

درس‌نامه + پرسش‌های چهار گزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

هندسه ۳ (دوازدهم)

ویراست دوم

حسن محمدیگی، امیر محمد هویدی



انتشارات
آلگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای هندسه سال دوازدهم نوشته‌ایم. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است و هر درس از دو بخش تشکیل شده است:

۱. خلاصه درس: در این بخش، ضمن مرور مطالب کتاب درسی، نمونه‌هایی از پرسش‌های چهارگزینه‌ای را هم حل کرده‌ایم، تا خواننده با تکنیک‌های اصلی حل این گونه پرسش‌ها آشنا شود. تقسیم‌بندی درس‌ها مانند کتاب درسی است. چون هدف این کتاب آموزش مهارت‌های حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای است، اثبات قضیه‌ها و نکته‌ها را نیاورده‌ایم.

۲. پرسش‌های چهارگزینه‌ای: در پایان هر درس مجموعه‌ای از پرسش‌های چهارگزینه‌ای مربوط به آن درس را آورده‌ایم. در این قسمت، از همه مطالب کتاب درسی پرسش‌هایی طرح کرده‌ایم. علاوه بر این‌ها، تعداد زیادی پرسش تألیفی به همراه پرسش‌های کنکورهای سال‌های قبل هم آورده‌ایم. راه حل همه پرسش‌ها در فصل چهارم قرار دارد. برای مطالعه این کتاب، ابتدا باید خلاصه درس را با دقت بخوانید و مطمئن شوید که روش‌های حل کردن پرسش‌های آن را یاد گرفته‌اید. سپس به حل کردن پرسش‌های انتهای درس بپردازید. با این کار، علاوه بر این که مطالب درسی را به‌طور کامل مرور می‌کنید، با انواع مختلف پرسش‌های چهارگزینه‌ای آشنا می‌شوید.

در این ویراست تعدادی پرسش چهارگزینه‌ای اضافه کرده‌ایم. همچنین پرسش‌های هر مبحث از درس را به سه دسته تقسیم کرده‌ایم. در دسته اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در دسته دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شوند. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های دسته اول است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم. در دسته سوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها بالاتر از پرسش‌های دسته دوم است. تعداد این پرسش‌ها زیاد نیست و حل آن‌ها به دانش‌آموزان مستعد و سخت‌کوش توصیه می‌شود. این دسته از پرسش‌ها ممکن است در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری مطرح شوند ولی فراوانی آن‌ها کم است.

به یاد داشته باشید که سرعت مطالعه هندسه کمتر از درس‌های دیگر است. سعی کنید درباره آنچه که می‌خوانید تفکر و تأمل کنید، نه این که سرسری مطالب را حفظ کنید. حتماً به استدلال‌ها دقت کنید و مطمئن شوید می‌فهمید که چرا این کارها را در راه حل‌ها انجام داده‌ایم. هنگام مطالعه همیشه کاغذ و قلم کنار خود داشته باشید و هر گاه به مسئله‌ای رسیدید، پیش از این که راه حل آن را از روی کتاب بخوانید، سعی کنید خودتان آن را حل کنید و اگر نتوانستید آن را حل کنید، راه حلش را ببینید.

اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعه هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «هندسه ۳ سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها عاطفه ربیعی، فهیمه گودرزی و آقای آریس آقانیانس برای مطالعه و ویرایش کتاب، راضیه صالحی برای صفحه آرایی و سکینه مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی انتشارات الگو تشکر کنیم.

مؤلفان

فهرست

◆ فصل اول: ماتریس و کاربردها

۲	درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
۱۶	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۲۶	درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان
۵۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

۷۲	درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی
۷۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۸۳	درس دوم: دایره
۱۰۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۱۲	درس سوم: بیضی و سهمی
۱۳۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◆ فصل سوم: بردارها

۱۵۰	درس اول: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$
۱۶۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۷۴	درس دوم: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها
۱۸۹	پرسش‌های چهارگزینه‌ای



◆ فصل چهارم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۲۰۰

◆ فصل پنجم: پاسخنامهٔ کلیدی

پاسخنامهٔ کلیدی ۳۰۸

◆ کنکور سراسری ۹۹

کنکور سراسری ۹۹ ۳۱۱

◆ کنکور سراسری ۱۴۰۰

کنکور سراسری ۱۴۰۰ ۳۱۳

◆ کنکور سراسری ۱۴۰۱

کنکور سراسری ۱۴۰۱ ۳۱۵

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس

تعریف هر آرایش مستطیل شکل از عددهای حقیقی، که شامل تعدادی سطر و ستون است یک **ماتریس** است. به هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس یک «**درایه**» آن ماتریس می‌گوییم.

درایه‌های ماتریس را با دو کروشه محصور می‌کنیم و معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ لاتین مانند A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

مرتبه ماتریس

ماتریسی که m سطر و n ستون دارد، ماتریس از مرتبه $m \times n$ (بخوانید m در n) است.

توجه حاصل ضرب $m \times n$ تعداد درایه‌های ماتریس را نشان می‌دهد.

ماتریس‌های هم‌مرتبه

اگر تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس با هم و تعداد ستون‌های آن دو ماتریس نیز با هم برابر باشند، آن دو ماتریس را **هم‌مرتبه** می‌گوییم.

نمایش کلی درایه‌ها

در ماتریس دلخواه A، درایه واقع در تقاطع سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نشان می‌دهیم.

در حالت کلی، ماتریس A از مرتبه $m \times n$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اغلب ماتریس‌ها را به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ می‌نویسیم ($1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$). به a_{ij} **درایه عمومی** ماتریس A می‌گوییم.

نتیجه

تست ۱ اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ij} = 7$ ، برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = 5$ و برای $i < j$ داشته باشیم

$a_{ij} = -2$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A چقدر است؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۸ (۱)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

با توجه به اطلاعات سؤال درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{مجموع درایه‌های ماتریس } A = 7 - 2 + 5 + 7 = 17$$

راه حل

تست ۲ مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A = [2i^2 - 3j]_{3 \times 3}$ چقدر است؟

۱۲ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

با توجه به تعریف، $a_{ij} = 2i^2 - 3j$. بنابراین $a_{12} = 2 - 6 = -4$ ، $a_{22} = 8 - 6 = 2$ و $a_{32} = 18 - 6 = 12$. اکنون به دست می‌آید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس } A = a_{12} + a_{22} + a_{32} = -4 + 2 + 12 = 10$$

راه حل

معرفی چند ماتریس خاص

(۱) **ماتریس صفر** ماتریسی است که تمام درایه‌های آن صفر است. ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

مثال:

$$\bar{O} = [\bar{o}]_{1 \times 1} = 0, \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \quad \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(۲) **ماتریس سطری** ماتریسی است که یک سطر دارد. در حالت کلی مرتبه ماتریس سطری به صورت $1 \times n$ است.

مثال: ماتریس‌های زیر سطری‌اند.

$$A = [4]_{1 \times 1}, \quad B = [1 \quad -1 \quad 3]_{1 \times 3}, \quad C = [0 \quad -1 \quad \pi \quad \sqrt{2}]_{1 \times 4}$$

(۳) **ماتریس ستونی** ماتریسی است که یک ستون دارد. در حالت کلی مرتبه ماتریس ستونی به صورت $m \times 1$ است.

مثال: ماتریس‌های زیر ستونی‌اند.

$$A = [-1]_{1 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{5 \times 1}$$

(۴) **ماتریس مربعی** ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند.

توجه: اگر یک ماتریس مربعی از مرتبه $n \times n$ باشد، به جای اینکه بگوییم ماتریس از مرتبه $n \times n$ ، می‌گوییم «ماتریس مربعی از مرتبه n ».

