

۷۲- عبارت $\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^3}{3}$ را به صورت $A(3+2x)^2$ نوشته ایم. مقدار A به ازای $x=6$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۳۶ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{6}$

۷۳- مجموع مربع عددی با ۴ برابر مربع عدد دیگر مساوی با ۴ برابر حاصل ضرب همان دو عدد است. نسبت این دو کدام می تواند باشد؟ **انرژی اتمی**

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۷۴- عددی دو رقمی وجود دارد که اگر مربع رقم دهگان آن را با ۲۵ برابر مربع یکان آن جمع کنیم، مساوی ده برابر حاصل ضرب این دو رقم می شود. این عدد همواره بر کدام یک از اعداد زیر قابل قسمت است؟ **مدارس هماهنگ**

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۲۹ (۴) ۵۱

۷۵- اگر ضلع یک مربع $(a+b)$ و ضلع مربع دیگری $(a-b)$ باشد، تفاضل مساحت های این دو مربع عبارتست از: **مفید**

- (۱) $2ab$ (۲) $4ab$ (۳) $2a^2b^2$ (۴) $4a^2b^2$

درسنامه ۴

زدن تست های مربوط به تجزیه بدون معلومات!

تا حالا دیدی کسی تجزیه بلد نباشه ولی به راحتی تست تجزیه حل کنه! حتماً با خودتان می گویید: «مگه می شه؟ مگه داریم؟» بله داریم! اگر شما هم دوست دارید بدون اطلاعات و بلد بودن تجزیه، سخت ترین تست های تجزیه را سه سوت! حل کنید، با ما همراه باشید:

دسته ی اول: در بعضی از تست ها، یک عبارت گنده وجود دارد و شما باید به کمک اتحاد یا تجزیه آن ها را ساده کنید و به یک عبارت کوچک برسید. در این تست ها کافی است به جای متغیر (متغیرها) عدد مناسب قرار دهید. سپس در گزینه ها هم همان عدد مورد نظر را جای گذاری کرده و چک کنید که عبارت صورت سؤال با کدام گزینه برابر می شود. به تست زیر توجه کنید:

کنکور

مثال: حاصل عبارت $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ کدام است؟

- (۱) $(a^2+1)^2$ (۲) $(a+1)^4$ (۳) $(a^2+3a+1)^2$ (۴) $(a^2+a+1)^2$

پاسخ: خب خیلی ریلکس و بدون استرس به جای a ، عدد مناسب ۱ قرار می دهیم. در این صورت عبارت صورت سؤال برابر می شود با:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1 \stackrel{a=1}{=} 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$$

حال در گزینه ها هم $a=1$ را قرار می دهیم:

- (۱) $(a^2+1)^2 \stackrel{a=1}{=} (1+1)^2 = 4$: گزینه ی (۱)
 (۲) $(a+1)^4 \stackrel{a=1}{=} (1+1)^4 = 16$: گزینه ی (۲)
 (۳) $(a^2+3a+1)^2 \stackrel{a=1}{=} (1+3+1)^2 = 25$: گزینه ی (۳) ✓
 (۴) $(a^2+a+1)^2 \stackrel{a=1}{=} (1+1+1)^2 = 9$: گزینه ی (۴)

پس گزینه ی (۳) صحیح است. به همین سادگی!

مثال: بیچاره بغل دستیت داره خودشو می کشه که سؤال رو حل کنه! یه لبفندی بزنی و فوشال باش و به اون هم کتاب مارو معرفی کن.

سؤال: دانش پژوه (آرمان آلبا): آقا چرا a رو صفر ندادین، اون که خیلی راحت تر می کنه محاسباتو؟

پاسخ: آرمان ببین آله a رو صفر بدیم هر چهار گزینه برابر می شن! پس نمی توانیم گزینه ای رو به عنوان جواب انتخاب کنیم. بنابراین درسته که محاسبات با $a=0$ راحت تره ولی دردی رو از ما دوا نمی کنه. همیشه یادت باشه قبل از امتحان کردن یه عدد، هتماً نیم نگاهی به گزینه ها هم داشته باش تا وقتت سر اعداد بیهوده تلف نشه!

دسته ی دوم: هر وقت صورت تستی به یکی از دو فرم زیر بود، برای حل باید به جای متغیر (متغیرها) عددی مناسب قرار دهید. سپس در گزینه ها هم همان اعداد را جای گذاری کرده و چک کنید عدد به دست آمده در صورت سؤال بر کدام عدد بخش پذیر است.

۱- در تجزیه ی عبارت داده شده کدام عامل وجود دارد یا وجود ندارد؟

۲- عبارت داده شده بر کدام عبارت بخش پذیر است یا بخش پذیر نمی باشد. برای درک بهتر روش گفته شده به تست زیر توجه کنید:

کنکور

مثال: عبارت $4x - 2x^3 + 2x^2$ بر کدام دوجمله ای بخش پذیر نیست؟

- (۱) $x+1$ (۲) $x-1$ (۳) $x+2$ (۴) x^2-x

پاسخ: به جای x عدد مناسب ۲ را قرار می دهیم. در این صورت عبارت صورت سؤال برابر می شود با:

$$2x^3 + 2x^2 - 4x \stackrel{x=2}{=} 2(2)^3 + 2(2)^2 - 4(2) = 16 + 8 - 8 = 16$$

حال در گزینه‌ها هم به جای x ، عدد ۲ قرار می‌دهیم:

(۱) $x+1 \stackrel{x=2}{=} 3$ ، (۲) $x-1 \stackrel{x=2}{=} 1$ ،

(۳) $x+2 \stackrel{x=2}{=} 4$ ، (۴) $x^2-x \stackrel{x=2}{=} 4-2=2$

خب همه می‌دونن که ۱۶ بر ۱، ۲ و ۴ بخش پذیر است ولی بر ۳ بخش پذیر نیست. پس گزینه‌ی (۱) جواب است.

تذکر: انتخاب عدد مناسب در این قسمت فوق‌العاده مهم است و با تمرین زیاد این کار را به خوبی یاد می‌گیرید.

۷۶- تجزیه‌ی عبارت $(x+2y-z)^2 + z^2 + 2z(x+2y-z)$ به کدام صورت است؟

(۱) $(z+2y)^2$ (۲) $(x-2y)^2$

(۳) $(2y-z)^2$ (۴) $(x+2y)^2$

۷۷- حاصل $(x^2+x+1)^2 + (x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+x+1)$ کدام است؟

(۱) $x^4 - x^2 + 1$ (۲) x^4 (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^4 + x^2 + 1$

۷۸- حاصل عبارت $(a-2)(a-1)a(a+1)+1$ کدام است؟

(۱) $(a^2-3a+1)^2$ (۲) $(a^2+3a-1)^2$

(۳) $(a^2-a-1)^2$ (۴) $(a^2+a+1)^2$

کنکور

درسنامه ۵

تجزیه‌ی $(a+b \pm 2\sqrt{ab})$ به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای

عبارت‌هایی به فرم $(a+b \pm 2\sqrt{ab})$ را می‌توان با توجه به فرمول اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$ نوشت. اجازه بدهید یک مثال برایتان بزنم:

مثال: عبارت $7+2\sqrt{12}$ را تجزیه کنید.

پاسخ: با مقایسه‌ی $7+2\sqrt{12}$ با عبارت $a+b+2\sqrt{ab}$ ، متوجه می‌شویم که $a+b=7$ و $ab=12$ است. پس باید دنبال دو عدد a و b باشیم که جمعشان ۷ و ضربشان ۱۲ شود، با کمی دقت متوجه می‌شویم آن دو عدد ۳ و ۴ هستند. بنابراین داریم:

$$7+2\sqrt{12} \stackrel{a=3}{b=4} = (\sqrt{3} + \sqrt{4})^2$$

سؤال: دانش‌پژوه (مونا بهانی): آقا اجازه! حالا فرض کنید اومدیم و یادگرفتیم که چه جوری همیشه این کار رو کرد، آخه به چه دردی می‌خوره؟ کجا لازمه این کارو کنیم؟

پاسخ: همش دنبال اینی که آله یه چیز به دردت نمی‌فوره یادگیری! بزار بهت بگم، معمولاً وقتی عبارت $a+b \pm 2\sqrt{ab}$ زیر رادیکال قرار داشته باشه با این کار می‌تونیم رادیکال رو از بین ببریم. مثلاً:

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{4})^2} = \underbrace{|\sqrt{3} + \sqrt{4}|}_{\oplus} = \sqrt{3} + \sqrt{4}$$

کنکور

۷۹- جذر $3+2\sqrt{2}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}-1$ (۲) $1+\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}+1$ (۴) $1+2\sqrt{2}$

۸۰- حاصل $\sqrt{7}-\sqrt{40}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

۸۱- حاصل $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ کدام است؟

(۱) $2+\sqrt{5}$ (۲) $2-\sqrt{5}$ (۳) $5+\sqrt{2}$ (۴) $5-\sqrt{2}$

۸۲- ساده شده‌ی عبارت $\sqrt{6-2\sqrt{3}+2\sqrt{8}+2\sqrt{15}}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{5}+2$ (۲) $\sqrt{5}-1$

(۳) $\sqrt{5}+1$ (۴) $\sqrt{5}-2$

درسنامه ی ۶

اتحاد مربع سه جمله ای

اتحاد مربع سه جمله ای به صورت زیر است:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

 **مثال:** حاصل عبارات زیر را به کمک اتحاد مربع سه جمله ای بیابید.

ب) $(x^2 - x - 1)^2$

الف) $(x - y + 2z)^2$

 **پاسخ:**

الف) $(x - y + 2z)^2 = (x)^2 + (-y)^2 + (2z)^2 + 2(x)(-y) + 2(x)(2z) + 2(-y)(2z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$

ب) $(x^2 - x - 1)^2 = (x^2)^2 + (-x)^2 + (-1)^2 + 2(x^2)(-x) + 2(x^2)(-1) + 2(-x)(-1) = x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x^2 + 2x$

تجزیه به کمک اتحاد مربع سه جمله ای

اگر عبارتی بدهند که شش جمله داشته باشد و سه تا از جمله های آن مربع کامل باشند (سه جمله مثبت اند). آن گاه جذر آن سه جمله را a ، b و c می نامیم. سپس بررسی می کنیم که آیا سه جمله ی دیگر $2ab$ ، $2ac$ و $2bc$ هستند یا خیر. اگر سه جمله ی دیگر $2ab$ ، $2ac$ و $2bc$ باشند، (البته با در نظر گرفتن علامت جملات) می توانیم آن شش جمله را به صورت اتحاد مربع سه جمله ای نمایش دهیم.

