مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌های اعداد

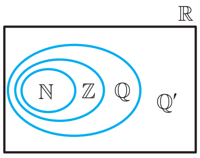
برخی از مجموعه اعدادی را که کاربرد زیادی در ریاضیات دارند، در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

اعضای مجموعه	نماد مجموعه	نام مجموعه
$\{۱,۲,۳,۴,...\}$	$\mathbb{N}$	اعداد طبیعی
$\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$	$\mathbb{W}$	اعداد حسابی
$\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$	$\mathbb{Z}$	اعداد صحیح
$\{۱,۳,۵,۷,...\}$	$\mathbb{O}$	اعداد طبیعی فرد
$\{۲,۴,۶,۸,...\}$	$\mathbb{E}$	اعداد طبیعی زوج
$\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\}$	$\mathbb{Q}$	اعداد گویا
اعدادی که امکان ندارد به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشته شوند.	$\mathbb{Q}'$	اعداد گنگ
اجتماع دو مجموعهٔ گویا و گنگ	$\mathbb{R}$	اعداد حقیقی

با دقت در این جدول نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$ ۳) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$

تذکر وضعیت مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ در نمودار وِن به صورت مقابل است:



نکته مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم دو عدد گویا (به‌جز تقسیم بر صفر) عددی است گویا ولی در مورد اعداد گنگ نمی‌توان چنین اظهارنظری کرد. هم‌چنین حاصل‌جمع هر عدد گویا با هر عدد گنگ حتماً عددی گنگ است.

به طور مثال، حاصل‌جمع دو عدد گنگ $۱+\sqrt{۲}$ و $۲-\sqrt{۲}$ گویاست و یا حاصل‌ضرب دو عدد گنگ $\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ عددی است گویا.

تست اگر $\alpha=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ آن‌گاه کدام عدد زیر گویاست؟

۱) $\alpha^۲-\alpha$ ۲) $\alpha^۲-۲\alpha$ ۳) $\alpha^۲-۳\alpha$ ۴) $\alpha^۲-۴\alpha$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** سعی می‌کنیم به کمک توان‌رسانی $\sqrt{۳}$ را از بین ببریم.

$$\alpha=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow ۲\alpha=۱+\sqrt{۳}\Rightarrow ۲\alpha-۱=\sqrt{۳}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(۲\alpha-۱)^۲=(\sqrt{۳})^۲$$

$$\Rightarrow ۴\alpha^۲-۴\alpha+۱=۳\Rightarrow \alpha^۲-\alpha=\frac{۱}{۲}$$

پس $\alpha^۲-\alpha$ یک عدد گویاست.

نکته اگر $\frac{a}{b}<\frac{m}{n}$ آن‌گاه $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+n}<\frac{m}{n}$.

نتیجه اگر a، b، m و n اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه $\frac{a+m}{b+n}$ یک عدد گویا بین دو عدد گویای $\frac{m}{n}$ و $\frac{a}{b}$ می‌باشد. به طور مثال اگر بخواهیم بین $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۵}$ یک عدد گویا مثال بزنیم، کافی است $\frac{۶}{۸}=\frac{۴+۲}{۵+۳}$ را مثال بزنیم.

مثال بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ سه عدد گویا مثال بزنید.

پاسخ ابتدا بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ یک عدد مثال می‌زنیم.

$$\frac{۱}{۳} < \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{۱+۲}{۳+۳} < \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳}$$

حال بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۳}{۶}$ یک عدد مثال می‌زنیم.

$$\frac{۱}{۳} < \frac{۳}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{۱+۳}{۳+۶} < \frac{۳}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{۴}{۹} < \frac{۳}{۶}$$

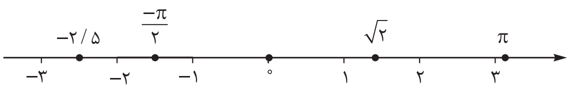
و بالأخره بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۴}{۹}$ یک عدد مثال می‌زنیم.

$$\frac{۱}{۳} < \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{۱+۴}{۳+۹} < \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۴}{۹}$$

پس سه عدد $\frac{۳}{۶}$ و $\frac{۴}{۹}$ و $\frac{۵}{۱۲}$ را بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ پیدا کردیم.

محور اعداد حقیقی

تمام مجموعه اعدادی که در دبیرستان می‌خوانیم، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی‌اند. هر عدد دلخواه حقیقی را می‌توان روی محور اعداد حقیقی نمایش داد و برعکس، هر نقطه روی این محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی است. بـه طـور مثـال اعـداد π، $\sqrt{۲}$، $-\frac{\pi}{۲}$ و $-۲/۵$ روی محور به صورت روبه‌رو می‌باشند:



بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشند را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم.

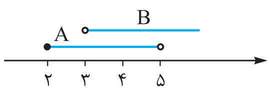
به طور مثال مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ \le x \le ۲\}$، مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی بین ۱− و ۲ به همراه خود این دو عـدد اسـت کـه آن را بـه صورت $[-۱,۲]$ نشان می‌دهیم و به آن بازهٔ بسته از ۱− تا ۲ می‌گوییم. اعضای این مجموعه به صورت زیر روی محور نمایش داده می‌شوند:

در جدول زیر، انواع بازه‌ها را مشاهده می‌کنید:

نمایش محوری	نمایش مجموعه‌ای	نماد بازه	نام بازه
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a,b)	باز
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	$[a,b]$	بسته
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	$[a,b)$	نیم‌باز
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	$(a,b]$	نیم‌باز
a	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	$(a,+\infty)$	باز
a	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty,a)$	باز
a	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز
a	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	$(-\infty,a]$	نیم‌باز
	$\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$	باز

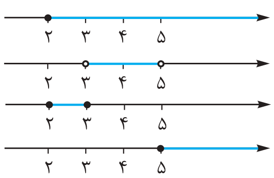
مثال اگر $A = [۲,۵)$ و $B = (۳,+\infty)$ دو بازه باشند، حاصل $A \cup B$، $A \cap B$، $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ نمایش هندسی هر دو بازه مطابق شکل مقابل است:

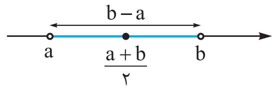


با توجه به شکل داریم:

$$A \cup B = [۲,۵) \cup (۳,+\infty) = [۲,+\infty)$$
$$A \cap B = [۲,۵) \cap (۳,+\infty) = (۳,۵)$$
$$A - B = [۲,۵) - (۳,+\infty) = [۲,۳]$$
$$B - A = (۳,+\infty) - [۲,۵) = [۵,+\infty)$$



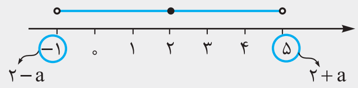
تذکر طول بازه‌های (a,b)، $[a,b]$، $[a,b)$ و $(a,b]$ همگی برابر $b-a$ است و در ضمن نقطهٔ وسط تمام این بازه‌ها $\frac{a+b}{۲}$ است.



تست در بازهٔ $(۲-a,۲+a)$ دقیقاً پنج عدد صحیح وجود دارد. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** نمایش محوری بازه به صورت زیر است:

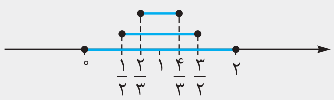


به ازای $a=۳$ بازه به صورت $(-۱,۵)$ خواهد بود که شامل ۵ عدد صحیح است؛ اگر $a>۳$ انتخاب شود، آن‌گاه بازه، شامل ۷ عدد صحیح $-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵$ خواهد بود.

تست اجتماع تمام بازه‌های به فرم $[۱-\frac{۱}{n},۱+\frac{۱}{n}]$ کدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) $[۰,۲]$　۲) $[۰,۱]$　۳) $[۱,۲]$　۴) $\{۱\}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** با انتخاب $n=۱,۲,۳,...$ و نمایش هندسی این بازه‌ها، معلوم می‌شود که اجتماع تمام آن‌ها برابر بازهٔ $[۰,۲]$ است.



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی است، مجموعهٔ متناهی می‌نامیم. اما اگر تعداد اعضای مجموعه‌ای از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر باشد (بی‌نهایت باشد) آن را مجموعهٔ نامتناهی می‌نامیم. به طور مثال، مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی (که ۹ عضو دارد) و یا مجموعهٔ اعداد اول زوج (که یک عضو دارد) متناهی می‌باشند. اما مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی‌اند.

تذکر مجموعهٔ تهی، متناهی است.

تذکر هر بازه به شکل (a,b) یک مجموعهٔ نامتناهی است. $(a<b)$

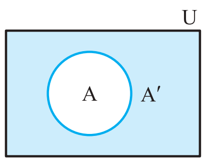
تست اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعهٔ زیر الزاماً متناهی است؟

۱) $A\cup B$　۲) $B-A$　۳) $A-B$　۴) $B\cap\mathbb{N}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** تعداد اعضای $A-B$ یا برابر تعداد اعضای A است و یا کم‌تر از آن. پس $A-B$ متناهی است.

متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع نامیده می‌شود و آن را با U (گاهی اوقات با M) نشان می‌دهند.

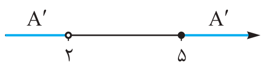


متمم A: اگر U مجموعهٔ مرجع باشد و $A\subseteq U$، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را (که با A' نشان می‌دهیم) متمم A می‌نامیم.

در واقع A' شامل تمام عضوهایی از U است که در A نیستند.

به طور مثال اگر $\mathbb{W}$ مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه $\mathbb{N}'=\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$ و یا

اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع و $A=[۲,۵)$ آن‌گاه $A'=(-\infty,۲)\cup[۵,+\infty)$



نکته اگر U مجموعهٔ مرجع و A زیرمجموعهٔ دلخواه آن باشد، آن‌گاه:

۱ $U'=\varnothing$　۲ $\varnothing'=U$　۳ $A\cup A'=U$　۴ $A\cap A'=\varnothing$

تست اگر $(A\cap B')\cup(B\cap A')$ نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعهٔ زیر حتماً نامتناهی است؟

۱) $A-B$ ۲) $A\cup B$ ۳) A' ۴) A

پاسخ **گزینهٔ «۲»** اگر A متناهی باشد، آن‌گاه $A\cap B'$ هم متناهی است. به طور مشابه اگر B نیز متناهی باشد، آن‌گاه $B\cap A'$ هم متناهی است. در این صورت اجتماع دو مجموعهٔ $A\cap B'$ و $B\cap A'$ نیز متناهی است که این با فرض سؤال تناقض دارد. پس حتماً حداقل یکی از مجموعه‌های A و B نامتناهی است که در نتیجه $A\cup B$ نیز نامتناهی است.

تست کدام گزینه برای مجموعه‌های دلخواه A و B صحیح نیست؟

۱) اگر $A\subset B$ و A نامتناهی باشد، آن‌گاه B نیز نامتناهی است.
۲) اگر $A'\subset B'$ و A متناهی باشد، آن‌گاه B نیز متناهی است.
۳) اگر $A\subset B$ و $A\cap B$ متناهی باشد، آن‌گاه A نیز متناهی است.
۴) اگر $A'\subset B'$ و $A\cup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه B نیز نامتناهی است.

پاسخ **گزینهٔ «۴»** ① صحیح است زیرا اگر A که یک مجموعهٔ نامتناهی است، زیرمجموعهٔ B باشد، پس B نمی‌تواند متناهی باشد، زیرا تمام اعضای A در B خواهند بود و در نتیجه B نیز نامتناهی است.

② صحیح است، زیرا اگر $A'\subset B'$ باشد $B\subset A$ است و اگر A متناهی باشد، قطعاً B نیز متناهی است.

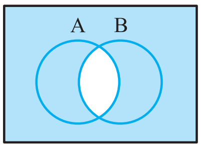
③ صحیح است. اگر $A\subset B$ باشد، آن‌گاه $A\cap B=A$ است؛ در نتیجه A مجموعه‌ای نامتناهی است.

④ صحیح نیست، زیرا اگر $A'\subset B'$ باشد، $B\subset A$ است و $A\cup B=A$. اگر A نامتناهی باشد، B می‌تواند متناهی باشد، مثلاً اگر $B=\{۱,۲\}$ و $A=\mathbb{N}$ باشد.

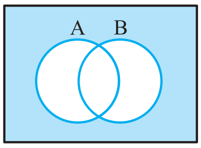
نکته روابط زیر در مورد متمم یک مجموعه برقرار است:

۱ $(A')'=A$ ۲ $A-B=A\cap B'$ ۳ $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ۴ $(A\cap B)'=A'\cup B'$

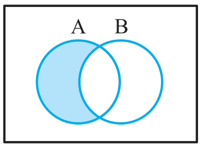
روابط ۳ و ۴ را روابط دمورگان می‌نامند. درستی روابط بالا را می‌توانید در نمودارهای ون که در زیر آمده است، تحقیق کنید.



$(A\cap B)'$



$(A\cup B)'$



$A-B$

تذکر به کمک رابطهٔ توزیع‌پذیری که در زیر آمده است، می‌توانید بسیاری از روابط بین مجموعه‌ها را اثبات کنید.

۱ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

۲ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

تذکر

$$\begin{cases}A\cup(A\cap B)=A\\ A\cap(A\cup B)=B\end{cases}$$

تست با فرض $B-A=B$ حاصل $((B-A)\cup A')'-((A\cup B')-B)'$ کدام است؟

۱) $A\cup B'$ ۲) A' ۳) A ۴) B

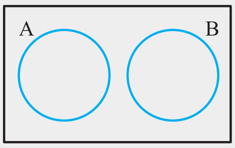
پاسخ **گزینهٔ «۳»** از $B-A=B$ نتیجه می‌گیریم $A\cap B=\varnothing$ است، یعنی دو مجموعهٔ A و B از هم جدا هستند:

$$A-B=A\ \Rightarrow\ A\cap B=\varnothing\ \Rightarrow\ B-A=B$$

پس:

$$(\underbrace{(B-A)}_{B}\cup A')'-((A\cup B')-B)'=(B'\cap A)-((A\cup B')\cap B')'$$

$$(A\cap B')\cap(\underbrace{(A\cup B')\cap B'}_{B'})=(\underbrace{A-B}_{A})\cap B'=A\cap B'=A-B=A$$



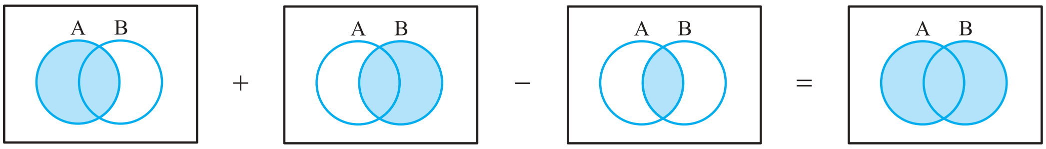
تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

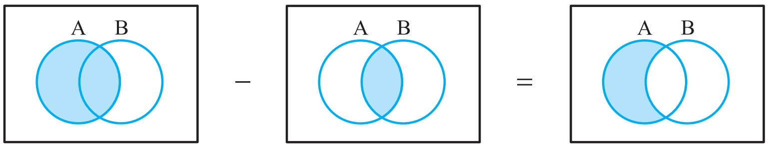
تعداد عضوهای مجموعهٔ متناهی A را با $n(A)$ (و یا $|A|$) نشان می‌دهند. در این صورت روابط زیر برقرار است:

۱ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

۲ $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

نمودار ون‌های زیر، درستی این روابط را به طور شهودی نشان می‌دهند:





تعریف اگر $A \cap B = \varnothing$ آن‌گاه A و B را دو مجموعهٔ جدا از هم می‌نامیم.

مثال **اگر تعداد اعضای A دو برابر تعداد اعضای B باشد، آن‌گاه تعداد اعضای $A \cup B$ چند برابر تعداد اعضای A است؟** (و نصف تعداد اعضای B، $A \cap B$)

پاسخ با فرض $n(A) = x$ داریم:

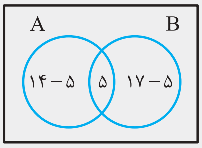
$$\begin{cases} n(A \cap B) = \frac{1}{2}n(A) = \frac{1}{2}x \\ n(B) = 2n(A) = 2x \end{cases} \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = x + 2x - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x$$

پس تعداد اعضای $A \cup B$، ۲/۵ برابر تعداد اعضای A است.

تست **مجموعه‌های A، B و $A \cap B$ به ترتیب ۱۴، ۱۷ و ۵ عضو دارند. چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه است؟**

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

پاسخ **گزینهٔ «۳»** **روش اول** در نمودار مقابل تعداد اعضای هر بخش نوشته شده است. تعداد اعضای $A - B$ و $B - A$ به ترتیب ۹ و ۱۲ است. پس ۲۱ عضو فقط در A یا فقط در B قرار دارند.



روش دوم هدف یافتن $n((A - B) \cup (B - A))$ است.

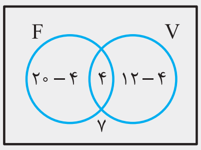
$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\Rightarrow n((A - B) \cup (B - A)) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) = 14 + 17 - 10 = 21$$

تست **۲۰ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در تیم فوتبال، ۱۲ نفر در تیم والیبال و ۴ نفر در هر دو تیم ثبت‌نام کرده‌اند. اگر ۷ نفر در هیچ‌کدام از دو تیم ثبت‌نام نکرده باشند، تعداد افراد کلاس کدام است؟**

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

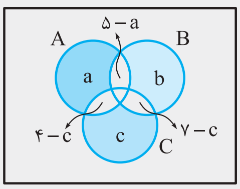
پاسخ **گزینهٔ «۴»** در نمودار مقابل، تعداد دانش‌آموزان ثبت‌نامی در هر تیم نوشته شده است. تعداد کل دانش‌آموزان برابر $35 = 7 + (12 - 4) + 4 + (20 - 4)$ می‌باشد.



تست **برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B و C تعداد اعضای مجموعه‌های $A - B$، $B - C$، $C - A$، $A - C$ و $C - B$ به ترتیب برابر ۴، ۶، ۷، ۵ و ۴ است. تعداد اعضای $B - A$ کدام است؟**

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ «۲»** تعداد اعضای ناحیه‌های رنگی را a، b و c می‌گیریم (مطابق شکل)، سپس با توجه به اطلاعات مسئله، تعداد اعضای سایر مجموعه‌ها را تعیین می‌کنیم.



با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} 5 - a = 6 - b \\ 4 - c = 4 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - a = 1 \\ a = c \end{cases} \Rightarrow b - c = 1$$

هدف محاسبهٔ $b + 7 - c$ است. با توجه به رابطهٔ $b - c = 1$ حاصل $b + 7 - c$ برابر ۸ است.