تذکر

در ماتریس مربعی $A_{n \times n}$ درایه‌ها را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

$$a_{ij} \begin{cases} i = j \rightarrow \text{روی قطر اصلی است} \\ i < j \rightarrow \text{بالای قطر اصلی است} \\ i > j \rightarrow \text{پایین قطر اصلی است} \\ i + j = n + 1 \rightarrow \text{روی قطر فرعی است} \end{cases}$$

مثال: ماتریس‌های زیر مربعی‌اند.

$$A = [4]_{1 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(۵) **ماتریس قطری** ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر است. به عبارت دیگر،

$$A \Leftrightarrow A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$$

توجه: در ماتریس قطری درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.

مثال: ماتریس‌های زیر قطری‌اند.

$$A = [4], \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(۶) **ماتریس اسکالر** ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

مثال: ماتریس‌های زیر اسکالرند.

$$A = [-6]_{1 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

(۷) **ماتریس همانی (واحد)** ماتریس اسکالری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ است. ماتریس همانی از مرتبه n را با I_n

$$I_n = [\delta_{ij}]_{n \times n} \text{ آن گاه } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر

مثال: ماتریس‌های زیر همانی‌اند.

$$I_1 = [1]_{1 \times 1}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس A و B **مساوی** هستند، اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

(۱) ماتریس‌ها هم‌مرتبه باشند. (۲) درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

به عبارت دیگر، دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ مساوی هستند اگر

$$(۱) \quad m = p \text{ و } n = q, \quad (۲) \quad \text{به ازای هر } i \text{ و } j, \quad a_{ij} = b_{ij}.$$

در این حالت می‌نویسیم $A = B$.

تست ۳ اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ چقدر است؟

(۴) ۱۸

(۳) ۱۵

(۲) ۹

(۱) -۱

چون $A = B$ ، پس $x-y=3$ و $x+y=9$ ، $z-1=5$ و $x+y+z=15$ در نتیجه $x=6$ و $y=3$ ، $z=6$ ، بنابراین $x+y+z=15$.

راهنما

جمع ماتریس‌ها

برای جمع کردن یا کم کردن دو ماتریس هم‌مرتبه کافی است درایه‌های نظیر را با هم جمع یا از هم کم کنیم.

به عبارت دیگر، اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ، آن‌گاه

$$A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}, \quad A-B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$$

تست ۴ اگر $[i]_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} m & -6 \\ -1 & n \end{bmatrix} = [i^2 - 3j]_{2 \times 2}$ ، مقدار $m+n$ چقدر است؟

(۴) صفر

(۳) -۷

(۲) -۵

(۱) -۶

از تساوی داده شده به دست می‌آید $[i^2 - 3j] - [i] = [i^2 - i - 3j]$ اگر $\begin{bmatrix} m & -6 \\ -1 & n \end{bmatrix} = [i^2 - i - 3j]$ ، چون $a_{11} = m$ و

$$a_{22} = n, \quad \text{پس } a_{11} = m = 1 - 1 - 3 = -3 \text{ و } m = 1 - 1 - 3 = -3, \quad n = 4 - 2 - 6 = -4, \quad \text{بنابراین } m+n = -3 - 4 = -7.$$

راهنما

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

برای هر عدد حقیقی r ، حاصل ضرب r در ماتریس A ، یعنی rA ، یک ماتریس هم‌مرتبه با ماتریس A است، به طوری که اگر $rA = [d_{ij}]$ ،

آن‌گاه $d_{ij} = ra_{ij}$ ، یعنی هر درایه ماتریس rA از ضرب عدد حقیقی r در درایه نظیرش در ماتریس A به دست می‌آید.

مثال:

$$\bullet (-1) \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\bullet 0 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}_{3 \times 3}$$

قرینه یک ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. **قرینه** A ماتریسی $m \times n$ است که از حاصل ضرب عدد -1 در ماتریس A به وجود می‌آید. این ماتریس را با $-A$ نمایش می‌دهیم، یعنی $-A = (-1)A$.

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A ، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه

$$(۱) \quad A + B = B + A \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی جمع}), \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{خاصیت شرکت‌پذیری جمع}),$$

$$(۳) \quad A + \bar{O} = \bar{O} + A = A \quad (\text{عضو خنثی برای عمل جمع}), \quad A + (-A) = (-A) + A = \bar{O} \quad (\text{خاصیت عضو قرینه}),$$

$$(۵) \quad r(A \pm B) = rA \pm rB, \quad (r \pm s)A = rA \pm sA \quad (۶)$$

$$(۷) \quad (rs)A = r(sA), \quad 1A = A$$

$$(۹) \quad r\bar{O} = \bar{O} \text{ و } 0A = \bar{O}, \quad (۱۰) \quad \text{اگر } rA = rB \text{ و } r \neq 0 \text{، آن‌گاه } A = B$$

$$(۱۱) \quad \text{اگر } A = B \text{، آن‌گاه } rA = rB$$

تست
□□□□

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $2A - B = I$ ، ماتریس B کدام است؟

$$(۱) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{از برابری } 2A - B = I \text{ به دست می‌آید: } B = 2A - I = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

راه‌حل

تست
□□□□

اگر $A = [i - j]_{2 \times 2}$ ، $B = [i + j]_{2 \times 2}$ و ماتریس‌های X و Y جواب‌های دستگاه $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$ باشند، مجموع درایه‌های

ماتریس $2X + Y$ چقدر است؟

$$(۱) \quad 8 \quad (۲) \quad 7 \quad (۳) \quad 11 \quad (۴) \quad 6$$

ابتدا دو معادله داده شده را با هم جمع می‌کنیم: $2X = A + B$. اکنون دو معادله را از هم کم می‌کنیم:

$$2Y = A - B \Rightarrow Y = \frac{A - B}{2}$$

$$\text{در نتیجه } 2X + Y = A + B + \frac{A - B}{2} = \frac{3A + B}{2} = \frac{3[i - j] + [i + j]}{2} = \frac{3(i - j) + i + j}{2} = [2i - j]_{2 \times 2}$$

$$\text{پس } 2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس } 2X + Y \text{ برابر است با } 1 + 0 + 3 + 2 = 6.$$

راه‌حل

ضرب ماتریس‌ها

شرط ضرب‌پذیری دو ماتریس

ضرب ماتریس A در ماتریس B را به صورت AB نشان می‌دهیم. این ضرب زمانی وجود دارد که تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B باشد.

مرتبه ماتریس AB

اگر A ماتریس $m \times n$ و B ماتریس $n \times p$ باشد، آن‌گاه $C = AB$ از مرتبه $m \times p$ است: $A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$.

تست
□□□

اگر A ماتریسی از مرتبه 3×4 ، C ماتریسی از مرتبه 3×5 باشد و $AB = C$ ، مرتبه ماتریس B کدام است؟

۴ × ۵ (۴)

۵ × ۴ (۳)

۳ × ۵ (۲)

۳ × ۴ (۱)

را حل

چون ماتریس AB تعریف شده است، پس تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر است، یعنی تعداد سطرهای B برابر ۴ است. در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۴) این ویژگی را دارد.