 **مثال:** عبارات زیر را تجزیه کنید.

ب) $x^2 + 4y^2 - 4xy - 6xz + 12yz + 9z^2$

الف) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$



پاسخ: الف) عبارت داده شده دارای ۶ جمله است که سه جمله ی x^2 ، y^2 و $4z^2$ مربع کامل اند. پس $a = x$ ، $b = y$ و $c = 2z$ فرض کرده و جملات $2ab$ ، $2ac$ و $2bc$ را می یابیم:

همان طور که دیدید، سه جمله ی دیگر همان جملاتی هستند که ما به دست آوردیم. پس عبارت داده شده را می توان به صورت $(a + b + c)^2 = (x + y + 2z)^2$ نوشت.

ب) عبارت داده شده دارای ۶ جمله است که سه جمله ی x^2 ، $4y^2$ و $9z^2$ مربع کامل اند. پس $a = x$ ، $b = 2y$ و $c = 3z$ فرض کرده و جملات $2ab$ ، $2ac$ و $2bc$ را می یابیم:

اگر دقت کنید سه جمله ی دیگر همین جملات فوق هستند که ما به دست آوردیم (البته x باید علامت منفی داشته باشد). پس عبارت داده شده را می توان به صورت $(a + b - c)^2 = (2y + 3z - x)^2$ نوشت.

 **سؤال:** دانش پروه (مهریه تنها): آقا اجازه! چرا x رو منفی گرفتین ولی $2y$ و $3z$ مثبت شدن؟

پاسخ: دقتم این حرفی که الان می فوآم بزنمو، بین فودمون نگه دار، یه رازه. تو این نوع سؤال برای پیدا کردن علامت ها فقط جمله ای که مربع کامل نیست و مثبت رو پیدا کن و ببین از چه متغیرهایی تشکیل شده. بعد علامت اون متغیرها رو در فرمول، مثبت بزار. مثلاً در این سؤال $12yz$ مثبتیه و توش y و z وجود داره، به همین خاطر در فرمول، علامت جمله های دارای y و z رو مثبت گرفتیم.

۸۳- حاصل عبارت $(2x - 3y + 1)^2$ کدام است؟

۱) $4x^2 + 9y^2 + 1 - 12xy + 4x - 6y$

۲) $4x^2 + 9y^2 + 1 + 12xy + 4x - 6y$

۳) $4x^2 + 9y^2 + 1 + 2x - 3y + 1$

۴) $4x^2 - 9y^2 + 1 - 6xy + 4x - 3y$

۸۴- حاصل عبارت $(x^2 + x - x^{-2})^2$ کدام است؟

۱) $x^4 + x^{-4} + x^{-2} + 2x^2 + 1 - x^2$

۲) $x^4 - x^{-4} + 2x^2 + x^2 - 2 - 2x^{-1}$

۳) $x^4 + x^2 + x^{-4} - 2x^{-1} + 2x^2 - 2$

۴) $x^4 + x^{-4} + 2x^2 + x - 2x^{-2} - 2$

۸۵- شرط برقراری $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + (a + c)^2$ چیست؟

۱) $a^2 = 2bc$

۲) $b^2 = 2ac$

۳) $c^2 = 2ab$

۴) $a + b + c = abc$

۸۶- اگر $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ باشد، کدام یک از روابط زیر درست است؟ ($abc \neq 0$)

۱) $a = \frac{bc}{a - c}$

۲) $a = \frac{bc}{b + c}$

۳) $a = \frac{ac}{a - c}$

۴) $c = \frac{ab}{a - b}$

۸۷- اگر $x + y + z = 6$ و $xy + yz + xz = 11$ باشد، حاصل $x^2 + y^2 + z^2$ کدام است؟

۱) ۲۱

۲) ۱۴

۳) ۱۰

۴) ۷

کنکور

کنکور

انرژی اتمی

۸۸- در عبارت $[(x+2b)^2(x-2b)^2]^2$ پس از ساده شدن، تعداد جمله‌ها برابر است با:

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۸۹- تجزیه عبارت $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz$ کدام است؟

- (۱) $(x+y+z)^2$ (۲) $(x+2y+z)^2$ (۳) $(x-2y+z)^2$ (۴) $(x-2y-z)^2$

درسنامه ۲

اتحاد مزدوج

اتحاد مزدوج به صورت زیر می‌باشد:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \xrightarrow{\text{فارسی}} (\text{جمله دوم} - \text{جمله اول}) (\text{جمله دوم} + \text{جمله اول}) = a^2 - b^2$$

در اتحاد مزدوج دو تا پرانتز وجود دارد که جمله‌های داخل پرانتزها شبیه هم هستند، فقط علامت بین آن‌ها فرق دارد. در این صورت برای محاسبه‌ی جواب اتحاد، کافی است a و b را به توان دو برسانیم و بین آن‌ها علامت منفی قرار دهیم.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $(2x-3y)(2x+3y)$ ب) $(x^2y+z)(-z+x^2y)$

پاسخ:

$$(2x-3y)(2x+3y) \xrightarrow{\text{جمله‌های داخل پرانتزها مثل هم هستند، فقط علامت‌ها فرق می‌کند}} (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$$

$$(x^2y+z)(-z+x^2y) \xrightarrow{\text{جمله‌های داخل پرانتزها مثل هم هستند، فقط علامت‌ها فرق می‌کند}} (x^2y)^2 - z^2 = x^4y^2 - z^2$$

سؤال: دانش‌پژوه (معنا عبدالمی)؛ آقا چرا حاصل اتحاد قسمت (ب) برابر $z^2 - (x^2y)^2$ نشد؟

پاسخ: ببین بزار رازی رو واسط فاش کنم! برای پیدا کردن جواب، ببین توی پرانتزها کدام جمله یا جمله‌ها علامتشان ثابت مونده و جواب را به صورت زیر بنویس:

$$(x^2y+z)(-z+x^2y) = (x^2y)^2 - z^2 \quad (\text{جمله‌ای که علامتشان عوض شده}) - (\text{جمله‌ای که علامتشان ثابت مونده})$$

مثلاً: توی این مثالی که پرسیدی جمله‌ی x^2y در هر دو پرانتز علامتش ثابت مونده و جمله‌ی z علامتش تغییر کرده پس جواب اتحاد $(x^2y)^2 - (z)^2$ میشه.

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

اگر دو جمله‌ی مربع کامل به صورت $\Delta^2 - \square^2$ داشته باشیم، می‌توانیم از اتحاد مزدوج به صورت زیر برای تجزیه‌ی آن استفاده کنیم:

$$\Delta^2 - \square^2 = (\Delta - \square)(\Delta + \square) \xrightarrow{\text{فارسی}} (\text{جمله اول} - \text{جمله دوم}) (\text{جمله اول} + \text{جمله دوم})$$

سؤال: دانش‌پژوه (نگار فرقانی)؛ آقا میشه بیشتر توضیح بدین؟

پاسخ: ببین وقتی دیری دو تا جمله توان دو دارن که یکی مثبت و یکی منفی، سریع توان دوی اونارو فط می‌زنیم و عبارت باقی مونده رو به بار با علامت مثبت و به بار با علامت منفی نوشته و در هم ضرب می‌کنیم. به مثال‌ها نگاه کن:

$$1 \quad 4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x-3y) \times (2x+3y)$$

$$2 \quad (x+y)^2 - 9 = (x+y)^2 - 3^2 = (x+y-3) \times (x+y+3)$$

$$3 \quad x^6 - y^4 = (x^3)^2 - (y^2)^2 = (x^3 - y^2) \times (x^3 + y^2)$$

مثال:

۹۰- حاصل $(-\sqrt{18}-3)(-\sqrt{18}+3)$ کدام است؟

- (۱) -۲۷ (۲) -۹ (۳) ۹ (۴) ۲۷

۹۱- حاصل عبارت $(x^{\frac{m}{2}} - y^{\frac{m+1}{2}})(x^{\frac{m}{2}} + y^{\frac{m+1}{2}})$ کدام است؟

- (۱) $x^m - y^m$ (۲) $x^m - y^{m+1}$ (۳) $x^{m-1} \cdot y^{m-1}$ (۴) $x^m + y^{m+1}$

