فهرست

فصل اول: مجموعه‌ها ۵

فصل دوم: عددهای حقیقی ۵۸

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه ۱۰۰

فصل چهارم: توان و ریشه ۱۵۱

آزمون نوبت اول ۲۰۱

فصل پنجم: عبارت‌های جبری ۲۰۵

فصل ششم: خط و معادله‌های خطی ۲۶۸

فصل هفتم: عبارت‌های گویا ۳۲۶

فصل هشتم: حجم و مساحت ۳۷۱

آزمون نوبت دوم ۴۱۳

فصل اول
مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه

مجموعه

شاید به نظر عجیب بیاید، اما در ریاضی مفاهیمی وجود دارند که اگرچه بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند، اما **نمی‌توان** آن‌ها را به طور دقیق تعریف کرد. **نقطه** و **خط** از معروف‌ترین مفاهیمی هستند که در ریاضی کاربرد فراوان دارند، ولی تعریف مشخصی ندارند. **مجموعه** هم یکی دیگر از این دسته مفاهیم است که در ریاضیات تعریف مشخصی ندارد؛ اما به وسیلهٔ بعضی از ویژگی‌های آن، به تعریف سایر مفاهیم مربوط به آن، مانند زیرمجموعه و ... می‌پردازیم.

اگر بخواهیم در مورد مجموعه‌ها در دنیای ریاضیات توضیحی بدهیم، باید بگوییم مجموعه، گروه و دستهٔ مشخصی از اعداد، اشیا، افراد و ... است که هر عضو آن دارای دو **ویژگی** است:

۱ **مشخص‌بودن اعضا:** زمانی یک عبارت، گویای یک مجموعه است که به طور مشخص و روشن تعیین کند چه چیزهایی عضو مجموعه است و چه چیزهایی عضو مجموعه نیست. به عنوان مثال عبارت سه ورزش توپی، یک مجموعه را تشکیل **نمی‌دهد**؛ زیرا شخصی سه ورزش فوتبال، بسکتبال و والیبال را به عنوان سه ورزش توپی در نظر می‌گیرد و شخص دیگری فوتبال، هندبال و تنیس را در نظر می‌گیرد. بنابراین این عبارت به روشنی مشخص نمی‌کند کدام سه ورزش توپی موردنظر است؛ **پس مجموعه نیست**. اما عبارت اعداد طبیعی زوج یک‌رقمی، بیان‌کنندهٔ یک مجموعه است؛ زیرا تنها اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ این ویژگی را دارند و سلیقهٔ افراد مختلف در انتخاب این عددها **تأثیری ندارد**.

۲ **متمایزبودن:** به این معنا است که هیچ دو عضوی که در مجموعه هستند، یکسان نباشند.

مثال **کدام‌یک از عبارت‌های زیر نشان‌دهندهٔ یک مجموعه است؟**

الف) استان‌های گرمسیر ایران

ب) استان‌های ایران که میانگین دمای سالانهٔ آن‌ها بیش از ۲۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

پاسخ الف) مجموعه نیست؛ زیرا گرم‌بودن آب‌وهوا در نظر افراد مختلف یکسان نیست. ممکن است استان تهران از دید یک شخص، گرمسیر و از دید شخصی دیگر معتدل باشد.

ب) مجموعه است؛ زیرا هم استان‌های ایران مجموعه‌ای واضح و مشخص است و هم استان‌هایی که میانگین دمای سالانهٔ آن‌ها بیش از ۲۰ درجهٔ سانتی‌گراد است، تعریفی روشن و گویا دارد و **سلیقهٔ افراد** مختلف در انتخاب آن‌ها **تأثیری ندارد**.

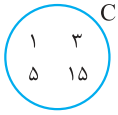
- **نام‌گذاری مجموعه‌ها:** معمولاً مجموعه‌ها را به وسیلهٔ حروف **بزرگ** انگلیسی مانند A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.
- **عضوهای یک مجموعه:** فرض کنید مجموعه‌ی A شامل اعداد فرد یک‌رقمی است. به راحتی متوجه می‌شویم که اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ به این مجموعه **تعلق** دارند. به هر عدد، شئ، فرد و ... که به یک مجموعه تعلق دارد، **عضو مجموعه** می‌گوییم. عضوبودن در مجموعه را با علامت $\in$ و عضونبودن را با $\notin$ نمایش می‌دهیم؛ مثلاً در مجموعهٔ بالا $1 \in A$ است و $8 \notin A$.
- **نمایش یک مجموعه:** به طور کلی یک مجموعه را می‌توان به سه طریق نمایش داد: ۱ **نوشتن اعضا** ۲ **نمودار ون** ۳ **نمایش مجموعه به زبان ریاضی**. فعلاً فقط دو شیوهٔ اول را توضیح می‌دهیم و پس از یادگیری بعضی از مفاهیم، در ادامه به توضیح روش سوم هم می‌پردازیم.

پس فعلاً یکی طلبتون!

۱ **نوشتن عضوهای یک مجموعه:** یکی از ساده‌ترین راه‌های نمایش یک مجموعه، نوشتن اعضای آن است. برای این کار، اعضای مجموعه را بین علامت {} (آکولاد) قرار می‌دهیم و آن‌ها را به وسیلهٔ علامت « ، » از هم جدا می‌کنیم. به عنوان مثال اگر مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی را A بنامیم، نمایش آن به صورت روبه‌رو است: $A = \{2,3,5,7\}$

نکته بعضی از مجموعه‌ها، تعداد عضوهای زیادی دارند؛ اما این عضوها طبق الگوی مشخصی کنار هم قرار گرفته‌اند. برای نمایش چنین مجموعه‌هایی به روش نوشتن اعضا، نیاز نیست همهٔ عضوها را بنویسیم، برای نمایش عضوهایی که نمی‌نویسیم، ولی با الگوی مشخصی در مجموعه قرار گرفته‌اند، از « ... » استفاده کنیم. به عنوان مثال اگر مجموعهٔ B نمایانگر اعداد زوج دورقمی باشد، آن را می‌توانیم به صورت روبه‌رو نمایش دهیم: $B = \{۱۰,۱۲,۱۴,\ldots,۹۸\}$

۲ **نمودار ون:** اگر اعضای یک مجموعه را درون یک **حلقهٔ بسته** قرار دهیم، آن مجموعه را با **نمودار ون** مشخص کرده‌ایم؛ مثلاً اگر C نمایانگر مجموعهٔ شمارنده‌های عدد ۱۵ باشد، نمودار ون آن به صورت روبه‌رو است:



تعداد عضوهای یک مجموعه: تعداد عضوهای یک مجموعه، از شمارش عضوهای **غیرتکراری** یک مجموعه به دست می‌آید؛ مثلاً مجموعهٔ $A = \{۱,۳,۵\}$ دارای ۳ عضو است. هم‌چنین مجموعهٔ $B = \{۱,۳,۳,۲\}$ نیز دارای ۳ عضو است؛ زیرا عدد ۳ با وجود این‌که دو بار در مجموعه نوشته شده، اما **یک عضو** محسوب می‌شود. تعداد اعضای مجموعه‌ای مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهند. در مثال بالا $n(A) = ۳$ است. به $n(A)$، **عدد اصلی مجموعهٔ** A هم می‌گوییم.

عضویت یک مجموعه در مجموعه‌ای دیگر

گاهی اوقات ممکن است یک مجموعه خود عضو یک مجموعه‌ای دیگر باشد. به عنوان مثال مجموعهٔ $A = \{۱,\{۲,۳\}\}$ دارای دو عضو است. ۱ و $\{۲,۳\}$، دو عضو مجموعهٔ A هستند. همان‌طور که می‌بینید، $\{۲,۳\}$ خود یک مجموعه است که عضو مجموعهٔ A می‌باشد.

مجموعهٔ تهی: به مجموعه‌ای که **هیچ** عضوی ندارد، مجموعهٔ **تهی** می‌گویند و آن را با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهند.