تست
□□□

اگر ضرب ماتریسی $A_{2 \times 3} (B_{m \times n} C_{3 \times 5})$ تعریف شده باشد، مقدار $m+n$ چقدر است؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

را حل

برای تعریف شدن ماتریس BC باید $n=3$. فرض کنید $D=BC$ ، در این صورت D ماتریسی $m \times 5$ است. از طرف دیگر، برای تعریف شدن ضرب ماتریسی $A_{2 \times 3} D_{m \times 5}$ باید $m=3$. بنابراین $m+n=3+3=6$.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر $A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]_{1 \times n}$ و $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1}$ ، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$AB = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 4 \times 2 = 2 - 3 + 8 = 7$$

تست
□□□

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & m \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} m+1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $A \times B = -7$ ، مقدار m کدام است؟

۱۲ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

را حل

بنابر تعریف بالا می‌نویسیم: $A \times B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = m+1-6-2m = -m-5$. بنابر فرض مسئله $A \times B = -7$ اکنون می‌نویسیم:

$$-m-5 = -7 \Rightarrow m = 2$$

ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی

حاصل ضرب ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ در ماتریس $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ مانند $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ است که در آن درایه c_{ij} از آن برابر است با ضرب سطر i ام A در ستون j ام B :

$$c_{ij} = [A \text{ سطر } i] \times [B \text{ ستون } j] = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

مثال: در ضرب زیر درایه سطر دوم و ستون سوم حاصل ضرب را به دست آورده‌ایم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{توجه: درایه سطر دوم و ستون سوم} = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times (-2) = -2$$

تست
□□□□

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = AB$ ، مقدار c_{23} کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۲۹ ۴) ۲۴

توجه کنید که $c_{23} = [A \text{ سطر دوم}] [B \text{ ستون سوم}] = \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 28 + 1 = 29$

را حل

تست
□□□□

اگر $A = [2i - 3j]_{3 \times 3}$ و $B = [i + i^2]_{3 \times 3}$ ، درایه واقع در سطر سوم و ستون سوم ماتریس AB چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۵ ۳) ۱۸ ۴) -۳۰

فرض می‌کنیم $C = AB$ در این صورت

$$c_{33} = [A \text{ سطر سوم}] [B \text{ ستون سوم}] = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = 6 + 0 - 36 = -30$$

را حل

تست
□□□□

اگر $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & b & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $C = AB = [c_{ij}]$ ، به طوری که $c_{13} = -2$ و $c_{22} = 0$ ، مقدار $a + b$ چقدر است؟

۱) -۵ ۲) -۶ ۳) ۶ ۴) ۵

چون $c_{13} = -2$ ، پس $\begin{bmatrix} a & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3a + 2 - 1 = -2$ ، یعنی $a = -1$. همچنین از $c_{22} = 0$ به دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2b + 8 = 0 \Rightarrow b = -4$$

یعنی $b = -4$. اکنون به دست می‌آید $a + b = -1 - 4 = -5$.

را حل

تست ۱۳

مجموع ریشه‌های معادله $= 0$ کدام است؟ $\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) -۴

ضرب‌های سمت چپ را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} -x+1 & -2x-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \frac{1}{2}$$

$$x(-x+1)+2(-2x-1)+0=0$$

$$-x^2-3x-2=0$$

یعنی

بنابراین $x_1 = -2$ و $x_2 = -1$ ، در نتیجه $x_1 + x_2 = -3$.

راه‌حل

تست ۱۴

اگر $A = \begin{bmatrix} a & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ b & -8 \end{bmatrix}$ ، مقدار $a+b$ چقدر است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

از تساوی $AB - BA = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $AB = BA$. اکنون می‌نویسیم

$$AB = \begin{bmatrix} -2a+5b & 10a-40 \\ -4+3b & -4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -2a+20 & 20 \\ ab-16 & 5b-24 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} 10a-40=20 \\ 5b-24=-4 \end{cases}$$

بنابراین $a=6$ و $b=4$ ، پس $a+b=10$.

راه‌حل

تست ۱۵

اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبه ۲ باشند، کدام گزینه می‌تواند $AB - BA$ باشد؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix}$ در این صورت

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bp & ay+bq \\ cx+dp & cy+dq \end{bmatrix}$$

و

$$BA = \begin{bmatrix} x & y \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ ap+cq & bp+dq \end{bmatrix}$$

چون مجموع درایه‌های روی قطر اصلی AB و BA با هم برابرند، پس مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $AB - BA$ برابر صفر است. در بین گزینه‌ها فقط گزینه (۳) این ویژگی را دارد.

راه‌حل

تذکر

اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد، آنگاه منظور از A^2 یعنی $A \times A$ ، A^3 یعنی $A^2 \times A$ و ...

تست ۱۶

اگر $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $x = y = -1$ (۲) $x = -y = -1$ (۳) $x = y = 1$ (۴) $x = -y = 1$

راه حل

چون $A^2 = A \times A$ ، پس

$$A^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y & xy - y \\ x - 1 & y + 1 \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر، چون $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، پس $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 1 = 2 \end{cases}$ ، در نتیجه $x = 1$ و $y = 1$.

تست ۱۷

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^3 + A^4$ کدام است؟

- (۱) $\bar{O}$ (۲) I (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) A

راه حل

با محاسبه ماتریس A^3 به دست می آید $A^3 = \bar{O}$ ، پس $A^4 = \bar{O}$ و در نهایت، $A^3 + A^4 = \bar{O} + \bar{O} = \bar{O}$.

تست ۱۸

اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های ماتریس A^5 چقدر است؟

- (۱) -3^7 (۲) 3^7 (۳) -3^6 (۴) 3^6

راه حل

ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = -3A$$

دو طرف برابری $A^2 = -3A$ را در A ضرب می کنیم: $A^3 = -3A^2 = -3(-3A) = (-3)^2 A$. به همین صورت می توان نتیجه

گرفت $A^n = (-3)^{n-1} A$. در نتیجه

$$A^5 = (-3)^4 A = 81A = \begin{bmatrix} -81 & -81 & -81 \\ -81 & -81 & -81 \\ -81 & -81 & -81 \end{bmatrix}$$

اکنون به دست می آید $9 \times (-81) = -3^6$ مجموع درایه های ماتریس A^5 .

تست ۱۹

اگر $A = \begin{bmatrix} 120 & 144 \\ -100 & -120 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{1399} کدام است؟

- (۱) A (۲) $-A$ (۳) $\bar{O}$ (۴) $4A$

راه حل

ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم: $A^2 = \begin{bmatrix} 120 & 144 \\ -100 & -120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 & 144 \\ -100 & -120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$. بنابراین $A^{1399} = \bar{O}$.

تست

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $(A+I)^6 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، مقدار $a-b$ چقدر است؟

۳۶ (۴)

۱ (۳)

۶ (۲)

صفر (۱)

راه حل

می‌نویسیم $A+I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ اکنون $(A+I)^2$ و $(A+I)^3$ را به دست می‌آوریم تا شاید بتوان از روی

آنها جواب را به دست آورد:

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad (A+I)^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

در تمام ماتریس‌های بالا اگر درایه واقع در سطر اول و ستون دوم را از درایه واقع در سطر اول و ستون اول کم کنیم، حاصل برابر ۱ می‌شود، پس می‌توان حدس زد که $a-b=1$. توجه کنید که این استدلال برای تست به کار می‌رود و در مسئله‌های تشریحی جواب نمی‌دهد.

تست

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس A^n برابر ۱۳۹۹ باشد، مقدار n کدام است؟

۱۳۹۸ (۴)

۱۳۹۷ (۳)

۱۳۹۶ (۲)

۱۳۹۵ (۱)

راه حل

ابتدا ماتریس‌های A^2 و A^3 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون می‌توان حدس زد که $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. بنابراین فرض باید $n+2=1399$ ، در نتیجه $n=1397$.

ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

ویژگی ۱) ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی در حالت کلی نمی‌توان گفت $AB=BA$.

نکته

(۱) ماتریس‌های به شکل $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ با هم جابه‌جایی دارند. (۲) ماتریس‌های به شکل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ با هم جابه‌جایی دارند.

