

1

بخش



# درسنامه

و سؤالات تشریحی

## فصل اول

# تابع

فصل اول ریاضی ۳، در امتحان نوبت اول، ۷ نمره و در نوبت دوم، ۲ نمره و در شهریور و دی، ۳ نمره دارد. در این فصل مباحثی چون توابع چندجمله‌ای، توابع یکنوا و اکیداً یکنوا، ترکیب توابع، رسم نمودار به کمک انتقال، قرینه و ... وارون تابع و ویژگی‌های آن مطرح شده است.

بسته ۴



بسته ۳ و ۲



بسته ۱



برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم  
شب  
امتحان

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

صفحه ۲ تا ۱۰ کتاب درسی

بسته اول



🔗 بسته اول شامل تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع صعودی و نزولی است که معمولاً در امتحان نهایی به صورت درست یا نادرست و هم‌پنین تکمیل کردن جای خالی، از آن سؤال مطرح می‌شود.

### الف توابع چندجمله‌ای

توابعی را که ضابطه آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطه  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  که در آن  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  و  $a_n \neq 0$ ، تابع چندجمله‌ای از درجه  $n$  می‌گوییم.

❗ **نکته** دامنه توابع چندجمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی، یعنی  $\mathbb{R}$  خواهد بود. برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد، همواره برابر  $\mathbb{R}$  است.

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 - \frac{1}{4}x + 3 \quad g(x) = -3x^2 + 5x + 1$$

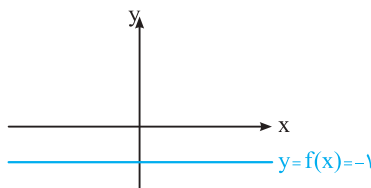
**مثال** هریک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنه  $\mathbb{R}$  می‌باشند:

$f$  یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۵ فرد است و در نتیجه برد تابع  $f$  برابر  $\mathbb{R}$  است.

**یادآوری** با انواع توابع چندجمله‌ای قبلاً آشنا شده‌ایم، تعریف آن‌ها به صورت یادآوری گفته می‌شود:

**۱** تابع چندجمله‌ای از درجه صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطه تابع ثابت به صورت  $f(x) = a$  است که در آن  $a$  یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به صورت یک خط به موازات محور  $x$  ها می‌باشد.

**مثال** نمودار تابع  $f(x) = -1$  به صورت مقابل است:



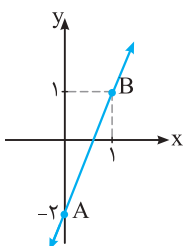
**۲** تابع چندجمله‌ای از درجه یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطه آن به صورت  $f(x) = ax + b$  می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطه دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.

**مثال** تابع  $f(x) = 3x - 2$  یک تابع دو جمله‌ای از درجه اول است. برای رسم نمودار، دو نقطه دلخواه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0) - 2 = -2 \Rightarrow A(0, -2)$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 3(1) - 2 = 1 \Rightarrow B(1, 1)$$

دو نقطه  $A$  و  $B$  را روی دستگاه مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم.



**۳** تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ که ضابطه آن به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ،  $a \neq 0$ ، است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم:

$$S(x = -\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a})$$

اگر  $a > 0$ ، سهمی رو به بالا و اگر  $a < 0$ ، آن‌گاه سهمی رو به پایین است. در سهمی خط  $x = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است.

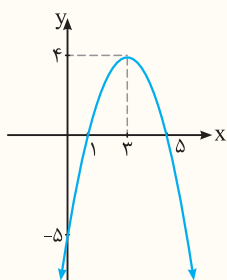
**نکته**! برای رسم سهمی می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

**سؤال** نمودار تابع درجه دوم به معادله  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$  را رسم کنید.

**پاسخ** ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3 \Rightarrow y_s = f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$$

حالا مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را نیز به دست می‌آوریم:



$$x = 0 \Rightarrow y = -5, \quad y = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 5$$

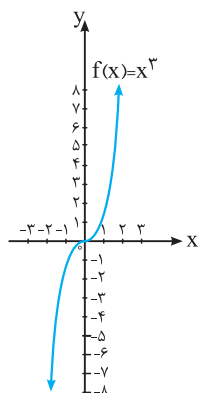
|     |    |   |   |   |
|-----|----|---|---|---|
| $S$ |    |   |   |   |
| $x$ | 0  | 1 | 3 | 5 |
| $y$ | -5 | 0 | 4 | 0 |

علاوه بر نمودارهایی که تاکنون یاد گرفته‌اید، نمودار  $y = x^3$  را نیز حفظ کنید که با توجه به آن و به کمک انتقال و ... نمودارهای دیگری را رسم می‌کنیم.

## تابع درجه ۳

تابع چندجمله‌ای با ضابطه  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ،  $a \neq 0$ ، یک تابع درجه ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر  $\mathbb{R}$ ، یعنی مجموعه اعداد حقیقی است. نمودار تابع  $y = x^3$  به کمک نقطه‌یابی به صورت مقابل است:

| $x$            | $f(x) = x^3$   |
|----------------|----------------|
| -2             | -8             |
| -1             | -1             |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{8}$ |
| 0              | 0              |
| $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{8}$  |
| 1              | 1              |
| 2              | 8              |



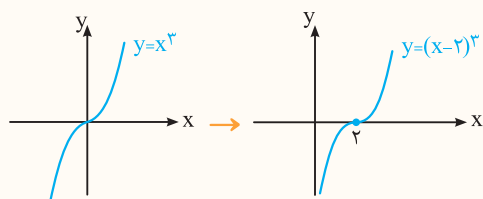
**نکته**! فقط نمودار توابعی به صورت  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  را می‌توان رسم کرد که با کمک اتحادها به صورت  $y = a(x-b)^3 + c$  نوشته شود. به عنوان مثال، ضابطه تابع  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  به صورت  $y = (x+1)^3$  است و می‌توان نمودار آن را به کمک انتقال رسم کرد.

**سؤال** نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

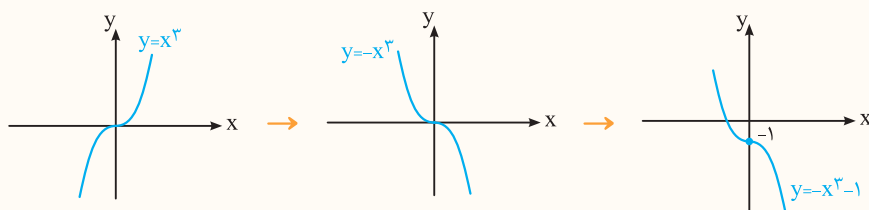
**۱**  $y = (x-2)^3$

**۲**  $y = -x^3 - 1$

**پاسخ ۱** اگر نمودار  $y = x^3$  را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع  $y = (x-2)^3$  به دست می‌آید.