مجموعهٔ متناهی: مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن **محدود** و **قابل شمارش** باشد، **مجموعهٔ متناهی** نام دارد؛ مثلاً مجموعهٔ $C = \{۱,۳,۵,۷\}$ مجموعه‌ای متناهی و $n(C) = ۴$ است.

مجموعهٔ نامتناهی: به مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن **بی‌شمار** است، **مجموعهٔ نامتناهی** می‌گویند. مثلاً مجموعهٔ اعداد زوج $E = \{۲,۴,۶,۸,\ldots\}$ مجموعه‌ای نامتناهی است؛ زیرا بی‌شمار عضو دارد.

مثال **تعداد عضوهای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.**

الف) $A = \{۱,۲,۵,۱\}$ **ب)** $B = \{۲,\{۲\},\{\{۲\}\}\}$ **پ)** $C = \{۱,۲,۴,۸,۱۶,\ldots\}$ **ت)** $D = \{\{۱,۲\},\{۲,۱\}\}$

پاسخ با توجه به مفاهیم بیان‌شده، تعداد اعضای هر مجموعه را می‌شماریم.

الف سه عضو ۱، ۲ و ۵، اعضای این مجموعه را تشکیل می‌دهند؛ بنابراین $n(A) = ۳$ است (۱، عضو تکراری این مجموعه است و یک بار شمارش می‌شود).

ب ۲، $\{۲\}$، $\{\{۲\}\}$، سه عضو متمایز این مجموعه هستند. دقت کنید که $\{۲\}$ و $\{\{۲\}\}$ خود مجموعه‌هایی هستند که عضو این مجموعه‌اند؛ بنابراین $n(B) = ۳$ است.

پ این مجموعه نمایانگر اعداد حاصل از عبارت ۲^n به ازای $n = ۰,۱,۲,۳,\ldots$ است؛ بنابراین تعداد اعضای این مجموعه بی‌شمار بوده و این مجموعه نامتناهی است.

ت برای پاسخ به این سؤال، ابتدا باید بدانید جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، موجب به وجود آمدن مجموعهٔ جدیدی **نمی‌شود**. به عنوان مثال مجموعه‌های $\{۱,۲\}$ و $\{۲,۱\}$ **یکسان هستند** و یک مجموعه را مشخص می‌کنند، **نه دو مجموعه**؛ بنابراین $D = \{\{۱,۲\},\{۲,۱\}\}$ دارای دو عضو یکسان است؛ پس $n(D) = ۱$ می‌باشد.

نکته در یک مجموعه، **جابه‌جاکردن عضوها**، مجموعهٔ جدیدی را به وجود **نمی‌آورد**. به عنوان مثال، سه مجموعهٔ $\{۱,۳,۵\}$، $\{۳,۱,۵\}$ و $\{۵,۱,۳\}$ همگی یکسان هستند.

مجموعه‌های هم‌ارز

اگر **تعداد عضوهای دو مجموعه** با هم برابر باشند، دو مجموعه، **هم‌ارز هستند**. به عنوان مثال دو مجموعهٔ $A = \{۱,۲\}$ و $B = \{a,b\}$ هم‌ارزند؛ زیرا $n(A) = n(B) = ۲$ است.

پرسش‌های تشریحی

۱ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۱ در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوها مهم ..... .

۲ با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی تولید ..... .

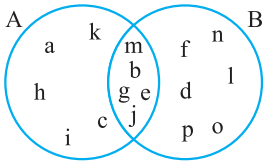
۳ مجموعهٔ $\{۱,۲,۲,۳,۳,۳\}$ شامل ..... عضو است.

۴ از مجموعه در ریاضیات برای بیان و ..... دسته‌ای از اشیای ..... و ..... استفاده می‌کنیم.

۵ اگر یک مجموعه هیچ عضوی نداشته باشد، آن را مجموعهٔ ..... می‌نامیم و با نماد ..... یا ..... نمایش می‌دهیم.

۶ با توجه به مجموعهٔ $A=\{۲,۵,\frac{\sqrt{۴}}{۲},۳\}$ داریم: ۱، عضو A است که با نماد ریاضی ..... و ۷، عضو A نیست که با نماد ریاضی ..... نمایش داده می‌شوند.

۲ با توجه به نمودار ون مقابل:



۱ مجموعه‌های A و B را به همراه عضوهایشان مشخص کنید.

۲ سه عضو بنویسید که هم در مجموعهٔ A و هم در مجموعهٔ B باشند.

۳ سه مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ ، $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$ و $C=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ را در یک نمودار ون نمایش دهید. سپس با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱ مجموعهٔ عضوهایی که هم در منحنی مجموعهٔ A قرار دارند و هم در منحنی مجموعهٔ B را بنویسید.

۲ مجموعهٔ عضوهایی که هم در منحنی مجموعهٔ B قرار دارند و هم در منحنی مجموعهٔ C را بنویسید.

۳ مجموعهٔ عضوهایی که در هر سه منحنی قرار دارند را بنویسید.

۴ در بین مجموعه‌های زیر، مجموعه‌های تهی را مشخص کنید.

۱ مجموعهٔ عددهای اول و زوج بزرگ‌تر از ۲

۲ اعداد طبیعی بین ۱۳۹۷ و ۱۳۹۸

۳ اعداد بین $\frac{۱}{۱۳۹۷}$ و $\frac{۱}{۱۳۹۸}$

۴ مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی ناکم‌تر از ۷

۵ اعداد صحیح بزرگ‌تر از ۵ و کم‌تر از -۷

۵ برای هر یک از بخش‌های زیر، پاسخ مناسب بنویسید. (در هر قسمت حداقل یک مثال غیرعددی مطرح کنید.)

۱ سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ تهی باشند.

۲ سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان‌دهندهٔ مجموعه‌ای تک‌عضوی باشند.

۳ سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان‌دهندهٔ مجموعه‌ای ۳عضوی باشند.

۶ عبارت‌هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند با علامت (✓) و عبارت‌هایی که مجموعه نیستند را با علامت (✗) مشخص کنید. (با ذکر دلیل)

۱ سه عدد زوج متوالی

۲ چهار عدد زوج متوالی که به ۳۰ ختم می‌شوند.

۳ اعداد اول بین ۹۰ و ۱۰۰

۴ سه فصل سال

۵ شمارنده‌های مرکب عدد ۱۰۱

۶ شش عدد بزرگ

۷ سه غذای بدمزه!

۸ جواب‌های معادلهٔ $۵x-۲=۳$

۹ اعدادی که مضرب ۴ هستند، ولی بر ۲ بخش‌پذیر نیستند.

۷ شمارهٔ هر یک از مجموعه‌های سمت راست را در مربع مقابل مجموعهٔ مساوی آن در سمت چپ بنویسید.

۱ $\{۴,۵,۶,\ldots,۲۰\}$ ☐ $A = \{۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۸۳,۸۹,۹۷\}$

۲ $\{۴,۶,۱۲,۸,۲,۱۰\}$ ☐ $B = \{-۲,-۳,-۵,-۷\}$

۳ مجموعهٔ اعداد اول زوج ☐ $C =$ مجموعهٔ مضارب صحیح عدد ۷

۴ مجموعهٔ اعداد منفی بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین عدد دورقمی منفی که دقیقاً ۴ مقسوم‌علیه دارند. ☐ $D =$ مجموعهٔ اعداد صحیح بین ۳ و ۲۱

۵ مجموعهٔ اعداد اول دورقمی کم‌تر از ۳۰ یا بیشتر از ۸۰ ☐ $E = \{۲\}$

۶ $\{\ldots,-۱۴,-۷,۰,۷,۱۴,\ldots\}$ ☐ $F = \{\}$

۷ مجموعهٔ اعداد حداکثر دورقمی با مجموع ارقام ۵ ☐ $G =$ مجموعهٔ اعداد زوج از ۲ تا ۱۲

۸ مجموعهٔ اعداد اول منفی و بزرگ‌تر از -۱۰ ☐ $H = \{۲۳,۴۱,۳۲,۵,۵۰,۱۴\}$

۸ متناظر با هر یک از مجموعه‌های زیر، یک عبارت مناسب بنویسید.