ویژگی ۲) برای سه ماتریس ضرب شونده A ، B و C خاصیت شرکت‌پذیری برقرار است یعنی $A(BC)=(AB)C$.

تست

اگر $AB=A$ و $BA=B$ ، ماتریس A^2 کدام است؟

 $\bar{O}$ (۴)

I (۳)

B (۲)

A (۱)

راه حل

می‌نویسیم $A^2 = AA = (AB)A = A(BA) = AB = A$.

نکته

اگر $ABC=D=[d_{ij}]$ ، آن‌گاه برای پیدا کردن درایه واقع بر سطر i ام و ستون j ام ماتریس D به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$d_{ij} = [A \text{ سطر } i] B [C \text{ ستون } j]$$

تست
 □□□□

 اگر $A = [i-j]_{3 \times 3}$ ، درایه واقع بر سطر دوم و ستون سوم ماتریس A^3 کدام است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴)

راه حل

 ابتدا ماتریس A را به دست می آوریم: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. اکنون می نویسیم

 A^3 [ستون سوم A] [سطر دوم A] = درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 + 2 + 0 = 6$$

ویژگی (۳) برای سه ماتریس ضرب شونده A ، B و C خاصیت توزیع پذیری برقرار است:

$$A(B+C) = AB+AC, \quad (B+C)A = BA+CA$$

تست
 □□□□

 اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند، $AB=B$ و $BA=A$ ، حاصل $A(A+B)^2B$ کدام است؟

 ۴B (۱) ۴A (۲) ۴(A+B) (۳) A^3 (۴)

راه حل

 از تساوی های $AB=B$ و $BA=A$ نتیجه می گیریم $B^2=B$:

$$AB=B \xrightarrow{B \times} BAB=B^2 \Rightarrow (BA)B=B^2 \xrightarrow{BA=A} AB=B^2$$

 چون $AB=B$ ، پس $B=B^2$. به طور مشابه برای ماتریس A ثابت می شود $A^2=A$. اکنون می نویسیم

$$A(A+B)(A+B)B = (A^2+AB)(AB+B^2) = (A+B)(B+B) = 2AB+2B^2 = 2B+2B = 4B$$

ویژگی (۴) ماتریس همانی I را می توان به عنوان عضو خنثی در عمل ضرب ماتریس ها معرفی کرد: $I_n A = A I_n = A$.

تست
 □□□□

 اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^7 کدام است؟

 ۱ (۱) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴)

راه حل

 ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می کنیم: $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$. اکنون می نویسیم

$$A^7 = (A^2)^3 A = (-I)^3 A = -A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

توجه

 دقت کنید که اگر r عددی حقیقی و A ماتریسی مربعی باشد، به ازای هر عدد طبیعی n می نویسیم: $(rA)^n = r^n A^n$.

تست
 □□□□

 اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^7 - A^4$ کدام است؟

 ۱ (۱) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (۴)

راه حل

 ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می کنیم: $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$. اکنون می نویسیم $A^6 = (A^2)^3 = I^3 = I$

 و $A^7 - A^4 = A^6 A - I A = I \times A - A = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ در نهایت به دست می آید:

تست

۲۷

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و رابطه $A^4 = A^5 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد، مقدار $b+c$ کدام است؟

(۱) -۵ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) -۴

راه حل

ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

در نتیجه $A^4 = (A^2)^2 = I^2 = I$ و $A^5 = A^4 A = IA = A$ اکنون می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یعنی $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix}$ ، در نتیجه $b = -4$ و $c = -1$ پس $b+c = -4-1 = -5$.

تست

۲۸

اگر $A = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^{30} + A^{20} + A^{10}$ برابر کدام است؟

(۱) I (۲) $3I$ (۳) $-I$ (۴) $-3I$

راه حل

می‌دانیم $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ بنابراین

$$A^2 = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} & 0 \\ 0 & \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tan^2 x - 1 - \tan^2 x & 0 \\ 0 & \tan^2 x - 1 - \tan^2 x \end{bmatrix} = -I$$

در نتیجه $A^{30} = (A^2)^{15} = (-I)^{15} = -I$ ، $A^{20} = (A^2)^{10} = (-I)^{10} = I$ و $A^{10} = (A^2)^5 = (-I)^5 = -I$ پس

$$A^{30} + A^{20} + A^{10} = -I + I - I = -I$$

تست

۲۹

اگر $A^2 = A$ و $B^2 = B - I$ ، حاصل $A^3 + B^3$ چقدر است؟

(۱) $B - I$ (۲) $A + B - I$ (۳) $A + B$ (۴) $A - I$

راه حل

می‌نویسیم

$$A^3 + B^3 = AA^2 + BB^2 = AA + B(B - I) = A^2 + B^2 - B = A + B - I - B = A - I$$

ویژگی (۵) (فکتورگیری در ماتریس‌ها) اگر بخواهیم در یک عبارت ماتریسی از یک ماتریس فاکتور بگیریم، حتماً باید ماتریس مورد نظر در همه عبارت‌ها، از یک طرف ضرب شده باشد.

مثال:

- $AB + AC = A(B + C)$
- $AC + BC = (A + B)C$
- $AB + BC$ (در این عبارت نمی‌توان از B فاکتور گرفت)
- $AB + 2A = A(B + 2I)$
- $BA + 3A = (B + 3I)A$

اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبه دو باشند به‌طوری که $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، حاصل عبارت

$$B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} A \text{ کدام است؟}$$

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

در عبارت داده شده از سمت چپ از A و از سمت راست از B فاکتور می‌گیریم:

$$A \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} B = A \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \right) B = A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} B \\ = A(2I)B = 2AB = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

راه‌حل

ویژگی ۶ ضرب ماتریس‌ها خاصیت حذف ندارد. یعنی گزاره زیر در حالت کلی درست نیست.

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

$$B = C \begin{cases} \xrightarrow{A \times} AB = AC \\ \xrightarrow{\times A} BA = CA \end{cases}$$

عکس رابطه بالا درست است. یعنی دو طرف تساوی $B = C$ را می‌توان در ماتریس A ضرب کرد. البته دقت کنید که جهت ضرب کردن A مهم است.

توجه

ویژگی ۷ ممکن است حاصل ضرب دو ماتریس غیرصفر، ماتریس صفر شود. به عبارت دیگر، اگر ضرب دو ماتریس برابر صفر شود، لزوماً هر دو یا حتی یکی از آن‌ها صفر نیست. اما عکس این مطلب درست است، یعنی

$$A = \bar{O} \text{ یا } B = \bar{O} \Rightarrow AB = \bar{O}$$

مثال: در ضرب ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} = \bar{O}$ حاصل ضرب دو ماتریس، ماتریس صفر شده است، اما هیچ یک از

ماتریس‌های ضرب شونده، ماتریس صفر نیستند.

ویژگی ۸ حاصل ضرب دو ماتریس قطری یک ماتریس قطری است.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb' & 0 \\ 0 & 0 & cc' \end{bmatrix}$$

حاصل ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه خاصیت جابه‌جایی دارد.

نتیجه

نکته

برای به توان رساندن یک ماتریس قطری کافی است درایه‌های قطر اصلی آن را به توان برسانیم.

مثال:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

نکته

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن گاه $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I_2$.

تست ۳۱

اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ ، دوتایی (α, β) کدام است؟

- (۱) $(11, 2)$ (۲) $(2, 13)$ (۳) $(4, 11)$ (۴) $(4, 13)$

راه حل

راه حل اول ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال،

$$A^2 = \alpha A + \beta I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 9 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \beta = 13$$

این مقادیر α و β در دو معادله $5\alpha = 10$ و $4\alpha + \beta = 21$ نیز صدق می کنند. پس زوج مرتب (α, β) برابر $(2, 13)$ است.

