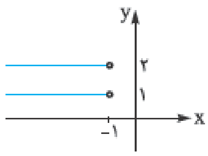
۲) $D\times A=\{1,2\}\times[-2,3]$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\{1,2\}, -2\le y\le 3\}$



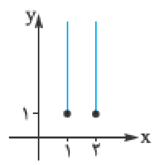
۳) $F\times D=(-\infty,-1)\times\{1,2\}$

$=\{(x,y),\in\mathbb{R}^2 \mid x<-1, y\in\{1,2\}\}$



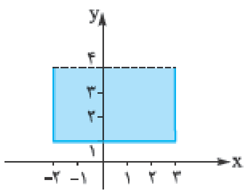
۴) $D\times E=\{1,2\}\times[1,+\infty)$

$=\{(x,y),\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\{1,2\}, y\ge 1\}$



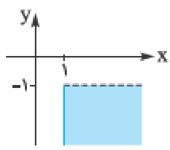
۵) $A\times B=[-2,3]\times[1,4)$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2\le x\le 3, 1\le y<4\}$



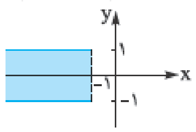
۶) $E\times F=[1,+\infty)\times(-\infty,-1)$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 1, y<-1\}$



۷) $F\times C=(-\infty,-1)\times[-1,1]$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<-1, -1\le y\le 1\}$



سؤال‌های امتحانی

۷۴- اگر $A=\{-1,1,2\}$ ، $B=[-1,2)$ ، $C=[-2,+\infty)$ و $D=[-3,1]$ باشد، مطلوب است رسم:

۱) $A\times B$ ۲) $C\times A$ ۳) $A\times\mathbb{R}$

۷۵- ۱) اگر $A=[-5,2]$ ، $B=(-\infty,-1)$ باشد، $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

۲) اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{R},0\le x^2\le 4\}$ و $B=\{x\mid x\in\mathbb{R},0\le x\le 7\}$ و $C=\{x\mid x\in\mathbb{Z},0\le x^2\le 4\}$ باشد، $A\times B$ و $A\times C$ را رسم کنید.

۷۶- اگر $A_n=(-\frac{1}{n},\frac{2n-1}{n}]$ و $B_n=\{2^x\mid \lvert x\rvert\le n,x\in\mathbb{Z}\}$ باشد، ابتدا A_1 ، A_2 و B_1 را مشخص کرده سپس $A_1\times B_1$ و $A_1\times A_2$ را رسم کنید.

نکته

فرض کنید A، B و C مجموعه‌هایی دلخواه باشند:

الف) اگر ضرب دکارتی دو مجموعه برابر با تهی باشد، حداقل یکی از مجموعه‌ها تهی است و برعکس اگر لااقل یکی از ۲ مجموعهٔ A یا B تهی باشد، $A\times B$ هم تهی خواهد بود: $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$

ب) ضرب دکارتی دو مجموعه دارای خاصیت جابه‌جایی است، اگر و تنها اگر حداقل یکی از مجموعه‌ها تهی یا دو مجموعه با هم برابر باشند. $A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ یا $A=B$

نتیجهٔ مهم اگر A و B هیچ‌کدامشان تهی نباشند و $A\times B=B\times A$ باشد، طبق نکتهٔ بالا حتماً $A=B$ خواهد بود.

تذکر اگر A و B حتی یک عضو غیرمشترک داشته باشند، دیگر $A\times B$ و $B\times A$ نمی‌توانند برابر باشند.

اثبات نکات بالا را در تمرینات می‌آوریم. اثبات‌ها را حتماً یاد بگیرید.

مثال اگر $A=\{2x-y,7\}$ و $B=\{5x-3y,3\}$ بوده و داشته باشیم $A\times B=B\times A$ ، مقادیر x و y را بیابید.

پاسخ طبق فرض $A\times B=B\times A$ و مجموعه‌های A و B غیرتهی هستند، پس باید $A=B$ باشد:

$$A=B\Rightarrow\{2x-y,7\}=\{5x-3y,3\}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=3\\5x-3y=7\end{cases}\Rightarrow x=2,y=1$$

سؤال‌های امتحانی

۷۷- روابط زیر را ثابت کنید.