۱ $\{۵۳,۵۹,۶۱,۶۷,۷۱,۷۳,۷۹\}$

۲ $\{۳۶,۴۹,۶۴,۸۱,۱۰۰,۱۲۱,۱۴۴,۱۶۹\}$

۳ $\{۶۴,۱۲۵,۲۱۶,۳۴۳\}$

۴ $\{-۲۱,-۱۴,-۷,۰,۷,۱۴,۲۱,۲۸\}$

۵ $\{-۸,-۴,۰,۴,۸,۱۲,\ldots\}$

۹ متناظر با هر یک از عبارت‌های زیر، یک مجموعه نوشته و سپس تعداد اعضای هر مجموعه را مشخص کنید.

۱ مجموعهٔ عددهای طبیعی مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۳۹۷

۲ مجموعهٔ عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۱۲۲۵ و کم‌تر از ۱۲۲۶

۳ مجموعهٔ عددهای صحیح منفی بین -۱ و ۱۰

۴ مجموعهٔ مضارب اول عدد ۴۷

۵ مجموعهٔ اعداد دورقمی که مجموع ارقام آن‌ها حداکثر برابر ۳ است.

۶ مجموعهٔ اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ که دقیقاً سه شمارندهٔ مثبت دارند.

۱۰ برای هر یک از بخش‌های زیر مجموعه‌های مناسب بنویسید.

۱ سه مجموعهٔ متمایز مثال بزنید که دو عدد ۷ و -۷ عضو آن‌ها باشند.

۲ حداکثر چند مجموعهٔ چهارعضوی شامل ۳ و ۴ می‌توان ساخت که اولاً دقیقاً شامل سه عدد اول باشند و دوماً هیچ‌یک از اعضای مجموعه از ۱ کم‌تر و از ۱۰ بیشتر نباشد.

۱۱ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱ آیا دو مجموعهٔ $\{\}$ و $\varnothing$ یکسان‌اند؟

۲ مجموعه‌های $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ چه‌طور؟

۳ مجموعهٔ $A = \{\varnothing,\{\},\{\varnothing\}\}$ چند عضو دارد؟

۴ آیا می‌توان گفت $\varnothing \in \{\}$؟ $\varnothing \in A$ چه‌طور؟

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱ چندتا از عبارت‌های زیر، مجموعه هستند؟

الف) ۸ رقم طبیعی متوالی

ب) همهٔ انسان‌های جهان در حال حاضر

پ) همهٔ فیل‌هایی که پرواز می‌کنند.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ مجموعهٔ $\{۰,\varnothing,\{\}\}$ چندعضوی است؟

۱) ۳ عضوی ۲) ۲ عضوی

۳) ۱ عضوی ۴) این مجموعه، همان مجموعهٔ تهی است.

۳ چند مجموعهٔ مختلف با استفاده از اعداد طبیعی یک‌رقمی می‌توان نوشت که شامل اعداد ۱ تا ۸ باشند؟

۱) ۲تا ۲) ۳تا ۳) ۴تا ۴) ۵تا

۴ اگر مجموعهٔ $\{x,y,3,4\}$ دوعضوی باشد، آن‌گاه $x+y$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ اگر $\{a,a,a,a\}$ همان مجموعهٔ $\{\frac{6-x}{2},\frac{5+x}{3}\}$ باشد، آن‌گاه مقدار عددی x کدام است؟

۱) ۱/۴ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۷

۶ اگر $A=\{x-1,x-2,x-3\}$ و بدانیم $5\in A$، آن‌گاه مجموع همهٔ مقادیر ممکن برای اعضای مجموعهٔ A برابر است با .....

۱) ۲۷ ۲) ۳۹ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

۷ اگر $A=\{x,x+1,x+2,x+3\}$ و بدانیم $10\in A$ و $8\notin A$، آن‌گاه x چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸ مجموعهٔ مضارب دورقمی عدد ۵، هفت عضو بیشتر از مجموعهٔ اعداد صحیح بین دو عدد ۹۷ و x دارد. اگر $x<97$، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) x برابر ۸۵ است.
۲) x برابر ۸۶ است.
۳) x هر مقدار دلخواه بین ۸۵ و ۸۶ می‌تواند داشته باشد.
۴) x هر مقدار دلخواه بین ۸۶ و ۸۷ می‌تواند داشته باشد.

۹ می‌دانیم x عددی صحیح و مثبت است. اگر مجموعهٔ شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ و اعداد زوج بین دو عدد ۱۲ و x روی هم ۹ عضو داشته باشند، آن‌گاه مجموع همهٔ مقدارهای عددی مختلف که به جای x می‌توان قرار داد، کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۱ ۳) ۴۶ ۴) ۵۸

۱۰ مجموعهٔ اعداد صحیح تک‌رقمی که دقیقاً دو شمارندهٔ مثبت دارند را A و مجموعهٔ اعداد صحیح تک‌رقمی که دقیقاً سه شمارندهٔ مثبت دارند را B می‌نامیم. مجموعهٔ A چند عضو بیشتر از مجموعهٔ B دارد؟

۱) ۱ عضو ۲) ۲ عضو ۳) ۳ عضو ۴) ۴ عضو

۱۱ تعداد اعضای مجموعهٔ $\{\{\emptyset,\emptyset\},\{\emptyset,\emptyset,\emptyset\},\{\emptyset\},\{\{\{\}\},\{\}\}\}$ چند برابر تعداد اعضای مجموعهٔ $\{\{\{\}\},\{\},\{\{\}\}\}$ است؟

۱) تعداد اعضای مجموعه‌ها با هم برابرند.
۲) $\frac{2}{3}$ برابر
۳) ۳ برابر
۴) صفر برابر

۱۲ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر دارای این ویژگی است که در بین هر دو عضو دلخواه آن، یکی از اعضا، عضو دیگری باشد؟

۱) $\{a,\{a\},\{\{a\},a\},\{a,\{a\}\},\{\{a\},a\}\}$
۲) $\{1,\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$
۳) $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\},\emptyset\}\}$
۴) $\{\{\},\{\{\emptyset\}\}\}$

۱۳ مجموعه‌های زیر را داریم:

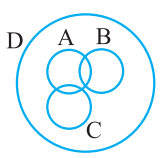
A: مجموعهٔ اعداد صحیح منفی بزرگ‌تر از ۶−

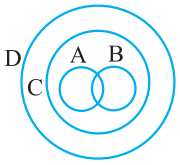
B: مجموعهٔ اعداد صحیح از بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی تا کوچک‌ترین عدد اول زوج

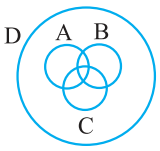
C: مجموعهٔ اعداد صحیح تک‌رقمی که بیش از دو شمارندهٔ مثبت دارند

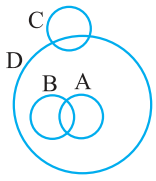
D: مجموعهٔ اعداد صحیح از ۵− تا بزرگ‌ترین عدد صحیح کم‌تر از ۶

کدام نمودار مربوط به این مجموعه‌ها است؟

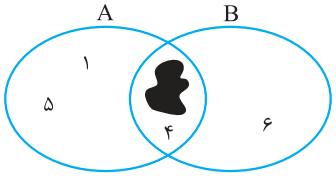
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۴ مجموعه‌های A و B را با اعداد طبیعی یک‌رقمی ساخته‌ایم، اما متأسفانه همان‌طور که در شکل می‌بینید، روی قسمتی از این نمودار جوهر ریخته شده است. اگر بدانیم مجموع عضوهایی که هم در A و هم در B هستند برابر عددی زوج است، آن‌گاه مجموعهٔ A حداکثر چندعضوی است؟



۱) ۵عضوی ۲) ۶عضوی ۳) ۷عضوی ۴) ۸عضوی

تساوی دو مجموعه

دو مجموعهٔ A و B مساوی هستند، هرگاه هر عضو مجموعهٔ A، عضو مجموعهٔ B و هر عضو مجموعهٔ B، عضو مجموعهٔ A باشد، به بیان دیگر زمانی دو مجموعهٔ A و B مساوی هستند که **کاملاً یکسان** باشند. یعنی **هم تعداد عضوهایشان** یکسان باشد و **هم اعضایشان** کاملاً یکسان باشد.