**۲** ابتدا نمودار  $y = x^3$  را نسبت به محور  $x$  هاقرینه می‌کنیم تا نمودار  $y = -x^3$  به دست آید. با انتقال نمودار  $y = -x^3$  به اندازه یک واحد به سمت پایین، نمودار  $y = -x^3 - 1$  رسم می‌شود:



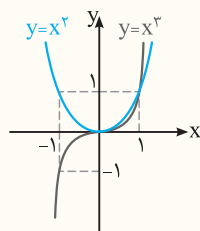
**تلاشگر: حواست باشه** مقایسه نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  که در یک بازه، کدام بالاتر و یا پایین تر قرار می گیرد، از سؤالات امتحانی است.

**سؤال** نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید که در کدام بازه، نمودار  $y = x^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^3$  قرار می گیرد؟

**پاسخ** برای مقایسه نمودار دو تابع، ابتدا نقاطی را که مقدار دو تابع برابر می شوند را مشخص می کنیم. یعنی باید معادله  $x^2 = x^3$  را حل کنیم:

$$x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1-x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

| X         | -1 | 0 | 1 | 2 |
|-----------|----|---|---|---|
| $y = x^2$ | 1  | 0 | 1 | 4 |
| $y = x^3$ | -1 | 0 | 1 | 8 |



پس دو تابع در دو نقطه با طول های  $x = 0$  و  $x = 1$  بر هم منطبق اند.

از دو نقطه کمکی دیگر نیز برای رسم نمودار استفاده می کنیم.

نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، در بازه  $(-\infty, 0)$  و  $(0, 1)$ ، نمودار  $y = x^2$  بالاتر از

نمودار  $y = x^3$  قرار دارد و در بازه  $(1, +\infty)$ ، نمودار  $y = x^3$  بالاتر از

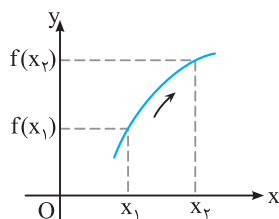
نمودار  $y = x^2$  قرار دارد.

**در این قسمت، تعریف توابع یکنوا و اکیدا یکنوا را یاد می گیریم. توابعی را بررسی می کنیم که ابتدا نمودار آن ها را رسم می کنیم و سپس به سؤالات پاسخ می دهیم.**

## ب توابع اکیدا صعودی و نزولی

فرض کنیم  $A \subseteq D_f$  باشد؛

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

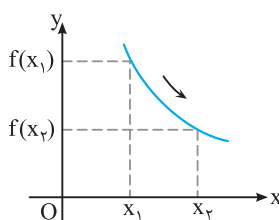


**تعریف** می گوییم تابع  $f$  روی  $A$  اکیدا صعودی است هرگاه برای هر  $x_1, x_2 \in A$  داشته باشیم:

در نمودار توابع اکیدا صعودی، وقتی روی محور  $x$  ها، از چپ به راست حرکت می کنیم، نمودار

همواره در حال بالا رفتن است.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



**تعریف** می گوییم  $f$  روی  $A$  اکیدا نزولی است، هرگاه برای هر  $x_1, x_2 \in A$  داشته باشیم:

در نمودار مقابل، وقتی مقدار  $x$  در دامنه  $f$  افزایش می یابد، مقدار  $y$  کاهش می یابد. در واقع

نمودار از چپ به راست، در حال پایین آمدن است.

**تعریف** به تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد، تابع اکیدا یکنوا می گوییم.

## توابع صعودی و نزولی

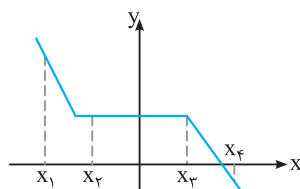
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

**تعریف** تابع  $f$  روی  $A$  صعودی است اگر و فقط اگر برای هر  $x_1, x_2 \in A$ :

و تابع  $f$  روی  $A$  نزولی است اگر و تنها اگر برای هر  $x_1, x_2 \in A$ :

**مثال** در نمودار زیر، هرچه مقدار  $x$  در دامنه تابع  $f$  بیش تر می شود، مقدار  $y$  یا کاهش می یابد یا

ثابت می ماند. طبق تعریف، تابع  $f$ ، تابعی نزولی است.



$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$

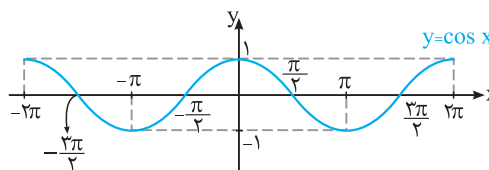
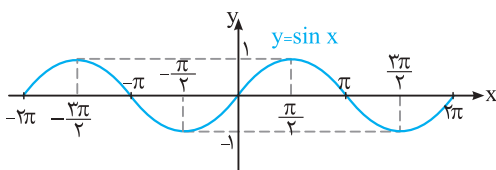
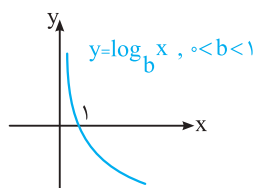
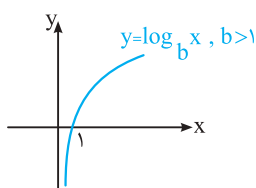
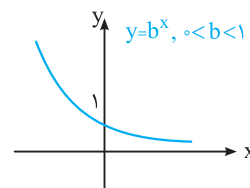
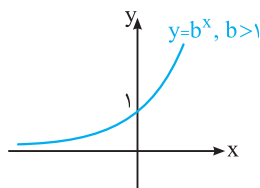
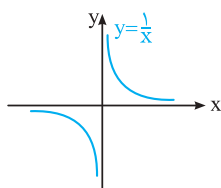
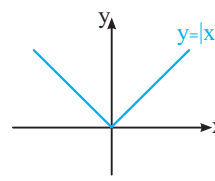
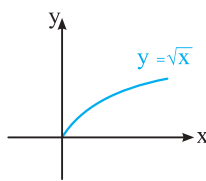
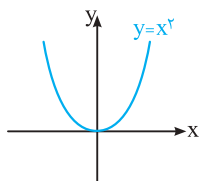
**تعریف** به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می گوییم.

**تلاشگر: حواست باشه** تعریف تابع ثابت و این نکته که تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است، در امتحان مطرح می شود.

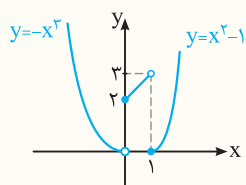
**تعریف** تابع  $f$  را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر  $x$  در این بازه، مقدار  $f$  ثابت باشد.

**نکته** با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود و در نتیجه تابعی یکنوا است.

**یادآوری** در این قسمت برخی از نمودارهایی را که باید به عنوان نمودار اصلی حفظ باشیم و از آن‌ها در یکنوایی استفاده کنیم را رسم کرده‌ایم:

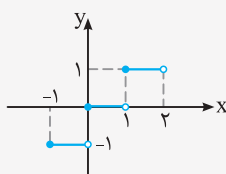


**سؤال** نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & 0 \leq x < 1 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$  را رسم کنید و مشخص کنید تابع  $f$  در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است.