۹۲- حاصل $9997 \times 10003 - 9980 \times 10020 + 3475^2$ شامل چند رقم ۹ است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۹۳- حاصل $6525^2 + 13050 \times 3475 - 9980 \times 10020 + 3475^2$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰۰۰۰۴۰۰ (۲) -۴۰۰ (۳) ۹۹۹۹۹۶۰۰ (۴) ۴۰۰

تیزهوشان

آزمون‌های گاج

۹۴- حاصل $\frac{205^2 - 195^2}{(\sqrt{125} + 5)(\sqrt{500} - 10)}$ کدام است؟

- ۴۰ (۱) ۲۰۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۲۰ (۴)

کنکور

۹۵- حاصل عبارت $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ برابر است با:

- $x^4 + y^4$ (۱) $x^4 - x^2y^2 + y^4$ (۲) $(x^2 - y^2)^2$ (۳) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (۴)

۹۶- ساده شده عبارت $(x + y + 1)(x - y - 1) + y(y + 2)$ شامل چند یک جمله ای غیرصفر است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴)

انرژی اتمی

۹۷- حاصل عبارت $(a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$ به ازای $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

- $\frac{25}{16}$ (۱) $\frac{9}{16}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{16}{9}$ (۴)

۹۸- حاصل عبارت $(a + b - c + d)(a - b - c - d) + (b + d)^2$ کدام است؟

- $a^2 + b^2 - 2ab$ (۱) $a^2 + c^2 - 2ac$ (۲) $a^2 + d^2 + 2ad$ (۳) $b^2 + c^2 - 2bc$ (۴)

کنکور

۹۹- حاصل $(8x^2 + 2)(x - \frac{1}{2})(2x + 1)$ کدام است؟

- $4x^2 - 1$ (۱) $\frac{1}{2}(16x^4 - 1)$ (۲) $64x^4 - 1$ (۳) $16x^4 - 1$ (۴)

۱۰۰- حاصل عبارت $(y^2 + yx)(zx - zy)(y^2 + x^2)$ کدام است؟

- $x^4yz - zy^4x$ (۱) $zy^4 - yzx^3$ (۲) $xy - zy^4x$ (۳) $yzx^4 - zy^4x$ (۴)

۱۰۱- حاصل عبارت $(x^2 + y^2)^2(x - y)^2(x^2 + y^2 + 2xy)$ کدام است؟

- $(x^4 + y^4)^2$ (۱) $(x^4 + y^4)^4$ (۲) $(x^4 - y^4)^4$ (۳) $(x^4 - y^4)^4$ (۴)

آزمون‌های گاج

۱۰۲- اگر $A = 1 - 3x^2$ ، $B = 2x^2 + 3x$ و $C = -x^2 - 3x + 1$ باشد، حاصل عبارت $x^{-2}(A - C)B$ کدام است؟

- $9 - 4x^2$ (۱) $8x + 1$ (۲) $5 - 2x^2$ (۳) $4x + 2$ (۴)

۱۰۳- حاصل عبارت $(\sqrt{65} + 8)^{20}(\sqrt{65} - 16)^{20}$ کدام است؟

- 64^{10} (۱) 8^{20} (۲) 4^{20} (۳) 4^{10} (۴)

۱۰۴- حاصل عبارت $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^9(\sqrt{3} - \sqrt{2})^9$ کدام است؟

- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (۱) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۲) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{19}$ (۳) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^9$ (۴)

۱۰۵- حاصل $(2 + \sqrt{3})^{20}(7 - 4\sqrt{3})^{15}$ کدام است؟

- $(\sqrt{3})^{15}$ (۱) ۱ (۲) $(2\sqrt{3})^{15}$ (۳) 3^{15} (۴)

۱۰۶- حاصل عبارت $(\sqrt{75} + \sqrt{50})^{10}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^{10}$ کدام است؟

- 15^5 (۱) 15^{10} (۲) 3^{10} (۳) 5^{10} (۴)

آزمون‌های گاج

۱۰۷- مقدار عبارت $(x^6 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$ به ازای $x = 10$ ، شامل چند رقم ۹ است؟

- ۱۶ (۱) ۳۱ (۲) ۱۵ (۳) ۳۲ (۴)

کنکور

۱۰۸- مقدار عددی عبارت $A = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) \dots (2^{64} + 1)$ ، برابر است با:

- $2^{256} + 1$ (۱) $2^{128} + 1$ (۲) $2^{128} - 1$ (۳) $2^{256} - 1$ (۴)

کنکور

۱۰۹- در تساوی $\frac{1 - x^{16}}{A} = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ ، عبارت A کدام است؟

- $1 - x$ (۱) $1 - x^2$ (۲) $1 - x^4$ (۳) $1 - x^8$ (۴)

مشابه انرژی اتمی

۱۱۰- حاصل عبارت $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{8^2})(1 - \frac{1}{9^2})$ کدام است؟

- $\frac{5}{9}$ (۱) $\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)

۱۱۱- اگر $x + y = 14$ و $y^2 - x^2 = 56$ باشد، حاصل $(x - y)^3$ کدام است؟

- ۴۶ (۱) ۶۴ (۲) -۶۴ (۳) -۴۶ (۴)

کنکور

۱۱۲- اگر $x^2 + 4y^2 = 4xy$ باشد، مقدار $x^2 - 4y^2$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) صفر

انرژی اتمی

۱۱۳- حاصل عبارت $x^5y^4 + x^4y^5$ به ازای $x = 2 + \sqrt{3}$ و $y = 2 - \sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $-2\sqrt{3}$ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۱۴- در تجزیه‌ی $xy^5 - yx^5$ کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱) xy (۲) $y + x$ (۳) $x + 2y$ (۴) $-x + y$

آزمون‌های گاه

۱۱۵- اگر $(x+b)^2 - (x-a)^2 = 2Ax + B$ باشد، آن‌گاه $\frac{B}{A}$ برابر کدام است؟

- (۱) $b - a$ (۲) $b + a$ (۳) $\frac{b-a}{2}$ (۴) $\frac{1}{b+a}$

کنکور

۱۱۶- حاصل $(ax+by)^2 - (ay+bx)^2$ برابر است با:

- (۱) $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$ (۲) $(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$ (۳) $(a^2 + b^2)(x^2 - y^2)$ (۴) $(a^2 + x^2)(b^2 - y^2)$

کنکور

۱۱۷- اگر $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ باشد، حاصل $a + \frac{1}{a}$ کدام است؟ ($a > 0$)

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱۸- در تجزیه‌ی عبارت $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) - 1$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $x - y + z - 1$ (۲) $x + y + z - 1$ (۳) $x + 2y + 2z + 1$ (۴) $2x + y + 2z - 1$

۱۱۹- در تجزیه‌ی عبارت $x^2 - z^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $x + y - 1 + z$ (۲) $x + 2y + 1 + z$ (۳) $x - y - 1 + z$ (۴) $2x + y + z - 1$

درسنامه ۸

اتحاد جمله مشترک

اتحاد جمله مشترک به صورت زیر است:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

جمله مشترک

جملات غیرمشترک

ضرب غیرمشترک‌ها + (مشترک) (جمع غیرمشترک‌ها) + مشترک = (غیرمشترک + مشترک) × (غیرمشترک + مشترک) $\Rightarrow$ فارسی

مثال: حاصل عبارات زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک بیابید.

- الف) $(5x+3)(5x-2)$ ب) $(-2x+y)(3x+y)$ ج) $(3x+y-2)(y-5+3x)$

پاسخ:

$$\text{الف) } (5x+3)(5x-2) = (5x)^2 + (3+(-2))(5x) + (3)(-2) = 25x^2 + 5x - 6$$

جمله مشترک

جملات غیرمشترک

$$\text{ب) } (-2x+y)(3x+y) = y^2 + (-2x+3x)y + (-2x)(3x) = y^2 + xy - 6x^2$$

جمله مشترک

جملات غیرمشترک

سوال: دانش‌پژوه (سعیده آزار): آقا اجازه! مگه جمله‌ی مشترک نباید اول هر پرانتز باشه؟

پاسخ: نه قائم، من کجا چنین حرفیو زدم؟ تو باید توی پرانتزها دنبال جمله‌های شبیه هم بگردی. اوتا میشن جمله‌ی مشترک توی فرمول و بقیه‌ی جمله‌ها در هر دو پرانتز میشن جمله‌های غیرمشترک. به مثال بعری فوب توجه کن تا مشکللت رفع شه.

$$\text{ج) } (3x+y-2)(y-5+3x) = (3x+y)^2 + (-2+(-5))(3x+y) + (-2)(-5) = 9x^2 + y^2 + 6xy - 21x - 7y + 10$$

جملات غیرمشترک

جملات مشترک

اتحاد مربع دو جمله‌ای

(جملاتی که شبیه هم‌اند)

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

اگر یک عبارت سه جمله‌ای داده شود که یکی از جمله‌ها مربع کامل باشد، احتمالاً می‌توان آن را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه نمود. اجازه بدهیم با یک مثال روش تجزیه را توضیح دهیم:

فرض کنید می‌خواهیم عبارت $x^2 + 5x + 6$ را تجزیه کنیم. جمله‌ی x^2 مربع کامل است، با مقایسه‌ی $x^2 + 5x + 6$ با اتحاد جمله مشترک یعنی $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ به این نتیجه می‌رسیم که $a+b = 5$ و $ab = 6$.