در این صورت می‌نویسیم $A = B$.

به عنوان مثال دو مجموعهٔ $A = \{2,5,10\}$ و $B = \{\frac{20}{2}, 2,5\}$ با هم برابرند و می‌نویسیم $A = B$.

مثال **در هر یک از قسمت‌های زیر، جاهای خالی را به گونه‌ای تکمیل کنید که دو مجموعه با هم برابر باشند؟**

الف) $A = \{4, \ldots\ldots, \frac{3}{5}, -\sqrt{144}, \frac{25}{2}\}$ ، $B = \{\ldots\ldots, 0/6, \frac{\sqrt{16}}{(-3)^2}, 12/5, \sqrt{16}\}$

ب) $C = \{\sqrt{36}, (0/5)^2, \ldots\ldots, (0/1)^2\}$ ، $D = \{\ldots\ldots, -\sqrt{\frac{16}{9}}, 0/25, 6\}$

پاسخ با توجه به تعریف تساوی دو مجموعه، اعضای دو مجموعه باید کاملاً یکسان باشند؛ بنابراین داریم:

الف $4 = \sqrt{16}$ ، $\frac{3}{5} = 0/6$ ، $\frac{25}{2} = 12/5 \Rightarrow A = \{4, \frac{\sqrt{16}}{(-3)^2}, \frac{3}{5}, -\sqrt{144}, \frac{25}{2}\}$ ، $B = \{-\sqrt{144}, 0/6, \frac{\sqrt{16}}{(-3)^2}, 12/5, \sqrt{16}\}$

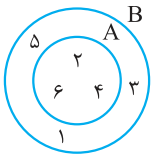
ب $\sqrt{36} = 6$ ، $(0/5)^2 = 0/25 \Rightarrow C = \{\sqrt{36}, (0/5)^2, -\sqrt{\frac{16}{9}}, (0/1)^2\}$ ، $D = \{(0/1)^2, -\sqrt{\frac{16}{9}}, 0/25, 6\}$

مثال **اگر دو مجموعهٔ $\{1+a, 5a-1, 2b\}$ و $\{3\}$ برابر باشند، آن‌گاه مقدار $a+b$ کدام است؟**

پاسخ از آن‌جایی که دو مجموعه با هم برابرند، پس باید $5a-1 = 2b+1 = 3$ باشد. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 5a-1=3 \Rightarrow 5a=3+1=4 \Rightarrow a=\frac{4}{5} \\ 2b+1=3 \Rightarrow 2b=3-1 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=\frac{4}{5}+1=\frac{9}{5}$$

زیرمجموعه



به نمودار ون روبه‌رو توجه کنید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ است. از طرفی می‌توان مشاهده کرد که همهٔ اعضای مجموعهٔ A، عضو مجموعهٔ B نیز هستند. در این حالت می‌گوییم مجموعهٔ A، **زیرمجموعهٔ** مجموعهٔ B است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$.

نکته با توجه به شکل بالا، اگر مجموعه‌ای مانند A، زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای مانند B باشد، هنگام رسم نمودار ون آن‌ها، A کاملاً در **داخل** B قرار می‌گیرد. با توجه به رابطهٔ زیرمجموعه بودن داریم:

۱) هر مجموعهٔ دلخواه، زیرمجموعهٔ خودش است. یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه: $A \subseteq A$.

۲) اگر در مجموعه‌ای مانند B، بتوانیم عضوی بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A نیست و می‌نویسیم: $B \not\subseteq A$.

۳) مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواه مانند A است؛ یعنی: $\emptyset \subseteq A$.

نکته تنها یک مجموعه می‌تواند زیرمجموعهٔ یک مجموعه باشد. به عنوان مثال در مجموعهٔ $A = \{1,2,3\}$، می‌توانیم بنویسیم: $\{1\} \subseteq A$، اما عبارت $1 \subseteq A$ **اشتباه** است؛ زیرا یک زیرمجموعه خود **باید مجموعه باشد**. ۱ مجموعه نیست؛ بنابراین باید بنویسیم $\{1\} \subseteq A$ و $1 \in A$.

مثال **اگر $A = \{\{3,2\}, \emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{1,\{1\}\}$ باشد، تعیین کنید کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟**

الف) $\{1\} \in A$ ب) $1 \in A$ پ) $\{1\} \subseteq A$ ت) $\{3,2\} \subseteq A$

ث) $\emptyset \in A$ ج) $\{1,\{1\}\} \in A$ چ) $\{\{\emptyset\}\} \in A$ خ) $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \not\subseteq A$

پاسخ با توجه به تعریف زیرمجموعه و عضویت اعضا در یک مجموعه داریم:

الف درست است؛ زیرا $\{1\}$ عضو مجموعهٔ A می‌باشد.

ب درست است؛ زیرا ۱ عضو مجموعهٔ A است. توجه داشته باشید که $\{1\}$ و ۱، دو عضو متفاوت مجموعهٔ A هستند.

پ درست است؛ زیرا یکی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A، $\{1\}$ است. بنابراین $\{1\} \subseteq A$ می‌باشد.

ت نادرست است؛ $\{3,2\}$ مجموعه‌ای است که خود عضو مجموعهٔ A است. بنابراین باید بنویسیم $\{3,2\} \in A$. پس $\{3,2\} \not\subseteq A$ و عبارت داده‌شده نادرست است.

ب) درست است. زیرا $\varnothing$ عضو مجموعهٔ A است. در نمایش مجموعهٔ A داریم: $A=\{1,\{1\},\{\varnothing\},\underbrace{\varnothing}_{\varnothing\in A},\{3,2\}\}$

ج) نادرست است؛ زیرا A دارای عضوی به شکل $\{\{1\},1\}$ نیست، بلکه $\{1\},1$ عضوهای A هستند. *(بچه‌ها! هواستون باشه، چیزی می‌تونه عضو مجموعهٔ A باشه که داخل مجموعه عیناً و بدون هیچ کم و زیادی وجود داشته باشه!)*

چ) نادرست است؛ زیرا A عضوی به شکل $\{\{\varnothing\}\}$ ندارد. بلکه $\{\varnothing\}$ عضو A است.

د) نادرست است؛ از آن‌جایی که $\{\varnothing\}$ و $\varnothing$ عضو مجموعهٔ A هستند، بنابراین $\{\{\varnothing\},\varnothing\}$ زیرمجموعهٔ A است و عبارت $A\not\subseteq\{\{\varnothing\},\varnothing\}$ نادرست است.

نوشتن همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه

برای نوشتن همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه، بهتر است آن‌ها را براساس تعداد عضوهای زیرمجموعه‌ها به طور مرتب و مرحله به مرحله بنویسیم تا بتوانیم اطمینان داشته باشیم که همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه را نوشته‌ایم و *چیزی از قلم نیفتاده*! مثلاً مجموعهٔ $A=\{1,2,3\}$ را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسیم، مطابق جدول زیر عمل می‌کنیم:

زیرمجموعه‌های بدون عضو A	$\varnothing$ یا $\{\}$
زیرمجموعه‌های ۱عضوی A	$\{1\},\{2\},\{3\}$
زیرمجموعه‌های ۲عضوی A	$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$
زیرمجموعه‌های ۳عضوی A	$\{1,2,3\}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مجموعهٔ دیگری نمی‌توان تعریف کرد که زیرمجموعهٔ A باشد.