راه حل دوم با توجه به نکته قبل، $A^2 = (-2+4)A - (-8-5)I_2 = 2A + 13I_2$ ، اکنون با مقایسه این برابری با تساوی $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ به دست می آید: $\alpha = 2$ و $\beta = 13$.

تست ۳۲

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^3 = \alpha A + \beta I$ ، مقدار $\alpha + \beta$ چقدر است؟

- (۱) -9 (۲) -8 (۳) 8 (۴) 9

راه حل

با توجه به نکته قبل، $A^2 = (3+1)A - (3+2)I = 4A - 5I$. دو طرف برابری را در A ضرب می کنیم: $A^3 = 4A^2 - 5A$. مقدار

$$A^3 = 4(4A - 5I) - 5A = 16A - 20I - 5A = 11A - 20I$$

چون $A^3 = \alpha A + \beta I$ ، پس $\alpha = 11$ و $\beta = -20$. در نتیجه $\alpha + \beta = 11 - 20 = -9$.

تست ۳۳

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A^4 = \alpha A + \beta I$ ، مقدار $\alpha + \beta$ چقدر است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) -2 (۴) 2

راه حل

توجه کنید که $A^2 = (1+0)A - (0+1)I = A - I$. دو طرف این برابری را به توان دو می رسانیم:

$$A^4 = (A - I)(A - I) = A^2 - A - A + I = A^2 - 2A + I$$

به جای A^2 مقدار $A - I$ را قرار می دهیم:

$$A^4 = (A - I) - 2A + I = -A$$

یعنی $\alpha = -1$ و $\beta = 0$. در نتیجه $\alpha + \beta = -1$.

بررسی اتحادها در ماتریسها

در حالت کلی اتحادهای جبری برای ماتریسها برقرار نیست.

مثال:

$$\begin{cases} (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \\ (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2 \\ (A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \end{cases}$$

تست
□□□□

اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ و $A+B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $AB+BA$ کدام است؟

$$\begin{matrix} (1) & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & (2) & \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & (3) & \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} & (4) & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

راه حل

می‌دانیم $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ ، پس

$$\begin{aligned} AB+BA &= (A+B)^2 - A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نکته

اگر دو ماتریس A و B جابه‌جا شوند باشند $(AB=BA)$ ، آنگاه اتحادها برای این ماتریسها برقرار است.

مثال: اگر $AB=BA$ ، آنگاه

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2, \quad (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

توجه

چون $AI=IA$ ، پس I با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اش در اتحادها صدق می‌کند:

$$(A+I)^2 = A^2 + 2A + I, \quad (A+I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$$

$$(A+I)(A-I) = A^2 - I^2 = A^2 - I, \quad (A+I)(A^2 - A + I) = A^3 + I^3 = A^3 + I$$

تست
□□□□

اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، $A^2 = A$ و $2A - B = I$ ، ماتریس $B^2 - I$ برابر کدام است؟

$$\begin{matrix} I & (1) & 2I & (2) & A & (3) & \bar{O} & (4) \end{matrix}$$

راه حل

از تساوی $2A - B = I$ به دست می‌آید $B = 2A - I$. دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم: $B^2 = 4A^2 - 4A + I$. چون $A^2 = A$ ، پس $B^2 = 4A - 4A + I = I$ ، اکنون به دست می‌آید $B^2 - I = I - I = \bar{O}$.

تست
□□□□

A ماتریسی مربعی است به طوری که $A^2 + A = -I$. حاصل A^{1401} کدام است؟

$$\begin{matrix} I & (1) & A & (2) & \bar{O} & (3) & -A & (4) \end{matrix}$$

راه حل

می‌نویسیم $A^2 + A + I = \bar{O}$. دو طرف برابری را در $A - I$ ضرب می‌کنیم: $(A - I)(A^2 + A + I) = (A - I) \times \bar{O}$. یعنی $A^3 - I = \bar{O}$. پس $A^3 = I$. اکنون به دست می‌آید $A^{1401} = (A^3)^{467} = I^{467} = I$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۱- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} 5 & i > j \\ 7 & i = j \\ -2 & i < j \end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های ماتریس A برابر کدام است؟

۳۶ (۱) ۲۱ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴)

۲- درایه‌های ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^2 + 2j & i \geq j \\ 2j - i & i < j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱۷ (۱) ۲۳ (۲) ۲۵ (۳) ۲۹ (۴)

۳- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i + j & i > j \\ 7 & i = j \\ i^2 - 1 & i < j \end{cases}$ مفروض است. مقدار $2a_{24} - 3a_{31} + 4a_{33}$ برابر کدام است؟

۲۲ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)

۴- اگر در ماتریس $A_{3 \times 4}$ بدانیم $a_{ij} = \begin{cases} -i & i > j \\ 0 & i = j \\ j & i < j \end{cases}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۸ (۴)

۵- چند تا از ماتریس‌های زیر قطری هستند؟

(۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

۶- کدام یک از ماتریس‌های زیر اسکالر نیست؟

(۱) $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۷- اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $\frac{x}{2} - y + 2z$ برابر کدام است؟

۱۲ (۳) ۶ (۲) -۲ (۱) -۴ (۴)

۸- اگر $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & b \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -5 \\ d & 1 \end{bmatrix}$ مقدار $ac - bd$ برابر کدام است؟

۶۹ (۱) ۷۱ (۲) ۸۱ (۳) ۷۹ (۴)

۹- اگر $A = [2ij - 1]_{3 \times 3}$ و $B = [i^2 - 3j]_{3 \times 3}$ ، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $2A - B$ برابر کدام است؟

۴۰ (۱) ۴۲ (۲) ۴۴ (۳) ۴۶ (۴)

۱۰- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، که در آن $a_{ij} = i - j$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ ، که در آن $b_{ij} = \begin{cases} j-i & i < j \\ i+j & i \geq j \end{cases}$ ، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی

ماتریس $A+B$ چقدر است؟

(۱) صفر (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) ۱

۱۱- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ ، $B = [b_{ij}]_{4 \times 3}$ و $C = [c_{ij}]_{3 \times 5}$ ، کدام ضرب قابل تعریف است؟

(۱) AB (۲) CB (۳) AC (۴) BA

۱۲- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) حاصل ضرب دو ماتریس اسکالر، ماتریسی اسکالر است.

(۲) حاصل ضرب دو ماتریس قطری، ماتریسی قطری است.

(۳) حاصل ضرب یک ماتریس اسکالر و یک ماتریس قطری ماتریسی قطری است.

(۴) حاصل ضرب یک ماتریس اسکالر و یک ماتریس قطری ماتریسی اسکالر است.