۱) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$ ۲) $A\times B=\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ (کتاب درسی)

۷۸- اگر $A\times B=B\times A$ و $A=\{x-y,3\},B=\{x+y,1\}$ ، مقادیر x و y را بیابید.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- ۱) نتیجه: در شمال باران نمی‌بارد. ۲) نتیجه: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 37^2 بر ۲۴ برابر با یک است.

۲- ۱) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است. مثلاً $7=2+5$ عددی فرد است.

۲) گزاره نیست، جملات پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند. ۳) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است.

نکته

باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ با باقی‌ماندهٔ مجموع ارقامش در تقسیم بر عدد ۳ برابر است، پس اگر مجموع ارقام عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد آن عدد بر ۳ بخش‌پذیر است. بنابراین با توجه به این‌که مجموع ارقام عدد ۲۶۳۵۹۲۱۴۳۱ عدد ۳۶ است، پس این عدد بر ۳ بخش‌پذیر است و نمی‌تواند یک عدد اول باشد، پس مرکب است و گزارهٔ داده‌شده نادرست است.

۴) گزاره نیست، چون معیار گران‌بهابودن یک شی مشخص نشده و معلوم نیست اگر قیمت یک شی از چه عددی بالاتر باشد، گران‌بها محسوب می‌شود، پس نمی‌توانیم درستی یا نادرستی این جمله را تعیین کنیم و این جمله گزاره محسوب نمی‌شود.

۵) گزاره نیست، زیرا جملات عاطفی گزاره نیستند. ۶) گزاره نیست، زیرا جملات پرسشی گزاره نیستند.

۷) گزاره نیست، زیرا جملات عاطفی گزاره نیستند. ۸) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است.

۹) گزاره است، ارزش گزاره نادرست است، زیرا عبارت $۵^۹+۸$ به صورت زیر به ضرب ۲ عدد بزرگ‌تر از یک تجزیه می‌شود:

$$۵^۹+۸=(۵^۳)^۳+۲^۳=۱۲۵^۳+۲^۳=(۱۲۵+۲)\,(۱۲۵^۲-۱۲۵\times۲+۲^۲)$$

۱۰) گزاره نیست، زیرا بسیار خوب‌بودن تعریف نشده و معلوم نیست چه دانش‌آموزی بسیار خوب است!!

۳- ۱) گزاره است.

۲) گزاره است. این گزاره یکی دیگر از حدس‌های گلدباخ است که هنوز اثباتی برای آن پیدا نشده است اما به هر حال می‌توان گفت که این جملهٔ خبری دارای تنها یک ارزش است یعنی یا درست است یا غلط.

۴- ۱) x مضرب ۷ است $\Rightarrow x=۷k \Rightarrow$ مجموعه‌جواب: $S=\{۷k \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۲۱,-۱۴,-۷,۰,۷,۱۴,۲۱,\dots\}$

۲) x، ۳ واحد از مضارب ۷ بیشتر است $\Rightarrow x=۷k+۳ \Rightarrow$ مجموعه‌جواب: $S=\{۷k+۳ \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۱۸,-۱۱,-۴,۳,۱۰,۱۷,۲۴,\dots\}$

۳) عبارت $\frac{۱}{۲+x}$ باید عدد طبیعی باشد، پس $x+۲$ باید مقسوم‌علیه عدد یک باشد:

$$\frac{۱}{۲+x}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{۱}{۲+x}\in\mathbb{N}\Rightarrow ۲+x=۱\Rightarrow x=-۱\Rightarrow \text{مجموعه جواب}: S=\{-۱\}$$

۴) $$\frac{۶x+۱}{۲x-۵}=\frac{(۶x-۱۵)+۱۶}{۲x-۵}=\frac{۳(۲x-۵)+۱۶}{۲x-۵}=۳+\frac{۱۶}{۲x-۵}\in\mathbb{Z}$$

پس $۲x-۵$ مقسوم‌علیه عدد ۱۶ باید باشد: $۲x-۵\in\{\pm۱,\pm۲,\pm۴,\pm۸,\pm۱۶\}\Rightarrow ۲x\in\{-۱۱,-۳,۱,۳,۴,۶,۷,۹,۱۳,۲۱\}$

$$\Rightarrow x\in\{\frac{-۱۱}{۲},\frac{-۳}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲},۲,۳,\frac{۷}{۲},\frac{۹}{۲},\frac{۱۳}{۲},\frac{۲۱}{۲}\}\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{۲,۳\}\Rightarrow \text{مجموعه‌جواب}: S=\{۲,۳\}$$