۷۲ ۳ در عبارت داده شده دو تا جمله‌ی $\frac{x^2}{4}$ و $\frac{x^4}{9}$ ، مربع کامل هستند. (یعنی $\frac{x^2}{4} = (\frac{x}{2})^2$ و $\frac{x^4}{9} = (\frac{x^2}{3})^2$) حال چون جمله‌ی $\frac{x^3}{3}$ را می‌توانیم به صورت $2(\frac{x}{2})(\frac{x^2}{3})$ بنویسیم، پس با توجه به فرمول اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^3}{3} = (\frac{x}{2})^2 + (\frac{x^2}{3})^2 + 2(\frac{x}{2})(\frac{x^2}{3}) = (\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3})^2$$

حال قیافه‌ی عبارت حاصل را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم تا شبیه $A(3+2x)^2$ شود:

$$(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3})^2 = (\frac{3x + 2x^2}{6})^2 = \frac{(3x + 2x^2)^2}{36} = \frac{(x(3 + 2x))^2}{36} = \frac{x^2}{36} (3 + 2x)^2$$

پس $A = \frac{x^2}{36}$ است که اگر در آن $x = 6$ را قرار دهیم، حاصل برابر ۱ می‌شود. $\frac{6^2}{36} = \frac{36}{36} = 1$

۷۳ ۳ عدد اول را x و عدد دوم را y فرض می‌کنیم. در سؤال گفته شده که مجموع مربع عددی با ۴ برابر مربع عدد دیگر مساوی با ۴ برابر حاصل ضرب همان دو عدد است. چه جمله‌ای بود! بنابر اول به ریاضی این جمله رو ترجمه کنیم تا فالیمون شه اصلن داره چه می‌گه:

$$x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 + (2y)^2 - 2(2y)(x) = 0 \Rightarrow (x - 2y)^2 = 0 \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \quad (*)$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

بنابراین نسبت عدد اول (x) به عدد دوم (y) برابر می‌شود با:

$$\frac{x}{y} \stackrel{(*)}{=} \frac{2y}{y} = 2$$

۷۴ ۴ در عدد دو رقمی مورد نظر، رقم یکان را y و رقم دهگان را x فرض می‌کنیم. سؤال گفته که اگر مربع رقم دهگان آن را با ۲۵ برابر مربع یکان آن جمع کنیم، مساوی ده برابر حاصل ضرب این دو رقم می‌شود. این همه حرف را می‌شود با یک معادله نشان داد:

$$x^2 + 25y^2 = 10xy \Rightarrow x^2 + (\Delta y)^2 - 2(\Delta y)(x) = 0 \Rightarrow (x - \Delta y)^2 = 0 \Rightarrow x = \Delta y \quad (*)$$

از طرفی عدد دو رقمی مورد نظر را می‌توان به صورت $10x + y$ نوشت. پس:

$$10x + y \stackrel{(*)}{=} 10(\Delta y) + y = 50y + y = 51y$$

پس عدد دو رقمی مورد نظر همواره مضرب ۵۱ بوده و در نتیجه بر ۵۱ قابل قسمت است.

۷۵ ۲ ضلع مربع اول $(a+b)$ و ضلع مربع دوم $(a-b)$ است. چون مساحت مربع، مجذور ضلع آن است، تفاضل مساحت‌ها برابر می‌شود با:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 \stackrel{\text{با توجه به فرمول درسمانه}}{=} 4ab$$

۷۶ ۴ راه اول: در عبارت داده شده دو تا جمله‌ی z^2 و $(x+2y-z)^2$ مربع کامل هستند، پس جذر آن‌ها را a و b فرض می‌کنیم. چون جمله‌ی دیگر $2ab$ است. پس عبارت مورد نظر، اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌باشد. داریم:

$$(x+2y-z)^2 + z^2 + 2z(x+2y-z) = ((x+2y-z) + z)^2 = (x+2y)^2$$

راه دوم: با فرض $x=1$ ، $y=2$ و $z=3$ عبارت داده شده برابر می‌شود با:

$$(x+2y-z)^2 + z^2 + 2z(x+2y-z) = (1+4-3)^2 + 3^2 + 2(3)(1+4-3) = 4 + 9 + 12 = 25$$

حال در گزینه‌ها هم $x=1$ ، $y=2$ ، $z=3$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$(1) \quad (z+2y)^2 \stackrel{z=3}{y=2} (3+4)^2 = 49 \quad (2) \quad (x-2y)^2 \stackrel{x=1}{y=2} (1-4)^2 = 9$$

$$(3) \quad (2y-z)^2 \stackrel{y=2}{z=3} (4-3)^2 = 1 \quad (4) \quad (x+2y)^2 \stackrel{x=1}{y=2} (1+4)^2 = 25 \quad \checkmark$$

پس گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۷۷ ۲ راه اول: با فرض $x=2$ داریم:

$$(x^2 + x + 1)^2 + (x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + x + 1) \stackrel{x=2}{=} 7^2 + 3^2 - 2(3)(7) = 16$$

حال اگر $x=2$ را در گزینه‌ها قرار دهیم، فقط گزینه‌ی (۲) برابر ۱۶ می‌شود. پس همین گزینه جواب است.

راه دوم: با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت داده شده اتحاد مربع دوجمله‌ای است. یعنی با فرض $x^2 + x + 1 = a$ و $x+1 = b$. جواب کل عبارت

$$(x^2 + x + 1)^2 + (x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + x + 1) = \underbrace{(x^2 + x + 1)}_a - \underbrace{(x+1)}_b = \underbrace{(x^2 + x + 1 - x - 1)}_a = x^2$$

سؤال برابر $(a-b)^2$ می‌شود:

۷۸ ۳ راه اول: a را عددی مناسب مانند ۴ انتخاب می‌کنیم. در این صورت عبارت $(a-2)(a-1)a(a+1)+1$ برابر $(4-2)(4-1)4(4+1)+1=120+1=121$ می‌شود. حال در گزینه‌ها هم به جای a ، عدد ۴ قرار می‌دهیم:

$$(1) \quad (a^2-3a+1)^2 \stackrel{a=4}{=} (16-12+1)^2=25 \quad (2) \quad (a^2+3a-1)^2 \stackrel{a=4}{=} (16+12-1)^2=27^2=729$$

$$(3) \quad (a^2-a-1)^2 \stackrel{a=4}{=} (16-4-1)^2=121 \quad (4) \quad (a^2+a+1)^2 \stackrel{a=4}{=} (16+4+1)^2=21^2=441$$

تابلوه که گزینه ی (۳) صحیح است.

راه دوم: عبارت a و $a-1$ را با هم و عبارت $(a-2)$ و $(a+1)$ را نیز با هم می‌گیریم.

$$\begin{aligned} (a-2)(a-1)a(a+1)+1 &= ((a-1)a) \times ((a-2)(a+1))+1 = (a^2-a)(a^2+a-2a-2) = (a^2-a)(a^2-a-2)+1 \\ &= (a^2-a)^2 - 2(a^2-a) + 1 \quad \begin{array}{l} \text{اتحاد مربع دوجمله‌ای} \\ \text{برابر } t \text{ می‌گیریم} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{را برای راحتی کار} \\ t=a^2-a \end{array} \\ &= (t-1)^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

۷۹ ۲ با توجه به درسنامه با مقایسه ی $3+2\sqrt{2}$ با $a+b+2\sqrt{ab}$ ، متوجه می‌شویم که $a+b=3$ و $ab=2$. حال دو عدد پیدا می‌کنیم که جمعشان ۳ و ضربشان ۲ شود. خب خیلی راحت است. آن دو عدد ۱ و ۲ هستند. بنابراین:

$$3+2\sqrt{2} \stackrel{\substack{a=2 \\ b=1}}{=} (\sqrt{1}+\sqrt{2})^2 \xrightarrow{\text{جنر}} \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = |1+\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}$$

۸۰ ۳ ابتدا سعی می‌کنیم $7-\sqrt{40}$ را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای به صورت مربع کامل بنویسیم. با توجه به درسنامه ابتدا آن را به فرم $a+b-2\sqrt{ab}$ می‌نویسیم. یعنی کاری می‌کنیم که پشت رادیکال عدد ۲ ایجاد شود:

$$7-\sqrt{40} = 7-\sqrt{4 \times 10} = 7-2\sqrt{10} \xrightarrow[\substack{\text{مقایسه با} \\ a+b-2\sqrt{ab}}]{\substack{a+b=7 \\ ab=10}} a+b-2\sqrt{ab}$$

دو عدد مورد نظر ۲ و ۵ هستند که جمعشان ۷ و ضربشان ۱۰ می‌شود. پس $7-2\sqrt{10}$ را به صورت $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$ می‌نویسیم:

$$\sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{5}-\sqrt{2}| = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

سؤال: دانش‌پژوه (الوه دگشا): آقا اجازه! چرا $7-2\sqrt{10}$ رو به صورت $(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$ ننوشتید. از کجا فهمیدین باید اول $\sqrt{5}$ رو بنویسین؟

پاسخ: اگر اونطوری که تو گفتی هم بنویسیم جواب آفر فرقی نمی‌کنه، نگاه کن:

$$\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2} = |\sqrt{2}-\sqrt{5}| = -(\sqrt{2}-\sqrt{5}) = -\sqrt{2}+\sqrt{5} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

ولی بهتره آگه بین دو جمله منفی وجود داشت، اول عدد بزرگ‌تر رو بنویسی که خیالت از مثبت بودن عبارت داخل رادیکال راحت باشه.