الگو و دنباله

دنباله: هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

جملهٔ عمومی: جملهٔ nام دنباله که با t_n نمایش می‌دهیم را جملهٔ عمومی دنباله می‌نامیم.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

۱) $۲,۴,۸,۱۶,\dots,۲^n,\dots \Rightarrow t_n = ۲^n$

۲) $۱,۴,۷,۱۰,\dots,۳n-۲,\dots \Rightarrow t_n = ۳n-۲$

تست مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $t_n = \dfrac{۱+(-۱)^n}{۲}$ چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) ۴۰

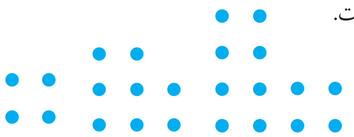
پاسخ **گزینهٔ «۳»** اگر در جملهٔ عمومی به جای n، اعداد طبیعی $۱,۲,۳,\dots,۲۰$ را جایگزین کنیم، ۲۰ جملهٔ اول به صورت زیر به دست می‌آید:

$۰,۱,۰,۱,۰,۱,\dots,۰,۱$

مجموع این ۲۰ جمله برابر ۱۰ است.

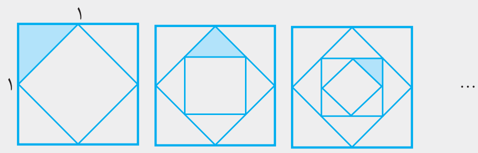
الگو: در بعضی دنباله‌ها، بین جملات الگویی وجود دارد که این الگو با جملهٔ عمومی دنباله قابل بیان است.

به طور مثال در الگوی مقابل، تعداد نقاط را می‌توان به صورت دنبالهٔ $۴,۸,۱۲,\dots$ نشان داد.



جملهٔ عمومی این الگو به صورت $t_n = ۴n$ می‌باشد.

تست در الگوی مقابل، مساحت مثلث رنگی در شکل هفتم چه‌قدر است؟ (در هر مرحله، وسط اضلاع مربع به هم وصل شده‌اند.)



شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳

۱) $\dfrac{۱}{۵۱۲}$ ۲) $\dfrac{۱}{۱۰۲۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲۵۶}$ ۴) $\dfrac{۱}{۱۲۸}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»**

مساحت شکل ۱: $S_۱ = \dfrac{۱}{۸}$

مساحت شکل ۲: $S_۲ = \dfrac{۱}{۸} \times \dfrac{۱}{۲}$

مساحت شکل ۳: $S_۳ = \dfrac{۱}{۸} \times \dfrac{۱}{۲} \times \dfrac{۱}{۲} = \dfrac{۱}{۸} \times (\dfrac{۱}{۲})^۲$

$\Rightarrow$ مساحت شکل ۷: $S_۷ = \dfrac{۱}{۸} \times (\dfrac{۱}{۲})^۶ = \dfrac{۱}{۵۱۲}$

الگوی خطی

الگوهایی که جملهٔ عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an+b$ است، الگوی خطی می‌نامند.

نکته در یک الگوی خطی، اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، برابر ضریب n است.

مثال **در یک الگوی خطی، جملهٔ ششم، ۱۴ واحد از جملهٔ دوم بیشتر است. در این الگو، جملهٔ سیزدهم، چه‌قدر از جملهٔ هشتم بیشتر است؟**

پاسخ جملهٔ عمومی الگو را $t_n = an+b$ فرض می‌کنیم.

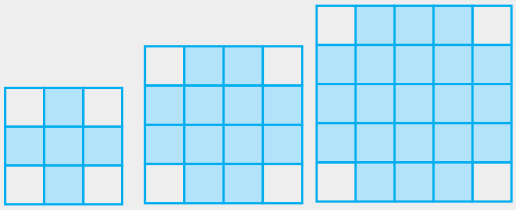
$$t_۶ = ۱۴ + t_۲ \Rightarrow ۶a+b = ۱۴+۲a+b \Rightarrow a = \frac{۷}{۲}$$

$$t_{۱۳} - t_۸ = (۱۳a+b)-(۸a+b) = ۵a = \frac{۳۵}{۲} = ۱۷/۵$$

الگوی درجه‌دوم

اگر جملهٔ عمومی یک دنباله، چندجمله‌ای درجه‌دوم باشد، این دنباله را یک دنبالهٔ درجه ۲ می‌نامیم.

تست **در الگوی زیر، تعداد مربع‌های رنگ‌شده، جملات یک دنبالهٔ درجهٔ ۲ هستند. مجموع ضرایب جملهٔ عمومی این دنباله چه‌قدر است؟**



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۱»** تعداد مربع‌های رنگ‌شده، جملات دنبالهٔ مقابل می‌باشند: $۳^۲ - ۴, ۴^۲ - ۴, ۵^۲ - ۴, \ldots$

پس $t_n = (n+۲)^۲ - ۴$ یعنی $t_n = n^۲ + ۴n$. مجموع ضرایب t_n برابر ۵ است.

دنباله‌های حسابی و هندسی

دنبالهٔ حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه‌شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به دست آید، یک دنبالهٔ حسابی نامیده می‌شود. به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند که با نماد d نمایش می‌دهند.

نکته جملات دنبالهٔ حسابی را به صورت مقابل نشان می‌دهیم: $t_۱ , t_۱ + d , t_۱ + ۲d , \ldots$

جملهٔ عمومی: جملهٔ nام یا همان جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $t_۱$ و قدرنسبت d به صورت مقابل است: $t_n = t_۱ + (n-۱)d$

مثال **تعداد جملات مثبت دنبالهٔ حسابی $۷۵, x, y, ۶۳, \ldots$ را تعیین کنید.**

پاسخ جملهٔ اول دنباله، ۷۵ و جملهٔ چهارم آن ۶۳ است.

$$t_۴ = t_۱ + ۳d \Rightarrow ۶۳ = ۷۵ + ۳d \Rightarrow d = -۴$$

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d \Rightarrow t_n = ۷۵ + (n-۱)(-۴) \Rightarrow t_n = -۴n + ۷۹$$

پس باید $-۴n + ۷۹ > ۰$ باشد، در نتیجه $n < \frac{۷۹}{۴}$. تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از $\frac{۷۹}{۴}$ برابر ۱۹ است.

تست **در یک دنبالهٔ حسابی $t_۴ = ۷$ و $t_۸ = ۱۳$ است. اولین جملهٔ بزرگ‌تر از ۵۰ در این دنباله کدام است؟**

۱) $t_{۳۱}$
۲) $t_{۳۲}$
۳) $t_{۳۳}$
۴) $t_{۳۴}$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** قدرنسبت را d فرض کنید.

$$\begin{cases} t_۴ = ۷ \\ t_۸ = ۱۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ + ۳d = ۷ \\ t_۱ + ۷d = ۱۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{۳}{۲} \\ t_۱ = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

$$t_n > ۵۰ \Rightarrow t_۱ + (n-۱)d > ۵۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲} + \frac{۳}{۲}(n-۱) > ۵۰ \Rightarrow n > \frac{۹۸}{۳}$$

اولین عدد طبیعی، $n = ۳۳$ است.

تست **دهمین جملهٔ مشترک دو دنبالهٔ حسابی** $\begin{cases} -۱, ۳, ۷, \ldots \\ ۲, ۵, ۸, \ldots \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) ۱۱۹
۲) ۱۱۸
۳) ۱۳۰
۴) ۱۳۲

پاسخ **گزینهٔ «۱»** قدرنسبت دنباله‌ها برابر ۴ و ۳ است. پس جملات مشترک آن‌ها دارای قدرنسبتی برابر ۱۲ است. در واقع جملات مشترک (که اولین آن‌ها ۱۱ است)، خود یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۱۲ است.

$$۱۱, ۲۳, ۳۵, \ldots \Rightarrow t_{۱۰} = t_۱ + ۹d = ۱۱ + ۹ \times ۱۲ = ۱۱۹$$

نکته اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه b را واسطهٔ حسابی a و c می‌نامیم؛ در این صورت $b = \frac{a+c}{۲}$.

در حالت کلی‌تر اگر a و c از نظر شمارهٔ جمله، از b به فاصلهٔ یکسان باشند، باز هم رابطهٔ بالا برقرار است. به طور مثال:

$$t_۱ \quad t_۵ \quad t_۹ \Rightarrow t_۵ = \frac{t_۱ + t_۹}{۲}$$

درج واسطهٔ حسابی

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، n عدد چنان قرار دهیم که $n+2$ عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، گوییم بین a و b، n واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} t_1 = a \\ t_{n+2} = b \end{cases} \Rightarrow b = a + (n+1)d$$

تست بین ۵ و ۱۲، پنج واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. مجموع واسطه‌های دوم و چهارم درج‌شده کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

پاسخ **گزینهٔ «۴»** **روش اول** جملات دنباله را به صورت $5, a, b, c, e, f, 12$ می‌نویسیم:

$$t_7 = 12 \Rightarrow 5 + 6d = 12 \Rightarrow d = \frac{7}{6} \Rightarrow \begin{cases} b = t_3 = 5 + 2d = 5 + \frac{7}{3} = \frac{22}{3} \\ e = t_5 = 5 + 4d = 5 + \frac{14}{3} = \frac{29}{3} \end{cases}$$

پس حاصل $b+e$ برابر ۱۷ است.

روش دوم c هم واسطهٔ حسابی ۵ و ۱۲ است و هم واسطهٔ حسابی b و e، پس:

$$c = \frac{e+b}{2} = \frac{5+12}{2} \Rightarrow e + b = 5 + 12 = 17$$

دنبالهٔ هندسی

دنباله‌ای را که در آن، هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست آید، دنبالهٔ هندسی می‌نامیم. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جملهٔ اول هم باید غیرصفر باشد.

نکته جملات دنبالهٔ هندسی را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهند: $t_1, t_1r, t_1r^2, \ldots$

جملهٔ عمومی: جملهٔ nام یا همان جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت r برابر است با: $t_n = t_1r^{n-1}$

تذکر اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = ac$ و b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامیم.

تست در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت بزرگ‌تر از یک، جملهٔ پنجم مربع جملهٔ nام است. اگر جملهٔ پانزدهم این دنباله برابر ۱ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ **گزینهٔ «۳»** جملهٔ اول را t_1 و قدرنسبت را r فرض کنید.

$$\begin{cases} t_5 = (t_n)^2 \\ t_{15} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1r^4 = (t_1r^{n-1})^2 = t_1^2 r^{2n-2} \Rightarrow t_1r^{2n-6} = 1 \\ t_1r^{14} = 1 \end{cases}$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم $2n - 6 = 14$ پس $n = 10$.

تست جملات دوم، ششم و هشتم یک دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند. جملهٔ چندم دنبالهٔ حسابی برابر صفر است؟

۱) دهم ۲) یازدهم ۳) سیزدهم ۴) چهاردهم

پاسخ **گزینهٔ «۱»** جملات دنبالهٔ حسابی را به صورت $t+7d$ و $t+5d$ و $t+d$ در نظر می‌گیریم. باید $t+5d$، واسطهٔ هندسی بین $t+d$ و $t+7d$ باشد.

$$(t+5d)^2 = (t+d)(t+7d)$$

$$\Rightarrow t^2 + 10td + 25d^2 = t^2 + 8td + 7d^2 \Rightarrow 2td + 18d^2 = 0 \Rightarrow t + 9d = 0 \Rightarrow t_{10} = 0$$

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱ اگر t_1، جملهٔ اول و d، قدرنسبت یک دنبالهٔ حسابی باشد؛ آن‌گاه مجموع n جملهٔ اول آن از روابط زیر به دست می‌آید:

۱ $S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n)$ **۲** $S_n = \frac{n}{2}(2t_1 + (n-1)d)$

۲ اگر t_1، جملهٔ اول و r، قدرنسبت یک دنبالهٔ هندسی باشد، آن‌گاه مجموع n جملهٔ اول آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}$$

تست **مجموع ۶ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت ۲، چند برابر مجموع ۳ جملهٔ اول آن است؟**

۱) ۱۶   ۲) ۹   ۳) ۱۵   ۴) ۱۸

پاسخ **گزینهٔ «۲»** با توجه به فرمول S_n در دنبالهٔ هندسی داریم:

$$S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow \begin{cases} S_6 = \frac{t_1(1-2^6)}{1-2} = 63t_1 \\ S_3 = \frac{t_1(1-2^3)}{1-2} = 7t_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_6}{S_3} = 9$$

تست **در یک دنبالهٔ حسابی شامل n جمله، مجموع سه جملهٔ اول برابر ۷، مجموع سه جملهٔ آخر برابر ۴۳ و مجموع کل جملات برابر ۱۲۵ است. مقدار n کدام است؟**

۱) ۲۵   ۲) ۱۰   ۳) ۱۲   ۴) ۱۵

پاسخ **گزینهٔ «۴»** ابتدا دقت کنید که $t_1 + t_n = t_1 + d + t_n - d = t_2 + t_{n-1}$ به طور مشابه $t_1 + t_n = t_3 + t_{n-2}$. حال با توجه به فرمول S_n در دنبالهٔ حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n) = \frac{n}{2}(t_2 + t_{n-1}) = \frac{n}{2}(t_3 + t_{n-2}) \Rightarrow 3\underbrace{S_n}_{125} = \frac{n}{2}(\underbrace{t_1 + t_2 + t_3}_{7} + \underbrace{t_{n-2} + t_{n-1} + t_n}_{43})$$

$$\Rightarrow 3 \times 125 = \frac{n}{2}(7+43) \Rightarrow n = 15$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر برای مجموعه‌های A، B، C و D که هر کدام معرف یکی از مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی است رابطهٔ $A \subset B \subset C \subset D$ برقرار باشد، مجموعهٔ اعداد گنگ کدام است؟

۱) $B \cup C$ ۲) $C - B$ ۳) $D - C$ ۴) $D - B$

۲- حاصل $\alpha^2 + 2\alpha$ به ازای کدام عدد زیر، گویاست؟

۱) $\sqrt{2}+1$ ۲) $\sqrt{2}+2$ ۳) $\sqrt{2}-2$ ۴) $\sqrt{2}-1$

۳- مجموعهٔ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{3n+21}{n+2} \in \mathbb{N}\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶

۴- اگر α یک عدد حقیقی گنگ و به ازای هر α، $\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3}$ یک عدد حقیقی گویا باشد، آن‌گاه k کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{9}{2}$ ۲) $-\frac{9}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۵- اگر $\{۳,m-۱,n-۲\}=\{۱,۲,m+۱\}$ آن‌گاه حاصل $m-n$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۲-

۶- به ازای چند مقدار a دو مجموعهٔ $\{a,a^۲\}$ و $\{۱,b,b^۲\}$ با یکدیگر برابرند؟

۱) یک مقدار ۲) دو مقدار ۳) هیچ مقدار ۴) بی‌شمار مقدار

۷- اجتماع کدام دو بازهٔ زیر، خود یک بازه است؟

۱) $(۲,۵),(-۳,۳)$ ۲) $(۱,۳),(-۱,۱)$ ۳) $(۲,۴),(۵,۷)$ ۴) $(۱,۴),(-۲,۰)$

۸- عدد گویای $۲+\frac{۳}{n}$ عضو بازهٔ $(۲,۲/۰۵)$ است. حداقل مقدار طبیعی n کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۱ ۳) ۳۰ ۴) ۳۱

۹- اگر $۲+\frac{۱}{n\sqrt{۲}}$ عددی گنگ در بازهٔ $(۲,\frac{۹}{۴})$ باشد، آن‌گاه n چند مقدار طبیعی را اختیار نمی‌کند؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۰- اگر $a+۱$ عضوی از بازهٔ $(۳-۲a,۲a-۱۳)$ باشد، a کدام است؟

۱) $a=۲$ ۲) $a=۳$ ۳) $a=۴$ ۴) $a=۵$

۱۱- به ازای چند مقدار طبیعی n، بازهٔ $(-\frac{۱}{n},\frac{۱۲n}{۴n-۱})$ شامل عدد حقیقی ۳/۱ است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۲- در بازهٔ $(\frac{۲}{۳}-n,\frac{۲}{۳}+n)$ دقیقاً سه عدد صحیح قرار دارد. حداکثر n کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۱۳- اگر $A=[۲,۴]$ و $B=[a,+\infty)$ به طوری که $A\cap B$ یک مجموعه با تعداد اعضای متناهی باشد، کدام صحیح است؟

۱) $a\geq ۴$ ۲) $a=۴$ ۳) $a\leq ۴$ ۴) a یافت نمی‌شود.

۱۴- اگر $A=(-\infty,۴]$ و $B=(a,+\infty)$، عدد صحیح a کدام باشد تا $A\cap B$ شامل ۴ عدد صحیح باشد؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵- اگر $A=(-۶,۲]$ و $B=[-۱,۴)$ عدد $۲\sqrt{۳}$ عضو کدام مجموعه است؟

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $A'\cap B'$ ۴) $A\cap B$

۱۶- اگر $A=(-\infty,۵]$ و $B=(-۳,+\infty)$، مجموعهٔ $(A-B)\cup(B-A)$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۷- اگر $[-۳,۷]\cup[-a,۶)=[-۴,b]$، مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۹ ۲) ۶- ۳) ۳ ۴) ۱۱

۱۸- اگر $A_n=[\frac{۱-n}{۲},\frac{۱+n}{۴}]$ آن‌گاه $A_۱\cup A_۲\cup A_۳$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $[۰,\frac{۱}{۲}]$ ۳) $[\frac{-۱}{۲},\frac{۳}{۴}]$ ۴) $[-۱,\frac{۱}{۲}]$

۱۹- اگر $M=\{۱,۲,...,۹\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ به طوری که $B-A=\{۴,۵\}$ برای B چند جواب به دست می‌آید؟ (M مرجع است)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۰- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشد، آن‌گاه چند مجموعه مانند M در رابطهٔ $(A\cap B)\subset M\subset(A\cup B)$ صدق می‌کند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۱- با کدام شرط دو مجموعهٔ A و B متمم یکدیگر هستند؟

۱) فقط $A\cap B=\varnothing$ ۲) فقط $A\cup B=M$

۳) $A\cap B=\varnothing, A\cup B=M$ ۴) $A\cap B=\varnothing, A'\cup B'=\varnothing$

۲۲- اگر $B\subseteq A$ و $A-B$ یک مجموعهٔ غیرتهی و متناهی باشد، A و B کدام می‌توانند باشند؟

۱) $A=[۲,۵), B=(۲,۵]$ ۲) $A=[۲,۵], B=(۲,۵)$ ۳) $A=(۲,۵), B=[۲,۵]$ ۴) $A=[۲,۵], B=\{۲,۵\}$

۲۳- اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه حتماً متناهی است؟

۱) $B'\cap A$ ۲) $A'\cap B'$ ۳) $B\cap A'$ ۴) $A'\cup B'$

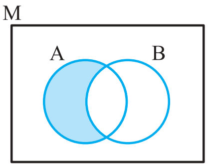
۲۴- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و متناهی باشند، کدام مجموعه می‌تواند نامتناهی باشد؟

۱) $A-B'$ ۲) $B'-A'$ ۳) $(A'-B)'$ ۴) $(A-B')'$

۲۵- اگر $A\subset B\subset C$ به طوری که A متناهی و C نامتناهی باشد، کدام گزینه صحیح است؟

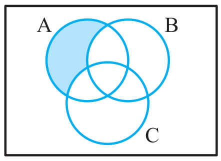
۱) B' نامتناهی است. ۲) $B-A$ نامتناهی است. ۳) C' متناهی است. ۴) $C-A$ نامتناهی است.