**پاسخ** با رسم سهمی  $y = x^2 - 1$  در بازه  $(1, +\infty)$ ، خط  $y = x + 2$  در بازه  $(0, 1)$  و تابع درجه سوم  $y = -x^3$  در بازه  $(-\infty, 0)$ ، نمودار تابع  $f$  به دست می‌آید:  
با توجه به نمودار تابع  $f$ ، تابع  $f$  روی بازه  $(-\infty, 0)$ ، تابعی اکیداً نزولی، روی بازه  $(0, 1)$ ، تابعی اکیداً صعودی و در بازه  $(1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً صعودی است. توجه کنید که تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً یکنوا نیست.

**نکته** تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار می‌تواند



خطی به موازات محور  $x$  ها باشد.

**مثال** تابع  $y = [x]$  که نمودار آن به صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

پرسش‌های تشریحی

● درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

(دی ۹۷، خرداد ۹۸)

(شهریور ۱۴۰۰)

(شهریور ۹۸)

(شهریور ۱۴۰۰)

(دی ۱۴۰۰)

۱. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.

۲. دامنه توابع چندجمله‌ای برابر  $\mathbb{R}$  است.

۳. تابع  $y = -x^2 + 2$  در دامنه تعریفش صعودی است.

۴. تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

۵. تابع  $y = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{4}x$  یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است.

۶. برد تابع  $f(x) = 4x^2 + x - 1$  برابر  $\mathbb{R}$  است.

● در سؤال‌های ۷ تا ۱۲، در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

(شهریور ۹۹)

(دی ۹۹ و ۱۴۰۰)

(خرداد ۹۸)

(دی ۹۸)

۷. توابع اکیداً یکنوا، همواره ..... هستند.

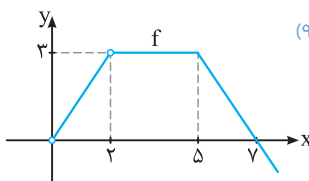
۸. در بازه  $(0, 1)$ ، نمودار تابع  $y = x^3$ ، ..... نمودار تابع  $y = x^2$  قرار دارد.

۹. تابع  $y = (x+1)^3$  در دامنه تعریف خود ..... (صعودی - نزولی) است.

۱۰. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع ..... نامیده می‌شود.

۱۱. تابع  $y = 2^x$  در دامنه تعریف خود ..... (اکیداً صعودی - اکیداً نزولی) است.

۱۲. تابع  $f$  با نمودار مقابل در بازه ..... اکیداً صعودی و در بازه ..... اکیداً نزولی و در بازه  $(2, 5]$ ، ..... است. (خرداد ۹۱)



(مشابه کاردرکلاس صفحه ۵ کتاب درسی)

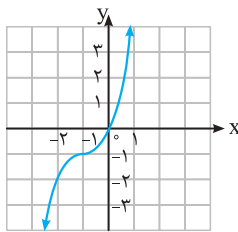
۱۳. ضابطه هرتابع را به نمودار آن نظیر کنید.

ت  $y = (x+1)^3 - 1$

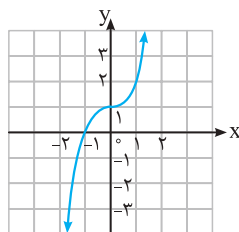
ب  $y = (x-1)^3 + 2$

ب  $y = -x^3 - 1$

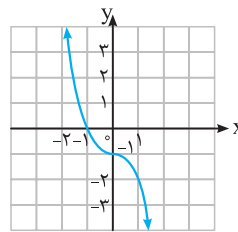
ا  $y = x^3 + 1$



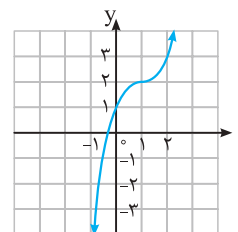
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

(مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

● نمودار توابع سؤالات ۱۴ تا ۱۸ را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

۱۸.  $y = -(x-1)^3 - 1$

۱۶.  $y = (x+2)^3 - 1$

۱۴.  $y = x^3 - 1$

۱۷.  $y = (x-1)^3 + 2$

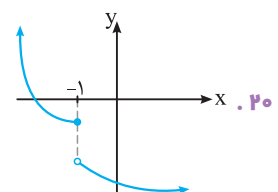
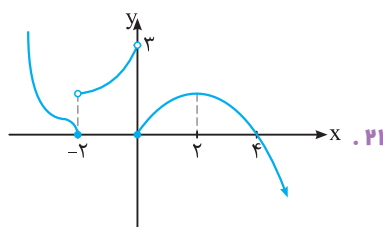
۱۵.  $y = -x^3 - 2$

۱۹. نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید در کدام بازه، نمودار کدام تابع بالاتر و کدام پایین‌تر است؟

(فعالیت صفحه ۴ کتاب درسی)

● در هر کدام از توابع سؤالات ۲۰ و ۲۱، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند.

(مشابه کاردرکلاس صفحه ۸ کتاب درسی)



۲۲. روی بازه  $[0, 2]$  نموداریک تابع را رسم کنید که روی بازه  $[0, 1]$  اکیداً صعودی و روی بازه  $[1, 2]$  اکیداً نزولی باشد.

۲۳. نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد ولی روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی نباشد. (تمرین ۷ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

۲۴. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

۲۵. ضابطه تابعی را بنویسید که در دامنه خود غیریکتوا باشد.

● نمودار توابع سؤالات ۲۶ تا ۳۲ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

۳۰.  $f(x) = -x^3 + 2$

۲۶.  $f(x) = -x^2 + 4x$

۳۱.  $f(x) = x^2 |x|$

۲۷.  $f(x) = x + |x|$

۳۲.  $f(x) = \cos x, x \in [-\pi, 2\pi]$

۲۸.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

۲۹.  $f(x) = \frac{1}{x}$

۳۳. نمودار هر یک از توابع  $y = \log_b x$  و  $y = b^x$  را در حالت‌های  $b > 1$  و  $0 < b < 1$  رسم کنید و در هر حالت نوع یکتوایی تابع را مشخص کنید. هم چنین

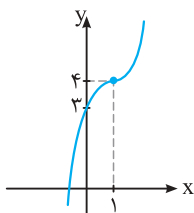
با رسم توابع  $y = 2^x - 2$  و  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ ، نوع یکتوایی آن‌ها را مشخص کنید.