مثال **همهٔ زیرمجموعه‌های $B=\{a,b,c,d\}$ را بنویسید.**

پاسخ با توجه به مثال قبل داریم:

زیرمجموعه‌های بدون عضو B	$\varnothing$ یا $\{\}$
زیرمجموعه‌های ۱عضوی B	$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$
زیرمجموعه‌های ۲عضوی B	$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$
زیرمجموعه‌های ۳عضوی B	$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,c,d\}$
زیرمجموعه‌های ۴عضوی B	$\{a,b,c,d\}$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه: با توجه به دو جدول بالا، مجموعهٔ A دارای ۳ عضو و ۸ زیرمجموعه است. هم‌چنین مجموعهٔ B دارای ۴ عضو است و ۱۶زیرمجموعه دارد. با توجه به این دو مثال داریم:

نکته در یک مجموعهٔ nعضوی، تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر 2^n است.

مثال **تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ ۱۰عضوی چندتا است؟**

پاسخ با توجه به نکتهٔ بیان‌شده، از آن‌جایی که تعداد اعضای این مجموعه برابر ۱۰ است، بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌های آن برابر $2^{10}=1024$ تا می‌باشد.

مثال **اگر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای $3n-5$ عضوی برابر ۱۲۸ باشد، آن‌گاه مقدار n کدام است؟**

پاسخ از آن‌جایی که مجموعهٔ موردنظر $3n-5$ عضو دارد، بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌های آن برابر 2^{3n-5} است؛ از طرفی می‌دانیم تعداد کل زیرمجموعه‌های مسئله برابر $2^7=128$ است. بنابراین داریم:

$$3n-5=7 \Rightarrow 3n=12 \Rightarrow n=\frac{12}{3}=4$$

مجموعه‌های عددی معروف در دنیای ریاضی

در سال‌های گذشته با اعداد طبیعی، حسابی و صحیح آشنا شدید؛ اما شاید نمی‌دانستید که هر یک از این اعداد در قالب مجموعه تعریف می‌شوند. *(چون قبلاً اختصار آشنایی با مجموعه‌ها را نداشتیم!)* در ادامه هر یک از این مجموعه‌ها به وسیله‌ی نمایش عضوهایشان معرفی شده‌اند:

مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbb{W}=\{0,1,2,3,4,\ldots\}$

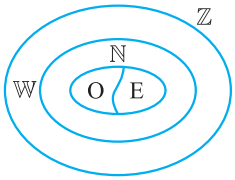
مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

همان‌طور که می‌بینید، تفاوت مجموعهٔ اعداد طبیعی و حسابی، **تنها عدد صفر است**. صفر عضو مجموعهٔ اعداد حسابی است، اما عدد طبیعی محسوب نمی‌شود. هم‌چنین مجموعهٔ اعداد صحیح، شامل همهٔ عضوهای مجموعهٔ اعداد حسابی **به علاوهٔ قرینه‌هایشان است.**

علاوه بر این می‌توانیم مجموعهٔ اعداد طبیعی را به دو مجموعهٔ: ۱ **اعداد زوج** و ۲ **اعداد فرد** تقسیم‌بندی کنیم. بنابراین داریم:

مجموعهٔ اعداد زوج: $E = \{2,4,6,8,\ldots\}$ **مجموعهٔ اعداد فرد**: $O = \{1,3,5,7,\ldots\}$

با توجه به تعاریف بالا، نمودار ون این مجموعه از اعداد به صورت روبه‌رو است:



نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی

اگه یادتون باشه تو قسمت‌های قبل گفتیم نمایش مجموعه‌ها، سه روش داره! اما فقط دو تا از روش‌ها رو بیان کردیم و گفتیم یکی باشه طلبتون! الوعده وفا! الان وقتشه که روش سوم رو بگیم.

عضوهای بعضی از مجموعه‌ها دارای ویژگی‌های **خاص و مشترکی** هستند. این ویژگی‌های خاص و مشترک را می‌توان به **زبان ریاضی** (یعنی با کمک نمادهای ریاضی) نمایش داد. مثلاً اگر بخواهیم مجموعهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ را به زبان ریاضی نمایش دهیم، باید به زبان ریاضی به عددهایی اشاره کنیم که این عددها دارای دو ویژگی طبیعی‌بودن و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ بودن، باشند؛ بنابراین نمایش این مجموعه با نمادهای ریاضی به صورت زیر است:

$$A = \{x \mid \overbrace{x \in \mathbb{N}}^{\text{این اعداد عضو مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند.}} , \underbrace{x \leq 10}_{\text{این اعداد کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ هستند.}}\}$$

(به طوری که — اعدادی مانند x عضو مجموعهٔ A هستند. — و)

نمایش مجموعهٔ A در قالب نوشتن اعضا به صورت زیر است:

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

مثال مجموعهٔ $B = \{3x-2 \mid x \in \mathbb{W} , 1 < x < 5\}$ را با نوشتن عضوهایش نشان دهید.

پاسخ برای پاسخ به این سؤال، بهتر است *اول به ترجمهٔ زبان ریاضی به زبان شیرین فارسی خودمون بپردازیم!*

$$B = \{\overbrace{3x-2}^{(1)} \mid \overbrace{\underbrace{x \in \mathbb{W}}_{\text{اعدادی جای } x \text{ می‌توانند قرار بگیرند که عضو مجموعهٔ اعداد حسابی باشند.}} , \underbrace{1 < x < 5}_{\text{مقدار اعدادی که جای } x \text{ قرار می‌گیرند، بین ۱ تا ۵ هستند.}}}^{(2)}\}$$

(به طوری که — اعدادی به شکل $3x-2$ عضو مجموعهٔ B هستند. — و)

برای مشخص‌کردن اعضای این مجموعه، ابتدا تمام xهایی که دارای شرط‌های قسمت (۲)، نمایش مجموعهٔ بالا هستند را مشخص می‌کنیم: اعداد ۲، ۳ و ۴ شرط‌های قسمت (۲) یعنی حسابی‌بودن و قرارداشتن بین عددهای ۱ و ۵ را دارند و به‌جز این اعداد، عدد دیگری این شرط‌ها را ندارد. حالا این سه عدد به دست آمده از قسمتِ (۲) (یعنی ۲، ۳ و ۴) را در عبارت قسمتِ (۱) تعریفِ مجموعه (یعنی $3x-2$) به جای x قرار می‌دهیم تا اعضای مجموعهٔ B مشخص شوند:

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow 3\times 2-2=6-2=4 \\ x=3 \Rightarrow 3\times 3-2=9-2=7 \\ x=4 \Rightarrow 3\times 4-2=12-2=10 \end{array}\right\} \Rightarrow B=\{4,7,10\}$$

مثال اعضای مجموعهٔ $C = \{\frac{x-1}{y+1} \mid x,y \in \mathbb{N} , x+y=7\}$ را بنویسید.

پاسخ با توجه به دو مثال حل‌شدهٔ قبلی، ابتدا مجموعهٔ اعداد y و x را که عضو مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند و مجموع آن‌ها برابر ۷ است را به دست می‌آوریم؛ سپس مقادیر به دست آمده برای x و y را در عبارت $\frac{x-1}{y+1}$ قرار می‌دهیم تا اعضای مجموعهٔ C مشخص شوند؛ بنابراین داریم:

$$x,y\in\mathbb{N}\ ,\ x+y=۷ \rightarrow \begin{cases} x=۱\ ,\ y=۶ \Rightarrow \frac{۱-۱}{۶+۱}=۰ \\ x=۲\ ,\ y=۵ \Rightarrow \frac{۲-۱}{۵+۱}=\frac{۱}{۶} \\ x=۳\ ,\ y=۴ \Rightarrow \frac{۳-۱}{۴+۱}=\frac{۲}{۵} \\ x=۴\ ,\ y=۳ \Rightarrow \frac{۴-۱}{۳+۱}=\frac{۳}{۴} \\ x=۵\ ,\ y=۲ \Rightarrow \frac{۵-۱}{۲+۱}=\frac{۴}{۳} \\ x=۶\ ,\ y=۱ \Rightarrow \frac{۶-۱}{۱+۱}=\frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow C=\{۰,\frac{۱}{۶},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۳},\frac{۵}{۲}\}$$

نوشتن یک مجموعه به زبان ریاضی از روی عضوهای آن

همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، اگر اعضای یک مجموعه دارای خصوصیات مشترک باشند، می‌توان آن مجموعه را به وسیلهٔ نمادهای ریاضی نمایش داد. برای انجام این کار باید به دو موضوع توجه کرد:

۱ خصوصیات مشترک عضوهای مجموعه کدام است؟

۲ عضوهای مجموعه در چه محدوده‌ای تعریف می‌شوند؟

با پاسخ به این دو سؤال به راحتی می‌توانیم یک مجموعه را به وسیله‌ی نمادهای ریاضی بنویسیم.