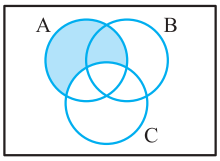
۲۶- متمم شکل رنگ‌شده کدام است؟

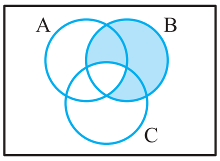


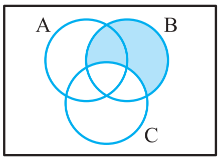
۱) $A'\cup B'$
۲) $(A\cup B)-A'$
۳) $B\cup A'$
۴) $(A\cup B)-A$

۲۷- در کدام گزینهٔ زیر، مجموعهٔ $(A-B)'\cap(B-C)$ درست سایه زده شده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۸- متمم مجموعهٔ $(A-B)'-A'$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $A'\cup B'$ ۳) $B\cup A'$ ۴) $B'\cup A$

۲۹- متمم مجموعهٔ $((A\cup B)-A)'\cap A$ کدام است؟

۱) $B'\cap A$ ۲) $B\cap A'$ ۳) A' ۴) B'

۳۰- سادهٔ شدهٔ $(A-B)'\cup(B-A)'$ کدام است؟

۱) M ۲) $A\cup B$ ۳) $A'\cup B'$ ۴) $(A\cup B)'$

۳۱- اگر $A\subset B$ و $C'\subset B'$، حاصل $A'\cup C'$ کدام است؟

۱) A ۲) A' ۳) C ۴) C'

۳۲- اگر $A\cup B=A\cup C$، کدام گزینه الزاماً درست است؟

۱) $B=C$ ۲) $A-B'=A-C'$ ۳) $A'-B=A'-C$ ۴) $A-B=A-C$

۳۳- بین سه مجموعهٔ ناتهی A، B و C رابطهٔ $A\cap B=B\cup C$ برقرار است. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $A-B=\varnothing$ ۲) $C\subset A$ ۳) $C\subset B$ ۴) $B\subset A$

۳۴- برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B و C داریم: $A-B=D, B-C=E, D-E=F$

در این صورت کدام گزینه حتماً صحیح است؟

۱) $F\subseteq C$ ۲) $F\subseteq A\cap C$ ۳) $D\cap C\subseteq F$ ۴) $A\cap C\subseteq F$

۳۵- اگر مجموعهٔ مرجع $M=\{۱,۲,\dots,۲۰\}$، $A=\{۱,۲,\dots,۱۵\}$ و $B=\{۵,۶,\dots,۱۵\}$، کدام مجموعه عضو کم‌تری دارد؟

۱) $A\cup B'$ ۲) $A-B'$ ۳) $A'-B$ ۴) $(A-B)'$

۳۶- اگر $\{۱,۲,\dots,۳۰\}-X=\{۱,۲,\dots,۲۰\}$، مجموعهٔ X کدام ویژگی را دارد؟

۱) حداقل ۱۰ و حداکثر ۲۰ عضو دارد. ۲) حداقل ۲۰ و حداکثر ۳۰ عضو دارد.
۳) می‌تواند حداقل ۲۰ عضو داشته باشد و می‌تواند نامتناهی باشد. ۴) می‌تواند حداقل ۱۰ عضو داشته باشد و می‌تواند نامتناهی باشد.

۳۷- اگر $n(A)=۲n(B)=۴n(A\cap B)$، حاصل $\dfrac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۸- اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، حاصل $\dfrac{n(A)+n(B)}{n(A\cap B)}$ برابر کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۷۵ ۴) ۳

۳۹- اگر بدانیم $n((A-B)\cup(B-A))=۵n(A\cap B)$، حاصل $\dfrac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۰- از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه، ۷۰ نفر محصولات شرکت A و ۵۷ نفر محصولات شرکت B را انتخاب کرده‌اند. اگر ۳۲ نفر از هر دو شرکت خرید کرده باشند، تعداد کسانی که از هیچ شرکتی خرید نکرده باشند چند نفر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۴۱- اگر مجموعه‌های A و B و $A-B$ به ترتیب ۱۵ و ۱۰ و ۱۲ عضو داشته باشند، مجموعهٔ $(A\cup B)-A$ چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۲- اگر $n(A)=۹$ و $n(A\cap B)=۲$ آن‌گاه تعداد اعضای مجموعهٔ $A\cap(A\cap B)'$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) صفر

۴۳- اگر اعداد طبیعی دورقمی را مرجع در نظر بگیریم و اعداد مضرب ۴ را A و اعداد مضرب ۵ را B فرض کنیم، $n(A'\cup B')$ و $n((A\cup B)')$ چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۹

۴۴- در یک کلاس ۷۰ نفری، ۴۰ نفر در المپیاد شیمی و ۵۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. لااقل چند نفر در هر دو المپیاد شیمی و فیزیک شرکت کرده‌اند؟(ممکن است برخی افراد کلاس در هیچ المپیادی نباشند.)

۱) ۳۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۵ ۴) ۲۰

۴۵- هرگاه $n(A-B)=۷$ ، $n(B-A)=۱۰$ و $n(A\cap B)=۱۳$، به طوری که از $n(A-B)$، ۳ واحد کم کنیم و به $n(A\cap B)$، k واحد اضافه کنیم به $n(A\cup B)$، ۲۰ واحد اضافه می‌شود، عدد k کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۰ ۳) ۲۳ ۴) ۲۶

۴۶- فرض کنید $n(A\cup B)=۲۰$ و $n(A\cap B)=۵$، اگر از $A\cup B$ به تعداد ۹ عضو برداریم از A، ۵ عضو و از B، ۶ عضو کم می‌شود. در این حالت جدید $n((A-B)\cup(B-A))$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۷- در یک مدرسه، ۵۵ نفر در رشتهٔ فوتبال، ۵۰ نفر در رشتهٔ والیبال و ۵۰ نفر در رشتهٔ بسکتبال شرکت کرده‌اند. اگر ۱۵ نفر فوتبال و والیبال، ۱۳ نفر والیبال و بسکتبال، ۱۱ نفر فوتبال و بسکتبال بازی کنند و کل ورزشکاران ۱۲۴ نفر باشند، چند نفر در هر سه رشته فعالیت می‌کنند؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۸- از بین ۳۸ دانش‌آموز، ۱۳ نفر عضو گروه A، ۱۰ نفر عضو گروه B و ۲۱ نفر عضو گروه C می‌باشند. اگر تعداد اعضای مشترک گروه‌های A و C، برابر تعداد اعضای مشترک گروه B و C باشند و هیچ دانش‌آموزی عضو مشترک A و B نباشد، آن‌گاه چند نفر تنها عضو گروه A هستند؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۴۹- در یک الگوی خطی، اختلاف جملات دهم و هفتم برابر ۱۲ است. اختلاف جملهٔ ششم این دنباله از جملهٔ اول آن چه‌قدر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

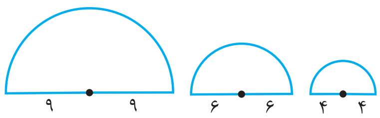
۵۰- در یک الگوی خطی $a_{۲۰}=n$ و $a_n=۲۰$. مقدار $a_{n+۲۰}$ چه عددی است؟

۱) صفر ۲) $n+۲۰$ ۳) $n-۲۰$ ۴) $۲n-۲۰$

۵۱- اگر $a_n=(k-۲)n^۲+(۲k+۱)n-k$ یک الگوی خطی باشد، حاصل $a_۶-a_۲$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۳۸ ۴) ۲۴

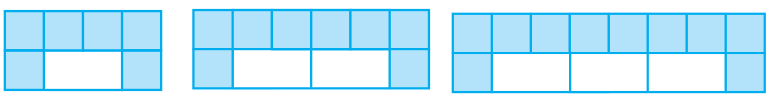
۵۲- در الگوی مقابل، محیط نیم‌دایرهٔ شکل هفتم چه‌قدر است؟



شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳

۱) $\frac{۶۴\pi}{۲۴۳}$ ۲) $\frac{۱۲۸\pi}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۶۴\pi}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱۲۸\pi}{۸۱}$

۵۳- با توجه به الگوی زیر، در شکل دهم اختلاف تعداد کاشی سفید و رنگی چه عددی است؟



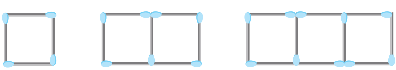
(۱) (۲) (۳)

۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۸
۴) ۲۴

۵۴- در یک دنباله، $a_۱=a_۲=۱$ و $a_{n+۲}=a_{n+۱}+a_n$ است. اگر $b_n=(a_{n+۱})^۲-a_na_{n+۲}$ باشد، b_n برابر کدام گزینه است؟

۱) $(-۱)^n$ ۲) $(-۱)^{n+۱}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۵۵- با توجه به الگوی زیر، مجموع چوب‌کبریت‌های استفاده‌شده در ۲۰ شکل اول کدام است؟



(۱) (۲) (۳)

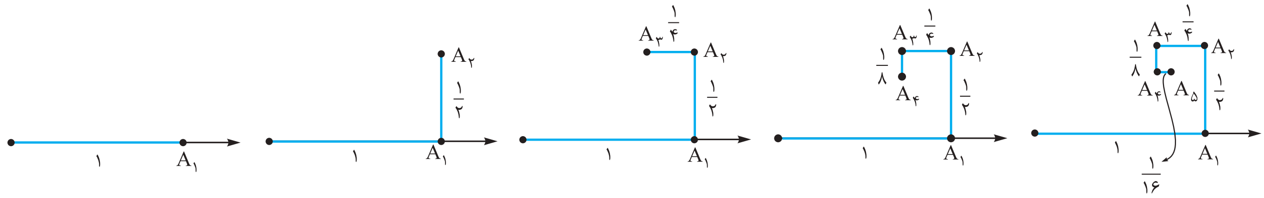
۱) ۶۳۰ ۲) ۶۵۰ ۳) ۶۷۰ ۴) ۶۸۰

۵۶- در الگوی زیر، جمع اعداد داخل مستطیل شکل دهم چه‌قدر است؟

۱) ۵۰۵   ۲) ۴۹۵

۳) ۴۸۵   ۴) ۴۷۵

۵۷- در الگوی زیر، طول تصویر نقطهٔ $A_{۱۰}$ روی محور چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۲۰۵}{۵۱۲}$ ۲) $\frac{۲۰۵}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۲۲۵}{۲۵۶}$ ۴) $\frac{۲۲۵}{۵۱۲}$

۵۸- در یک الگو با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۱}{n^۲+n}$، جمع صد جملهٔ ابتدایی چه عددی است؟

۱) $\frac{۹۹}{۱۰۱}$ ۲) $\frac{۱۰۰}{۱۰۱}$ ۳) $\frac{۱۰۱}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{۹۹}{۱۰۰}$

۵۹- در یک دنبالهٔ حسابی، $a_{n-۱} = ۱۷$ و $a_{n+۲} = ۳۵$ می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۳   ۴) ۴

۶۰- جملهٔ چندم دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۴n^۲+۱۱n+a}{n+۲}$ برابر ۸۳ می‌باشد؟

۱) ۲۰   ۲) ۲۱   ۳) ۲۳   ۴) ۱۹

۶۱- اگر جملهٔ اول دنبالهٔ عددی $a_n = ۱۲n - ۳$ را ۳ واحد اضافه کنیم و از قدرنسبت ۲ واحد کم کنیم، جملهٔ بیستم دنبالهٔ جدید با $a_{۲۰}$ چه‌قدر اختلاف دارد؟

۱) ۳۵   ۲) ۳۸   ۳) ۲۸   ۴) ۲۵

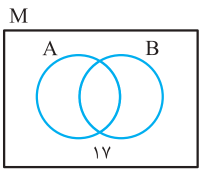
۶۲- در دنبالهٔ حسابی $-۲, a, b, ۷, ...$ چند جملهٔ کم‌تر از ۱۰۰ وجود دارد؟

۱) ۳۰   ۲) ۳۱   ۳) ۳۴   ۴) ۳۵

۶۳- اگر $a_n = ۴n$ و $b_n = ۳n - ۴$ دو دنبالهٔ حسابی باشند، جملهٔ شانزدهم b_n با چندمین جملهٔ a_n برابر است؟

۱) ۸   ۲) ۹   ۳) ۱۰   ۴) ۱۱

۶۴- اگر x و y و z به ترتیب معرف تعداد اعضای مجموعه‌های $A - B$ ، $A \cap B$ ، $B - A$ باشند و $n(M) = ۴۴$ به طوری که $x, y, z, ۱۷$ دنبالهٔ عددی تشکیل دهند، تعداد اعضای $A \cap B$ چه عددی است؟



۱) ۹   ۲) ۸

۳) ۶   ۴) ۴

۶۵- در یک دنبالهٔ حسابی $a_۷ + a_۸ + a_۹ = ۳۰$ اگر جملهٔ اول نصف جملهٔ چهارم باشد، حاصل $a_۷^۲ + a_۸^۲ + a_۹^۲$ کدام است؟

۱) ۳۰۲   ۲) ۲۸۵   ۳) ۲۴۵   ۴) ۳۶۵

۶۶- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند. نسبت محیط این مثلث به طول کوچک‌ترین ضلع آن کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳   ۴) ۴

۶۷- سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی به صورت $a - b, b - c, c - a$ می‌باشد. جملهٔ چهاردهم این دنباله، چند برابر جملهٔ ششم آن است؟

۱) پنج برابر   ۲) شش برابر   ۳) سه برابر   ۴) چهار برابر

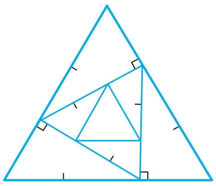
۶۸- اضلاع و قطر یک مستطیل، دنبالهٔ عددی تشکیل می‌دهند. اگر محیط آن ۵۶ باشد، مساحت مستطیل چه عددی است؟

۱) ۶۴   ۲) ۹۶   ۳) ۱۹۲   ۴) ۲۵۶

۶۹- در یک دنبالهٔ هندسی با جملات مثبت اگر $\frac{a_{n-۱}}{a_{n+۱}} = ۹$ و $a_۱ = ۱$، مقدار $a_{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۳^{-۹}$ ۲) $۳^۹$ ۳) $۳^{۱۰}$ ۴) $۳^{-۱۰}$

۷۰- در شکل زیر، ضلع بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۹ می‌باشد. هر ضلع را به ۳ قسمت برابر تقسیم می‌کنیم و مثلث متساوی‌الاضلاع جدیدی پدید می‌آوریم. اگر همین عمل تکرار شود، ضلع پنجمین مثلث متساوی‌الاضلاع کدام است؟
(در هر مرحله سه مثلث کناری به وجود آمده قائم‌الزاویه‌اند.)



۱) $\frac{9}{16}$ ۲) $\frac{81}{16}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{3}$

۷۱- جمعیت یک شهر در ابتدای سال ۹۰، ۱۰۰۰۰۰ نفر بوده است. اگر سالانه ۲۰ درصد جمعیت شهر کاهش یابد، در ابتدای سال ۹۵ جمعیت شهر به چند نفر خواهد رسید؟

۱) 2^{15} ۲) 2^{12} ۳) 2^{16} ۴) 2^{8}

۷۲- اگر به اعداد ۲- و ۴ و ۲۲ عدد k را اضافه کنیم، سه عدد حاصل یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند. k کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۳- بین دو عدد ۲ و ۱۶، پنج واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم. حاصل‌ضرب ۵ واسطه کدام است؟

۱) ۴۰۹۶ ۲) $4096\sqrt{2}$ ۳) $1024\sqrt{2}$ ۴) ۲۰۴۸

۷۴- حاصل‌ضرب ده جملهٔ ابتدایی $81, 27, 9, \dots$ چند برابر جملهٔ پنجم آن است؟

۱) ۲۴۳ ۲) $\frac{1}{243}$ ۳) ۸۱ ۴) $\frac{1}{81}$

۷۵- حاصل‌ضرب پنجاه جملهٔ ابتدایی $2, 4, 8, 16, \dots$ چه توانی از ۸ می‌باشد؟

۱) ۴۱۵ ۲) ۴۲۵ ۳) ۴۶۰ ۴) ۴۳۵

۷۶- در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ هفتم برابر $\sqrt[13]{2}$ است. حاصل‌ضرب ۱۳ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۷- در یک دنباله اگر $a_1 = 3$ و $a_n = 2a_{n-1} + 3$، مقدار $a_8 - a_7$ کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۲۵۶ ۳) ۱۹۲ ۴) ۳۸۴

۷۸- در یک دنباله، $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 1$. در این‌صورت $a_{16} - a_{15}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{14}$ ۲) $\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{15}$ ۳) $(\frac{3}{4})^{14}$ ۴) $(\frac{3}{4})^{15}$

۷۹- اگر در یک دنباله هر جمله از ۲ برابر جملهٔ قبل ۲ واحد بیشتر باشد به طوری که جملهٔ اول ۴ باشد، جملهٔ چهلم چه عددی است؟

۱) $2 \times 3^{40} - 2$ ۲) $3 \times 2^{40} - 2$ ۳) $6 \times 2^{40} - 2$ ۴) $6 \times 3^{40} - 2$

۸۰- اگر $2^{2x}, 8\sqrt{2}, 4^{y}$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، واسطهٔ عددی بین x و y کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{7}{8}$

۸۱- واسطهٔ عددی $\frac{1}{x+3}$ و $\frac{1}{x}$ عدد $\frac{1}{4}$ است، واسطهٔ هندسی $x+9$ و x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{18}$ ۴) $\sqrt{24}$

۸۲- اگر $3, a, b+3$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی و $2, a-1, 2b+2$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۸۳- اختلاف واسطه‌های حسابی و هندسی دو عدد مثبت برابر ۲ و مجموع آن دو عدد برابر ۳۴ است. اختلاف این دو عدد کدام است؟

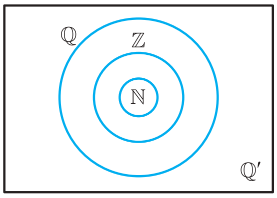
۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۸۴- جملات سوم، هفتم و نهم از یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. چندمین جملهٔ این دنبالهٔ حسابی صفر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱- گزینه۳ می‌دانیم $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح، $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا و $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است که در آن $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ است؛ پس $A=\mathbb{N}$، $B=\mathbb{Z}$، $C=\mathbb{Q}$ و $D=\mathbb{R}$ است. به صورت مقابل می‌توان این مجموعه‌ها را نشان داد:



می‌دانیم $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ است. پس با توجه به آن‌که $\mathbb{R}=D$ و $\mathbb{Q}=C$ است؛ پس $D-C$ برابر مجموعهٔ اعداد گنگ است.