(مشابه تمرین ۵ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

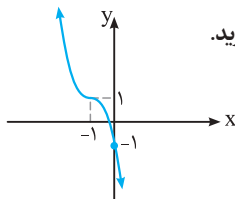
۳۴. تابع  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ -x-1 & x \leq 0 \end{cases}$  در بازه  $(-\infty, a]$  نزولی است. حداکثر مقدار  $a$  چقدر است؟

۳۵. نمودار تابع  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  را رسم کنید.

۳۶. نمودار تابع  $y = a(x-b)^3 + c$  به صورت مقابل است. مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  را مشخص کنید.



۳۷. نمودار تابع  $f(x) = a(x+b)^3 + c$  به صورت مقابل است. اگر  $g(x) = b(x-a)^3 + c$  باشد، مقدار  $g(2)$  را به دست آورید.



۳۸. نمودار  $f(x) = x^3$  را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $g$  حاصل شود.

نمودار توابع  $f$  و  $g$  با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟

## ترکیب توابع

صفحه ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

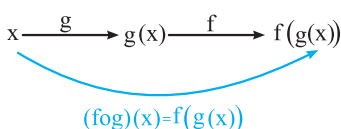
## بسته دوم



در این قسمت از دو تابع  $f$  و  $g$ ، تابع مرکب می‌سازیم که به آن ترکیب توابع می‌گوییم. مسائل مهم در این درسنامه به دست آوردن ضابطه تابع مرکب، مقدار عددی و دامنه تابع مرکب با استفاده از تعریف است.

## ترکیب توابع

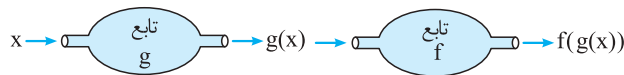
**تعریف** ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  تابعی است که آن را با ناماد  $f \circ g$  نشان می‌دهیم (بخوانید اف‌جی) و به صورت  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  یا  $f \circ g : x \rightarrow f(g(x))$  تعریف می‌کنیم.



نمودار ترکیب دو تابع به صورت مقابل است:

### مراحل ساخت تابع fog:

- 1 باید در دامنه  $g$  باشد. در مرحله اول،  $x$  ورودی و  $g(x)$  خروجی است.
- 2  $g(x)$  باید در دامنه  $f$  باشد. در مرحله دوم،  $g(x)$  ورودی و  $f(g(x))$  خروجی است.



**نکته!** برای به دست آوردن ضابطه  $(fog)(x)$ ، در تابع  $f$  به جای  $x$  ضابطه  $g(x)$  را قرار می‌دهیم.

**سؤال** اگر  $f(x) = 2x - 2$  و  $g(x) = 4x - 5$  دو تابع باشند، ضابطه هریک از توابع  $fog$  و  $gof$  را مشخص کنید.

**پاسخ** اگر در ضابطه تابع  $f$  به جای  $x$ ،  $g(x)$  قرار دهیم، ضابطه تابع  $(fog)(x)$  مشخص می‌شود:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(4x - 5) = 2(4x - 5) - 2 = 8x - 10 - 2 = 8x - 12$$

هم‌چنین با قرار دادن  $f(x)$  به جای  $x$  در ضابطه تابع  $g$ ، ضابطه تابع  $(gof)(x)$  مشخص می‌شود:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x - 2) = 4(2x - 2) - 5 = 8x - 8 - 5 = 8x - 13$$

**نکته!** همان‌طور که در این سؤال می‌بینیم، ضابطه  $fog$  و  $gof$  لزوماً یکی نیستند. ممکن است در مثال‌هایی  $fog$  و  $gof$  یکسان شوند.

**سؤال** اگر  $f(x) = x^2 - 5x + 2$  و  $g(x) = 2x - 1$  باشند، جواب‌های معادله  $(fog)(x) = -4$  را مشخص کنید. **مشابه تمرین ۹ کتاب درسی**

**پاسخ** ضابطه تابع  $fog$  را به دست می‌آوریم و آن را مساوی  $-4$  قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2$$

$$(fog)(x) = -4 \Rightarrow (2x - 1)^2 - 5(2x - 1) + 2 = -4$$

$$A^2 - 5A + 2 = -4 \Rightarrow A^2 - 5A + 6 = 0 \Rightarrow (A - 2)(A - 3) = 0$$

بافرض  $2x - 1 = A$ ، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

### تلاش: حواست باشه!

اینکه ضابطه دو تابع  $f$  و  $g$  را داشته باشیم و بخواهیم مقدار عددی  $fog$  یا  $gof$  را به دست بیاوریم، در سؤالات امتحان نهایی وجود دارد.

**سؤال** اگر  $f(x) = \sqrt{2x+1}$  و  $g(x) = \frac{x}{x+1}$  دو تابع باشند، مقدار عددی  $(fog)(-3)$  و  $(gof)(4)$  را به دست آورید.

**پاسخ** مقدار عددی  $(fog)(-3)$  برابر  $f(g(-3))$  است. ابتدا مقدار  $g(-3)$  را با قرار دادن عدد  $-3$  به جای  $x$  در ضابطه  $g$  به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow g(-3) = \frac{-3}{-3+1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(g(-3)) = f\left(\frac{3}{2}\right)$$

حال باید در ضابطه  $f$  به جای  $x$ ،  $\frac{3}{2}$  قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1} = \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow (fog)(-3) = 2$$

برای به دست آوردن مقدار  $(gof)(4)$ ، یعنی  $g(f(4))$  ابتدا مقدار  $f(4)$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f(4) = \sqrt{2 \times 4 + 1} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow g(f(4)) = g(3)$$

حال باید مقدار  $g(3)$  را از ضابطه  $g(x)$  به دست بیاوریم:

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow g(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \Rightarrow g(f(4)) = g(3) = \frac{3}{4}$$

**سؤال** اگر  $f = \{(2, -1), (1, 4), (3, 0), (5, 2)\}$  و  $g = \{(4, 2), (3, 1), (2, 1), (1, 6)\}$  دو تابع باشند، هریک از توابع fog و gog را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

مشابه تمرین ۱ کتاب درسی

**پاسخ** برای مشخص کردن تابع fog، ابتدا تابع روی g اثر می‌کند:

$$\left. \begin{array}{ll} 4 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -1 & 3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 \\ (fog)(4) = -1 & (fog)(3) = 4 \\ 2 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 4 & 1 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} ? \\ (fog)(2) = 4 & (fog)(1) \text{ وجود ندارد} \end{array} \right\} \Rightarrow fog = \{(4, -1), (3, 4), (2, 4)\}$$

برای مشخص کردن تابع gog، داریم:

$$(gog)(4) = g(g(4)) = g(2) = 1 \Rightarrow (4, 1) \in gog, (gog)(3) = g(g(3)) = g(1) = 6 \Rightarrow (3, 6) \in gog$$

$$(gog)(2) = g(g(2)) = g(1) = 6 \Rightarrow (2, 6) \in gog, (gog)(1) = g(g(1)) = g(6) \text{ تعریف نشده}$$

$$gog = \{(4, 1), (3, 6), (2, 6)\}$$

بنابراین:

**سؤال** تابع  $h(x) = (x^3 - 1)^2$  را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دو طریق).

**پاسخ** **طریقه اول** تابع  $y = x^3$  را به عنوان تابع  $g(x)$  در نظر می‌گیریم و با قرار دادن  $x$  به جای  $x^3$ ، تابع حاصل را  $f(x)$  در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^3, f(x) = (x - 1)^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3 - 1)^2$$

**طریقه دوم** تابع  $y = x^3 - 1$  را به عنوان تابع  $g(x)$  در نظر می‌گیریم و با قرار دادن  $x$  به جای  $x^3 - 1$ ، تابع حاصل را  $f(x)$  در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^3 - 1, f(x) = x^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^3 - 1) = (x^3 - 1)^2$$

## دامنه تابع مرکب

برای محاسبه دامنه تابع  $gof$  دو روش وجود دارد:

**روش اول** تابع  $gof(x)$  را تشکیل دهیم و دامنه تابع به دست آمده را تعیین کنیم (در این روش نباید ضابطه تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

**سؤال** اگر  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  باشد، دامنه تابع fog را به دست آورید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2$$

$$D_{fog} = [0, +\infty), x \geq 0 \Rightarrow (fog)(x) = x$$

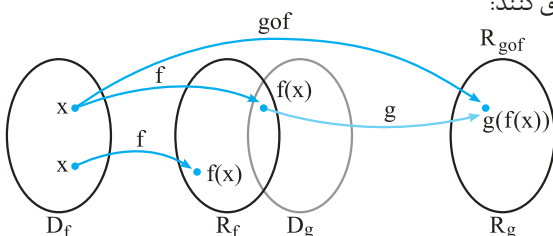
دامنه تابع  $y = (\sqrt{x})^2$  مجموعه  $[0, +\infty)$  است، بنابراین:

توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای  $(\sqrt{x})^2$ ،  $x$  بنویسیم، ضابطه تابع به صورت  $(fog)(x) = x$  درمی‌آید که دامنه آن برابر  $\mathbb{R}$  خواهد بود. بنابراین ضروری است که ابتدا دامنه تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

## تلاشگر: حواست باشه

تعیین دامنه ترکیب دو تابع، یکی از سوالات پرتکرار امتحان نهایی است.

**روش دوم** دامنه تابع مرکب  $gof$ ، مجموعه  $x$  هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:



۱  $x$  در دامنه  $f$  قرار داشته باشد.

۲  $f(x)$  در دامنه  $g$  قرار داشته باشد.

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین دامنه تابع  $gof$  را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

۲ بخش



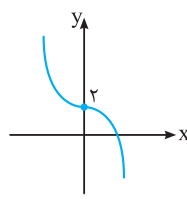
پاسخنامه

۱ | درست

۲ | درست

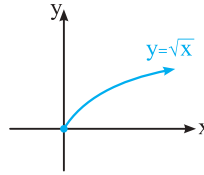
۳ | نادرست

نمودار تابع  $y = -x^3 + 2$  به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع اکیداً نزولی است.



۴ | نادرست

نمودار  $y = \sqrt{x}$  به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع در دامنه‌اش، اکیداً صعودی است:



۵ | درست، زیرا بزرگ‌ترین توان  $x$  برابر ۳ است.

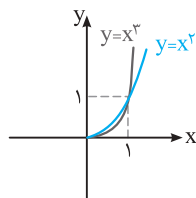
۶ | درست

برد توابع چندجمله‌ای از درجه فرد برابر  $\mathbb{R}$  است.  $f$  یک تابع سه‌جمله‌ای از درجه ۳ است و در نتیجه برد آن برابر  $\mathbb{R}$  است.

۷ | یکتا

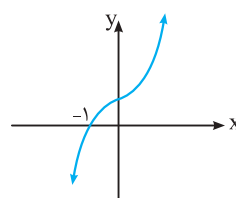
۸ | پایین

نمودار توابع  $y = x^2$  و  $y = x^3$  درباره  $(0, 1)$  به صورت مقابل است:



۹ | صعودی

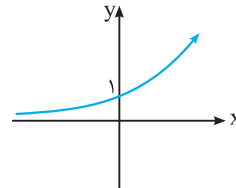
نمودار تابع  $y = (x+1)^3$  به صورت مقابل است:



۱۰ | ثابت

۱۱ | اکیداً صعودی

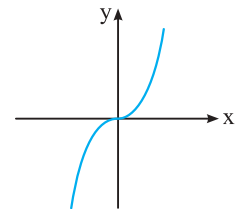
نمودار تابع  $y = 2^x$  به صورت مقابل است که تابعی اکیداً صعودی است:



۱۲ |  $(0, 2)$ ،  $(5, +\infty)$ ، ثابت

۱۳ | آ

اگر نمودار  $y = x^3$  که به صورت مقابل می‌باشد را به اندازه یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار  $y = x^3 + 1$  به دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال یافته نمودار  $y = x^3$  به اندازه یک واحد به سمت بالا است.

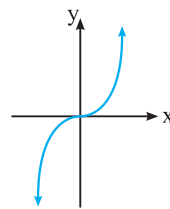


ب) اگر نمودار  $y = x^3$  را ابتدا نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار  $y = -x^3 - 1$  به دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار  $y = -x^3 - 1$  می‌باشد.

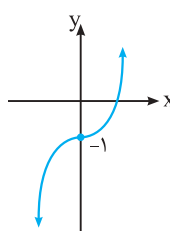
پ) اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست و سپس به اندازه ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار  $y = (x-1)^3 + 2$  به دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار  $y = (x-1)^3 + 2$  می‌باشد.

ت) اگر نمودار  $y = x^3$  را ابتدا به اندازه یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار  $y = (x+1)^3 - 1$  به دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار  $y = (x+1)^3 - 1$  می‌باشد.

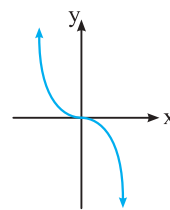
• نمودار تابع  $y = x^3$  به صورت مقابل است:



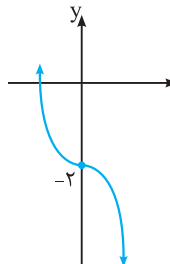
۱۴ | اگر نمودار  $y = x^3$  را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار  $y = x^3 - 1$  به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.



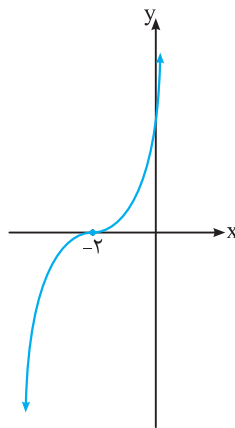
۱۵ | ابتدا نمودار  $y = x^3$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم تا نمودار  $y = -x^3$  به دست آید:

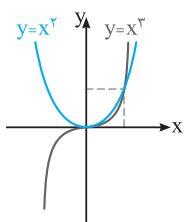


با انتقال نمودار  $y = -x^3$  به اندازه دو واحد به سمت پایین، نمودار  $y = -x^3 - 2$  به دست می‌آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.