۱۳- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $AB-BA$ برابر کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

۱۴- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر ماتریس AB ماتریسی قطری باشد، مقدار $2a-b$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) صفر (۳) -۵ (۴) ۱

۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ ، حاصل $A^2 + 2A - I$ کدام است؟

(۱) $\bar{O}$ (۲) $-I$ (۳) I (۴) A

۱۶- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس AB چگونه است؟

(۱) ماتریس اسکالر (۲) ماتریس صفر (۳) ماتریس همانی (۴) ماتریس قطری

۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس A^5 کدام است؟

(۱) ۳۲۴ (۲) ۱۲۴ (۳) ۲۴۳ (۴) ۴۲۳

۱۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ، حاصل A^3 کدام است؟

(۱) $6A$ (۲) $36A$ (۳) $49A$ (۴) $7A$

۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A^7 برابر کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۳۲

۲۰- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$ و $A^2 = 2A + 13I_2$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

(۱) ۸ (۲) -۲ (۳) -۸ (۴) ۲

۲۱- دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه A و B در رابطه $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ صدق می‌کنند. کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

(۱) $A=B=I$ (۲) $A=B=\bar{O}$ (۳) $AB=BA$ (۴) $AB=\bar{O}$

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

۲۲- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض است. کدام یک از تعاریف زیر می‌تواند مشخص‌کننده این ماتریس باشد؟

$$a_{ij} = \begin{cases} j+1 & i \leq j \\ i+j & i > j \end{cases} \quad (۴) \quad a_{ij} = \begin{cases} j+1 & i < j \\ j-1 & i \geq j \end{cases} \quad (۳) \quad a_{ij} = \begin{cases} j-i & i > j \\ i+1 & i = j \\ 2j+1 & i < j \end{cases} \quad (۲) \quad a_{ij} = \begin{cases} i+1 & i < j \\ j+i & i \geq j \end{cases} \quad (۱)$$

۲۳- اگر $A = [2i - j]_{2 \times 2}$ ، $B = [4i + 3j]_{2 \times 2}$ ، $X + Y = A$ و $X - Y = B$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $2X + Y$ کدام است؟

$$(۱) \quad 23 \quad (۲) \quad 45 \quad (۳) \quad 30 \quad (۴) \quad 52$$

۲۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $mA - nB = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ، زوج مرتب (m, n) کدام است؟

$$(۱) \quad (-3, -2) \quad (۲) \quad (3, 2)$$

(۳) $(2, 3)$ (۴) چنین زوج مرتبی وجود ندارد.

۲۵- اگر $A = \begin{bmatrix} a-1 & m^2 \\ 3 & -1 \\ 2 & m \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -a & m+1 \\ a & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ، $C = 2A - B$ ، $c_{21} = 2c_{32}$ و $c_{11} = -c_{22}$ ، مقدار $a - m$ برابر کدام است؟

$$(۱) \quad -\frac{2}{3} \quad (۲) \quad \frac{3}{2} \quad (۳) \quad \frac{2}{3} \quad (۴) \quad -\frac{3}{2}$$

۲۶- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ در تساوی $(A+B)^2 + C = AB$ صدق می‌کنند. مجموع درایه‌های ماتریس C برابر کدام است؟

$$(۱) \quad 3 \quad (۲) \quad -1 \quad (۳) \quad 2 \quad (۴) \quad \text{صفر}$$

۲۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix}$ ، به‌ازای چند مقدار k تساوی ماتریسی $A^2 + 2A - I = \bar{O}$ درست است؟

$$(۱) \quad \text{صفر} \quad (۲) \quad \text{نامتناهی} \quad (۳) \quad 1 \quad (۴) \quad 2$$

۲۸- اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $2A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس B^2 کدام است؟

$$(۱) \quad 6 \quad (۲) \quad 10 \quad (۳) \quad 8 \quad (۴) \quad 2$$

۲۹- دو ماتریس $A = [a_{ij}] = [2i - j]_{2 \times 2}$ و $B = [b_{ij}] = [-2i - j^2]_{2 \times 2}$ مفروض‌اند. حاصل‌جمع درایه‌های ماتریس $AB - B$ برابر کدام است؟

$$(۱) \quad -10 \quad (۲) \quad -20 \quad (۳) \quad -30 \quad (۴) \quad -40$$

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ a & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ b & a & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ و $C = AB = [c_{ij}]$ ، $c_{22} = 0$ و $c_{21} = 16$ ، مقدار $a - b$ کدام است؟

$$(۱) \quad -17 \quad (۲) \quad 9 \quad (۳) \quad 6 \quad (۴) \quad -11$$

۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ و ماتریس B هم مرتبه با A باشد به طوری که مجموع درایه‌های ستون‌های اول، دوم و سوم آن به ترتیب ۳، ۵ و ۷ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس BA کدام است؟

$$(۱) \quad \text{صفر} \quad (۲) \quad -15 \quad (۳) \quad 1 \quad (۴) \quad 15$$

۳۲- در تساوی $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ x \end{bmatrix} = 0$ ، مجموع مقادیر x کدام می‌تواند باشد؟

۴ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) صفر

۳۳- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & m & -1 \\ a & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB

برابر ۶ باشد، مقدار m کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۴- ماتریس‌های A و B مربعی و هم‌مرتبه هستند. اگر $AB = BA$ ، کدامیک از تساوی‌های زیر به‌ازای هر عدد طبیعی n درست است؟

(۱) $A^n B = B A^n$ (۲) $(AB)^n = A^n B^n$ (۳) $(AB)^n = B^n A^n$ (۴) هر سه گزینه

۳۵- کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند و $AB = \bar{O}$ ، آن‌گاه $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$.

(۲) اگر $AB = AC$ ، آن‌گاه ماتریس‌های B و C مساوی‌اند.

(۳) اگر $A = I$ ، آن‌گاه $(A - I)^2 = \bar{O}$.

(۴) اگر A ماتریس مربعی از مرتبه n باشد، آن‌گاه $A^3 \times A^2 = A^2 \times A^3$.

۳۶- اگر بدانیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس BAB کدام است؟

۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

۳۷- ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A^3 = I$ ، ماتریس A^2 کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{20} با کدامیک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

۳۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{20} برابر کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۴۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A^{1394} کدام است؟

۱ (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۴۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، در ماتریس A^{101} مجموع درایه‌ها کدام است؟

۱ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۸۶- اگر $A^2 - A + I = \bar{O}$ ، ماتریس A^{400} برابر کدام است؟

- (۱) A (۲) $-A$ (۳) $-I$ (۴) I

۸۷- ماتریس مربعی A در برابری $A(I-A)=I$ صدق می‌کند. ماتریس $A^{1398} + A^{608}$ برابر کدام است؟

- (۱) $2I - A$ (۲) A (۳) A^2 (۴) $2A - I$

۸۸- اگر $A^5 = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -9\sqrt{3} \end{bmatrix}$ ، حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^3 برابر کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{6}$ (۲) 12 (۳) -12 (۴) $-6\sqrt{6}$

۸۹- مجموع درایه‌های ماتریس $A = [i+1]_{n \times n}$ برابر ۲۴۵ است. مرتبه ماتریس A کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۹۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan 60^\circ \\ \cot 60^\circ & 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A^{12} برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ (۴) $\sqrt{3} + \frac{1}{4}$

۹۱- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+c & a-2b \\ 2b+1 & b \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری و A^2 ماتریسی اسکالر باشد، کمترین مقدار ممکن abc کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۹۲- ماتریس A در تساوی $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4 & 6 & -2 \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$ صدق می‌کند. حاصل $ac' - a'b$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{64}}{3}$ (۲) ۴۸ (۳) $\frac{64}{9}$ (۴) ۲۴

۹۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ x & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} = 0$ باشند، مقدار $\alpha^2 + \beta^2$ برابر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱۱ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۹۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری

۹۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^4 کدام است؟

- (۱) اسکالر غیرهمانی (۲) ماتریس صفر (۳) قطری و غیراسکالر (۴) همانی

۹۶- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 4A$ کدام است؟

خارج از کشور ریاضی - ۹۶

۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴)

تجربی - ۹۷

۹۷- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A \times A$ کدام است؟

۳۶ (۱) ۴۰ (۲) ۴۲ (۳) ۴۴ (۴)

ریاضی - ۹۷

۹۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴)

ریاضی - ۹۸

۹۹- از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$ ، عدد غیرصفر x کدام است؟

$\frac{2}{9}$ (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴)