۸۱ ۱ ابتدا $9+4\sqrt{5}$ را سعی می‌کنیم به فرم $a+b+2\sqrt{ab}$ در بیاوریم. پس کاری می‌کنیم که پشت رادیکال عدد ۲ باشد.

$$9+4\sqrt{5} = 9+2 \times 2\sqrt{5} \xrightarrow[\substack{\text{مقایسه با} \\ a+b+2\sqrt{ab}}]{\substack{\text{یکی از اعداد ۲ را} \\ \text{زیر رادیکال می‌بریم}}} a+b+2\sqrt{ab}$$

دو عدد مورد نظر ۴ و ۵ هستند که جمعشان ۹ و ضربشان ۲۰ می‌شود. پس $9+2\sqrt{20}$ را به صورت $(\sqrt{5}+\sqrt{4})^2$ می‌نویسیم:

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{4})^2} = |\sqrt{5}+\sqrt{4}| = \sqrt{5}+\sqrt{4} = \sqrt{5}+2$$

۸۲ ۳ از داخل عبارت شروع به حل می‌کنیم:

$$8+2\sqrt{15} \xrightarrow[\substack{\text{مقایسه با} \\ a+b+2\sqrt{ab}}]{\substack{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمعشان ۸} \\ \text{و ضربشان ۱۵ شود}}} a+b+2\sqrt{ab}$$

پس $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ می‌شود که در عبارت داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{6-2\sqrt{3}+2\sqrt{8+2\sqrt{15}}} = \sqrt{6-2\sqrt{3}+2\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}} = \sqrt{6-2\sqrt{3}+2|\sqrt{5}+\sqrt{3}|}$$

$$= \sqrt{6-2\sqrt{3}+2(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \sqrt{6-2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{3}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

حال دوباره $6+2\sqrt{5}$ را به صورت $a+b+2\sqrt{ab}$ می‌نویسیم. پس $a+b=6$ و $ab=5$. آن دو عدد خوش‌شانس ما ۵ و ۱ هستند. بنابراین:

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{1})^2} = |\sqrt{5}+1| = \sqrt{5}+1$$

$$(2x-3y+1)^2 = (2x)^2 + (-3y)^2 + 1^2 + 2(2x)(-3y) + 2(2x)(1) + 2(-3y)(1) = 4x^2 + 9y^2 + 1 - 12xy + 4x - 6y$$

$$(x^2+x-x^{-2})^2 = (x^2)^2 + (x)^2 + (-x^{-2})^2 + 2(x^2)(x) + 2(x^2)(-x^{-2}) + 2(x)(-x^{-2}) = x^4 + x^2 + x^{-4} + 2x^3 - 2 - 2x^{-1}$$

در تساوی داده شده اتحاد مربع دوجمله‌ای و مربع سه جمله‌ای وجود دارد که سریع جواب آن‌ها را می‌نویسیم و جملات را تا حد امکان با هم

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + c^2 + 2ac \Rightarrow 2bc = a^2$$

سمت چپ تساوی داده شده اتحاد مربع سه جمله‌ای است. حاصل آن را نوشته و جمله‌ها را با هم ساده می‌کنیم:

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + 2a(-b) + 2a(-c) + 2(-b)(-c) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 2bc = 2ab + 2ac \Rightarrow bc = a(b+c) \Rightarrow a = \frac{bc}{b+c}$$

سؤال: دانش‌پژوه (نیره درفشان): آخه آقا از کجا باید می‌دونستیم که باید از چی فاکتور بگیریم و کدوم جمله رو ببریم اون ور تساوی؟

پاسخ: فب اولاً معلوم بود چون $2ab$ و $2ac$ علامتشون منفیه بهتر بود برن اون ور تساوی، در این صورت عامل مشترک $2a$ هستش دیگه که فقط از اون می‌شه فاکتور گرفت! مگه پیژ دیگه‌ای رو می‌شه فاکتور گرفت؟! دوماً چون در گزینه‌ها a یا c رو بر حسب بقیه داره می‌فهمیم که باید دنبال اوتا بگردیم.

سؤال: ۳۸۷ خب در عبارت خواسته شده، x ، y و z توان ۲ دارند، پس طرفین تساوی $x+y+z=6$ را به توان دو می‌رسانیم و از اتحاد مربع سه جمله‌ای

$$x+y+z=6 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x+y+z)^2 = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 36$$

$$\xrightarrow{2(xy+yz+xz=11)} x^2 + y^2 + z^2 + 2(11) = 36 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36 - 22 = 14$$

هل نشود. از داخل شروع به حل کنید. **۳۸۸**

$$[(x+2b)^2(x-2b)^2]^2 = [((x+2b)(x-2b))^2]^2 = [(x^2-4b^2)^2]^2 = (x^2-4b^2)^4$$

$$= [(x^2)^2 + (4b^2)^2 - 2(x^2)(4b^2)]^2 = [x^4 + 16b^4 - 8x^2b^2]^2$$

$$= (x^4)^2 + (16b^4)^2 + (-8x^2b^2)^2 + 2(x^4)(16b^4) + 2(x^4)(-8x^2b^2) + 2(16b^4)(-8x^2b^2)$$

$$= x^8 + 256b^8 + 64x^4b^4 + 32x^4b^4 - 16x^6b^2 - 256x^2b^6$$

جملات مشابه

$$= x^8 + 256b^8 + 96x^4b^4 - 16x^6b^2 - 256x^2b^6 \Rightarrow \text{۵ = تعداد جملات پس از ساده کردن}$$

سؤال: دانش‌پژوه (مهرداد حسینی): آقا اجازه! ما تویه جایی این سؤال رو دیدیم، فقط تا $(x^4 + 16b^4 - 8x^2b^2)^2$ رفته بود و بعدش گفته بود

چون اتحاد مربع سه جمله‌ای هست پس با توجه به فرمول اون جواب ۶ جمله است؟

پاسخ: فب اشتباه کرده. تو سؤال گفته پس از ساده کردن! همون‌طور که دیدی وقتی جمله‌ها رو ساده می‌کنیم ۵ تا جمله باقی می‌مونه، تو هم سعی

کن هر کتابی رو نپینی! فقط کتابای استاندارد رو ببین!

۳ ۸۹ تعداد جمله‌ها ۶ تا بوده و سه تا از جمله‌ها مربع کامل هستند. جذر آن‌ها برابر x ، $2y$ و z می‌شود. اگر کمی دقت کنیم می‌توانیم آن‌ها را به صورت اتحاد مربع سه جمله‌ای بنویسیم:

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz = x^2 + (2y)^2 + z^2 + 2(-2y)(x) + 2xz + 2(-2y)z = (x - 2y + z)^2$$

۳ ۹۰ ظاهر دو پرانتز به ما می‌گه که به احتمال زیاد، از اتحاد مزدوج می‌توانیم جواب را بیابیم. زیرا اعداد داخل پرانتزها عین هم هستند. پس:

$$\underbrace{(-\sqrt{18} - 3)}_{\text{فاکتور از منفی}} \underbrace{(-\sqrt{18} + 3)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = -\underbrace{(3 + \sqrt{18})(3 - \sqrt{18})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = -(3^2 - (\sqrt{18})^2) = -(9 - 18) = -(-9) = 9$$

۲ ۹۱

$$\underbrace{\left(x^{\frac{m}{2}} - y^{\frac{m+1}{2}}\right)\left(x^{\frac{m}{2}} + y^{\frac{m+1}{2}}\right)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \left(x^{\frac{m}{2}}\right)^2 - \left(y^{\frac{m+1}{2}}\right)^2 = x^m - y^{m+1}$$

سؤال: دانش‌پژوه (بهرام هشت‌گل): آقا مگه نباید جواب $\frac{m^2}{x^4} - \frac{(m+1)^2}{y^4}$ بشه؟

پاسخ: ببین وقتی می‌گم در طول سال، درس رو بفون، مباحث به هم ربط داره اینها! تو مبحث توان رو نفونری این‌جا می‌ای سؤال تکراری می‌پرسی. وقتی یه عبارت توان‌دار مثل $(x^a)^b$ داریم، توان‌ها در هم ضرب می‌شن، یعنی همیشه x^{ab} ، پس $\left(x^{\frac{m}{2}}\right)^2$ میشه x^m ، $x^{\frac{m}{2} \times 2} = x^m$.

۴ ۹۲ با استفاده از اتحاد مزدوج، حاصل را به دست می‌آوریم:

$$9997 \times 10003 = (10000 - 3)(10000 + 3) = (10000)^2 - 3^2 = 100000000 - 9 = 99999991$$

پس عدد حاصل، شامل ۷ رقم ۹ است.

۴ ۹۳ بهرام هشت‌گل! فکر کنم تو زیر لب داشتنی حرف‌هایی نثار این سؤال می‌کردی؟ به جای این کار به پیزیایی که می‌گم فوب گوش کن.