۲- گزینه۴ روش اول با توجه به آن‌که اعداد همهٔ گزینه‌ها به صورت $\sqrt{2}+K$ است، پس K را طوری تعیین می‌کنیم که عبارت $\alpha^2+2\alpha$ به ازای $\sqrt{2}+K$ گویا باشد:

$$\alpha=\sqrt{2}+K \Rightarrow \alpha^2+2\alpha=(\sqrt{2}+K)^2+2(\sqrt{2}+K)$$
$$=2+2\sqrt{2}K+K^2+2\sqrt{2}+2K$$

اگر K عدد صحیح باشد، لازم است $K=-1$ باشد تا عبارت فوق برابر عدد گویا باشد:

$$\alpha^2+2\alpha=\underbrace{K^2+2K+2}_{\text{گویا}}+\underbrace{2\sqrt{2}K+2\sqrt{2}}_{\text{باید صفر باشد}} \Rightarrow K=-1$$

روش دوم به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1 \Rightarrow \alpha^2+2\alpha=(\alpha+1)^2-1$$

پس عبارت $\alpha^2+2\alpha$ برابر $(\alpha+1)^2-1$ است که به ازای $\sqrt{2}-1$ برابر عدد صحیح ۱ است.

۳- گزینه۲ به کمک تقسیم صورت کسر بر مخرج کسر، کسر $\frac{3n+21}{n+2}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r|l} 3n+21 & n+2 \\ \hline -(3n+6) & 3 \\ 15 & \end{array} \Rightarrow \frac{3n+21}{n+2}=\frac{3(n+2)+15}{n+2}=3+\frac{15}{n+2}$$

با توجه به آن‌که ۳، عدد طبیعی است، برای آن‌که عدد فوق، عددی طبیعی باشد، لازم است $\frac{15}{n+2}$ عددی صحیح باشد. با توجه به آن‌که $n\in\mathbb{N}$ است، مخرج کسر یعنی $n+2$ باید مقسوم‌علیه مثبتی از ۱۵ باشد. می‌دانیم مقسوم‌علیه‌های ۱۵ اعداد ۱، ۳، ۵ و ۱۵ هستند. در نتیجه برای n، ۳ مقدار قابل‌قبول است.

$$\begin{cases} n+2=1 \Rightarrow n=-1 \ \text{غقق} \ (k\in\mathbb{N} \ \text{چون}) \\ n+2=3 \Rightarrow n=1 \\ n+2=5 \Rightarrow n=3 \\ n+2=15 \Rightarrow n=13 \end{cases}$$

۴- گزینه۲ روش اول از صورت و مخرج کسر، ضریب α را فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3}=\frac{3(\alpha+\frac{k}{3})}{2(\alpha-\frac{3}{2})}$$

اگر به ازای هر α که عددی گنگ است، کسر فوق عدد گویایی باشد، کافی است $\alpha+\frac{k}{3}$ برابر $\alpha-\frac{3}{2}$ باشد؛ در نتیجه $\frac{k}{3}=-\frac{3}{2}$ است و k برابر $-\frac{9}{2}$ خواهد بود. در این حالت حاصل کسر به ازای هر مقدار α برابر $\frac{3}{2}$ است.

روش دوم اگر فرض کنیم $\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3}$ برابر عدد گویای β است، داریم:

$$\frac{3\alpha+k}{2\alpha-3}=\beta \Rightarrow 2\alpha\beta-3\beta=3\alpha+k$$

اگر β عدد گویای غیرصفر باشد، $2\alpha\beta$ عددی گنگ است. از طرفی 3α نیز عددی گنگ است. اعداد گویا را به یک سمت تساوی و اعداد گنگ را به سمت دیگر تساوی می‌بریم و داریم:

$$2\alpha\beta-3\alpha=k+3\beta \Rightarrow \alpha\underbrace{(2\beta-3)}_{\text{گویا}}=\underbrace{k+3\beta}_{\text{گویا}}$$

می‌دانیم حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیرصفر در هر عدد گنگ، عددی گنگ است. با توجه به آن‌که فرض کردیم β عددی گویا است، پس $2\beta-3$ نیز عددی گویا است؛ پس اگر $2\beta-3$ عدد غیرصفر باشد، حاصل $\alpha(2\beta-3)$ گنگ است که با توجه به تساوی فوق این تناقض است؛ زیرا $k+3\beta$ عددی گویا است و اگر $2\beta-3\neq 0$ باشد، یک سمت تساوی عددی گنگ و سمت دیگر عددی گویا داریم. پس لازم است:

$$2\beta-3=0 \Rightarrow \beta=\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha\underbrace{(2\beta-3)}_{0}=k+3\underset{\frac{3}{2}}{\underset{\downarrow}{\beta}}$$

$$\Rightarrow k+\frac{9}{2}=0 \Rightarrow k=-\frac{9}{2}$$

۵- گزینه۴ دو مجموعه A و B زمانی با یکدیگر برابرند که هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد و برعکس هر عضو مجموعه B، عضوی از مجموعه A نیز باشد. به عبارت دیگر باید $A \subset B$ و $B \subset A$ باشد.

با توجه به تساوی دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,m+۱\}$ و $B=\{۳,m-۱,n-۲\}$ چون $۳\in B$ است، باید $۳ \in A$ نیز باشد؛ پس لازم است $m+۱=۳$ باشد. در نتیجه $m=۲$ است. پس:

$$m=۲:\begin{cases}A=\{۱,۲,۳\}\\B=\{۳,۱,n-۲\}\end{cases}$$

حال چون $۲\in A$ است پس باید $۲ \in B$ باشد؛ پس باید $n-۲=۲$ باشد؛ در نتیجه $n=۴$ است. در نتیجه $m-n=-۲$ است.

۶- گزینه۲ اگر دو مجموعه با تعداد عضوهای متناهی با هم برابر باشند، حتماً تعداد اعضای این دو مجموعه با هم برابر است. از طرفی می‌دانیم در هر مجموعه ۲ عدد یکسان، یک عضو حساب می‌شود. چون مجموعهٔ $A=\{a,a^۲\}$ و $B=\{۱,b,b^۲\}$ برابرند، پس هر دو مجموعه حداکثر ۲ عضو دارند. چون $۱\in B$ است، پس باید $۱\in A$ نیز باشد؛ پس یکی از اعداد a و $a^۲$ برابر ۱ هستند.

اگر $a=۱$ باشد، داریم: $A=\{۱,۱^۲\}=\{۱\}$

یعنی مجموعه A یک مجموعه تک‌عضوی با عضو یک است. پس B نیز باید همین شرایط را داشته باشد:

$$B=\{۱,b,b^۲\}=\{۱\} \Rightarrow b=b^۲=۱ \Rightarrow b=۱$$

اگر $a=-۱$ باشد، داریم:

$$A=\{-۱,(-۱)^۲\}=\{-۱,۱\}$$

یعنی مجموعه A یک مجموعه ۲ عضوی با اعضای ۱ و -۱ است. پس B نیز باید همین شرایط را داشته باشد:

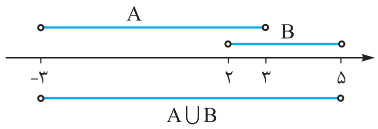
$$B=\{۱,b,b^۲\}=\{-۱,۱\}$$

چون $b^۲>۰$ است، پس $b=-۱$ است.

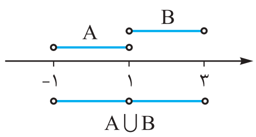
در نتیجه به ازای ۲ مقدار a مجموعه A و B برابرند.

۷- گزینه۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

① $(۲,۵)\cup(-۳,۳)=(-۳,۵)$

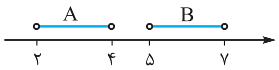


② $(۱,۳)\cup(-۱,۱)=(-۱,۳)-\{۱\}$



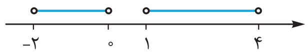
پس این گزینه را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت.

③ $(۲,۴)\cup(۵,۷)$



با توجه به شکل، نمی‌توان این مجموعه را به صورت یک بازه نوشت.

④ $(-۲,۰)\cup(۱,۴)$



با توجه به شکل، نمی‌توان این مجموعه را به صورت یک بازه نوشت.

در نتیجه ① صحیح است.

۸- گزینه۲ چون $۲+\frac{۳}{n}$ عضو بازهٔ $(۲,۲/۰۵)$ است، پس داریم:

$$۲<۲+\frac{۳}{n}<۲/۰۵$$

از نامساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$۰<\frac{۳}{n}<\frac{۵}{۱۰۰} \Rightarrow ۰<\frac{۳}{n}<\frac{۱}{۲۰}$$

می‌دانیم $\frac{۱}{۲۰}=\frac{۳}{۶۰}$ است، پس باید $n>۶۰$ باشد تا $\frac{۳}{n}<\frac{۱}{۲۰}$ باشد. پس حداقل مقدار n طبیعی، برابر ۶۱ است.

۹- گزینه۲ باید داشته باشیم:

$$۲<۲+\frac{۱}{n\sqrt{۲}}<\overset{۲+\frac{۱}{۴}}{\frac{۹}{۴}}$$

پس باید:

$$۰<\frac{۱}{n\sqrt{۲}}<\frac{۱}{۴}$$

اعداد ۱ و ۲ در نامعادلهٔ فوق صدق نمی‌کنند؛ زیرا:

$$n=۱ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}}>\frac{۱}{۴}$$

$$n=۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۸}}>\frac{۱}{۴}$$

$$n=۳ \Rightarrow \frac{۱}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۸}}<\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه $n\geq ۳$ است و مقادیر ۱ و ۲ را اختیار نمی‌کنند.

۱۰- گزینه۴ اگر $x\in(a,b)$ باشد، داریم: $a<x<b$ در نتیجه:

$$۱۳-۲a<a+۱<۲a-۳$$

برای حل نامعادلهٔ فوق آن را به صورت دستگاه نامعادلات زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases}۱۳-۲a<a+۱ \Rightarrow ۱۲<۳a \Rightarrow ۴<a\\ a+۱<۲a-۳ \Rightarrow ۴<a\end{cases} \Rightarrow ۴<a$$

پس a باید عددی بزرگ‌تر از ۴ باشد که در بین گزینه‌ها فقط ④ بزرگ‌تر از ۴ است.

۱۱- **گزینه۲** اگر $x\in(a,b)$ باشد، $a<x<b$ است. پس:

$$-\frac{۱}{n}<۳/۱<\frac{۱۲n}{۴n-۱}$$

از طرفی چون n طبیعی است، پس نامساوی $-\frac{۱}{n}<۳/۱$ همواره برقرار است، پس باید: $۳/۱<\frac{۱۲n}{۴n-۱}$

برای حل نامعادلهٔ بالا دو روش داریم:

روش اول با تقسیم ۱۲n بر ۴n−۱ داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۲n & ۴n-۱ \\ -(۱۲n-۳) & ۳ \\ \hline ۳ & \end{array} \Rightarrow \frac{۱۲n}{۴n-۱}=\frac{۳(۴n-۱)+۳}{۴n-۱}$$

$$=۳+\frac{۳}{۴n-۱}\Rightarrow ۳/۱<۳+\frac{۳}{۴n-۱}\Rightarrow \frac{۱}{۱۰}<\frac{۳}{۴n-۱}$$

پس اگر $۴n-۱<۳۰$ باشد، $\frac{۳}{۴n-۱}$ بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۱۰}$ است:

$$۴n-۱<۳۰\Rightarrow ۴n<۳۱\Rightarrow n<\frac{۳۱}{۴}\simeq ۷/...$$

پس n شامل اعداد طبیعی ۱ تا ۷ است.

روش دوم چون n طبیعی است ۴n−۱ عددی مثبت است. با ضرب طرفین نامساوی در ۴n−۱ داریم:

$$۳/۱(۴n-۱)<۱۲n\Rightarrow ۱۲/۴n-۳/۱<۱۲n$$

$$\Rightarrow ۰/۴n<۳/۱\xrightarrow{\times ۱۰}۴n<۳۱\Rightarrow n<\frac{۳۱}{۴}$$

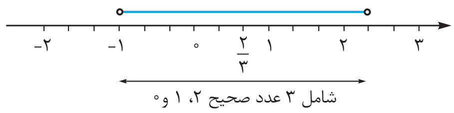
$$\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷$$

۱۲- **گزینه۲** مرکز بازهٔ $(\frac{۲}{۳}-n,\frac{۲}{۳}+n)$ عدد $\frac{۲}{۳}$ است که فاصلهٔ دو سر بازه از آن برابر n است. با توجه به شکل، چون فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}$ از اولین عدد صحیح بعد از آن یعنی ۱ کم‌تر از فاصلهٔ آن از اولین عدد صحیح قبل از آن یعنی صفر کم‌تر است؛ پس بسته به انتخاب n تعداد اعداد صحیح در بازهٔ $(\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}+n)$ یا برابر تعداد اعداد صحیح در بازهٔ $(\frac{۲}{۳}-n,\frac{۲}{۳})$ است یا ۱ واحد بیشتر است. پس با توجه به شکل اگر از $\frac{۲}{۳}$ تا حداکثر ۱− به عقب برویم، در بازهٔ $(\frac{۲}{۳}-n,\frac{۲}{۳})$ فقط ۱ عدد صحیح قرار می‌گیرد؛ اما اگر بیشتر عقب برویم، بیشتر از یک عدد صحیح در این بازه قرار می‌گیرد و با توجه به این‌که در بازهٔ $(\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}+n)$ تعداد اعداد صحیح حداقل برابر بازهٔ $(\frac{۲}{۳}-n,\frac{۲}{۳})$ است.

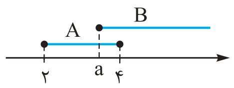
پس تعداد نقاط در بازهٔ $(\frac{۲}{۳}-n,\frac{۲}{۳}+n)$ حداقل برابر ۴ خواهد بود.

پس $\frac{۲}{۳}-n$ حداکثر برابر ۱− است و در نتیجه:

$$\frac{۲}{۳}-n=-۱\Rightarrow n=\frac{۵}{۳}$$

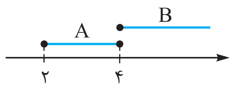


۱۳- **گزینه۱** اگر $a<۴$ باشد، مطابق شکل زیر $A\cap B$ یک بازه خواهد بود. با توجه به آن‌که تعداد اعضای بازه‌ها نامتناهی است، پس نباید $a<۴$ باشد:

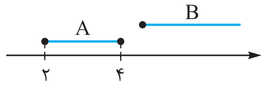


$$\Rightarrow A\cap B=[a,۴]$$

پس باید $a\ge۴$ باشد تا مطابق شکل زیر $A\cap B$ یک مجموعهٔ متناهی باشد:

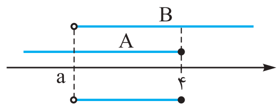


$$\Rightarrow A\cap B=\{۴\}$$



$$\Rightarrow A\cap B=\{\}$$

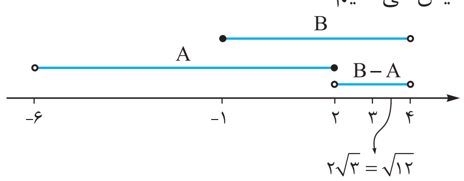
۱۴- **گزینه۲** مطابق شکل زیر، اگر $a<۴$ باشد، مجموعهٔ $A\cap B$ غیرتهی است و در نتیجه:



$$\Rightarrow A\cap B=(a,۴]$$

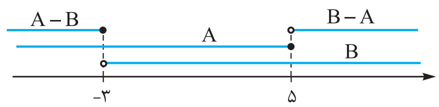
اگر $a=۰$ باشد، $A\cap B$ به صورت بازهٔ $(۰,۴]$ است که شامل ۴ عضو ۱، ۲، ۳ و ۴ خواهد بود.

۱۵- **گزینه۲** بازه‌های A و B و عدد $۲\sqrt{۳}$ را بر روی محور اعداد حقیقی نمایش می‌دهیم:



پس $۲\sqrt{۳}$ عضوی از مجموعهٔ B است که در مجموعهٔ A وجود ندارد. پس $۲\sqrt{۳}$ عضو مجموعهٔ $B-A$ است.

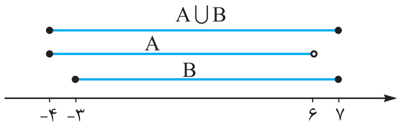
۱۶- **گزینه۳** بازه‌های A و B و سپس مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ را بر روی محور اعداد حقیقی نمایش می‌دهیم:



با توجه به شکل، مجموعهٔ $(A-B)\cup(B-A)$ شامل اعداد صحیح عضو بازهٔ $(-۳,۵]$ نمی‌شوند که تعداد آن‌ها ۸ عدد است. این اعداد عبارت‌اند از:

$$-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵$$

۱۷- گزینه۴ اگر $A=[-a,۶)$ و $B=[-۳,۷]$ باشد، چون $-۴\in A\cup B$ است و این عضو، کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $A\cup B$ است؛ پس لازم است کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ A برابر -۴ باشد؛ پس $-a=-۴$ است. در نتیجه $a=۴$ است. از طرفی با توجه به آن‌که $۷\in B$ است و اعضای مجموعهٔ A از ۶ کم‌ترند، پس $b=۷$ است. در نتیجه $a+b=۱۱$ است.



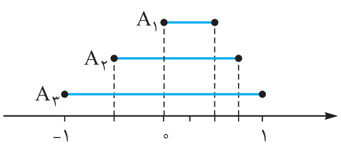
۱۸- گزینه۱

$$n=۱ \Rightarrow A_1=[\frac{۱-۱}{۲},\frac{۱+۱}{۴}]=[۰,\frac{۱}{۲}]$$

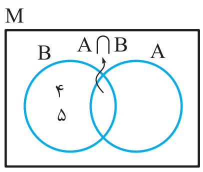
$$n=۲ \Rightarrow A_2=[\frac{۱-۲}{۲},\frac{۱+۲}{۴}]=[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴}]$$

$$n=۳ \Rightarrow A_3=[\frac{۱-۳}{۲},\frac{۱+۳}{۴}]=[-۱,۱]$$

با توجه به آن‌که $A_1\subset A_2\subset A_3$ پس $A_1\cup A_2\cup A_3=A_3$ است.



۱۹- گزینه۴ طبق تعریف، اعضای مجموعهٔ $B-A$ عضوهایی از مجموعهٔ B هستند که در A وجود ندارند. پس B دارای دو عضو ۴ و ۵ است که در مجموعهٔ A وجود ندارد:



مجموعهٔ B از اجتماع دو مجموعهٔ $B-A$ و $A\cap B$ به دست می‌آید. پس مجموعهٔ $A\cap B$ می‌تواند هر عضوی به‌جز ۴ و ۵ را داشته باشد. چون $A=\{۱,۲,۳\}$ پس $A\cap B$ فقط می‌تواند حداکثر سه عضو ۱، ۲ یا ۳ داشته باشد. هر کدام از این سه عدد می‌توانند عضوهای $A\cap B$ باشند یا نباشند؛ پس $۸=۲\times۲\times۲$ حالت برای $A\cap B$ وجود دارد. در نتیجه مجموعهٔ B می‌تواند ۸ مجموعهٔ مختلف داشته باشد.