۱۶ | با انتقال نمودار  $y = x^3$  به اندازه ۲ واحد به سمت چپ، نمودار  $y = (x+2)^3$  به دست می‌آید:





بیش‌تر از مقادیر  $x^2$  است و در نتیجه نمودار  $y = x^3$  بالاتر از نمودار  $y = x^2$  قرار می‌گیرد. نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:

• فرض کنیم  $A \subseteq D_f$  باشد. تابع  $f$  روی  $A$  اکیداً صعودی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع  $f$  روی  $A$  اکیداً نزولی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع  $f$  روی  $A$  صعودی است، هرگاه:

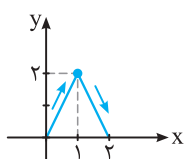
$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع  $f$  روی  $A$  نزولی است، هرگاه:

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

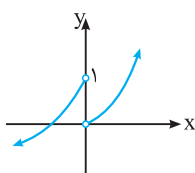
۲۰ | با توجه به شکل و با افزایش  $x$ ، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً نزولی است.

۲۱ | با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های  $(-\infty, -2]$  و  $[2, +\infty)$ ، اکیداً نزولی و در بازه‌های  $(-2, 0)$  و  $[0, 2]$ ، تابعی اکیداً صعودی است.



۲۲ | اگر نمودار  $f$  به صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمودار  $f$  در بازه  $[0, 1]$  در حال صعود و در بازه  $[1, 2]$  در حال نزول است.

۲۳ | اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، آن‌گاه  $f$  روی بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی است ولی در  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی نمی‌باشد.



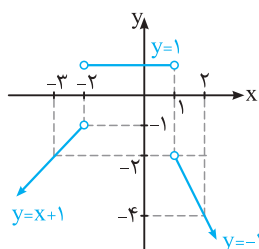
برای پاسخ به چنین سؤالاتی باید نمودار توابع غیریپوسته را رسم کنیم.

۲۴ | برای رسم نمودار تابع سه ضابطه‌ای  $f$ ، باید خط  $y = x + 1$  را در محدوده  $(-\infty, -2)$ ، خط  $y = 1$  را در محدوده  $(-2, 1)$  و خط  $y = -2x$  را در محدوده  $(1, +\infty)$  رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

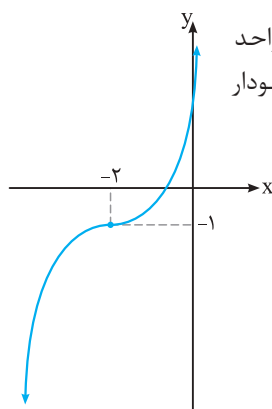
|             |    |    |
|-------------|----|----|
| $x$         | -3 | -2 |
| $y = x + 1$ | -2 | -1 |

|         |    |   |
|---------|----|---|
| $x$     | -2 | 1 |
| $y = 1$ | 1  | 1 |

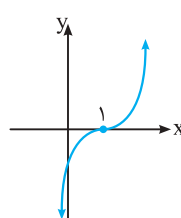
|           |    |    |
|-----------|----|----|
| $x$       | 1  | 2  |
| $y = -2x$ | -2 | -4 |



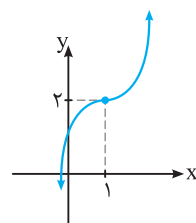
با توجه به نمودار، تابع در بازه  $(-\infty, -2)$ ، تابعی اکیداً صعودی، در بازه  $(-2, 1)$ ، تابعی ثابت و در بازه  $(1, +\infty)$ ، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.



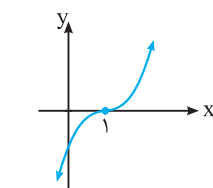
نمودار  $y = (x+2)^3$  را به اندازه یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار  $y = (x+2)^3 - 1$  به دست آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.



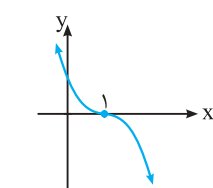
۱۷ | اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار  $y = (x-1)^3$  به دست می‌آید:



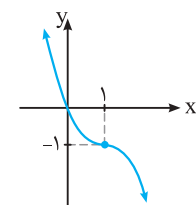
با انتقال نمودار  $y = (x-1)^3$  به اندازه دو واحد به سمت بالا نمودار  $y = (x-1)^3 + 2$  به دست می‌آید. دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  است.



۱۸ | اگر نمودار  $y = x^3$  را به اندازه یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار  $y = (x-1)^3$  به دست می‌آید:

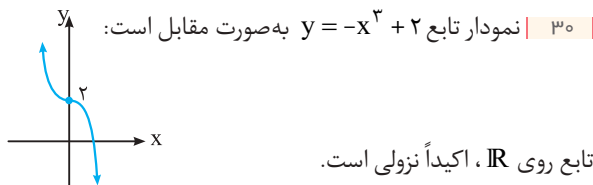


با قرینه کردن نمودار  $y = (x-1)^3$  نسبت به محور  $x$  ها، نمودار  $y = -(x-1)^3$  به دست می‌آید:



نمودار  $y = -(x-1)^3$  را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار  $y = -(x-1)^3 - 1$  به دست آید: دامنه و برد تابع برابر  $\mathbb{R}$  می‌باشند.

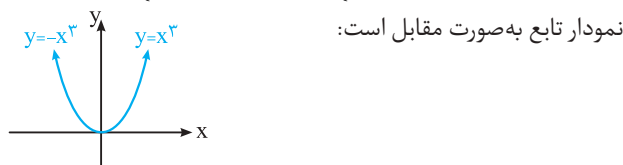
۱۹ | در بازه  $(-\infty, 0)$ ،  $x^2$  عددی مثبت و  $x^3$  عددی منفی است. پس در بازه  $(-\infty, 0)$ ، نمودار  $y = x^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^3$  است. در  $x = 0$  و  $x = 1$ ، مقدار دو تابع برابرند و در نتیجه دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند. در بازه  $(0, 1)$ ،  $x^2$  بیش‌تر از  $x^3$  است و در نتیجه نمودار  $y = x^2$  بالاتر از نمودار  $y = x^3$  قرار می‌گیرد و برای  $x \in (1, +\infty)$ ، مقادیر  $x^3$



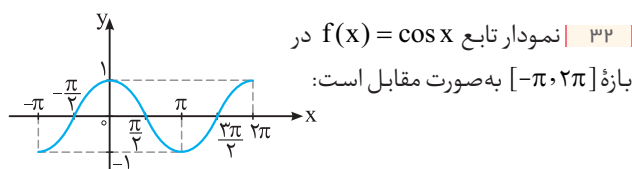
۳۱ | ابتدا با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای

می‌نویسیم:

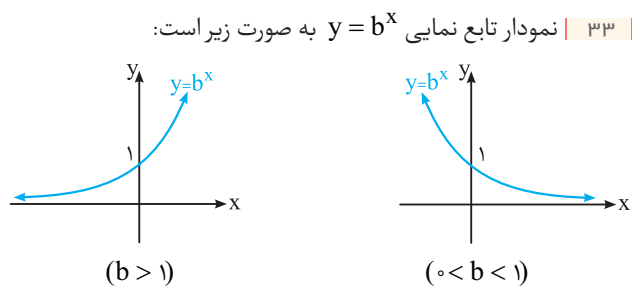
$$y = x^2 |x| = \begin{cases} x^2(x) & x \geq 0 \\ x^2(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$



تابع در بازه  $[-\infty, 0]$ ، اکیداً نزولی و روی بازه  $[0, +\infty)$ ، اکیداً صعودی است.

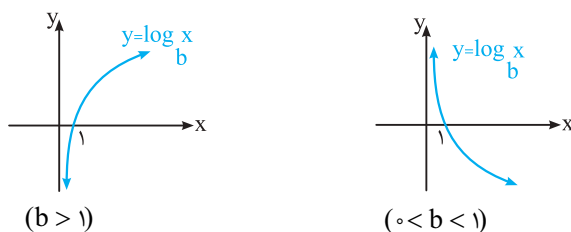


با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های  $[-\pi, 0]$  و  $[\pi, 2\pi]$  اکیداً صعودی و در بازه  $[0, \pi]$ ، اکیداً نزولی است. تابع روی بازه  $[-\pi, 2\pi]$  غیریکنا است.

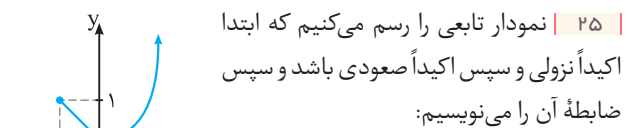
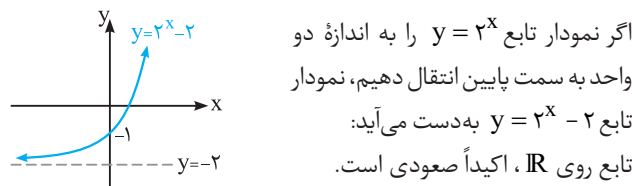


در حالت  $b > 1$ ، تابع  $y = b^x$  روی  $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی و در حالت  $0 < b < 1$ ، تابع  $y = b^x$ ، اکیداً نزولی است.

نمودار تابع لگاریتمی  $y = \log_b x$  به صورت زیر است:



در حالت  $b > 1$ ، تابع  $y = \log_b x$  روی  $(0, +\infty)$ ، اکیداً صعودی و در حالت  $0 < b < 1$ ، تابع  $y = \log_b x$ ، تابعی اکیداً نزولی است.



ضابطه تابع به صورت

$$f(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

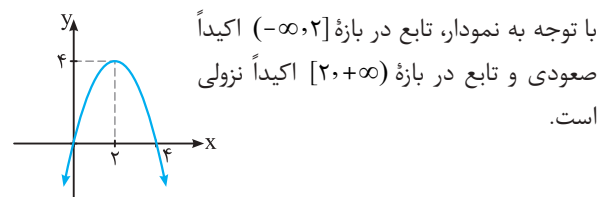
است.

۲۶ | برای رسم نمودار  $y = -x^2 + 4x$ ، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2 \Rightarrow y_S = -(2)^2 + 4(2) = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, y = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0$$

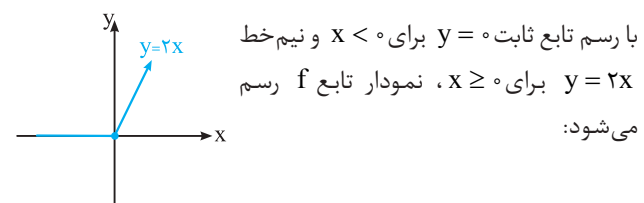
$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$



۲۷ | با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

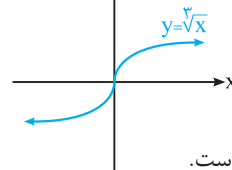
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x + |x| = \begin{cases} x + x & x \geq 0 \\ x + (-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



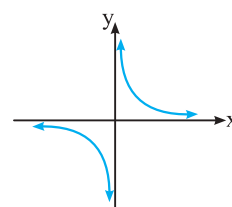
نمودار  $f$  در بازه  $[0, +\infty)$  اکیداً صعودی و در بازه  $(-\infty, 0]$ ، هم صعودی و هم نزولی است ( $f$  تابع ثابت است). تابع  $f$  در بازه  $(-\infty, +\infty)$  صعودی است.

۲۸ | نمودار تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، تابع روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی است.

۲۹ | نمودار تابع گویای  $y = \frac{1}{x}$  به صورت مقابل است:



تابع در بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً نزولی است. ولی تابع روی  $\mathbb{R}$  غیریکنا است.

# ۳

بخش سوم



# امتحان نهایی



ساعت شروع: ۸ صبح

آزمون نوبت دوم

آزمون ۴: خرداد ۱۴۰۰

| ردیف | سؤالات امتحانی                                                                                                                                                                                                                                  | نمره |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ۱    | درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.<br>آ) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.<br>ب) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.                                                | ۰/۵  |
| ۲    | در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.<br>آ) بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر ..... است.<br>ب) شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر ..... است.                                    | ۰/۵  |
| ۳    | با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.                                                                                                                                                                    | ۰/۷۵ |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                 |      |
| ۴    | اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد؛<br>آ) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.<br>ب) مقدار $(g \circ f)(2)$ را تعیین کنید.                                                                                 | ۱/۲۵ |
| ۵    | نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \cos bx + c$ است.<br>با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.                                                                                                                                        | ۱    |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                 |      |
| ۶    | معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.                                                                                                                                                                                 | ۱    |
| ۷    | حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.<br>آ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$<br>ب) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{3x+1}$<br>پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$ | ۲    |
| ۸    | برای تابع $f$ در شکل روبه‌رو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ . با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.                                                                                                                                   | ۱    |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                 |      |
| ۹    | با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع $f$ در نقطه A، نشان دهید که تابع $f$ در نقطه A مشتق پذیر نیست.                                                                                                                                               | ۱    |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                 |      |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ۱۰ | مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).<br>آ) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$<br>ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$                                                                                                                                                     | ۱/۵ |
| ۱۱ | جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید؛<br>آ) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید.<br>ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $35 \text{ m/s}$ است. | ۱/۵ |
| ۱۲ | اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر $b$ و $d$ را به دست آورید.                                                                                                                                                                                    | ۱/۵ |
| ۱۳ | در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید.                                                                                                                                                                                             | ۱/۵ |
| ۱۴ | کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است.<br>آ) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.<br>ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه قطر کوچک را پیدا کنید. (اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است).                                                                                                      | ۱/۵ |
| ۱۵ | مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ و تری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.                                                                                                                                                                    | ۱/۵ |
| ۱۶ | اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر $8\%$ و نوزاد دختر $3\%$ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟                                                                                                          | ۲   |
| ۲۰ | ★ موفق و مؤید باشید. ★                                                                                                                                                                                                                                                                        |     |