اگر به عبارت $3475^2 + 13050 \times 3475 - 9980 \times 10020 + 3475^2$ کمی دقت کنیم دو جمله‌ی 6525^2 و 3475^2 مربع کامل هستند، پس ممکن است بتوانیم اتحاد مربع دو جمله‌ای ایجاد کنیم که در این صورت نیاز به $2 \times 6525 \times 3475$ داریم که چه جالب، 13050×3475 برابر همان چیزی است که نیاز داشتیم. پس آن سه جمله، تشکیل اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌دهند. فقط یک جمله‌ی 9980×10020 باقی می‌ماند که با دقت کردن به دو عدد 10020 و 9980 متوجه می‌شویم که می‌توان آن‌ها را با استفاده از 10000 نوشت. داریم:

$$6525^2 + 2 \times 6525 \times 3475 + 3475^2 - 9980 \times 10020 = (6525 + 3475)^2 - (10000 - 20) \times (10000 + 20)$$

$$= (10000)^2 - ((10000)^2 - 20^2) = \cancel{10000^2} - \cancel{10000^2} + 20^2 = 400$$

۴ ۹۴ عبارت صورت کسر تابلوعه که اتحاد مزدوج است و در مخرج، قبل از هر کاری اعداد زیر رادیکال‌ها را تجزیه کرده و رادیکال‌ها را تا حد امکان ساده می‌کنیم. تجربه‌ی روزگار ثابت کرده که بعد از ساده‌سازی رادیکال‌ها معمولاً اعداد مشابهی در دو پرانتز ایجاد می‌گردند:

$$205^2 - 195^2 = (205 - 195)(205 + 195) = 10 \times 400 = 4000$$

$$\text{مخرج کسر} = (\sqrt{125} + 5)(\sqrt{4 \times 125} - 10) = (\sqrt{125} + 5)(2\sqrt{125} - 10) = 2(\sqrt{125} + 5)(\sqrt{125} - 5) = 2(125 - 25) = 2(100) = 200$$

بنابراین حاصل کسر برابر $\frac{4000}{200} = 20$ می‌شود.

۴ ۹۵ دو تا پرانتز داریم که جملات داخل آن‌ها عین هم هستند، فقط علامت یکی از آن‌ها با هم فرق دارد. پس اتحاد مزدوج می‌باشد. حال کافی است جملاتی که علامتشان در دو پرانتز مثل هم هستند را با هم بگیریم و سپس حاصل را به کمک اتحاد مزدوج بیابیم:

$$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = ((x^2 + y^2) + xy)((x^2 + y^2) - xy)$$

$$\underbrace{(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} = [(x^2)^2 + (y^2)^2 + 2(x^2)(y^2)] - x^2 y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 - x^2 y^2 = x^4 + y^4 + x^2 y^2$$

۳ ۹۶

$$\underbrace{(x + y + 1)(x - y - 1) + y(y + 2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (x + (y + 1))(x - (y + 1)) + y(y + 2)$$

$$= x^2 - (y + 1)^2 + y^2 + 2y = x^2 - (y^2 + 1 + 2y) + y^2 + 2y = x^2 - y^2 - 1 - 2y + y^2 + 2y = x^2 - 1$$

۹۷ ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) - 4a^2b^2 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$$

$$\text{حال } a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } b = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ را جایگذاری می‌کنیم:}$$

$$\text{جواب} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{9}{16} + 4\left(\frac{4}{16}\right) = \frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{25}{16}$$

سؤال: دانش‌پژوه (سارا معظمی‌پور): آقا چه کاریه؟! ما از همون اول اومدیم به جای a ، و به جای b ، گذاشتیم و مسأله رو حل کردیم.



پاسخ: می‌شه بگی چند ساعت طول کشید! آره فب اونم می‌شه ولی زمان هاش زیاده و تو آزمون ورودی آله این تست بیار، شما مدرسه‌ی درپیت هم قبول نمی‌شی با این نوع راه حل‌ها!

۹۸ چون جملات داخل دو پرانتز اول همه یکسان‌اند و فقط علامت‌های بعضی از آن‌ها فرق دارد، پس اتحاد مزدوج است. حال در دو پرانتز اول به دنبال جملاتی

$$(a + b - c + d)(a - b - c - d) + (b + d)^2 = (a - c + (b + d))(a - c - (b + d)) + (b + d)^2$$

اتحاد مزدوج

$$= (a - c)^2 - (b + d)^2 + (b + d)^2 = (a - c)^2 = a^2 + c^2 - 2ac$$

۹۹ راه اول: از بین سه پرانتز، فقط پرانتز وسط عدد کسری دارد. خب اول از همه در آن پرانتز مخرج مشترک می‌گیریم. داریم:

$$(8x^2 + 2)\left(x - \frac{1}{4}\right)(2x + 1) = (4x^2 + 1)\left(\frac{2x - 1}{4}\right)(2x + 1) = (4x^2 + 1)(2x - 1)(2x + 1)$$

اتحاد مزدوج

$$= (4x^2 + 1)((2x)^2 - 1^2) = (4x^2 + 1)(4x^2 - 1) = (4x^2)^2 - 1^2 = 16x^4 - 1$$

اتحاد مزدوج

راه دوم: با فرض $x = 1$ داریم:

$$(8x^2 + 2)\left(x - \frac{1}{4}\right)(2x + 1) \stackrel{x=1}{=} (8 + 2)\left(1 - \frac{1}{4}\right)(2 + 1) = 10 \times \frac{3}{4} \times 3 = 15$$

حال در گزینه‌ها هم به جای x ، عدد ۱ قرار می‌دهیم که فقط گزینه‌ی (۴) برابر ۱۵ می‌شود و جواب تست است.

۱۰۰ ظاهر عبارت داده شده که برایمان آشنا نمی‌باشد. اجازه بدهید در دو پرانتز اول از فاکتورگیری استفاده کنیم. شاید بعد از آن کار، قیافه‌ی پرانتزها

آشنا شدند:

$$(y^2 + yx)(zx - zy)(y^2 + x^2) = y(y + x)z(x - y)(y^2 + x^2) = yz(x^2 - y^2)(y^2 + x^2) = yz(x^4 - y^4) = yzx^4 - zy^5$$

فاکتور از y فاکتور از z اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج

۱۰۱

$$(x^2 + y^2)^2(x - y)^2 \stackrel{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}{=} (x^2 + y^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - 2xy) = (x^2 + y^2)^2(x - y)^2(x + y)^2$$

$$= (x^2 + y^2)^2((x - y)(x + y))^2 = (x^2 + y^2)^2(x^2 - y^2)^2 = ((x^2 + y^2)(x^2 - y^2))^2 = (x^4 - y^4)^2$$

اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج

۱۰۲ اگر اجازه بدین برای محاسبه‌ی $x^{-2}(A - C)B$ ابتدا $A - C$ را حساب کرده و سپس $(A - C)B$ را پیدا کنیم و در انتها عبارت حاصل را

در x^{-2} ضرب کنیم:

$$A - C = (1 - 3x^2) - (-x^2 - 3x + 1) = 1 - 3x^2 + x^2 + 3x - 1 = -2x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow (A - C)B = (-2x^2 + 3x)(2x^2 + 3x) = (3x - 2x^2)(3x + 2x^2) = (3x)^2 - (2x^2)^2 = 9x^2 - 4x^4 = x^2(9 - 4x^2)$$

اتحاد مزدوج فاکتور از x^2

بنابراین:

$$x^{-2}(A - C)B = x^{-2} \times x^2(9 - 4x^2) = 9 - 4x^2$$

۴۱۰۳ اگر از عدد ۲ در پرانتز اول فاکتور بگیریم. جملاتی حاصل می‌شوند که خیلی خوبند. یعنی با فاکتورگیری به $8 - \sqrt{65}$ می‌رسیم که با کمک $8 + \sqrt{65}$ تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند. بنابراین:

$$\begin{aligned} & (2\sqrt{65} - 16)^{\circ} (\sqrt{65} + 1)^{\circ} = (2(\sqrt{65} - 8))^{\circ} (\sqrt{65} + 1)^{\circ} = 2^{\circ} (\sqrt{65} - 8)^{\circ} (\sqrt{65} + 1)^{\circ} \\ & = 2^{\circ} \underbrace{((\sqrt{65} - 8)(\sqrt{65} + 1))^{\circ}}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 2^{\circ} (\sqrt{65}^2 - 8^2)^{\circ} = 2^{\circ} \underbrace{(65 - 64)}_1^{\circ} = 2^{\circ} \times 1^{\circ} = 2^{\circ} \end{aligned}$$

اما ۲۲۰ در گزینه‌ها نیست.

سؤال: دانش پروه (اکبر شمس‌الریاضی): آقا عیب نداره. بالاخره معلم‌ها هم گاهی اشتباه می‌کنن!

$$r^{\circ} = (r^{\circ})^{\circ} = r^{\circ}$$

پاسخ: اکبر! حیف گچ کہ بہ سمت تو پرتاب بشہ! یکم صبر داشته باش آفہ! ادامه ی حل رو ببین.

- اکبر فک کنم ضایع شدی!