۲۰- گزینه۴

$$A\cap B=\{۲,۳,۴\}$$
$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$
$$\Rightarrow \{۲,۳,۴\}\subset M\subset\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

مجموعهٔ M حداقل دارای سه عضو ۲، ۳ و ۴ خواهد بود. از طرفی هر یک از اعداد ۱، ۵ و ۶ می‌توانند عضو مجموعهٔ M باشند یا نباشند. در نتیجه حالات زیر را داریم:

M، ۳ عضو باشد: $M=\{۲,۳,۴\} \Rightarrow$ ۱ حالت

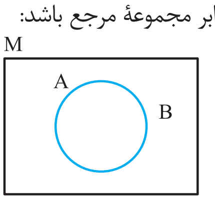
M، ۴ عضو باشد: $M=\{۲,۳,۴,۵\}$ یا $M=\{۲,۳,۴,۱\}$ یا $M=\{۲,۳,۴,۶\} \Rightarrow$ ۳ حالت

M، ۵ عضو باشد: $M=\{۲,۳,۴,۱,۶\}$ یا $M=\{۲,۳,۴,۱,۵\}$ یا $M=\{۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow$ ۳ حالت

M، ۶ عضو باشد: $M=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow$ ۱ حالت

پس در نتیجه برای M، $۱+۳+۳+۱=۸$ مجموعهٔ قابل تعریف است.

۲۱- گزینه۳ دو مجموعهٔ A و B متمم یکدیگرند هرگاه اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آن‌ها برابر مجموعهٔ مرجع باشد:

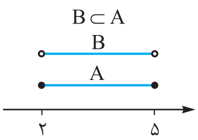


$$\begin{cases} A\cap B=\varnothing \\ A\cup B=M \end{cases}$$

۲۲- گزینه۲ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) $۵\in B,۵\notin A \Rightarrow B\not\subset A \Rightarrow$ نادرست است

(۲)



$A-B=\{۲,۵\} \Rightarrow$ متناهی

(۲) صحیح است.

(۳) $A\subset B \Rightarrow$ نادرست است

(۴) $A-B=[۲,۵]-\{۲,۵\}=(۲,۵)$

$\Rightarrow$ نامتناهی است $\Rightarrow$ نادرست است

۲۳- گزینه۳ می‌دانیم اشتراک یک مجموعهٔ متناهی با هر مجموعهٔ دیگر (چه متناهی و چه نامتناهی) یک مجموعهٔ متناهی است؛ زیرا باید مجموعهٔ اشتراک، زیرمجموعهٔ هر دو مجموعه باشد و از آن‌جا که مجموعهٔ اشتراک زیرمجموعهٔ مجموعهٔ متناهی است؛ پس خود نیز متناهی است. از طرفی اگر A یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، A' می‌تواند یک مجموعهٔ متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر $A=\mathbb{Q}$ باشد، $A'=\mathbb{Q}'$ است که نامتناهی است.

از طرف دیگر اگر B متناهی باشد، ممکن است B' نامتناهی باشد، اگر $B=\{۱,۲,۳\}$ باشد، مجموعهٔ متمم آن در مجموعهٔ اعداد حقیقی نامتناهی است.

پس مجموعه‌های B' و A' می‌توانند نامتناهی باشند و اشتراک آن‌ها فقط با یک مجموعهٔ متناهی قطعاً متناهی است، پس ۳ صحیح است.

۱ ممکن است نامتناهی باشد. $\Leftarrow$ $\underset{\text{ممکن است نامتناهی باشد.}}{\underset{\downarrow}{B'}} \cap \underset{\text{نامتناهی}}{\underset{\downarrow}{A}}$

۲ ممکن‌است نامتناهی باشد. $\Leftarrow$ $\underbrace{A'\cap B'}_{\text{هر دو ممکن است نامتناهی باشند.}}$

۴ اگر یک مجموعه، نامتناهی باشد، اجتماع آن با هر مجموعه‌ای نامتناهی است:

ممکن‌است نامتناهی باشد. $\Leftarrow$ $\underbrace{A'\cup B'}_{\text{هر دو ممکن است نامتناهی باشند.}}$

۳ متناهی $\Leftarrow$ $\underset{\text{متناهی}}{\underset{\downarrow}{B}} \cap \underset{\text{ممکن است نامتناهی باشد.}}{\underset{\downarrow}{A'}}$

تذکر
متناهی = نامتناهی $\cap$ متناهی
نامتناهی = نامتناهی $\cup$ متناهی

۲۴- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اشتراک هر مجموعهٔ متناهی با هر مجموعهٔ دیگری (چه متناهی و چه نامتناهی) یک مجموعهٔ متناهی است. هم‌چنین اجتماع دو مجموعهٔ متناهی یک مجموعهٔ متناهی است. اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند A' و B' ممکن است مجموعه‌هایی نامتناهی باشند.

از طرفی می‌دانیم $A-B=A\cap B'$ در نتیجه به کمک این رابطه به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ $A-B'=A\cap(B')'=A\cap B$

اشتراک دو مجموعهٔ متناهی، مجموعه‌ای متناهی است، پس $A\cap B$ یک مجموعهٔ متناهی است.

۲ $B'-A'=B'\cap(A')'=B'\cap A$

چون A یک مجموعهٔ متناهی است، اشتراک آن با هر مجموعه‌ای، یک مجموعهٔ متناهی است.

۳ بر طبق رابطهٔ $(A\cap B)'=A'\cup B'$ داریم:

$(A'-B)'=(A'\cap B')'=(A')'\cup(B')'=A\cup B$

از طرفی اجتماع دو مجموعهٔ متناهی، یک مجموعهٔ متناهی است.

۴ بر طبق رابطهٔ $(A\cap B)'=A'\cup B'$ داریم:

$(A-B')'=(A\cap(B')')'=(A\cap B)'=A'\cup B'$

از آن‌جا که دو مجموعهٔ A' و B' می‌توانند نامتناهی باشند، در صورتی که یکی از آن‌ها نامتناهی باشد، اجتماع آن‌ها نامتناهی است. در نتیجه ۴ می‌تواند یک مجموعهٔ نامتناهی باشد.

تذکر $(B')'=B$ و $A-B=A\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

$(A\cup B)'=A'\cap B'$

۲۵- گزینهٔ ۴ اگر A یک مجموعهٔ متناهی و C یک مجموعهٔ نامتناهی باشند، مجموعهٔ B می‌تواند هم نامتناهی و هم متناهی باشد. به عنوان مثال اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی و C مجموعهٔ اعداد صحیح باشد، B می‌تواند مجموعهٔ اعداد طبیعی و یا مجموعهٔ اعداد کم‌تر از ۱۰۰ باشد. پس B می‌تواند یک مجموعهٔ متناهی و یا یک مجموعهٔ نامتناهی باشد. با این توضیح به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

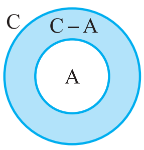
۱ چون C یک مجموعهٔ نامتناهی است و از متناهی و نامتناهی‌بودن مجموعهٔ B مطلع نیستیم، از روی $B\subset C$ نمی‌توان نتیجه گرفت B متناهی است یا نامتناهی. در نتیجه B' نیز مشخص نیست مجموعه‌ای است متناهی یا نامتناهی.

۲ می‌دانیم $B-A=B\cap A'$. از آن‌جا که مجموعه‌های B می‌توانند متناهی باشند، پس $B\cap A'$ ممکن است متناهی باشد. پس ۲ نادرست است.

۳ اگر مجموعه‌ای نامتناهی باشد، متمم آن نیز ممکن است نامتناهی باشد، مثل مجموعهٔ اعداد گویا که نامتناهی است و متمم آن مجموعهٔ اعداد گنگ است و آن هم نامتناهی است. پس ۳ نادرست است.

۴ اگر از یک مجموعهٔ نامتناهی تعداد مشخصی عضو حذف کنیم، آن مجموعه هم‌چنان نامتناهی است. از آن‌جا که $A\subset C$ است، پس مجموعهٔ $C-A$ یک مجموعهٔ نامتناهی است؛ زیرا C یک مجموعهٔ نامتناهی است که با حذف اعضایی از C که در A هستند، هم‌چنان مجموعهٔ نامتناهی است؛ زیرا تعداد اعضای A تعدادی متناهی هستند. این مطلب را می‌توان به صورت دقیق نیز اثبات کرد. با توجه به شکل مشخص است.

$C=(C-A)\cup A$



اگر فرض کنیم $C-A$ متناهی است، با توجه به متناهی‌بودن A، مجموعهٔ $A\cup(C-A)$ که برابر C است، نیز متناهی است. در صورتی که می‌دانیم C نامتناهی است.

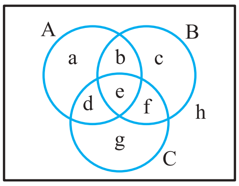
۲۶- گزینه۳ شکل سایه‌خورده مجموعهٔ $A-B$ را نشان می‌دهد. از طرفی می‌دانیم $A-B=A\cap B'$ پس باید متمم مجموعهٔ $A\cap B'$ را به دست آوریم. طبق خاصیت $(A\cap B)'=A'\cup B'$ (دمورگان) داریم:

$$(A\cap B')'=A'\cup(B')'=A'\cup B$$

تذکر

$$\begin{cases} A-B=A\cap B' \\ (A\cap B)'=A'\cup B' \\ (A\cup B)'=A'\cap B' \\ (B')'=B \end{cases}$$

۲۷- گزینه۴ برای راحت‌ترشدن درک این مجموعه مطابق شکل، مجموعه‌های جدا از هم را (مجموعه‌هایی که اشتراک ندارند) اسم‌گذاری می‌کنیم.

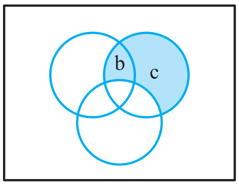


پس مجموعهٔ مرجع ما از ۸ زیرمجموعه‌ای که دوبه‌دو اشتراکی ندارند، تشکیل شده است. در نتیجه به کمک این نام‌گذاری داریم:

$$A-B=a\cup d \Rightarrow (A-B)'=b\cup c\cup e\cup f\cup g\cup h$$

$$B-C=b\cup c \Rightarrow (A-B)'\cap(B-C)$$

$$=(b\cup c\cup e\cup f\cup g\cup h)\cap(b\cup c)=b\cup c$$



پس اجتماع دو مجموعهٔ b و c جواب نهایی است.

۲۸- گزینه۲ طبق قوانین (۱) $A-B=A\cap B'$ و (۲) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ (دمورگان) داریم:

$$(A-B)'\overset{(1)}{=}(A\cap B')'\overset{(2)}{=}A'\cup(B')'=A'\cup B=C$$

$$\Rightarrow (A-B)'-A'=\underbrace{(A'\cup B)}_{C}-A'=C-A'\overset{(1)}{=}C\cap(A')'$$

$$=C\cap A=(A'\cup B)\cap A$$

بنا بر خاصیت پخشی $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ داریم:

$$(A'\cup B)\cap A=(\underbrace{\cancel{A'\cap A}}_{\varnothing})\cup(B\cap A)=\varnothing\cup(B\cap A)$$

$$=B\cap A$$

پس متمم $A\cap B$ را باید به دست آوریم:

$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

۲۹- گزینه۳ بر طبق قوانین (۱) $A-B=A\cap B'$ و (۲) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ و (۳) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ داریم:

$$(A\cup B)-A\overset{(1)}{=}(A\cup B)\cap A'\overset{(2)}{=}\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(B\cap A')$$

$$=B\cap A' \Rightarrow ((A\cup B)-A)'=(B\cap A')'\overset{(3)}{=}B'\cup(A')'$$

$$=B'\cup A \Rightarrow \underbrace{\boxed{((A\cup B)-A)'}}_{B'\cup A}\cap A=(B'\cup A)\cap A$$

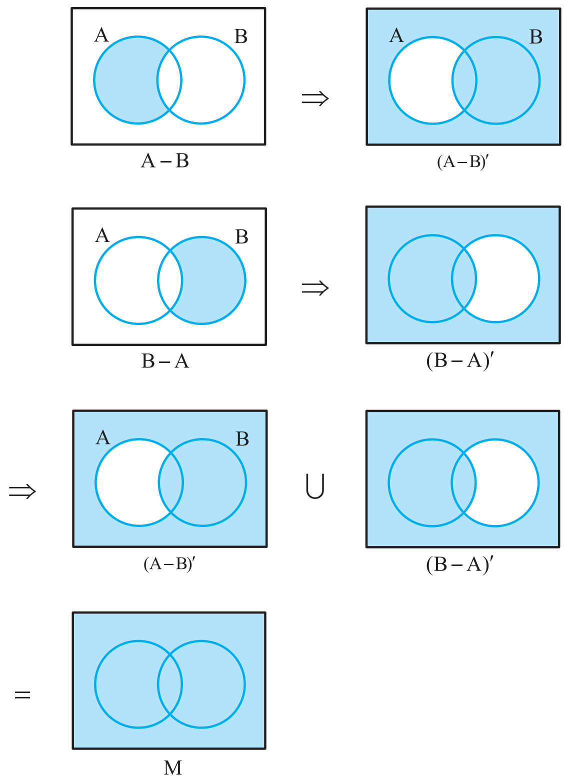
از طرفی می‌توان نشان داد $A\cap(A\cup C)=A$ است؛ زیرا همهٔ اعضای A در مجموعهٔ $A\cup C$ وجود دارند؛ پس اشتراک مجموعهٔ A با مجموعه‌ای که شامل همهٔ اعضای A است، همان مجموعهٔ A است. پس:

$$(\underbrace{B'}_{C}\cup A)\cap A=A$$

پس متمم مجموعهٔ A یعنی A' جواب است.

تذکر در حالت کلی $\begin{cases} A\cap(A\cup B)=A \\ A\cup(A\cap B)=A \end{cases}$ که به این قوانین، قوانین جذب گوییم.

۳۰- گزینه۱ روش اول به کمک نمودار ون داریم:



روش دوم به کمک قوانین (۱) $A-B=A\cap B'$ و (۲) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ داریم:

$$(A-B)'\overset{(۱)}{=}(A\cap B')'\overset{(۲)}{=}A'\cup(B')'=A'\cup B$$
$$(B-A)'\overset{(۱)}{=}(B\cap A')'\overset{(۲)}{=}B\cup(A')'=B'\cup A$$
$$\Rightarrow (A-B)'\cup(B-A)'=(A'\cup B)\cup(B'\cup A)$$
$$=\underbrace{(A'\cup A)}_{M}\cup\underbrace{(B\cup B')}_{M}=M\cup M=M$$

روش سوم

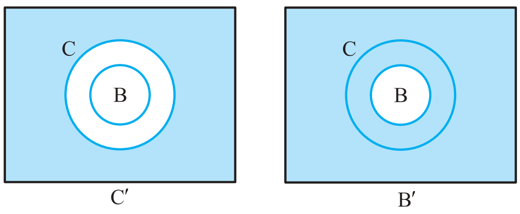
$$(A-B)'\cup(B-A)'=(\underbrace{(A-B)\cap(B-A)}_{\varnothing})'=\varnothing'=M$$

تذکر

$$\begin{cases} A'\cup B'=(A\cap B)' \\ A\cup A'=M \text{ و } (B')'=B \end{cases}$$

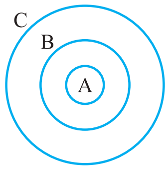
۳۱- **گزینه ۲** اگر $C'\subset B'$ باشد، پس $B\subset C$ است.

درستی این نتیجه را می‌توان در شکل زیر نمایش داد:



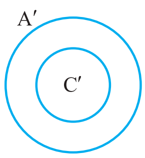
$$\Rightarrow B\subset C \Leftrightarrow C'\subset B'$$

سپس $A\subset B$ و $B\subset C$ است؛ در نتیجه $A\subset C$ است:



$$\begin{cases} A\subset B \\ B\subset C \end{cases} \Rightarrow A\subset C$$

با توجه به آن‌که $A\subset C$ باشد، پس $C'\subset A'$ است، پس اجتماع دو مجموعهٔ C' و A' مجموعهٔ A' است.



$$\Rightarrow C'\cup A'=A'$$

تذکر اگر $A\subset B$ باشد، نتایج زیر را داریم:

۱ $A\cap B=A$ ۲ $A\cup B=B$

۳ $B'\subset A'$

۳۲- **گزینه ۳** می‌دانیم $(A\cup B)'=A'\cap B'$ در نتیجه:

$$A\cup B=A\cup C \Rightarrow (A\cup B)'=(A\cup C)'$$
$$\Rightarrow A'\cap B'=A'\cap C'$$

از طرفی می‌دانیم $A-B=A\cap B'$ پس:

$$\begin{cases} A'\cap B'=A'-(B')'=A'-B \\ A'\cap C'=A'-(C')'=A'-C \end{cases} \Rightarrow A'-B=A'-C$$

تذکر اگر بخواهیم بین دو مجموعه عمل تفریق را به اشتراک تبدیل کنیم، متمم یکی از مجموعه‌ها را از مجموعهٔ دیگر کم می‌کنیم. مثلاً:

تبدیل به متمم

$$A\cap B=A-B'$$

تبدیل به تفریق

تبدیل به متمم

$$A\cap B=B\cap A=B-A'$$

تبدیل به تفریق

در حالت کلی $A-B'=B-A'$ است.

۳۳- **گزینه ۱** **روش اول** می‌توان به راحتی نشان داد $A\cap(A\cup B)=A$ و $A\cup(A\cap B)=A$ است. در نتیجه:

$$A\cap B=B\cup C \Rightarrow \underbrace{B\cup(A\cap B)}_{B}=\underbrace{B\cup(B\cup C)}_{B\cup C}$$
$$\Rightarrow B\cup C=B \Rightarrow C\subset B$$
$$A\cap B=B\cup C \Rightarrow \underbrace{B\cap(A\cap B)}_{A\cap B}=\underbrace{B\cap(B\cup C)}_{B}$$
$$\Rightarrow A\cap B=B \Rightarrow B\subset A$$

از طرفی اگر $\begin{cases} C\subset B \\ B\subset A \end{cases}$ باشد، داریم $C\subset A$. پس ۲، ۳ و ۴ صحیح‌اند.