خارج از کشور ریاضی - ۹۸

۱۰۰- به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟

۱ (۱) $x=1$ و $y=-7$ (۲) $x=2$ و $y=-7$ (۳) $x=2$ و $y=-5$ (۴) $x=1$ و $y=-5$

۷ ۴ دو ماتریس هم‌مرتبه مساوی اند هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. چون $A=B$ ، پس

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \\ z-1=-3 \Rightarrow z=-2 \end{cases} \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6, y=3$$

بنابراین $\frac{x}{2}-y+2z=\frac{6}{2}-3-4=-4$

۸ ۲ در دو ماتریس مساوی درایه‌های نظیر هم مساوی اند، پس

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & b \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -5 \\ d & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3+b \\ 7 & a-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -5 \\ d & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} c=3 \\ 3+b=-5 \Rightarrow b=-8 \\ d=7 \\ a-4=1 \Rightarrow a=5 \end{cases}$$

بنابراین $ac-bd=(5)(3)-(-8)(7)=71$

۹ ۴ با تعریف ماتریس‌های A و B درایه‌های این دو ماتریس را تعیین می‌کنیم:

$$A=[2ij-1]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \\ 5 & 11 & 17 \end{bmatrix}, B=[i^2-3j]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 1 & -2 & -5 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A-B=2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 11 \\ 5 & 11 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 1 & -2 & -5 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین فقط

$$2A-B = \begin{bmatrix} ? & 11 & ? \\ ? & 16 & ? \\ ? & 19 & ? \end{bmatrix}$$

ستون دوم ماتریس $2A-B$ را لازم داریم، پس

در نتیجه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $2A-B$ برابر است با

$$11+16+19=46$$

۱۰ ۱ ابتدا درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_{12}=1-2=-1 \\ a_{13}=1-3=-2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ? & -1 & -2 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \\ a_{23}=2-3=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{12}=2-1=1 \\ b_{13}=3-1=2 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} ? & 1 & 2 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \\ b_{23}=3-2=1 \end{cases}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

پس

بنابراین مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس $A+B$ برابر صفر است.

۱ ۴ بنابر تعریف درایه‌های ماتریس A برابر است با

$$\begin{aligned} a_{11}=7, \quad a_{12}=-2, \quad a_{13}=-2 \\ a_{21}=5, \quad a_{22}=7, \quad a_{23}=-2 \\ a_{31}=5, \quad a_{32}=5, \quad a_{33}=7 \end{aligned}$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 5 & 7 & -2 \\ 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر است با

$$3(5)+3(7)+3(-2)=15+21-6=30$$

۲ ۴ ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_{11}=3, \quad a_{12}=3, \quad a_{13}=5 \\ a_{21}=6, \quad a_{22}=8, \quad a_{23}=4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین اکنون به دست می‌آید

$$A \text{ مجموع درایه‌های ماتریس } A = 3+3+5+6+8+4=29$$

۳ ۱ با توجه به تعریف درایه‌های ماتریس A ،

$$a_{24}=2^2-1=3, \quad a_{31}=3+1=4, \quad a_{33}=7$$

$$2a_{24}-3a_{31}+4a_{33}=2(3)-3(4)+4(7)=22$$

بنابراین

۴ ۱ درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_{11}=0, \quad a_{12}=2, \quad a_{13}=3, \quad a_{14}=4 \\ a_{21}=-2, \quad a_{22}=0, \quad a_{23}=3, \quad a_{24}=4 \\ a_{31}=-3, \quad a_{32}=-3, \quad a_{33}=0, \quad a_{34}=4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین پس مجموع درایه‌های ماتریس A

برابر ۱۲ است.

۵ ۴ ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های

غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند و درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

صفر باشند یا نباشند. پس ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

قطری هستند و بقیه قطری نیستند.

۶ ۲ ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های روی

قطر اصلی آن با هم برابر باشند. پس ماتریس گزینه (۲) ماتریس اسکالر نیست.

راه حل دوم اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آن گاه $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$.

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 + 2A = \bar{O}$$

در نتیجه $A^2 + 2A - I = \bar{O} - I = -I$

۱۶ **راه حل اول** ماتریس AB را به دست می آوریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1+0 & 2-2+0 & -2+2+0 \\ -2+1+1 & 4-2-2 & -4+2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس AB ماتریس صفر است.

راه حل دوم ماتریس A از مرتبه 2×3 و ماتریس B از مرتبه 3×3 است، پس ماتریس AB از مرتبه 2×3 است، پس AB ماتریس مربعی نیست. بنابراین AB نمی تواند ماتریس اسکالر یا همانی یا قطری باشد، زیرا این ماتریس ها مربعی هستند. پس تنها گزینه (۲) می تواند درست باشد.

۱۷ **۳** توجه کنید که

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^2 \times A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 18 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 81 \\ 162 & 162 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه های ستون اول ماتریس A^5 برابر $81+162=243$ است.

۱۸ **۳** ابتدا $A \times A$ را پیدا می کنیم:

$$A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 7A$$

پس

$$A^3 = \underbrace{A \times A}_{7A} \times A = 7 \underbrace{A \times A}_{7A} = 7(7A) = 49A$$

۱۹ **۳** A ماتریس قطری است و می دانیم حاصل ضرب ماتریس های

قطری یک ماتریس قطری است. بنابراین

$$A^7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^7 = \begin{bmatrix} (1)^7 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^7 & 0 \\ 0 & 0 & 2^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^7 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه های ماتریس A^7 برابر $2^7=128$ است.

۱۱ **۳** ضرب دو ماتریس در صورتی قابل تعریف است که تعداد

ستون های ماتریس اول با تعداد سطرها ی ماتریس دوم برابر باشد. در اینجا ماتریس A ماتریسی 2×3 و ماتریس C ماتریسی 3×5 است، پس ماتریس AC قابل تعریف و از مرتبه 2×5 است. سایر گزینه ها این ویژگی را ندارند و ضرب آن ها قابل تعریف نیست.

۱۲ **۴** ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر و ماتریس

$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است. اکنون ماتریس AB را

پیدا می کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس AB یک ماتریس اسکالر نیست، پس گزینه (۴) نادرست است.

۱۳ **۳** ابتدا ماتریس های AB و BA را پیدا می کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۴ **۱** ابتدا ماتریس AB را پیدا می کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

در ماتریس قطری درایه های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند، پس

$$\begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

پس $2a-b=8-3=5$.

۱۵ **۲** **راه حل اول** ابتدا ماتریس A^2 را به دست می آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^2 + 2A - I = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

۲۰ بنابر فرض سؤال.

$$A^2 = 2A + 13I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = 2A + 13 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = 2A \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} = 2A \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر $-2+1+4+5=8$ است.

۲۱ ماتریس $(A-B)^2$ را به دست می‌آوریم. می‌دانیم در ماتریس‌ها نمی‌توان از اتحادهای جبری استفاده کرد. پس

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2$$

بنابر فرض $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$$A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$-AB - BA = -2AB \Rightarrow AB = BA$$

توجه کنید از اتحادهای جبری در ماتریس‌ها در صورتی می‌توانیم استفاده کنیم که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی داشته باشد.

۲۲ در گزینه (۱)، درایه a_{12} از رابطه $i+1$ به دست می‌آید، پس $a_{12} = 2$ ، در صورتی که در ماتریس A این درایه برابر ۳ است. پس گزینه (۱) نادرست است.

در گزینه (۲)، درایه a_{12} از رابطه $2j+1$ به دست می‌آید، پس $a_{12} = 5$ ، در صورتی که در ماتریس A این درایه برابر ۳ است. پس گزینه (۲) نادرست است. در گزینه (۳)، درایه a_{11} از رابطه $-j$ تعیین می‌شود، پس $a_{11} = 0$ که در ماتریس A این درایه برابر ۲ است. پس گزینه (۳) نادرست است.