۲۱۰۴ خوب دقت کنید. می‌خواهیم ماهی‌گیری یادتان دهیم! در این سؤال اگر کاری کنیم که توان‌ها شبیه هم شود آن‌گاه عبارت‌های $\sqrt{3} - \sqrt{3}$ و $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ در کنار هم می‌توانند تشکیل اتحاد مزدوج بدهند. پس توان ۱۰ را به صورت توان ۹ و توان ۱ می‌شکنیم. ببینید:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2} - \sqrt{3})^1 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})^1 &= (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})^1 (\sqrt{3} + \sqrt{2})^1 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})[(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2})]^1 \\
 &= (\sqrt{2} - \sqrt{3})((\sqrt{2})^1 - (\sqrt{3})^1) = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\underbrace{2 - 3}_{-1}) = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(-1) = \sqrt{3} - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

۲۱۰۵ توان عبارت $(2 + \sqrt{3})$ ، دو برابر توان عبارت $(7 - 4\sqrt{3})$ است. پس برای آن که توان‌ها یکی شود، آن را به صورت $(2 + \sqrt{3})^{2 \times 15}$ نوشته و حاصل $(2 + \sqrt{3})^2$ را به دست می‌آوریم که برابر $7 + 4\sqrt{3}$ می‌شود. چه جالب! حالا به دو عبارت $7 + 4\sqrt{3}$ و $7 - 4\sqrt{3}$ رسیدیم که در کنار هم می‌توانند

اتحاد مزدوج بسازند:

$$\begin{aligned}
 (2 + \sqrt{3})^2 \times (7 - 4\sqrt{3})^1 &= ((2 + \sqrt{3})^2)^1 \times (7 - 4\sqrt{3})^1 = (\underbrace{2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2(2)(\sqrt{3})}_7)^1 (7 - 4\sqrt{3})^1 \\
 &= (7 + 4\sqrt{3})^1 (7 - 4\sqrt{3})^1 = ((7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3}))^1 = (7^2 - (4\sqrt{3})^2)^1 = (49 - 48)^1 = 1^1 = 1
 \end{aligned}$$

اتحاد مزدوج

۱۰۶ توان‌های یکسان ۱۰ و علامت‌های + و - در دو پرنانتر دارد به ما اشاره می‌کند که شاید اتحاد مزدوج حاصل شود. پس باید خودمان را به در و دیوار بزنیم تا جملات داخل پرنانترها لیاقت اتحاد مزدوج شدن را پیدا کنند. شما هم دعا کنید:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{5\Delta} + \sqrt{\Delta\epsilon})^1 (\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3})^1 \stackrel{\substack{r=\sqrt{3^2} \\ r=\sqrt{2^2}}}{=} (\sqrt{5^2 \times 3} + \sqrt{5^2 \times 2})^1 \underbrace{(\sqrt{3^2}\sqrt{2} - \sqrt{2^2}\sqrt{3})^1}_{\text{فاكتور از}} \\ & = \underbrace{(\Delta\sqrt{3} + \Delta\sqrt{2})^1}_{\text{فاكتور از } \Delta} (\sqrt{3}\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}))^1 = \Delta^1 (\sqrt{3} + \sqrt{2})^1 (\sqrt{3}\sqrt{2})^1 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^1 \\ & = \Delta^1 \times 3^\Delta \times 2^\Delta \times \underbrace{[(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})]}_{\text{اتحاد مزدوج}}^1 = \Delta^1 \times \epsilon^\Delta (\sqrt{3} - \sqrt{2})^1 = (\Delta^2)^\Delta \times \epsilon^\Delta = (\Delta^2 \times \epsilon)^\Delta = (2\Delta \times \epsilon)^\Delta = 1\Delta. \Delta \end{aligned}$$

من که به هیچ عنوان از همان اول $x = 10$ را در عبارتی به آن بزرگی جای گذاری نمی‌کنم. چون بعدش محاسبه‌ی آن‌ها کلی زمان می‌گیرد. پس

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنم. همان‌طور که می‌بینید دو پرانتز $(X+1)$ و $(X-1)$ تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند و چون توان‌ها در پرانتزها به‌طور مداوم ۲ برابر می‌شوند، چند تا اتحاد مزدوج در پیش خواهیم داشت. حال آستین‌ها را بالا زده و صبور باشید:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(x-1)(x+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (x^7+1)(x^8+1)(x^9+1)(x^{16}+1) = \underbrace{(x^7-1)(x^7+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (x^8+1)(x^9+1)(x^{16}+1) \\ & = \underbrace{(x^8-1)(x^8+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (x^9+1)(x^{16}+1) = \underbrace{(x^9-1)(x^9+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (x^{16}+1) = \underbrace{(x^{16}-1)(x^{16}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = x^{32}-1 \end{aligned}$$

حال در عبارت حاصل، X را برابر 10° قرار می‌دهیم:

$$X^{32} - 1 = 10^{32} - 1 = \underbrace{999 \dots 99}_{16 \text{ 32}}$$

سؤال: دانش پژوه (اکبر پیکارا): آقا چرا ۳۲ تا؟



پاسخ: ببین مثلاً $(10^2 - 1)$ که برابر ۹۹ میشه، دوتا ۹ داره. هم چنین $(10^3 - 1)$ یعنی $999 = 1000 - 1$ سه تا ۹ داره. به همین ترتیب که جلو ببریم می‌تونیم بگیم $10^{32} - 1$ سی و دوتا ۹ داره.

۱۰۸ چون توان‌های ۲ در پرانتزها به‌طور مداوم ۲ برابر می‌شود، احتمالاً باید دنبال اتحاد مزدوج باشیم. پس طرفین تساوی داده شده در صورت سؤال را در $(2 - 1)$ ضرب می‌کنیم. دقت کنید این یک کار معمول در حل این نوع مسائل می‌باشد و شما باید آن را بلد باشید:

$$(2-1)A = \underbrace{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \Rightarrow A = \underbrace{(2^2-1^2)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \underbrace{((2^2)^2-1^2)(2^4+1)\dots(2^{64}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}$$

اگر همین کار را ادامه دهیم، جمله‌ها مرتباً با هم تشکیل اتحاد مزدوج می‌دهند و در آخر به جمله‌های زیر می‌رسیم:

$$A = \underbrace{(2^{32}-1)(2^{32}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = \underbrace{((2^{32})^2-1^2)(2^{64}+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (2^{64})^2 - 1^2 = 2^{128} - 1$$

سؤال: دانش پژوه (صبا امینی‌فرد): آقا مگه ریاضی کشکه؟! همین‌طوری طرفین تساوی رو در $(2 - 1)$ ضرب کردین؟



پاسخ: کشک که نیست ولی یادت باشه طرفین تساوی رو می‌تونیم در هر عبارت دلفواهی (غیر از صفر) که لازم داشته باشیم ضرب کنیم. پس نگران به قطر افتادن ریاضی نباش، تو نگران نمره‌ی امتحان پایان ترمیت باش!

۱۰۹ در این سؤال چندتا پرانتز داریم که علامت‌ها در هر پرانتز مثبت بوده و توان X به‌طور مداوم، ۲ برابر می‌شود. پس قابلیت ایجاد چندتا اتحاد مزدوج در آنها وجود دارد. برای حل از پرانتزی شروع می‌کنیم که کم‌ترین توان را دارد و کل تساوی را در $(1 - X)$ ضرب می‌کنیم تا اتحاد مزدوج حاصل شود و به همین ترتیب مجدداً اتحاد مزدوج ایجاد می‌شود و کار ادامه می‌یابد:

$$\begin{aligned} (1-X) \left[\frac{1-X^{16}}{A} = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)(1+X^8) \right] &\Rightarrow \frac{(1-X)(1-X^{16})}{A} = \underbrace{(1-X)(1+X)(1+X^2)(1+X^4)(1+X^8)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \\ \Rightarrow \frac{(1-X)(1-X^{16})}{A} &= \underbrace{(1-X^2)(1+X^2)(1+X^4)(1+X^8)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \Rightarrow \frac{(1-X)(1-X^{16})}{A} = \underbrace{(1-X^4)(1+X^4)(1+X^8)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \\ \Rightarrow \frac{(1-X)(1-X^{16})}{A} &= \underbrace{(1-X^8)(1+X^8)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \Rightarrow \frac{(1-X)(1-X^{16})}{A} = \cancel{(1-X^{16})} \Rightarrow \frac{1-X}{A} = 1 \Rightarrow A = 1-X \end{aligned}$$

۱۱۰ تو رو خدا می‌بینید که چندتا اتحاد مزدوج دنبال هم ردیف شده‌اند. آخه این همه می‌خواهند کجا بروند! خب تک‌تک پرانتزها را به کمک اتحاد مزدوج

$$\begin{aligned} &\text{تجزیه کرده و در نهایت اعداد حاصل را با هم ساده می‌کنیم:} \\ &(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{6})(1 - \frac{1}{7})(1 - \frac{1}{8})(1 - \frac{1}{9}) \\ &= (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{6})(1 + \frac{1}{6})(1 - \frac{1}{7})(1 + \frac{1}{7})(1 - \frac{1}{8})(1 + \frac{1}{8})(1 - \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{9}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{10}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$y^2 - x^2 = 56 \Rightarrow (y-x)(y+x) = 56 \xrightarrow{x+y=14} (y-x) \times 14 = 56 \Rightarrow y-x = \frac{56}{14} = 4$$

۱۱۱ بنابراین:

$$(x-y)^3 = (-(y-x))^3 = (-4)^3 = -64$$

$$x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 + (2y)^2 - 2(x)(2y) = 0 \Rightarrow (x-2y)^2 = 0 \Rightarrow x-2y = 0 \quad (*)$$

۱۱۲ راه اول:

بنابراین:

$$x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x-2y)(x+2y) \stackrel{(*)}{=} 0 \times (x+2y) = 0$$

راه دوم: قرار دادن $x = y = 0$ و رسیدن به گزینه‌ی (۴)

۳۱۱۳

قبل از دست زدن به هر کاری عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A = x^5 y^4 + x^4 y^5 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x^4 y^4 (x + y) = (xy)^4 (x + y)$$

حال با خیال راحت به جای x و y به ترتیب $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ را قرار می‌دهیم:

$$A = \underbrace{[(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})]}_{\text{اتحاد مزدوج}}^4 (2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}) = (2^2 - \sqrt{3}^2)^4 (4) = (4 - 3)^4 (4) = 1 \times 4 = 4$$

۳۱۱۴

$$xy^5 - yx^5 \xrightarrow[\text{اتحاد مزدوج}]{\text{فاکتور از } xy} xy(y^4 - x^4) = xy \underbrace{(y^2 - x^2)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (y^2 + x^2) = xy(y - x)(y + x)(y^2 + x^2)$$

۱۱۱۵ راه اول:

$$\underbrace{(x + b)^2 - (x - a)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} = ((x + b) + (x - a))((x + b) - (x - a)) = (2x + b - a)(b + a) = 2x(b + a) + (b - a)(b + a) = 2Ax + B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = b + a \\ B = (b - a)(b + a) \end{cases} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{(b - a)(b + a)}{b + a} = b - a$$

راه دوم:

$$\begin{aligned} (x + b)^2 - (x - a)^2 &= \underbrace{(x^2 + b^2 + 2bx)}_{\text{فاکتور از } 2x} - \underbrace{(x^2 + a^2 - 2ax)}_{\text{فاکتور از } 2x} = 2bx + 2ax + b^2 - a^2 \\ &= 2(a + b)x + b^2 - a^2 = 2Ax + B \Rightarrow A = a + b, B = b^2 - a^2 \end{aligned}$$

ادامه حل مثل راه اول است.