۳۴- **گزینه ۳**

$$\begin{cases} A-B=D \Rightarrow A\cap B'=D \\ B-C=E \Rightarrow B\cap C'=E \end{cases}$$
$$\xrightarrow{\cap} (A\cap B')\cap(B\cap C')=D\cap E$$
$$\Rightarrow A\cap(\underbrace{B'\cap B}_{\varnothing})\cap C'=D\cap E$$
$$\Rightarrow \underbrace{A\cap C'\cap\varnothing}_{\varnothing}=D\cap E \Rightarrow D\cap E=\varnothing\ (*)$$

از طرفی می‌دانیم $A-B=A-(A\cap B)$؛ پس:

$$D-E=D-(D\cap E)\overset{(*)}{=}D-\varnothing \Rightarrow D-E=D$$

بنا بر فرض داریم $D=F$ است؛ پس: $D\cap C=F\cap C\subseteq F$

۳۵- **گزینه ۳** تعداد عضوهای هر گزینه را به دست می‌آوریم:

۱

$$A=\{۱,۲,\ldots,۱۵\}$$
$$B'=\{۱,۲,۳,۴,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\} \Rightarrow n(A\cup B')=۲۰$$

۲
$$\begin{cases} A-B'=A\cap B \Rightarrow n(A-B')=n(\underbrace{A\cap B}_{B})=11 \\ B\subset A \Rightarrow A\cap B=B \end{cases}$$

۳
$A'=\{16,17,18,19,20\}$

$B=\{5,6,\dots,15\}$

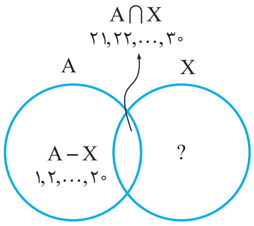
$A'-B=A' \Rightarrow n(A'-B)=n(A')=5$

۴
$A-B=\{1,2,3,4\} \Rightarrow n(A-B)=4$

$n((A-B)')=20-4=16$

پس ۳ تعداد عضوهای کم‌تری دارد.

۳۶- **گزینهٔ ۴** اگر $A=\{1,2,\dots,30\}$ و $B=\{1,2,\dots,20\}$، با توجه به آن‌که $A-X=B$ است و با توجه به آن‌که داریم $A-X=A-(A\cap X)$ می‌توان نتیجه گرفت $A\cap X=\{21,22,\dots,30\}$. از طرفی مطابق شکل مشخص است $A\cap X\subset X$ است. پس X حداقل ۱۰ عضو دارد و در مورد عضوهایی از X که در A نیستند، اطلاعاتی نداریم. پس X می‌تواند بی‌شمار عضو داشته باشد.



$X=(\underbrace{A\cap X}_{\text{۱۰ عضو}})\cup(\underbrace{X-A}_{?})$

۳۷- **گزینهٔ ۲** اگر $n(A)=2n(B)=4n(A\cap B)$ باشد، داریم: $n(A)=4n(A\cap B)$ و $n(B)=2n(A\cap B)$

از طرفی می‌دانیم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

پس: $n(A\cup B)=\underbrace{n(A)}_{4n(A\cap B)}+\underbrace{n(B)}_{2n(A\cap B)}-n(A\cap B)=5n(A\cap B)$

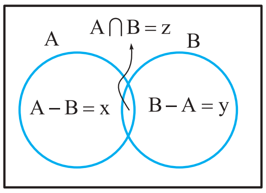
$$\Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{5n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=5$$

۳۸- **گزینهٔ ۴** می‌دانیم $\begin{cases} A\cap B\subset A \\ A\cap B\subset B \end{cases}$ است؛ یعنی تعداد عضوهای مجموعهٔ $A\cap B$ همواره کوچک‌تر یا مساوی تعداد عضوهای مجموعهٔ A و B است. (اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند) یعنی $n(A)\ge n(A\cap B)$ و $n(B)\ge n(A\cap B)$ پس:

$$\frac{n(A)+n(B)}{n(A\cap B)}=\underbrace{\frac{n(A)}{n(A\cap B)}}_{\text{بزرگ‌تر یا مساوی ۱}}+\underbrace{\frac{n(B)}{n(A\cap B)}}_{\text{بزرگ‌تر یا مساوی ۱}}\ge 2$$

در بین گزینه‌ها فقط ۴ عددی بزرگ‌تر از ۲ است.

۳۹- **گزینهٔ ۳** **روش اول** مطابق نمودار ون زیر مشخص است که تعداد اعضای مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ برابر است با جمع تعداد اعضای مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$.



از طرفی مطابق شکل، تعداد اعضای مجموعهٔ $A\cup B$ برابر است با جمع تعداد اعضای مجموعه‌های x، y و z. پس:

$5n(A\cap B)$

$$\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)}{n(A\cap B)}$$

$$=\frac{5n(A\cap B)+n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=\frac{6n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=6$$

روش دوم می‌دانیم $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ در نتیجه:

$n((\underbrace{A\cup B}_{C})-(\underbrace{A\cap B}_{D}))=n(C)-n(C\cap D)$

$=n(A\cup B)-n(\underbrace{(A\cup B)\cap(A\cap B)}_{A\cap B})$

$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)-n(A\cap B)$

$=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)$

با توجه به آن‌که $n((A\cup B)-(A\cap B))=5n(A\cap B)$، پس:

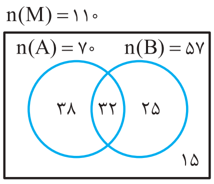
$n(A)+n(B)-2n(A\cap B)=5n(A\cap B)$

$\Rightarrow \underbrace{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}_{n(A\cup B)}=6n(A\cap B)$

$\Rightarrow n(A\cup B)=6n(A\cap B)\Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=6$

۴۰- **گزینهٔ ۱** اگر C و D به ترتیب مجموعهٔ افرادی باشند که شرکت A و B را انتخاب کرده باشند، داریم: $n(C)=70$، $n(D)=57$ و $n(C\cap D)=32$. از طرفی:

$$n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)=70+57-32=95$$



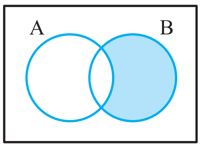
پس تعداد افرادی که از هیچ شرکتی خرید نکرده‌اند $110-95=15$ است.

۴۱- **گزینهٔ ۳** **روش اول**

می‌دانیم $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$؛ پس:

$15-n(A\cap B)=12 \Rightarrow n(A\cap B)=3$

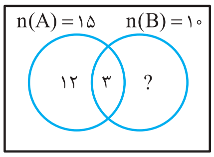
از طرفی مجموعهٔ $(A\cup B)-A$ برابر مجموعهٔ $B-A$ است:

$(A\cup B)-A=$ 

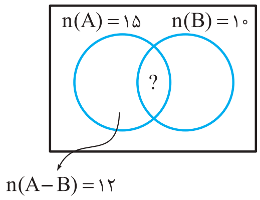
$B-A$

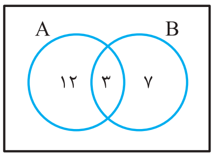
$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۱۰-۳=۷$

روش دوم به کمک نمودار ون، تعداد اعضای هر یک از مجموعه‌های $A\cap B$ و $B-A$ را به دست می‌آوریم:



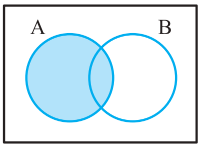
$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ 

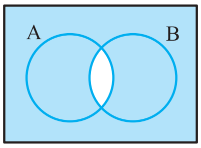
$\Rightarrow n((A\cup B)-A)=n(B-A)=۷$

۴۲- **گزینه ۳** مطابق شکل زیر، مجموعهٔ $A\cap(A\cap B)'$ برابر مجموعهٔ $A-B$ است:

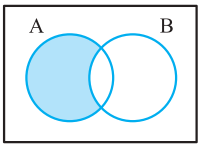


A

$\cap$



$(A\cap B)'$

$=$ 

$A-B$

پس باید $n(A-B)$ را به دست آوریم:

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۹-۲=۷$

تذکر به کمک قوانین مجموعه‌ها نیز می‌توان اثبات نمود مجموعهٔ $A\cap(A\cap B)'$ برابر $A-B$ است:

$A\cap(A\cap B)'=A\cap(A'\cup B')$

$=\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B')=A\cap B'=A-B$

تذکر $(A\cap B)'=A'\cup B'$

۴۳- **گزینه ۱** **روش اول** تعداد اعداد طبیعی مضرب K، از ۱ تا n برابر است با بزرگ‌ترین عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی $\frac{n}{K}$.

یعنی از ۱ تا ۹۹، ۲۴ عدد مضرب ۴ داریم:

$\frac{۹۹}{۴}=۲۴/...$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ مضرب ۴ $=۲۴$

پس ۲۴ عدد یک‌رقمی و دورقمی مضرب ۴ داریم که دوتای آن‌ها یک‌رقمی هستند.

$\frac{۹}{۴}=۲/...$ $\Rightarrow$ تعداد اعداد یک‌رقمی مضرب ۴ $=۲$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۴ $=۲۴-۲=۲۲$

$\Rightarrow n(A)=۲۲$

$\frac{۹۹}{۵}=۱۹/...$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ مضرب ۵ $=۱۹$

$\frac{۹}{۵}=۱/...$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۵ $=۱$

$\Rightarrow$ تعداد اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۵ $=۱۹-۱=۱۸$

$\Rightarrow n(B)=۱۸$

از طرفی $n(A\cap B)$ برابر تعداد اعداد دورقمی مضرب ۴ و ۵ یعنی مضرب ۲۰ است. در نتیجه:

$\frac{۹۹}{۲۰}=۴/...$ $\Rightarrow$ تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۲۰ $=۴$

$\Rightarrow n(A\cap B)=۴$

از طرفی می‌دانیم $A'\cup B'=(A\cap B)'$ و $n(A')=n(M)-n(A)$ که در آن $n(M)$ تعداد اعضای مجموعهٔ مرجع است که در این مسئله برابر تعداد اعداد دورقمی است. پس $n(M)=۹۰$ است. در نتیجه:

$n(A'\cup B')=n((A\cap B)')=n(M)-n(A\cap B)$

$=۹۰-۴=۸۶$

از طرفی می‌دانیم $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ پس:

$n((A\cup B)')=n(M)-n(A\cup B)$

$=\underbrace{n(M)}_{۹۰}-(\underbrace{n(A)}_{۲۲}+\underbrace{n(B)}_{۱۸}-\underbrace{n(A\cap B)}_{۴})=۹۰-۳۶=۵۴$

$\Rightarrow ۸۶-۵۴=۳۲$

روش دوم از آن‌جا که $n((A\cap B)')=n(M)-n(A\cap B)$ و $n((A\cup B)')=n(M)-n(A\cup B)$ پس اختلاف این دو عدد برابر است با:

$$\begin{aligned}&(n(M)-n(A\cap B))-(n(M)-n(A\cup B))\\&=n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)\\&=۲۲+۱۸-۸=۳۲\end{aligned}$$

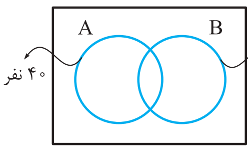
در واقع محاسبهٔ تعداد اعداد دورقمی در این سؤال لازم نبود.

۴۴- گزینهٔ ۲ اگر A و B به ترتیب مجموعهٔ افرادی باشند که در المپیاد شیمی و فیزیک شرکت می‌کنند، داریم: $n(A)=۴۰$ و $n(B)=۵۵$.

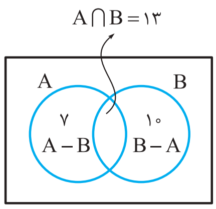
از طرفی تعداد کل افرادی که حداقل در یکی از دو المپیاد شرکت می‌کنند $(n(A\cup B))$ کوچک‌تر مساوی ۷۰ است؛ زیرا تعداد افراد کلاس ۷۰ نفر است؛ پس با توجه به رابطهٔ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ داریم:

$$\underbrace{n(A)}_{۴۰}+\underbrace{n(B)}_{۵۵}-n(A\cap B)\le ۷۰ \Rightarrow n(A\cap B)\ge ۲۵$$

پس لازم است حداقل ۲۵ نفر در هر دو المپیاد شرکت کرده باشند.

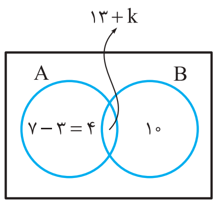


۴۵- گزینهٔ ۳ در نمودار ون زیر، تعداد اعضای هر یک از مجموعه‌های $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$ نوشته شده است:



$$\Rightarrow n(A\cup B)=۷+۱۳+۱۰=۳۰$$

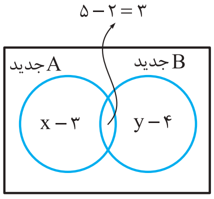
حالا اگر از $n(A-B)$، ۳ واحد کم کنیم و به $n(A\cap B)$، k واحد اضافه کنیم، داریم:



$$\Rightarrow n(A\cup B)=۴+۱۳+k+۱۰=۲۷+k$$

با توجه به آن‌که در این حالت تعداد اعضای $A\cup B$، ۲۰ واحد بیشتر است، داریم: $(۲۷+k)-۳۰=۲۰ \Rightarrow k=۲۳$

۴۶- گزینهٔ ۳ **روش اول** اگر از اجتماع دو مجموعهٔ A و B، ۹ عضو برداریم و از مجموعهٔ A و B به ترتیب ۵ و ۶ عضو کم شود؛ پس ۲ عضو از اعضای مشترک دو مجموعهٔ A و B برداشته شده است؛ زیرا حاصل‌جمع اعضای حذف‌شده از دو مجموعهٔ A و B، ۱۱ عضو است. در حالی که از اجتماع آن‌ها ۹ عضو حذف شده است، پس ۲ عضو از اعضای حذف‌شده مشترک بوده‌اند. پس تعداد اعضای مشترک A و B از ۵ عضو به ۳ عضو می‌رسد. پس با توجه به آن‌که از مجموعهٔ A، ۵ عضو کم شده و ۲ عضو آن مشترک با B است، پس از مجموعهٔ $A-B$، ۳ عضو کم شده است. چون از مجموعهٔ B، ۶ عضو کم شده و ۲ عضو آن مشترک با A است، پس از مجموعهٔ $B-A$، ۴ عضو کم شده است. اگر تعداد اعضای اولیهٔ مجموعهٔ $A-B$ را با x و تعداد اعضای اولیهٔ مجموعهٔ $B-A$ را با y نمایش دهیم، با توجه به نمودار ون داریم:



با توجه به آن‌که $n(A\cup B)=۲۰$ داریم:

$$x+y+۵=۲۰ \Rightarrow x+y=۱۵$$

پس تعداد عضوهای مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ به ترتیب برابر $x-۳$ و $y-۴$اند. در نتیجه:

$$\begin{aligned}&\text{تعداد عضوهای مجموعهٔ جدید}(B-A)\cup(A-B)\\&=x-۳+y-۴=x+y-۷\\&=۱۵-۷=۸\end{aligned}$$

روش دوم زمانی که از مجموعهٔ A و B به ترتیب ۵ و ۶ عضو حذف می‌شود و تنها ۹ عضو از اجتماع آن‌ها کم می‌شود، پس ۲ عضو از اعضای حذف‌شده از اعضای مشترک دو مجموعه بوده است. پس:

$$n(A\cup B)_{\text{جدید}}=۲۰-۹=۱۱$$
$$n(A\cap B)_{\text{جدید}}=۵-۲=۳$$

از طرفی می‌دانیم:

$$n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A-B)$$

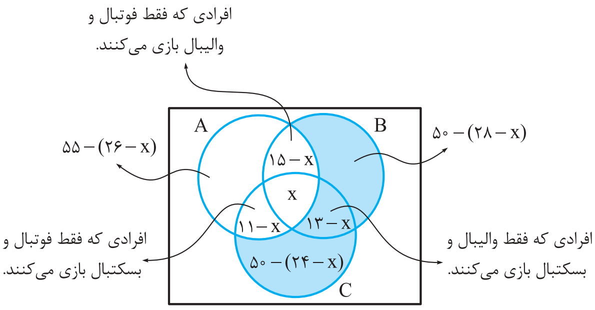
پس:

$$n((A-B)\cup(B-A))=۱۱-۳=۸$$

۴۷- گزینهٔ ۳ اگر فرض کنیم A و B و C به ترتیب مجموعه شرکت‌کننده‌های رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال هستند، داریم:

$$n(A)=۵۵\,,\,n(B)=۵۰\,,\,n(C)=۵۰$$
$$n(A\cap B)=۱۵\,,\,n(B\cap C)=۱۳\,,\,n(A\cap C)=۱۱$$

روش اول اگر فرض کنیم $n(A\cap B\cap C)=x$ به کمک نمودار ون داریم:



باید تعداد کل افراد در ۳ دایرهٔ نمودار ون رسم‌شده ۱۲۴ نفر باشد. با توجه به شکل در دایرهٔ A می‌دانیم ۵۵ نفر حاضرند، پس باید تعداد افراد مناطق سایه‌خورده با تعداد افراد درون A برابر ۱۲۴ شود:

$$۵۵+(۵۰-(۲۸-x))+(۱۳-x)+(۵۰-(۲۴-x))=۱۲۴$$

$$۵۵+۵۰-۲۸+x+۱۳-x+۵۰-۲۴+x=۱۲۴$$

$$\Rightarrow\ x=۱۲۴-۱۱۶=۸$$

روش دوم اگر A و B و C سه مجموعه باشند، داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

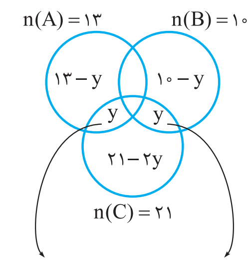
پس در این سؤال می‌خواهیم $n(A\cap B\cap C)$ را حساب کنیم.

پس داریم:

$$۱۲۴=۵۵+۵۰+۵۰-۱۵-۱۳-۱۱+n(A\cap B\cap C)$$

$$\Rightarrow\ n(A\cap B\cap C)=۸$$

۴۸- گزینهٔ ۱ **روش اول** به کمک نمودار ون در هر یک از مجموعه‌های مجزا در نمودار تعداد اعضای آن‌ها را می‌نویسیم. با توجه به آن‌که مجموعهٔ $A\cap B$ عضوی ندارد، پس مجموعهٔ $A\cap B\cap C$ نیز عضوی ندارد. پس با توجه به آن‌که تعداد اعضای مشترک گروه‌های A و C برابر اعضای مشترک گروه‌های B و C است؛ پس مطابق شکل تعداد عضوهای آن‌ها را برابر y قرار داده‌ایم.



تعداد عضوهای این دو مجموعه باید برابر باشند تا تعداد عضوهای مجموعه‌های $A\cap C$ و $B\cap C$ برابر باشند.

باید مجموع اعضای مناطق شکل بالا برابر ۳۸ باشد، پس:

$$۱۳-\cancel{y}+\cancel{y}+۱۰-\cancel{y}+\cancel{y}+۲۱-۲y=۳۸$$

$$۴۴-۲y=۳۸\ \Rightarrow\ ۲y=۶\ \Rightarrow\ y=۳$$

با توجه به شکل، تعداد اعضایی که فقط در A هستند برابر $۱۳-y$ است، پس این مجموعه دارای $۱۳-۳=۱۰$ عضو است.