برای درک بهتر این موضوع، فرض کنید می‌خواهیم مجموعهٔ $A=\{۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰\}$ را به زبان نمادین بنویسیم.

گام اول در گام اول باید خصوصیت مشترک اعضای آن را پیدا کنیم: $A=\{\underset{۴\times۱}{۴}\ ,\ \underset{۴\times۲}{۸}\ ,\ \underset{۴\times۳}{۱۲}\ ,\ \underset{۴\times۴}{۱۶}\ ,\ \underset{۴\times۵}{۲۰}\}$

همان‌طور که می‌بینید همهٔ اعضای این مجموعه، مضارب عدد ۴ هستند؛ بنابراین می‌توان آن‌ها را به فرم $۴x$ نمایش داد.

گام دوم این عضوها شامل مضارب ۱ تا ۵ عدد ۴ هستند. یعنی اگر اعضای این مجموعه را به صورت $۴x$ در نظر بگیریم، x می‌تواند هر یک از مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد.

بنابراین با توجه به پاسخ‌های دو گام بیان‌شده، این مجموعه به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $A=\{۴x\mid x\in\mathbb{N}\ ,\ ۱\le x\le ۵\}$

مثال **مجموعهٔ $B=\{۸,۱۱,۱۴,۱۷,۲۰,۲۳\}$ را به زبان نمادین نمایش دهید.**

پاسخ

گام اول یافتن خصوصیت مشترک این عددها کمی سخت به نظر می‌رسد؛ زیرا این عددها همگی مضرب عدد مشخصی به‌جز عدد ۱ نیستند. اما اگر کمی دقت کنیم، متوجه خواهیم شد که فاصلهٔ این عددها از هم برابر ۳ واحد است و هم‌چنین باقی‌ماندهٔ تقسیم این اعداد بر عدد ۳ برابر ۲ است؛ بنابراین می‌توان آن‌ها را به صورت عبارتی با ضریب ۳ نوشت:

$$B=\{\underset{۳\times۲+۲}{۸}\ ,\ \underset{۳\times۳+۲}{۱۱}\ ,\ \underset{۳\times۴+۲}{۱۴}\ ,\ \underset{۳\times۵+۲}{۱۷}\ ,\ \underset{۳\times۶+۲}{۲۰}\ ,\ \underset{۳\times۷+۲}{۲۳}\}$$

پس جملهٔ مشترک این عبارت‌ها را می‌توانیم به صورت $۳x+۲$ بنویسیم.

گام دوم همان‌طور که می‌بینید به جای x در عبارت به دست آمده می‌توان اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را قرار داد.

با توجه به دو گام بالا، مجموعهٔ B به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $B=\{۳x+۲\mid x\in\mathbb{N}\ ,\ ۲\le x\le ۷\}$

مجموعهٔ اعداد گویا و نمایش آن

به هر عددی که بتوان آن را به صورت کسری مانند $\frac{a}{b}$ نوشت که در آن a و b هر دو عدد صحیح و $b\neq ۰$ باشد، **عدد گویا** می‌گوییم. به مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا هم مجموعهٔ اعداد گویا می‌گوییم و آن را با $\mathbb{Q}$ نمایش می‌دهیم. چون اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد. به همین دلیل مجموعهٔ اعداد گویا را با نمادهای ریاضی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\}$$

آقا اجازه! چرا نمی‌تونیم اولین عدد گویا بعد از هر عدد گویای دلخواه رو مشخص کنیم؟

سؤال خوبیه! اما برای جواب‌دادن به این سؤال باید کمی صبر کنین. تو فصل ۲، راجع به دلیل این موضوع کامل صحبت می‌کنیم.

پرسش‌های تشریحی

۱۲ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۱ اگر همهٔ عضوهای مجموعهٔ ..... در مجموعهٔ ..... باشند، آن‌گاه می‌نویسیم $X \subseteq Y$.

۲ بزرگ‌ترین زیرمجموعهٔ هر مجموعه (از نظر تعداد اعضا)، ..... است.

۳ اگر بتوانیم ..... ، آن‌گاه می‌نویسیم $X \not\subseteq Y$.

۴ مجموعهٔ ..... زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است.

۵ تنها مجموعه‌ای که یک زیرمجموعه دارد، مجموعهٔ ..... است.

۶ مجموعهٔ همهٔ اعداد فرد را به صورت $O = \{..... \mid .....\}$ نمایش می‌دهند.

۷ مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا را به صورت $Q = \{..... \mid ....., ...\}$ نمایش می‌دهند.

۱۳ مجموعهٔ A شامل پنج عدد طبیعی متوالی است که مجموع آن‌ها برابر ۸۵ است.

۱ مجموعهٔ A را با نمایش اعضایش مشخص کنید.

۲ دو عبارت فارسی بنویسید که معادل مجموعهٔ A باشند.

۱۴ مقدارهای مجهول را طوری پیدا کنید که مجموعه‌های داده‌شده در هر قسمت با هم برابر باشند.

۱ $\{۲, x+۱, \frac{۳}{۵}, ۰/۲۵\} = \{\frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۲۴}, \frac{\sqrt{y}}{۳^۲}, \sqrt{\frac{۹}{۲۵}}\}$

۲ $\{\frac{۷}{۵}, -۷, 2x+۱, -۰/۷۵\} = \{\frac{۷}{۲۱}, ۳x+y, -\frac{۳}{۴}, \sqrt{\frac{۴۹}{۲۵}}\}$

۳ $\{۸, ۰/۸, \sqrt{\frac{۲۵}{۸۱}}, -\frac{۳}{۲}, x-y, ۰/۶۲۵\} = \{\frac{۴}{۵}, x+y, \frac{۵}{۹}, \frac{۵}{۸}, -۱/۵, \sqrt{\sqrt{۱۶}}\}$

۱۵ درستی یا نادرستی هر یک از روابط زیر را با ذکر دلیل، تعیین کنید.

۱ $\{۴,۵,۶\} \subseteq \{-۴,-۵,-۶,۰,۴,۵\}$

۲ مجموعهٔ اعداد زوج نامنفی، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ اعداد زوج مثبت است.

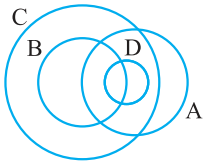
۳ اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه B حداکثر به تعداد عضوهای A، عضو دارد.

۴ $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \not\subseteq \{\emptyset\}$

۵ $\{\{a\}\} \subseteq \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

۱۶ در مورد سه مجموعهٔ A، B و C می‌دانیم B و C هر دو زیرمجموعه‌های A هستند و هم‌چنین B و C هیچ‌کدام زیرمجموعهٔ دیگری نیستند، اما عضوی از A وجود دارد که هم در B است و هم در C. به کمک نمودار ون، شکلی مناسب برای نمایش مجموعه‌های A، B و C رسم کنید.

۱۷ با توجه به شکل زیر علت درستی یا نادرستی روابط داده‌شده را تعیین کنید. (در صورت نادرست‌بودن، رابطه‌ای درست در مورد مجموعه‌های داده‌شده بیان کنید.)



۱ $D \in A$ ۲ $A \not\subseteq C$ ۳ $D \subseteq B$

۴ $B \subseteq C$ ۵ $D \not\subseteq C$ ۶ $B \not\subseteq C$

۷ $D \subseteq \emptyset$ ۸ $A \subseteq A$

۱۸ به کمک رسم نمودار ون ثابت کنید اگر $B \subseteq A$ و $C \subseteq B$، آن‌گاه $A \subseteq C$.