۱۱۱۶ راه اول:

با فرض $a = x = 1$ و $b = y = 2$ داریم:

$$(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (1 \times 1 + 2 \times 2)^2 - (1 \times 2 + 2 \times 1)^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

حال اگر در گزینه‌ها به جای a عدد x و به جای b عدد y عدد ۲ قرار دهیم، فقط گزینه‌ی (۱) برابر ۹ می‌شود.

راه دوم: خب خیلی شیک و مجلسی چون دو تا جمله‌ی مربع کامل داریم که بین آن‌ها علامت منفی وجود دارد، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. بسم!...

$$(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = ((ax + by) - (ay + bx))((ax + by) + (ay + bx)) = (ax + by - ay - bx)(ax + by + ay + bx)$$

اما می‌بینید که در گزینه‌ها خبری از عبارت‌های بالا نیست. پس عمل تجزیه را باید ادامه بدهیم. در هر کدام از پرانتزها به گونه‌ای دسته‌بندی را انجام می‌دهیم که در جملات، قسمت‌های یکسانی برای فاکتورگیری ایجاد شود:

$$\begin{aligned} &= ((ax - bx) + (by - ay))((ax + bx) + (by + ay)) = \underbrace{(x(a - b) - y(a - b))}_{\text{فاکتور از } a - b} \underbrace{(x(a + b) + y(a + b))}_{\text{فاکتور از } a + b} \\ &= \underbrace{(a - b)}_{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(x - y)(a - b)(x + y)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

حتماً در این مسأله به اهمیت و کارایی ویژه‌ی روش عددگذاری پی برده‌اید.

راه سوم:

$$\begin{aligned} (ax + by)^2 - (ay + bx)^2 &= \underbrace{a^2 x^2 + b^2 y^2 + 2abxy}_{\text{فاکتور از } x^2} - \underbrace{(a^2 y^2 + b^2 x^2 + 2abxy)}_{\text{فاکتور از } y^2} \\ &= \underbrace{(a^2 x^2 - b^2 x^2)}_{\text{فاکتور از } x^2} + \underbrace{(b^2 y^2 - a^2 y^2)}_{\text{فاکتور از } y^2} = \underbrace{(a^2 - b^2)x^2 - (a^2 - b^2)y^2}_{\text{فاکتور از } a^2 - b^2} = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

۱۱۱۷ بنا به اتحاد مزدوج داریم:

$$a - \frac{1}{a} \xrightarrow{a = (\sqrt{a})^2} (\sqrt{a})^2 - \frac{1}{(\sqrt{a})^2} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \times \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \quad (*)$$

از طرفی بنا به فرض داریم $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ ، بنابراین:

$$a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \xrightarrow{(*)} \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = 1$$

حال برای آن‌که حاصل $a + \frac{1}{a}$ را بیابیم، کافی است طرفین تساوی به دست آمده را به توان ۲ برسانیم:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow a + \frac{1}{a} - 2\left(\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\right) = 1 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 1 + 2 = 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) - 1 = \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1}_{\text{اتحاد مربع سه جمله ای}} = \underbrace{(x + y + z)^2 - 1}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (x + y + z - 1)(x + y + z + 1)$$

۱۱۸

$$\underline{x^2 - z^2} + \underline{y^2 + 1} + \underline{2xy - 2x - 2y} = (x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y) - z^2 = \underbrace{(x + y - 1)^2 - z^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (x + y - 1 - z)(x + y - 1 + z)$$

۱۱۹

سؤال: دانش پزوه (مهری حسینی): آقا از کجا فهمیدین که باید $-z^2$ رو جدا بگیرین؟



پاسخ: آفه در اتحاد مربع سه جمله ای سه تا مربع کامل لازم داریم و می دونیم مربع کامل در اون اتحاد، پشتش منفی نداره، پس $-z^2$ نمی تونه جزء اتحاد ما باشه، پس اونو بی خیال می شیم و روی بقیه کار می کنیم که توی اونا سه تا جمله ی مربع کامل x^2 ، y^2 و 1 رو پیدا کردیم.

۴۱۲۰ باز هم یک تست طولانی و حوصله سربر! بیشتر به دیر تمرین تشریحی به اون نگاه کنید!

بررسی گزینه ها:

گزینه ی (۱): $(x - \frac{3}{x})(x + \frac{1}{x}) \stackrel{\text{جمله ی مشترک}}{\underset{\text{عدد } x \text{ است}}{=}} x^2 + (-\frac{3}{x} + \frac{1}{x})(x) + (-\frac{3}{x})(\frac{1}{x}) = x^2 - \frac{2}{x} \times \cancel{x} - \frac{3}{x^2} = x^2 - 2 - 3x^{-2}$ ✓

گزینه ی (۲): $(4 - 3x)(5x + 4) \stackrel{\text{جمله ی مشترک}}{\underset{\text{عدد } 4 \text{ است}}{=}} 4^2 + (-3x + 5x)(4) + (-3x \times 5x) = 16 + 8x - 15x^2$ ✓

گزینه ی (۳): $(x - c)(b + x) \stackrel{\text{جمله ی مشترک}}{\underset{\text{عدد } x \text{ است}}{=}} x^2 + (b - c)x - bc$ ✓

گزینه ی (۴): $(2x - y)(2x + 2y) \stackrel{\text{جمله ی مشترک}}{\underset{\text{عدد } 2x \text{ است}}{=}} (2x)^2 + \underbrace{(-y + 2y)}_{+y}(2x) + (-y) \times 2y = 4x^2 + 2yx - 2y^2$ ✗

۲۱۲۱ بررسی گزینه ها:

گزینه ی (۱): $x^2 - x + 0/21 \stackrel{\text{دو عدد پیدا می کنیم که ضربشان ۰/۲۱ و جمعشان -۱ شود}}{=} (x - 0/7)(x - 0/3)$ ✓

گزینه ی (۲): $3x^2 + 3x - 36 = 3(x^2 + x - 12) \stackrel{\text{دو عدد پیدا می کنیم که ضربشان -۱۲ و جمعشان +۱ شود}}{=} 3(x + 4)(x - 3) \stackrel{\text{۳ را در پرانتز دوم ضرب می کنیم}}{=} (x + 4)(3x - 9)$ ✗

گزینه ی (۳): $x^2 y^2 + 16xy - 36 = (xy)^2 + 16(xy) - 36 \stackrel{\text{دو عدد پیدا می کنیم که ضربشان -۳۶ و جمعشان ۱۶ شود}}{=} (xy + 18)(xy - 2)$ ✓

گزینه ی (۴): $9x^2 - 21x + 10 = (3x)^2 - 7(3x) + 10 \stackrel{\text{دو عدد پیدا می کنیم که ضربشان ۱۰ و جمعشان -۷ شود}}{=} (3x - 5)(3x - 2)$ ✓

البته کار راحت تر برای حل تست این است که سمت راست تساوی ها را در هم ضرب کرده و با سمت چپ آن ها مقایسه کنیم. گرچه هدف این تست تجزیه کردن است!

۴۱۲۲ راه اول: با استفاده از اتحاد جمله مشترک داریم: $(x + a)(x + b) - (x - a)(x - b) = (x^2 + (a + b)x + ab) - (x^2 + (-a - b)x + (-a)(-b))$

$$= \cancel{x^2} + (a + b)x + \cancel{ab} - \cancel{x^2} - (-a - b)x - \cancel{ab} = (a + b)x + (a + b)x = 2(a + b)x$$

راه دوم: با فرض $x = a = b = 1$ داریم:

$$(x + a)(x + b) - (x - a)(x - b) = (1 + 1)(1 + 1) - \underbrace{(1 - 1)(1 - 1)}_0 = 4$$

حال اگر در گزینه ها هم a ، b و x را برابر یک قرار دهیم، فقط گزینه ی (۴) برابر ۴ می شود و جواب است.

۱۱۲۳ در دو پرانتز $(x + y - 2)$ و $(x - 5 + y)$ دو جمله ی x و y تکرار شده اند، پس $x + y$ جمله ی مشترک اند. حال می توان حاصل ضرب پرانتزها را

به کمک اتحاد جمله مشترک به دست آورد:

$$\begin{aligned} (x + y - 2)(x - 5 + y) - (x + y)^2 &= \underbrace{((x + y) - 2)((x + y) - 5)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} - (x + y)^2 \\ &= \cancel{(x + y)^2} + (-2 - 5)(x + y) + (-2)(-5) - \cancel{(x + y)^2} = -7(x + y) + 10 = -7x - 7y + 10 \end{aligned}$$