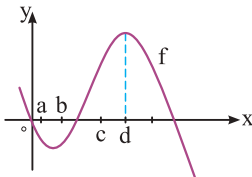


ساعت شروع: ۸ صبح

آزمون نوبت دوم

آزمون ۵: شهریور ۱۴۰۰

| ردیف | سؤالات امتحانی                                                                                                                                                                                                                                         | نمره |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ۱    | درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.<br>الف) دامنه توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.<br>ب) دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند.<br>پ) تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است. | ۰/۷۵ |
| ۲    | نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور $x$ ها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.                                                             | ۰/۷۵ |
| ۳    | با توجه به جدول مقابل، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.<br>آ) $(g \circ f)(1)$<br>ب) $(f \circ (f + g))(0)$                                                                                                                                          | ۱/۵  |
| ۴    | معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن ۱- و دوره تناوب آن $8\pi$ است.                                                                                                                           | ۱    |
| ۵    | مثلثی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟                                                                                          | ۱    |
| ۶    | حاصل عبارت $4 \sin x \cos x \cos 2x$ را به ازای $x = 7/5^\circ$ محاسبه نمایید.                                                                                                                                                                         | ۱    |
| ۷    | حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.<br>آ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$<br>ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$<br>پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$                         | ۲    |

| ۸   | با در نظر گرفتن نمودار تابع $f$ در شکل زیر، نقاط به طول های $a, b, c, d$ و $c, b, a$ را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | ۱   |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------|-----|-----|-----|-------|-----|-----|-----|--------|--|
|     |  <table data-bbox="238 242 602 506"><thead><tr><th><math>x</math></th><th><math>f'(x)</math></th></tr></thead><tbody><tr><td><math>a</math></td><td><math>0</math></td></tr><tr><td><math>b</math></td><td><math>0.5</math></td></tr><tr><td><math>c</math></td><td><math>2</math></td></tr><tr><td><math>d</math></td><td><math>-0.5</math></td></tr></tbody></table> | $x$ | $f'(x)$ | $a$ | $0$ | $b$ | $0.5$ | $c$ | $2$ | $d$ | $-0.5$ |  |
| $x$ | $f'(x)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| $a$ | $0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| $b$ | $0.5$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| $c$ | $2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| $d$ | $-0.5$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| ۹   | اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | ۱   |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| ۱۰  | مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده ترین مشتق الزامی نیست).<br>$f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ (آ)<br>$g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+2}}$ (ب)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۱/۵ |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| ۱۱  | تابع با ضابطه $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می دهد که در آن $x$ مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.<br>آ) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟<br>ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چقدر است؟                                                                                                                                                                                                      | ۱/۵ |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| ۱۲  | تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ۱/۵ |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| ۱۳  | دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن ها ۱۰ باشد و حاصل ضرب شان کم ترین مقدار ممکن گردد.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | ۱/۵ |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| ۱۴  | در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه ای با مختصات $(4, 5)$ باشد؛<br>آ) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.<br>ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.                                                                                                                                                                                                                                                            | ۱   |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| ۱۵  | وضعیت خط $x + y = 3$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | ۱/۵ |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| ۱۶  | دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟                                                                                                                                                                                                          | ۱/۵ |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |
| ۲۰  | ★ موفق و مؤید باشید. ★                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |         |     |     |     |       |     |     |     |        |  |



ساعت شروع: ۱۰ صبح

آزمون نوبت دوم

آزمون ۶: دی ۱۴۰۰

| ردیف | سؤالات امتحانی                                                                                                                                                                                                                                                              | نمره |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ۱    | درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.<br>آ) تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ یک چند جمله ای از درجه ۳ است.<br>ب) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آن گاه $(f \circ g)(4) = 5$ .<br>پ) دو تابع $f(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند. | ۰/۷۵ |
| ۲    | در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.<br>آ) نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ ، ..... از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالا تر، پایین تر)<br>ب) چند جمله ای $p(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله ای ..... بخش پذیر است. $((x+1), (x-1))$             | ۰/۵  |



ساعت شروع: ۸ صبح

آزمون نوبت دوم

آزمون ۷: خرداد ۱۴۰۱

| ردیف | سؤالات امتحانی                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | نمره |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ۱    | درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.<br>آ) تابع $f(x) = \sqrt{x} - x^2$ یک تابع درجه دوم است.<br>ب) تابع $f(x) = x^2$ ، تابعی اکیداً صعودی است.<br>پ) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | ۰/۷۵ |
| ۲    | در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.<br>آ) اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر ..... است.<br>ب) باقی‌مانده تقسیم عبارت $2x^2 - 5x + 1$ برابر ..... است.<br>پ) خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر ..... است.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | ۰/۷۵ |
| ۳    | سؤالات چهارگزینه‌ای:<br>I. برد تابع $f$ بازه $[-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x - 1) + 3$ کدام یک از موارد زیر است؟<br>آ) $[-8, 0]$ ب) $[-12, 0]$ پ) $[1, 9]$ ت) $[-10, 2]$<br>II. کدام یک از نقاط زیرروی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟<br>آ) $(0, 0)$ ب) $(1, 0)$ پ) $(0, -1)$ ت) $(-1, 0)$<br>III. با توجه به نمودار تابع $f$ ، اگر شیب خط مماس در نقاط $a, b, c$ به ترتیب با $m_a, m_b, m_c$ نمایش داده شود. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟<br>آ) $m_c > m_b > m_a$<br>ب) $m_b > m_a > m_c$<br>پ) $m_a > m_b > m_c$<br>ت) $m_c = m_b = m_a$ | ۱/۵  |
| ۴    | اگر ورودی ماشین زیر ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟<br>$x \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | ۰/۷۵ |
| ۵    | معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | ۱    |
| ۶    | معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | ۱    |
| ۷    | نمودار تابع $f$ به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.<br>$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{آ)}$<br>$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{ب)}$<br>$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{پ)}$<br>$\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) = \text{ت)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | ۱    |
| ۸    | حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.<br>$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | ۰/۷۵ |
| ۹    | اگر توابع $f, g$ مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ حاصل $(fg)'(2)$ را به دست آورید.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | ۱    |