۵) a مربع کامل است $\Rightarrow a=k^۲,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow S=\{k^۲ \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,(-۳)^۲,(-۲)^۲,(-۱)^۲,۰^۲,۱^۲,۲^۲,۳^۲,\dots\}$

$=\{۰,۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\dots\}$

۶) a فرد $a=۲k+۱\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} S=\{\dots,-۵,-۳,-۱,۱,۳,۵,\dots\}$

۷) $$۲x^۲+x-۱=۰\Rightarrow(۲x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ x=-۱\xrightarrow{D=\mathbb{R}} S=\{-۱,\frac{۱}{۲}\}$$

۸) $$۲x^۲+x-۱=۰\Rightarrow(۲x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ x=-۱\Rightarrow \text{مجموعه‌جواب}: S=\{-۱\}$$

با توجه به این‌که دامنهٔ متغیر گزاره نما مجموعه‌اعداد صحیح است $x=\frac{۱}{۲}$ جزو مجموعه‌جواب نمی‌باشد.

۹) هیچ مقدار حقیقی برای x نمی‌توانیم پیدا کنیم که $۳^x=۰$ شود، بنابراین مجموعه‌جواب تهی است. ($S=\varnothing$)

۱۰) $$\frac{۱}{x^۲}\le\frac{۱}{x^۳}\Rightarrow\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۳}\le۰\Rightarrow\frac{x-۱}{x^۳}\le۰\Rightarrow ۰<x\le۱$$

بنابراین مجموعه‌جواب $S=(۰,۱]$ می‌باشد.

۵- به جای پیشامد A می‌توان تمام زیرمجموعه‌های فضای نمونهٔ پرتاب یک تاس یعنی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ را قرار داد، بنابراین هر یک از $۲^۶$ زیرمجموعهٔ S را می‌توان به جای A قرار داد. اگر A مجموعه‌ای ۳عضوی باشد، $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ خواهد بود، پس مجموعه‌جواب این گزاره‌نما شامل زیرمجموعه‌های ۳عضوی A است که تعداد آن‌ها برابر است با $\binom{۶}{۳}=۲۰$ زیرمجموعه.

۶- دامنهٔ متغیر شامل تمام ۳۶ زوج مرتبی است که از پرتاب ۲ تاس حاصل می‌شوند.

$$(\overbrace{\boxed{۶\text{حالت}}}^{\text{عدد تاس اول}}\times\underbrace{\boxed{۶\text{حالت}}}_{\text{عدد تاس دوم}})=۳۶\ \text{حالت}$$

دامنهٔ متغیر $D=\{(x,y)\,|\,x\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\},\ y\in\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\}$

۱) وقتی $a+b$ زوج است که a و b هر دو فرد یا a و b هر دو زوج باشند.

$$(\overbrace{\boxed{۳\text{حالت}}}^{a\ \text{فرد}}\times\overbrace{\boxed{۳\text{حالت}}}^{b\ \text{فرد}})+(\overbrace{\boxed{۳\text{حالت}}}^{a\ \text{زوج}}\times\overbrace{\boxed{۳\text{حالت}}}^{b\ \text{زوج}})=۱۸$$

بنابراین مجموعه‌جواب این گزاره‌نما ۱۸ زوج مرتب را شامل می‌شود.

۲) (a,b) کلاً ۳۶ حالت دارد که در ۶تای آن‌ها a و b مساوی‌اند. در ۳۰تای بقیه در نیمی از حالت‌ها $a<b$ است، پس مجموعه‌جواب این گزاره‌نما شامل $\frac{۳۶-۶}{۲}=۱۵$ زوج مرتب است.

۳) مجموعه‌جواب شامل زوج‌های زیر است که تعداد آن‌ها ۱۰تاست.

$$S=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

۴) $$x^۲-ax+b=۰\xrightarrow{\text{دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.}}\Delta>۰\Rightarrow a^۲-۴b>۰\Rightarrow a^۲>۴b$$