۲۳ ابتدا ماتریس $2X+Y$ را برحسب ماتریس‌های A و B به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=\frac{A+B}{2} \\ Y=\frac{A-B}{2} \end{cases} \Rightarrow 2X+Y=A+B+\frac{A-B}{2} \quad (1)$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های A و B ماتریس‌های $A+B$ و $A-B$ را به دست می‌آوریم:

$$A+B = [2i-j]_{2 \times 2} + [4i+3j]_{2 \times 2} = [6i+2j]_{2 \times 2} \quad (2)$$

$$A-B = [2i-j]_{2 \times 2} - [4i+3j]_{2 \times 2} = [-2i-4j]_{2 \times 2} \quad (3)$$

از تساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$2X+Y = [6i+2j]_{2 \times 2} + [-i-2j]_{2 \times 2} = [5i]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $2X+Y$ برابر $5+5+0+0=10$ است.

۲۴ ماتریس‌های A و B را در معادله زیر قرار می‌دهیم:

$$mA - nB = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -n & -2m \\ m+n & 2m-3n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -n = -3 \Rightarrow n = 3 \\ -2m = -4 \Rightarrow m = 2 \\ m+n = 5 \\ 2m-3n = 0 \end{cases}$$

توجه کنید مقادیر m و n به دست آمده در معادله چهارم صدق نمی‌کنند، پس $m=2$ و $n=3$ قابل قبول نیست.

۲۵ ابتدا درایه‌های ماتریس $C=2A-B$ را به دست می‌آوریم:

$$C=2A-B = 2 \begin{bmatrix} a-1 & m^2 \\ 3 & -1 \\ 2 & m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a & m+1 \\ a & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a-2 & 2m^2-m-1 \\ 6-a & -4 \\ 0 & 2m+1 \end{bmatrix}$$

اکنون بنابر فرض سؤال،

$$c_{11} = -c_{22} \Rightarrow 3a-2 = -(-4) \Rightarrow 3a-2 = 4 \Rightarrow a=2$$

$$c_{21} = 2c_{32} \Rightarrow 6-a = 2(2m+1) \Rightarrow 4m+a=4$$

$$\xrightarrow{a=2} 4m+2=4 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین } a-m = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۲۶ ابتدا ماتریس‌های $(A+B)^2$ و AB را پیدا می‌کنیم:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{در ضمن، } AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$C=AB-(A+B)^2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس C برابر است با $-1+1+2+1=3$.

۲۷ راه حل اول ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1-k \\ 2+2k & -2+k^2 \end{bmatrix}$$

پس

$$A^2 + 2A - I = \bar{O}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1-k \\ 2+2k & -2+k^2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -k-3 \\ 2k+6 & k^2+2k-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} -k-3=0 \Rightarrow k=-3 \\ 2k+6=0 \Rightarrow k=-3 \\ k^2+2k-3=0 \Rightarrow (k+3)(k-1)=0 \Rightarrow k=-3 \text{ یا } k=1 \end{cases}$$

بنابراین $k=-3$ که در هر سه معادله صدق می‌کند قابل قبول است. پس

به ازای یک مقدار k تساوی ماتریسی داده شده برقرار است.

راه حل دوم توجه کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (k+1)A - (k+2)I$$

طبق فرض $A^2 = I - 2A$ ، بنابراین $(k+1)A - (k+2)I = I - 2A$. در نتیجه

$$\begin{cases} k+1=-2 \Rightarrow k=-3 \\ -(k+2)=1 \Rightarrow k=-3 \end{cases}$$

پس فقط یک مقدار برای k به دست می‌آید.

۳۲ ۱ ابتدا حاصل ضرب را به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+x & -1 & 7-2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+x & -1 & 7-2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+x-10+7x-2x^2 \end{bmatrix}$$

حاصل به دست آمده را برابر صفر قرار می دهیم:

$$4+x-10+7x-2x^2=0 \Rightarrow 2x^2-8x+6=0$$

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1, \quad x=3$$

پس مجموع مقادیر x برابر ۴ است.

۳۳ ۱ برای به دست آوردن درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB ,

باید سطر دوم ماتریس A را در ستون سوم ماتریس B ضرب کرد:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 \Rightarrow 3m+1+2=6 \Rightarrow m=1$$

۳۴ ۴ همه گزینه ها با فرض $AB=BA$ درست هستند. درستی هر

سه حکم را به ازای $n=3$ بررسی می کنیم. با استفاده از خاصیت شرکت پذیری

ضرب می نویسیم:

گزینه (۱)

$$A^3B=AAAB=AA(AB)=AA(BA)=A(AB)A$$

$$=A(BA)A=(AB)AA=(BA)AA=BA^3$$

گزینه (۲)

$$\begin{aligned} (AB)^3 &= (AB)(AB)(AB) = A \underbrace{(BA)}_{AB} \underbrace{(BA)}_{AB} B \\ &= AA \underbrace{(BA)}_{AB} BB = AAABBB = A^3B^3 \end{aligned}$$

گزینه (۳)

$$\begin{aligned} (AB)^3 &= (BA)^3 = (BA)(BA)(BA) = B \underbrace{(AB)}_{BA} \underbrace{(AB)}_{BA} A \\ &= BB \underbrace{(AB)}_{BA} AA = BBBAAA = B^3A^3 \end{aligned}$$

به همین ترتیب برای مقادیر دیگر n می توانیم درستی این تساوی ها را ثابت کنیم.

۳۵ ۴ در ضرب ماتریس ها قانون حذف برقرار نیست، پس گزینه (۲)

نادرست است. در ضمن اگر $AB=\vec{0}$ ، آن گاه لزومی ندارد A یا B ماتریس

صفر باشند و اگر $A^n=\vec{0}$ ، آن گاه لازم نیست $A=\vec{0}$.

$$\text{برای رد گزینه (۳) به عنوان مثال، اگر } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ آن گاه}$$

$$A-I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-I)^2 = \vec{0}$$

ولی $A \neq I$. پس گزینه (۴) درست است، زیرا می توان نوشت

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k-1} \times A = A^{k-1} \times A = A \times A^{k-1}$$

۲۸ ۲ ابتدا ماتریس B را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 2A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ -2(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ -2A-2B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} -B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B \times B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه های ماتریس B^2 برابر $7+2+2-1=10$ است.

۲۹ ۴ ابتدا ماتریس های A و B را می نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -19 & -34 \end{bmatrix} \quad \text{پس}$$

$$AB-B = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -19 & -34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -14 & -26 \end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع درایه های ماتریس $AB-B$ برابر -40 است.

۳۰ ۱ چون $c_{21}=16$ ، پس

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a & 2 & 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = a+2b+6=16$$

یعنی $a+2b=10$. همچنین از $c_{22}=0$ به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ a \\ 4 \end{bmatrix} = -a+2a+8=0$$

پس $a=-8$. از برابری $a+2b=10$ به دست می آید $-8+2b=10$ ، یعنی

$$b=9. \quad \text{اکنون می نویسیم } a-b=-8-9=-17.$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \quad \text{فرض می کنیم} \quad \text{۳۱ ۴ در این صورت}$$

ماتریس BA برابر است با

$$BA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a & -4b & -3c \\ 6d & -4e & -3f \\ 6g & -4h & -3k \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال $a+d+g=7$ ، $b+e+h=3$ و $c+f+k=5$. بنابراین

مجموع درایه های ماتریس BA

$$= 6a+6d+6g-4b-4e-4h-3c-3f-3k$$

$$= 6(a+d+g)-4(b+e+h)-3(c+f+k) = 6(7)-4(3)-3(5) = 15$$