روش دوم اگر A، B و C سه مجموعه باشند، داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

در این مسئله داریم: $n(A)=۱۳$، $n(B)=۱۰$، $n(C)=۲۱$، $n(A\cap B)=۰$، $n(A\cap C)=n(B\cap C)=y$ و در نتیجه $n(A\cap B\cap C)=۰$ پس:

$$۳۸=۱۳+۱۰+۲۱-۲y+۰\ \Rightarrow\ ۲y=۶\ \Rightarrow\ y=۳$$

$$\Rightarrow\ n(A-((A\cap B)\cup(A\cap C))=۱۳-۳=۱۰$$

۴۹- گزینهٔ ۱ می‌دانیم جملهٔ عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n=an+b$ است. در نتیجه:

$$t_{۱۰}-t_۷=(۱۰a+b)-(۷a+b)=۳a$$

$$\xrightarrow{t_{۱۰}-t_۷=۱۲}\ t_{۱۰}-t_۷=۳a=۱۲\ \Rightarrow\ a=۴$$

در نتیجه:

$$a_۶-a_۱=(۶a+b)-(a+b)=۵a=۲۰$$

تذکر در یک الگوی خطی با جملهٔ عمومی $t_n=an+b$ داریم:

$$t_m-t_n=(m-n)a$$

۵۰- گزینهٔ ۱ می‌دانیم هر الگوی خطی دارای جملهٔ عمومی $a_m=am+b$ است که در آن $m\in\mathbb{N}$ است. در نتیجه:

$$\begin{matrix} a_{۲۰}=۲۰a+b=n \\ a_n=an+b=۲۰\end{matrix}\ \xrightarrow{\text{تفاضل}}\ (۲۰-n)a=n-۲۰$$

$$\Rightarrow\ a=\frac{n-۲۰}{۲۰-n}=-۱$$

با توجه به آن‌که $a_{۲۰}=۲۰a+b=n$ داریم:

$$-۲۰+b=n\ \Rightarrow\ b=n+۲۰$$

$$\Rightarrow\ a_m=-m+n+۲۰$$

اگر $m=n+۲۰$ باشد، داریم:

$$a_{n+۲۰}=-(n+۲۰)+n+۲۰=۰$$

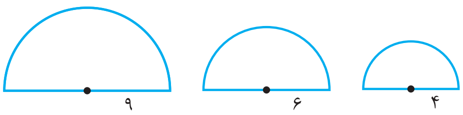
۵۱- گزینهٔ ۲ درجهٔ یک الگوی خطی باید ۱ باشد، یعنی به صورت کلی $a_n=an+b$ باشد، پس باید ضریب $n^۲$ صفر باشد تا a_n یک الگوی خطی باشد:

$$a_n=(k-۲)n^۲+(۲k+۱)n-k\ \Rightarrow\ k-۲=۰$$

$$\Rightarrow\ k=۲\ \Rightarrow\ a_n=۵n-۲$$

$$\begin{cases} a_۶=۵\times۶-۲=۲۸ \\ a_۲=۵\times۲-۲=۸\end{cases}\ \Rightarrow\ a_۶-a_۲=۲۸-۸=۲۰$$

۵۲- گزینهٔ ۳ با توجه به الگوی شعاع‌های نیم‌دایره‌ها، در هر مرحله شعاع نیم دایره $\frac{۲}{۳}$ مرحله قبلی است. در نتیجه:



دنبالهٔ شعاع‌ها: $۹\ \underset{\times\frac{۲}{۳}}{,}\ ۶\ \underset{\times\frac{۲}{۳}}{,}\ ۴,\ldots$

پس اگر جملهٔ عمومی شعاع‌ها را a_n بنامیم داریم:

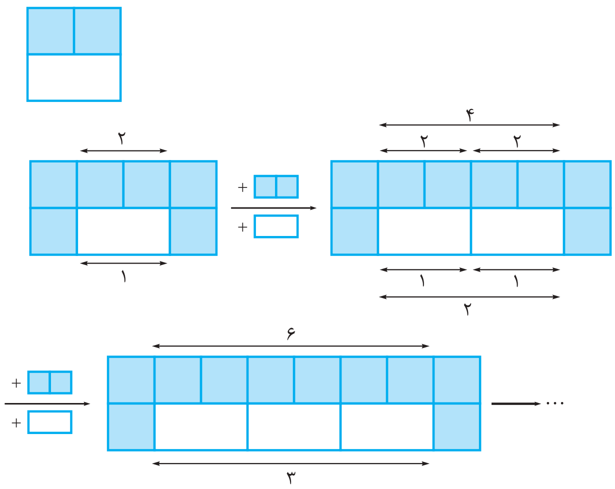
$$a_1=9,\ a_2=9\times\frac{2}{3},\ a_3=9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2,\dots,a_7=9\times\left(\frac{2}{3}\right)^6$$

پس شعاع نیم‌دایرهٔ مرحلهٔ هفتم برابر $9\times\left(\frac{2}{3}\right)^6$ است. در نتیجه محیط آن برابر است با:

$$\text{محیط دایرهٔ مرحلهٔ هفتم}=\pi a_7=\pi\times 9\times\left(\frac{2}{3}\right)^6=\pi\times 3^2\times\frac{2^6}{3^6}$$

$$=\frac{2^6\pi}{3^4}=\frac{64\pi}{81}$$

۵۳- گزینهٔ۲ با توجه به شکل زیر مشخص است در هر مرحله دو کاشی به صورت:  به کاشی‌های وسطی اضافه می‌شوند و به ازای آن در زیر آن یک کاشی سفید که طول آن برابر ۲ کاشی رنگی است، اضافه می‌شود.



پس مطابق الگوی فوق در هر مرحله ۲ واحد به تعداد کاشی‌های رنگی و ۱ واحد به تعداد کاشی‌های سفید اضافه می‌شوند. پس الگوی هر دوی آن‌ها خطی است.

دنبالهٔ تعداد کاشی‌های رنگی:

$$\underbrace{6,8,10,12,\dots}_{+2\ +2\ +2}\xrightarrow{\text{دنبالهٔ خطی}} a_n=2n+4$$

تعداد کاشی‌های سفید:

$$\underbrace{1,2,3,4,\dots}_{+1\ +1\ +1}\xrightarrow{\text{دنبالهٔ خطی}} b_n=n$$

پس اختلاف تعداد کاشی‌های هر مرحله نیز یک دنبالهٔ خطی می‌سازند:

$$c_n=a_n-b_n=(2n+4)-n=n+4$$

$$c_{10}=10+4=14$$

۵۴- گزینهٔ۱ جملات دنبالهٔ a_n را بر طبق رابطهٔ داده‌شده می‌نویسیم. دنباله با جملهٔ عمومی a_n، دنباله‌ای است که دو جملهٔ ابتدایی آن ۱ و جملات بعدی از حاصل‌جمع دو جملهٔ قبلی حاصل می‌شوند. در نتیجه:

$$a:1,1,2,3,5,8,13,21,\dots$$

دنباله‌ای با جملهٔ عمومی b_n، دنباله‌ای است که جملات آن از تفاضل مربع هر جملهٔ دنبالهٔ a از حاصل‌ضرب دو جملهٔ قبل و بعد آن ایجاد می‌شود. یعنی:

$$b_1=1^2-1\times2=-1=(-1)^1$$

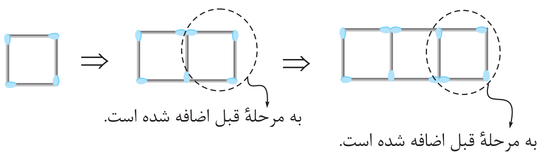
$$b_2=2^2-1\times3=4-3=1=(-1)^2$$

$$b_3=3^2-2\times5=9-10=-1=(-1)^3$$

$$b_4=5^2-3\times8=25-24=1=(-1)^4$$

با توجه به گزینه‌ها پس جملهٔ عمومی برابر $b_n=(-1)^n$ باید باشد. البته می‌توان نشان داد جملهٔ عمومی دنباله به صورت $b_n=(-1)^n$ است که البته اثبات آن ساده نیست!

۵۵- گزینهٔ۲ با توجه به الگوی زیر، هر بار به تعداد ۳ چوب کبریت به مرحلهٔ قبل اضافه می‌شود:



پس الگوی فوق یک الگوی خطی است که دنبالهٔ آن به صورت زیر است:

$$\underbrace{4,7,10,13,\dots,}_{+3\ +3\ +3}\qquad \underbrace{1+20\times3}_{\text{تعداد چوب‌کبریت‌های شکل بیستم}}$$

می‌توانیم به صورت زیر جملات را بنویسیم و با هم جمع کنیم:

$$a_1=1+3$$

$$a_2=1+2\times3$$

$$a_3=1+3\times3$$

$$\vdots$$

$$a_{20}=1+20\times3$$

$$a_1+a_2+\dots+a_{20}=20\times1+3(\underbrace{1+2+3+\dots+20}_{\frac{20\times21}{2}=210})$$

$$=20+630=650$$

تذکر مجموع n عدد اول طبیعی برابر است با:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

۵۶- گزینه ۱ اولین عدد نوشته‌شده داخل مربع، در هر مرحله، برابر تعداد مربع‌های به کار رفته در مراحل قبل به اضافهٔ ۱ است.
مثلاً در مرحلهٔ ۳ اولین عدد نوشته‌شده ۴ است؛ زیرا تعداد مربع‌های مرحلهٔ ۱ و ۲ برابر $۳ = ۲ + ۱$ است. پس اولین عدد در این مرحله ۴ است. یا در مرحلهٔ ۴ اولین عدد نوشته‌شده ۷ خواهد بود که به صورت $۱+۲+۳+۱=۷$ به دست می‌آید.
پس اولین عدد نوشته‌شده در مرحلهٔ ۱۰ام برابر است با:

$$۱+۲+۳+\cdots+۹+۱=\frac{۹\times ۱۰}{۲}+۱=۴۶$$

و آخرین عدد هر مرحله برابر مجموع n عدد طبیعی ابتدایی است.
پس آخرین عدد مرحلهٔ دهم برابر است با:

$$۱+۲+۳+\cdots+۱۰=\frac{۱۰\times ۱۱}{۲}=۵۵$$

پس باید حاصل‌جمع ده عدد طبیعی متوالی از ۴۶ تا ۵۵ را حساب کنیم.

$$۴۶+۴۷+۴۸+\cdots+۵۵=\frac{۱۰(۴۶+۵۵)}{۲}=۵\times ۱۰۱=۵۰۵$$

تذکر حاصل‌جمع تعدادی عدد طبیعی متوالی برابر است با:

$$\frac{(\text{عدد اول}+\text{عدد آخر})\times \text{تعداد}}{۲}$$

۵۷- گزینه ۲ مطابق الگوی داده‌شده، طول نقطهٔ $A_۱$، ۱ است. از نقطهٔ $A_۱$ به $A_۲$ طول تصویر ثابت می‌ماند. از $A_۲$ به $A_۳$ طول نقطه، $\frac{۱}{۴}$ کاهش می‌یابد و از ۱ به $\frac{۳}{۴}$ می‌رسد. سپس از $A_۳$ به $A_۴$ دوباره طول نقطه ثابت می‌ماند و از $A_۴$ به $A_۵$، $\frac{۱}{۴}$ مسافت طی‌شدهٔ قبلی در راستای محور xها به طول نقطه، اضافه می‌شود.
در نتیجه مختصات نقطهٔ A_n که در آن n عددی فرد است، دنبالهٔ زیر را ایجاد می‌کند:

$$\underset{x_{A_۱}}{۱},\ \underbrace{۱-\frac{۱}{۴}}_{x_{A_۳}},\ \underbrace{۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}}_{x_{A_۵}},\ \underbrace{۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۶۴}}_{x_{A_۷}},\ldots$$

از طرفی مطابق الگوی داده‌شده طول نقطهٔ A_n که در آن n زوج است، با طول نقطهٔ $A_{n-۱}$ برابر است، یعنی $x_{A_۱}=x_{A_۲}$، $x_{A_۳}=x_{A_۴}$، ... و $x_{A_{n-۱}}=x_{a_n}$ پس طول نقطهٔ $A_{۱۰}$ برابر طول نقطهٔ $A_۹$ است.
در نتیجه مطابق الگوی فوق داریم:

$$x_{A_۹}=۱-\frac{۱}{۴}+(\frac{۱}{۴})^۲-(\frac{۱}{۴})^۳+(\frac{۱}{۴})^۴$$

$$=\frac{۴^۴-۴^۳+۴^۲-۴+۱}{۴^۴}=\frac{۲۵۶-۶۴+۱۶-۴+۱}{۲۵۶}=\frac{۲۰۵}{۲۵۶}$$

۵۸- گزینه ۲ می‌توانیم عبارت $\frac{۱}{n^۲+n}$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$a_n=\frac{۱}{n^۲+n}=\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}$$

پس:

$$a_۱=۱-\frac{۱}{۲}$$
$$a_۲=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}$$
$$a_۳=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}$$
$$\vdots$$
$$a_{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}-\frac{۱}{۱۰۱}$$

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_{۱۰۰}=۱-\cancel{\frac{۱}{۲}}+\cancel{\frac{۱}{۲}}-\cancel{\frac{۱}{۳}}+\cancel{\frac{۱}{۳}}-\cancel{\frac{۱}{۴}}+\cdots+\cancel{\frac{۱}{۱۰۰}}-\frac{۱}{۱۰۱}$$

$$=۱-\frac{۱}{۱۰۱}=\frac{۱۰۰}{۱۰۱}$$

۵۹- گزینه ۲ اگر a_p و a_q دو جمله از یک دنبالهٔ حسابی باشند، داریم:

$$a_p-a_q=(p-q)d$$

در نتیجه:

$$a_{n+۲}-a_{n-۱}=((n+۲)-(n-۱))d=۳d$$

$$\xrightarrow[a_{n-۱}=۱۷]{a_{n+۲}=۳۵} ۳۵-۱۷=۳d \Rightarrow ۳d=۱۸ \Rightarrow d=۶$$

۶۰- گزینه ۱ جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی از درجهٔ یک است (اگر قدرنسبت صفر نباشد) و به صورت $t_n=an+b$ است که در آن a همان قدرنسبت است.
برای آن‌که a_n یک چندجمله‌ای از درجهٔ یک باشد، باید $۴n^۲+۱۱n+a$ بر $n+۲$ بخش‌پذیر باشد؛ یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم $۴n^۲+۱۱n+a$ بر $n+۲$ صفر باشد:

$$\begin{array}{l|l} ۴n^۲+۱۱n+a & n+۲ \\ \hline -(۴n^۲+۸n) & ۴n+۳ \\ ۳n+a & \\ -(۳n+۶) & \\ a-۶ & \end{array} \Rightarrow a-۶=۰ \Rightarrow a=۶$$

پس:

$$a_n=\frac{۴n^۲+۱۱n+۶}{n+۲}=۴n+۳$$

پس باید ببینیم به ازای چه مقداری از n، a_n برابر ۸۳ است:

$$a_n=۸۳ \Rightarrow ۴n+۳=۸۳ \Rightarrow ۴n=۸۰ \Rightarrow n=۲۰$$

۶۱- گزینهٔ ۱ در هر دنبالهٔ عددی با جملهٔ عمومی a_n، جملهٔ عمومی به صورت $a_n=an+b$ است که در آن ضریب n همان قدرنسبت است. زیرا:

$$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+nd-d=\underbrace{d}_{a}n+(\underbrace{a_1-d}_{b})$$

پس در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_n=3-12n$، قدرنسبت برابر -12 است. از طرفی $a_1=-9$ است. پس جملهٔ اول دنبالهٔ جدید -6 و قدرنسبت آن -14 است. اگر جملهٔ عمومی دنبالهٔ جدید را a'_n بنامیم، داریم:

$$\begin{cases}d'=-14\\ a'=-6\end{cases}\Rightarrow a'_n=-6-14(n-1)=8-14n$$

$$\Rightarrow a_n-a'_n=(3-12n)-(8-14n)=2n-5$$

$$a_{20}-a'_{20}=2\times 20-5=35$$

۶۲- گزینهٔ ۳ ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را به دست می‌آوریم. جملهٔ اول این دنباله -2 و جملهٔ چهارم آن ۷ است. پس:

$$\begin{matrix}a_4=7\\ a_1=-2\end{matrix}\Rightarrow a_4-a_1=3d\Rightarrow 7-(-2)=3d$$

$$\Rightarrow 3d=9\Rightarrow d=3$$

پس جملهٔ عمومی این دنباله به صورت زیر است:

$$a_n=a_1+(n-1)d=-2+3(n-1)=3n-5$$

پس باید ببینیم به ازای چه مقدار از n، $a_n<100$ است:

$$a_n<100\Rightarrow 3n-5<100\Rightarrow 3n<105\Rightarrow n<35$$

پس به ازای هر عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۵، a_n کم‌تر از ۱۰۰ است. پس ۳۴ عدد طبیعی ابتدایی باعث می‌شوند که $a_n<100$ باشد.

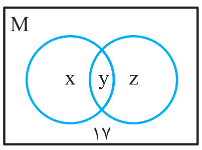
۶۳- گزینهٔ ۴ ابتدا جملهٔ شانزدهم دنباله با جملهٔ عمومی b_n را حساب می‌کنیم:

$$b_n=3n-4\Rightarrow b_{16}=(3\times 16)-4=44$$

حال n را طوری می‌یابیم که a_n برابر ۴۴ باشد:

$$a_n=44\Rightarrow 4n=44\Rightarrow n=11$$

۶۴- گزینهٔ ۱ چون x,y,z دنبالهٔ عددی تشکیل می‌دهند، پس $\frac{x+z}{2}=y$ در نتیجه $x+z=2y$.



از طرفی مطابق شکل $n(M)$ برابر است با:

$$n(M)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)+17$$

$$\Rightarrow n(M)=x+y+z+17$$

$$\xrightarrow{n(M)=44} x+y+z=27$$

چون $x+z=2y$ است؛ پس:

$$x+y+z=3y=27\Rightarrow y=9$$

پس $n(A\cap B)=9$ است.

۶۵- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، داریم:

$$\frac{a+c}{2}=b\Rightarrow a+c=2b$$

چون a_7 و a_8 و a_9 سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی‌اند، پس:

$$a_7+a_9=2a_8\Rightarrow \underbrace{a_7+a_8+a_9}_{2a_8}=3a_8=30\Rightarrow a_8=10$$

با توجه به آن‌که جملهٔ اول، نصف جملهٔ چهارم است، داریم:

$$a_1=\frac{a_4}{2}\Rightarrow 2a_1=a_4\Rightarrow 2a_1=a_1+3d\Rightarrow a_1=3d$$

از طرفی $a_8=10$ است؛ پس:

$$\begin{cases}a_8=10\\ a_1=3d\end{cases}\Rightarrow a_1+7d=10\xrightarrow{a_1=3d}10d=10\Rightarrow d=1$$

می‌دانیم $a_7=a_8-d$ و $a_9=a_8+d$؛ پس:

$$a_7^2+a_8^2+a_9^2=(a_8-d)^2+a_8^2+(a_8+d)^2$$

$$=a_8^2-2a_8d+d^2+a_8^2+a_8^2+2a_8d+d^2=3a_8^2+2d^2$$

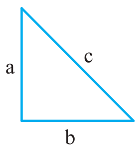
با توجه به آن‌که $a_8=10$ و $d=1$ است؛ پس:

$$a_7^2+a_8^2+a_9^2=3a_8^2+2d^2=3\times 10^2+2=302$$

تذکر

$$\underbrace{a_8-d}_{a_7},a_8,\underbrace{a_8+d}_{a_9}$$

۶۶- گزینهٔ ۴ اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d باشند، داریم:



$$a\ ,\ b\ ,\ c\quad(-d\ \ +d)\qquad \begin{cases}a=b-d\\ c=b+d\end{cases}$$

از طرفی بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم $a^2+b^2=c^2$، پس:

$$(b-d)^2+b^2=(b+d)^2\Rightarrow \cancel{b^2}+\cancel{d^2}-2bd+b^2$$

$$=\cancel{b^2}+\cancel{d^2}+2bd\Rightarrow b^2=4bd\xrightarrow{\div b}b=4d$$

پس طول اضلاع برحسب d به صورت زیر است:

$$a=b-d=3d\ ,\ b=4d\ ,\ c=b+d=5d$$

در نتیجه:

$$\frac{\text{نسبت محیط}}{\text{طول ضلع کوچک}}=\frac{3d+4d+5d}{3d}=\frac{12d}{3d}=4$$

۶۷- گزینه۳ اگر x، y و z سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، داریم: $y=\frac{x+z}{2}$. پس با توجه به آن‌که $c-a$ ،$b-c$ و $a-b$ سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی‌اند، داریم:

$$\frac{(a-b)+(c-a)}{2}=b-c \Rightarrow \frac{c-b}{2}=(b-c)$$

$$\Rightarrow c-b=2(b-c) \Rightarrow 2(b-c)+b-c=0$$

$$\Rightarrow 3(b-c)=0 \Rightarrow b=c$$

پس $b=c$ است. در نتیجه سه جملهٔ اول دنباله به صورت زیر است:

$$\underbrace{\overset{\downarrow}{c}-a}_{b-a},\underbrace{b-c}_{0},a-b \Rightarrow b-a,0,a-b$$

پس قدرنسبت این دنباله برابر $a-b$ و جملهٔ اول آن $b-a$ است.

پس:

$$a_{14}=a_1+13d=(b-a)+13(a-b)=12(a-b)$$

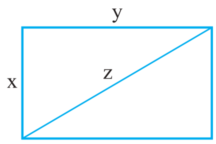
$$a_6=a_1+5d=(b-a)+5(a-b)=4(a-b)$$

$$\Rightarrow \frac{a_{14}}{a_6}=\frac{12(a-b)}{4(a-b)}=3$$

۶۸- گزینه۳ اگر x و y و z به ترتیب عرض، طول و قطر مستطیل باشند و تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d دهند، داریم:

$$\underset{-d\ \ +d}{x\ ,\ y\ ,\ z} \Rightarrow \begin{array}{l} x=y-d \\ z=y+d \end{array}$$

از طرفی بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$x^2+y^2=z^2$$

در نتیجه:

$$(y-d)^2+y^2=(y+d)^2 \Rightarrow y^2-2yd+\cancel{d^2}+\cancel{y^2}$$

$$=\cancel{y^2}+2yd+\cancel{d^2} \Rightarrow y^2=4yd \xrightarrow{\div y} y=4d$$

پس با توجه به آن‌که $x=y-d$ و $z=y+d$ است، داریم:

$$x=4d-d=3d\ ,\ z=4d+d=5d$$

با توجه به آن‌که محیط مستطیل برابر ۵۶ است، پس $2(x+y)=56$ است و در نتیجه $x+y=28$ است. با توجه به آن‌که $x=3d$ و $y=4d$ است، داریم:

$$x+y=28 \Rightarrow 3d+4d=28 \Rightarrow 7d=28 \Rightarrow d=4$$

پس $x=12$ و $y=16$ است و مساحت مستطیل برابر $12\times16=192$ است.

۶۹- گزینه۱ می‌دانیم جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q و جملهٔ اول a_1 برابر $a_n=a_1q^{n-1}$ است، پس:

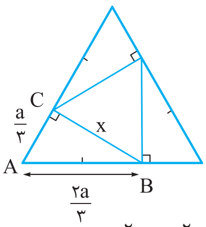
$$\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}=\frac{a_1\times q^{(n-1)-1}}{a_1\times q^{(n+1)-1}}=\frac{q^{n-2}}{q^n}=q^{-2}=9 \Rightarrow q^2=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow q=\pm\frac{1}{3}$$

چون جملات دنباله، همگی مثبت‌اند، پس قدرنسبت نمی‌تواند منفی باشد. پس $q=\frac{1}{3}$ است. در نتیجه:

$$a_{10}=a_1q^9=1\times(\frac{1}{3})^9=3^{-9}$$

۷۰- گزینه۳ اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را a بنامیم، می‌توانیم طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع دوم را برحسب a حساب کنیم.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

$$\Rightarrow (\frac{2a}{3})^2=(\frac{a}{3})^2+x^2$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{9} \Rightarrow x^2=\frac{3a^2}{9} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}a}{3}$$

پس طول هر مثلث متساوی‌الاضلاع داخلی، $\frac{\sqrt{3}}{3}$ برابر طول هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع خارجی است. پس طول اضلاع، تشکیل دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و جملهٔ اول ۹ می‌دهند:

$$a:9\ ,\ 9\times\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ 9\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^2,\dots$$

$$\times\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \times\frac{\sqrt{3}}{3}$$

در نتیجه، جملهٔ پنجم آن برابر است با:

$$a_5=9\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^4=3^2\times\frac{1}{3^2}=1$$

۷۱- گزینه۱ زمانی که جمعیت اولیه برابر a است، پس از یک سال با کاهش ۲۰٪ جمعیت، جمعیت به ۸۰٪ جمعیت اولیه می‌رسد. پس بعد از یک سال جمعیت برابر $0/8a$ است. در سال دوم با کاهش ۲۰٪ جمعیت باز جمعیت ۸۰٪ سال قبل خود $(0/8a)$ خواهد بود. پس بعد از ۲ سال، جمعیت $0/8\times0/8a$ یعنی $0/8^2a$ خواهد بود. پس داریم:

سال	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳
جمعیت	10^5	$0/8\times10^5$	$0/8^2\times10^5$	$0/8^3\times10^5$

$\times0/8$ $\times0/8$ $\times0/8$

پس در ابتدای سال ۱۳۹۵ جمعیت برابر $0/8^5\times 10^5$ است، یعنی:

$$0/8^5\times 10^5 = 8^5=(2^3)^5=2^{15}$$

۷۲- گزینهٔ ۲ می‌دانیم اگر سه عدد a، b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم: $ac=b^2$. پس اگر $-2+k$، $4+k$ و $22+k$ تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، داریم:

$$(k+22)(k-2)=(k+4)^2 \Rightarrow k^2+20k-44$$
$$=k^2+8k+16 \Rightarrow 12k=60 \Rightarrow k=5$$

۷۳- گزینهٔ ۲ اگر بین ۲ و ۱۶ پنج عدد طوری قرار دهیم که ۷ عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، جملهٔ اول دنباله، ۲ و جملهٔ هفتم آن ۱۶ خواهد بود. پس:

$$\underset{a_1}{\overset{2}{\downarrow}},\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\bigcirc,\underset{a_7}{\overset{16}{\downarrow}}$$

$$a_7=a_1q^6 \Rightarrow \frac{a_7}{a_1}=q^6 \Rightarrow \frac{16}{2}=q^6 \Rightarrow q^6=8$$
$$\Rightarrow q^3=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

در نتیجه حاصل‌ضرب ۵ واسطه به صورت زیر است:

$$a_2\times a_3\times a_4\times a_5\times a_6=a_1q\times a_1q^2\times a_1q^3\times a_1q^4\times a_1q^5$$
$$=a_1^5\times q^{1+2+3+4+5}=a_1^5q^{15}=2^5\times(q^3)^5=2^5\times(2\sqrt{2})^5$$
$$=2^5\times 2^5\times\sqrt{2^5}=2^{10}\times 2^2\times\sqrt{2}=2^{12}\times\sqrt{2}=4096\sqrt{2}$$

۷۴- گزینهٔ ۲ دنبالهٔ زیر دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ و جملهٔ اول ۸۱ است. پس:

$$81\underset{\times\frac{1}{3}}{,}\ 27\underset{\times\frac{1}{3}}{,}\ 9,\ldots \Rightarrow a_n=81\times(\frac{1}{3})^{n-1}=3^4\times 3^{1-n}=3^{5-n}$$

$$\Rightarrow a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10}=3^4\times 3^3\times 3^2\times\cdots\times 3^{-5}$$
$$=3^{4+3+2+\cdots-4-5}=3^{-5}$$

از طرفی $a_5=3^{5-5}=1$. پس حاصل‌ضرب ده جملهٔ اول 3^{-5} برابر جملهٔ پنجم است؛ یعنی:

$$\frac{a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{10}}{a_5}=\frac{3^{-5}}{1}=\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243}$$

۷۵- گزینهٔ ۲ دنبالهٔ داده‌شده یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۲ و قدرنسبت ۲ است. پس جملهٔ عمومی آن به صورت زیر است:

$$a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$$

پس حاصل‌ضرب ۵۰ جملهٔ اول آن به صورت زیر است:

$$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{50}=2^1\times 2^2\times 2^3\times\cdots\times 2^{50}$$
$$=2^{1+2+3+\cdots+50}$$

می‌دانیم مجموع n جملهٔ ابتدایی اعداد طبیعی ابتدایی برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس:

$$2^{1+2+3+\cdots+50}=2^{\frac{50\times 51}{2}}=2^{25\times 51}$$

این عدد را باید در پایهٔ ۸ بنویسیم. می‌دانیم $51=3\times 17$ پس:

$$2^{25\times 51}=2^{25\times 3\times 17}=(2^3)^{25\times 17}=8^{25\times 17}=8^{425}$$

۷۶- گزینهٔ ۲

$$a_1a_2a_3\times\cdots\times a_{13}=a_1\times a_1q\times a_1q^2\times\cdots\times a_1q^{12}$$
$$=a_1^{13}\times q^{1+2+3+\cdots+12}$$

می‌دانیم حاصل‌جمع n عدد اول طبیعی برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس:

$$1+2+3+\cdots+12=\frac{12\times 13}{2}=6\times 13$$

در نتیجه:

$$a_1a_2a_3\times\cdots\times a_{13}=a_1^{13}q^{6\times 13}=(a_1q^6)^{13}$$

از طرفی می‌دانیم $a_7=a_1q^6$ پس:

$$a_1a_2a_3\times\cdots\times a_{13}=a_7^{13}=(\sqrt[13]{2})^{13}=2$$

۷۷- گزینهٔ ۴ جملات دنباله را با توجه به رابطهٔ داده‌شده می‌نویسیم:

$$a_1=3$$
$$a_2=2\times 3+3=3(2+1)$$
$$a_3=2\times 3(2+1)+3=3(2^2+2+1)$$
$$a_4=2\times 3(2^2+2+1)+3=3(2^3+2^2+2+1)$$

در نتیجه می‌توان نشان داد:

$$a_n=3(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1)$$

پس:

$$a_8-a_7=3(2^7+2^6+\cdots+1)-3(2^6+2^5+\cdots+1)$$
$$=3\times 2^7=3\times 128=384$$

تذکر در حالت کلی در این دنباله می‌توان اثبات کرد:

$$a_n-a_{n-1}=3\times 2^{n-1}$$

۷۸- گزینه۴ جملات دنباله را با توجه به رابطهٔ داده‌شده می‌نویسیم:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{3}{4} \times 1 + 1$$

$$a_3 = \frac{3}{4}(\frac{3}{4}+1)+1 = (\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4})^1 + 1$$

$$a_4 = \frac{3}{4}((\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4}) + 1) + 1 = (\frac{3}{4})^3 + (\frac{3}{4})^2 + \frac{3}{4} + 1$$

در نتیجه می‌توان نشان داد:

$$a_n = (\frac{3}{4})^{n-1} + (\frac{3}{4})^{n-2} + \cdots + 1$$

پس:

$$\begin{array}{rl} & a_{16} = (\frac{3}{4})^{15} + (\frac{3}{4})^{14} + \cdots + 1 \\ - & a_{15} = (\frac{3}{4})^{14} + (\frac{3}{4})^{13} + \cdots + 1 \\ \hline & a_{16} - a_{15} = (\frac{3}{4})^{15} \end{array}$$

۷۹- گزینه۲ اگر a_n جملهٔ nام و a_{n-1} جملهٔ $n-1$ام باشد، داریم:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + 2 \quad n \geq 2 \end{cases}$$

در نتیجه دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$a_1 = 2^2$$

$$a_2 = 2 \times 2^2 + 2 = 2^3 + 2$$

$$a_3 = 2(2^3 + 2) + 2 = 2^4 + 2^2 + 2$$

$$a_4 = 2(2^4 + 2^2 + 2) + 2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2$$

در نتیجه جملهٔ چهلم به صورت زیر است:

$$a_{40} = 2^{41} + 2^{39} + 2^{38} + \cdots + 2^2 + 2$$

اگر عدد ۲ را به جملهٔ فوق اضافه کنیم، داریم:

$$a_{40} + 2 = 2^{41} + 2^{39} + 2^{38} + \cdots + 2^2 + 2 + 2$$

می‌توانیم نشان دهیم حاصل $2 + 2 + \cdots + 2^{38} + 2^{39}$ برابر 2^{40} است:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{2+2}_{2^2}+2^2}_{2\times 2^2 = 2^3}+2^3}_{2\times 2^3 = 2^4}+2^4+\cdots+2^{39}}_{2\times 2^{39}} = 2^{40}$$

پس:

$$a_{40} + 2 = 2^{41} + 2^{40} \Rightarrow a_{40} + 2 = 2 \times 2^{40} + 2^{40} = 3 \times 2^{40}$$

$$\Rightarrow a_{40} = 3 \times 2^{40} - 2$$

۸۰- گزینه۳ اگر a و b و c جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم: $b^2 = ac$ ؛ پس:

$$4^y \times 2^{2x} = (8\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2^{2y} \times 2^{2x} = (2^3 \times \sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2^{2x+2y} = 2^6 \times 2 = 2^7 \Rightarrow 2^{2x+2y} = 2^7$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 7 \Rightarrow 2(x+y) = 7 \Rightarrow x + y = \frac{7}{2}$$

واسطهٔ عددی x و y برابر $\frac{x+y}{2}$ است. پس واسطهٔ عددی آن‌ها برابر $\frac{\frac{7}{2}}{2} = \frac{7}{4}$ است.

۸۱- گزینه۱ واسطهٔ عددی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{2}$ و واسطهٔ هندسی دو عدد a و b برابر $\sqrt{ab}$ است. پس:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+3+x}{x(x+3)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 3x = 4x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

عبارت بالا را به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$(x-3)(x+2) = 0$$

حاصل‌ضرب دو عدد زمانی صفر است که یکی از آن‌ها صفر باشد، پس یا $x-3$ صفر است و یا $x+2$. پس $x=3$ است یا $x=-2$.
اگر $x=-2$ باشد، دو عدد x و $x+9$ به ترتیب -2 و ۷ خواهند بود که چون حاصل‌ضرب آن‌ها منفی است، واسطهٔ هندسی برای آن‌ها تعریف نمی‌شود. پس $x=3$ است. اگر $x=3$ باشد، دو عدد x و $x+9$ به ترتیب برابر ۳ و ۱۲ خواهد بود که واسطهٔ هندسی آن‌ها ۶ است:

$$\sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

۸۲- گزینه۴

$$3, a, b+3 \xrightarrow[\text{دنبالهٔ حسابی}]{\text{۳ جملهٔ متوالی}} \frac{b+3+3}{2} = a$$

$$\Rightarrow b + 6 = 2a \Rightarrow b = 2a - 6$$

$$2, a-1, 2b+2 \xrightarrow[\text{دنبالهٔ هندسی}]{\text{۳ جملهٔ متوالی}} \underbrace{2(2b+2)}_{4(b+1)} = (a-1)^2$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} b = 2a - 6 \\ 4(b+1) = (a-1)^2 \end{cases} \Rightarrow 4\underbrace{(2a-6+1)}_{2a-5} = (a-1)^2$$

$$(a-1)^2 = 8a - 20 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 8a - 20$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 21 = 0$$

به کمک اتحاد جمله‌مشترک، $a^2 - 10a + 21$ را تجزیه می‌کنیم. در نتیجه:

$$(a-3)(a-7) = 0$$

برای آن‌که حاصل‌ضرب دو عدد صفر باشد، لازم است حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد؛ پس یا $a - 3$ باید صفر باشد یا $a - 7$. بنابراین یا $a = 3$ است و یا $a = 7$. اگر $a = 3$ باشد:

$$b = 2a - 6 \xrightarrow{a=3} b = 0$$

اگر $a = 7$ باشد:

$$b = 2a - 6 \xrightarrow{a=7} b = 8$$

پس اگر $a = 3$ باید $b = 0$ باشد و $a + b = 3$ است که در بین گزینه‌ها نیست. اگر $a = 7$ باشد، $b = 8$ است و $a + b = 15$ است.

۸۳- **گزینه۴** واسطهٔ حسابی و هندسی دو عدد مثبت a و b به ترتیب $\frac{a+b}{2}$ و $\sqrt{ab}$ است. پس:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 2 \\ a + b = 34 \end{cases} \Rightarrow \frac{34}{2} - \sqrt{ab} = 2 \Rightarrow \sqrt{ab} = 15$$

پس داریم:

$$\begin{cases} a + b = 34 \Rightarrow (a+b)^2 = 34^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 34^2 \ (*) \\ \sqrt{ab} = 15 \Rightarrow \sqrt{ab}^2 = 15^2 \Rightarrow ab = 15^2 \end{cases}$$

اگر از دو طرف تساوی $(*)$، $4ab$ را کم کنیم، می‌توانیم اتحاد $(a-b)^2$ را ایجاد کنیم:

$$\underbrace{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab}_{a^2+b^2-2ab} = 34^2 - 4ab$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = 34^2 - 4ab$$

$$\xrightarrow{ab=15^2} (a-b)^2 = 34^2 - 4 \times 15^2 = 34^2 - 30^2$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (a-b)^2 = \underbrace{(34-30)}_{4}\underbrace{(34+30)}_{64}$$

$$= 256 = 16^2 \Rightarrow |a-b| = 16$$

۸۴- **گزینه۲** می‌دانیم اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، داریم: $ac = b^2$. پس با توجه به آن‌که a_3، a_7 و a_9 تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، داریم:

$$a_3 a_9 = a_7^2 \Rightarrow (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) = (a_1 + 6d)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{a_1^2} + 10a_1 d + 16d^2 = \cancel{a_1^2} + 12a_1 d + 36d^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1 + 10d}_{a_{11}} = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$