۱۹ مجموعه‌های A، B، C و D را به صورت زیر در نظر بگیرید، سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های داده‌شده را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$A = \{۱۳,۱۵,۱۷,۱۹,۲۳\}$ $B = \{۱۲,۱۳,۱۵,۱۷\}$ $C = \{۱۲,۱۷,۱۱,۱۳,۱۵,۲۳\}$ $D = \{۱۳,۲۳\}$

۱ $B \subseteq A$ ۲ $A \subseteq C$ ۳ $D \not\subseteq B$ ۴ $B \subseteq C$

۵ $۱۱ \in C$ ۶ $\{۱۲,۱۳\} \in B$ ۷ $۱۱,۱۲,۱۷ \in C$ ۸ $\{۱۱,۲۳\} \subseteq C$

۹ $D \in A$

۲۰ همهٔ زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

۱ مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی ۲ مجموعهٔ حروف صدادار انگلیسی ۳ $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

۲۱ با توجه به مجموعهٔ $A=\{-۲۱,-۱۸,-۱۵,-۱۲,\ldots,۱۲,۱۵,۱۸\}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱) زیرمجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن همگی زوج باشند. این زیرمجموعه حداکثر چند عضو دارد؟

۲) زیرمجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن همگی اول باشند.

۳) چند زیرمجموعه از A می‌توان نوشت که اعضای آن‌ها همگی مضرب ۵ باشند؟

۲۲ با توجه به مجموعهٔ A: $A=\{\{\},۱,۲,۳,\{۱,۲\},\{۱,۲,۳\},\{۲\},\{۳\}\}$

۱) درستی یا نادرستی روابط داده‌شده را بررسی کنید.

الف) $\{\}\subseteq A$ ب) $\{۱\}\in A$ پ) $\{\{۱\},\{۲\},\{۳\}\}\subseteq A$ ت) $\{۱,۲,۳\}\subseteq A$

ث) $\{۲,\{۲\}\}\subseteq A$ ج) $\{۱,۲,۳\}\in A$ چ) $\{۱,۲\}\subseteq A$

۲) چندتا از زیرمجموعه‌های این مجموعه، عضوی از خود مجموعه هم هستند؟

۲۳ در هر یک از قسمت‌های زیر، کوچک‌ترین مجموعهٔ ممکن با شرایط داده‌شده را بنویسید.

۱) $\{۲\}\in A\ ,\ \{۲\}\subseteq A$ ۲) $\{۲\}\in A\ ,\ \{۳\}\subseteq A$ ۳) $\{۲\}\in A\ ,\ \{۳\}\in A\ ,\ \{۲,۳\}\subseteq A$

۴) $\{۲,۳\}\subseteq A\ ,\ \{\{۲\},۳\}\subseteq A$ ۵) $\{۲,۳\}\in A\ ,\ \{۲,۳\}\subseteq A\ ,\ \{\{۲\},\{۳\},\{۲,۳\}\}\subseteq A$

۲۴ تعداد زیرمجموعه‌های تک‌عضوی مجموعهٔ A، ۵تا بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌هایی است که زیرمجموعهٔ تمامی زیرمجموعه‌های A هستند. تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ A چندتا است؟

۲۵ هر یک از مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

۱) $\{۱,۳,۵,۷,۹,\ldots\}$ ۲) $\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,\ldots\}$ ۳) $\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$

۴) $\{\ldots,-۵,-۴,-۳,-۲\}$ ۵) $\{۷,۱۱,۱۵,۱۹,۲۳,۲۷,\ldots\}$ ۶) $\{\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۵},\frac{۱۱}{۸},\frac{۱۵}{۱۱},\frac{۱۹}{۱۴},\frac{۲۳}{۱۷},\frac{۲۷}{۲۰},\ldots\}$

۷) $\{۲,۴,۸,۱۶,۳۲,\ldots\}$ ۸) $\{\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۲۷},\frac{۱}{۸۱},\frac{۱}{۲۴۳}\}$ ۹) $\mathbb{W}$

۱۰) $\mathbb{Q}$

۲۶ مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوهایشان مشخص کنید.

۱) $A=\{۲x+۱\,|\,x\in\mathbb{N}\}$ (گیلان ـ خرداد ۹۵) ۲) $B=\{۳n-۲\,|\,n\in\mathbb{N}\}$

۳) $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\ ,\ -۳\le x<۷\}$ ۴) $D=\{x-۱\,|\,x\in\mathbb{Z}\ ,\ -۲\le x<۳\}$

۵) $E=\{۳x\,|\,x=۰,۳,۴,۹\}$ ۶) $F=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\ ,\ ۵x-۱=۱۹\}$

۷) $G=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,(x^۲-۴)(۳x^۲-۲۷)=۰\}$ ۸) $H=\{\frac{x-۱}{x+۱}\,|\,x\in\mathbb{Z}\ ,\ -۵<x\le-۲\}$

۹) $I=\{x^۲-۱\,|\,x\in\mathbb{N}\ ,\ \frac{۲۴}{x}\in\mathbb{Z}\}$ ۱۰) $g=\{\frac{x}{y}\,|\,x\in\mathbb{N}\ ,\ ۳\le x<۷\ ,\ y=x+۲\}$

۲۷ مجموعهٔ $A=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ را در نظر بگیرید:

۱) با توجه به مجموعهٔ A، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابرند؟

$B=\{x\,|\,x\in A\ ,\ x^۲\le۲\}$ $C=\{x\,|\,x\in A\ ,\ -۴<x<۲\}$

$D=\{x\,|\,x\in A\ ,\ (x^۴-۱۶)(x^۴-۸۱)=۰\}$

۲) مجموعهٔ D چندتا زیرمجموعه دارد؟ آن‌ها را بنویسید.

۲۸ هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورتی دیگر بنویسید. (به زبان ریاضی)

۱) $A=\{۲x-۱\,|\,x\in\mathbb{N}\ ,\ x\le۳\}$ ۲) $B=\{۳x+۵\,|\,x\in\mathbb{Z}\ ,\ -۲<x<۲\}$

۳) $C=\{x\,|\,(x-۲)(x+۲)=۰\}$

۲۹ اگر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{۲x+۳\,|\,x\in\mathbb{N}\ ,\ x<a\}$ با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ B که شامل مضارب صحیح عدد ۵ که بین دو عدد ۷۹ و ۹۷ است، برابر باشد، آن‌گاه:

۱) مقدار عددی a چه‌قدر است؟ $(a\in\mathbb{N})$

۲) مجموعهٔ A را مشخص کنید.

۳) تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A که همهٔ عضوهای آن‌ها اعداد اول می‌باشند، چندتا است؟

۳۰ به کمک رسم نمودار ون، وضعیت مجموعه‌های $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ را نسبت به هم نشان دهید و سپس با توجه به نمودار، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

۱) هر عدد حسابی، عددی گویا است.

۲) هر عدد گویا، عددی صحیح است.

۳) هر عدد حسابی، عددی طبیعی است.

۴) بعضی از اعداد صحیح، گویا هستند.

۵) بعضی از اعداد گویا، حسابی‌اند.

۶) هیچ عدد صحیحی وجود ندارد که حسابی باشد.

۳۱ مجموعه‌های $A=\{x^2-2 \mid x\in \mathbb{W}\ ,\ x<6\}$ و $B=\{5x-3 \mid x\in \mathbb{Z}\ ,\ 3\le x<10\}$ را در نظر بگیرید.

۱) تعداد زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های A و B را به دست آورید.

۲) A چند زیرمجموعه دارد که همهٔ عضوهای آن‌ها اعداد اول باشند؟

۳) B چند زیرمجموعه دارد که همهٔ اعضای آن‌ها، عددهای زوج باشند؟

۳۲ فرض کنید مجموعهٔ A، $n+1$ تا عضو دارد. در این صورت:

۱) اگر تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر ۶۴تا باشد، آن‌گاه مقدار n چه‌قدر است؟

۲) اگر سه‌تا از اعضای A را حذف کنیم، آن‌گاه مجموعهٔ جدید چندتا زیرمجموعه از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اول، کم‌تر دارد؟

۳۳ ثابت کنید با اضافه‌شدن یک عضو به هر مجموعهٔ دلخواه، تعداد زیرمجموعه‌های آن مجموعه ۲ برابر می‌شود.

پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱۵ با توجه به مجموعهٔ $K=\{a,b,c,d\}$، کدام گزینه صحیح است؟ (نمونه‌دولتی ـ یزد ـ ۹۶ ـ ۹۵)

۱) $\{a\}\in K$ ۲) $\varnothing\in K$ ۳) $\{b\}\subseteq K$ ۴) $K\subseteq\varnothing$

۱۶ با توجه به مجموعهٔ $A=\{\sqrt{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$، کدام رابطه درست است؟ (نمونه‌دولتی ـ خراسان رضوی ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) $0\in A$ ۲) $A\subseteq\mathbb{Q}'$ ۳) $A-\mathbb{Q}=\varnothing$ ۴) $\mathbb{N}\subseteq A$

۱۷ با توجه به مجموعهٔ $A=\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ x\ge -1\}$، کدام عبارت درست است؟ (نمونه‌دولتی ـ کردستان ـ ۹۶ ـ ۹۵)

۱) $A\subseteq\mathbb{Q}$ ۲) $(2-\sqrt{3})\in A$ ۳) $A\subseteq\mathbb{W}$ ۴) $A=\{-1,0,1,2,\ldots\}$

۱۸ اگر $D=\{x\in\mathbb{R} \mid -3\le x<9\}$، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟ (نمونه‌دولتی ـ اصفهان ـ ۹۶ ـ ۹۵)

۱) عددی که هم گویا و هم گنگ باشد، در مجموعهٔ D قرار دارد.

۲) عدد $-3+\sqrt[3]{-27}$ به مجموعهٔ D تعلق دارد.

۳) مجموعهٔ D با مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{Z} \mid -3<x<9\}$ مساوی است.

۴) $\sqrt{19}+\frac{11}{3}\in D$

۱۹ بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $\{3x-5 \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ 2^x<\sqrt{11}\}$ کدام است؟ (نمونه‌دولتی ـ تهران ـ ۹۳ ـ ۹۲)

۱) -2 ۲) $+1$ ۳) $+4$ ۴) -5

۲۰ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با بقیهٔ مجموعه‌ها برابر نیست؟ (نمونه‌دولتی ـ خراسان رضوی ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) مجموعهٔ سه عدد زوج طبیعی متوالی که حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۲۴ است.

۲) مجموعهٔ سه عدد زوج طبیعی متوالی که اندازهٔ ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.

۳) $\{k \mid k\in\mathbb{N}, 3\le 2k<5\}$

۴) $\{2k \mid k\in\mathbb{N}\ ,\ 3\le k\le 5\}$

۲۱ تعداد زیرمجموعه‌های $B=\{\{3\},4\}$ چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{\{1,2,3,\ldots,10\}\}$ است؟ (نمونه‌دولتی ـ تهران ـ ۹۶ ـ ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۲ در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، سه‌تا از اعضا، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ داده‌شده هستند؟

۱) $\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ ۲) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$ ۳) $\{1,2,\{1\},\{2\},\varnothing\}$ ۴) $\{\{1\},2,\{1,2\},\varnothing\}$

۲۳ دو مجموعهٔ $\{-1\}$ و $\{m-n, n^3\}$ برابرند. حاصل mn کدام است؟ (نمونه‌دولتی ـ شهرستان‌های تهران ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -2

۲۴ اگر مجموعهٔ $A=\{-5,1\}$ و $B=\{|x|, a\}$ با هم مساوی باشند، حاصل $a+|x|-2$ کدام است؟ (نمونه‌دولتی ـ کردستان ـ ۹۶ ـ ۹۵)

۱) -7 ۲) ۱۱ ۳) ۳ ۴) -9

۲۵ اگر دو مجموعهٔ $\{x+y, x-y\}$ و $\{3,5\}$ با هم برابر باشند، آن‌گاه مقدار عددی $2x+3y$ برابر است با:

۱) ۱۱ ۲) ۵ ۳) صفر ۴) گزینه‌های ۱ و ۲

۲۶ اگر دو مجموعهٔ $\{3,10\}$ و $\{x,y,z\}$ با هم برابر باشند، آن‌گاه حاصل‌جمع حداکثر و حداقل مقدار عبارت $x+y-z$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۹ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

۲۷ مجموعه‌های $A=\{x^2-9, 10\}$، $B=\{-8, 2\sqrt{y}\}$ و $C=\{\sqrt{5z}, -k^2+1\}$ همگی با هم برابرند. کم‌ترین مقدار عبارت $x+y+z+k$ کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۴۵ ۳) ۴۱ ۴) ۳۷

۲۸ مجموعه‌های $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$ و $B=\{\{7\},\{x,x^2,\sqrt{49}\}\}$ با هم برابرند. در این صورت b چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ $(a\neq b)$

۱) صفر مقدار ۲) یک مقدار ۳) دو مقدار ۴) سه مقدار

۲۹ اگر مجموعهٔ دوعضوی $\{\frac{x+y}{2}, 5k-6\}$ با مجموعهٔ $A=\{\{x+1\},\{3y-9\}\}$ برابر باشد، آن‌گاه حاصل $B=\{\{3\},\{a\},\{a,a^2\}\}$ عددی $\frac{x+y}{a+k}$ کدام است؟ $(a\neq 0,1)$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۳۰ اگر $A=\{\frac{3^{x+1}}{9^{2y}} \mid x-4y=2\}$ با مجموعهٔ $B=\{\frac{9^{2z}}{27^{2k+1}} \mid 3k-2z=m\}$ برابر باشد، آن‌گاه مقدار m برابر است با:

۱) -3 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -2

۳۱ اگر $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x<6\}$، تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی A که فقط دو عضو اول دارند، کدام است؟ (نمونه‌دولتی ـ شهرستان‌های تهران ـ ۹۷ ـ ۹۶)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲ تعداد زیرمجموعه‌های اعداد صحیح بین ۸۷ و ۹۷ که فقط شامل اعضای فرد هستند، چندتا است؟

۱) ۳۲تا ۲) ۱۶تا ۳) ۳۱تا ۴) ۱۵تا

۳۳ اگر A مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت کم‌تر از ۷ باشد، آن‌گاه مجموع اعضای همهٔ زیرمجموعه‌های A که فقط شامل اعداد زوج هستند، کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۴۲

۳۴ A مجموعهٔ اعداد صحیح ۱ تا ۲۰ است. تعداد زیرمجموعه‌های حداکثر سه‌عضوی A که شامل عدد ۳ هستند و مجموع اعضای آن‌ها برابر ۲۳ می‌باشد، چندتا است؟

۱) ۸تا ۲) ۹تا ۳) ۱۰تا ۴) ۱۱تا

۳۵ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا ۸ که اختلاف کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن‌ها برابر ۲ واحد می‌باشد، چندتا است؟

۱) ۶تا ۲) ۸تا ۳) ۱۰تا ۴) ۱۲تا

۳۶ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,2,3,\ldots,8\}$ که شامل ۷ هستند ولی شامل ۸ نیستند، چندتا است؟

۱) ۱۲۸تا ۲) ۱۲۷تا ۳) ۶۴تا ۴) ۶۳تا

۳۷ مجموع اعضای مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\leq 16, \frac{x}{3}\in\mathbb{N}\}$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۵

۳۸ مجموعهٔ $A=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{N}, m+n\leq 5\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۱تا ۲) ۱۰تا ۳) ۹تا ۴) ۸تا

۳۹ اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid ۱۰<(x-۳)^۲<۱۰۰\}$، آن‌گاه حاصل‌جمع عضوهای مجموعهٔ A کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۴۹ ۴) صفر

۴۰ اگر $A=\{\frac{x-۴}{۳}\mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ ۸<(x+۱)^۲<۱۰۱\}$، آن‌گاه حاصل تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضوهای A که عددهایی صحیح‌اند، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۱ اگر $\{\frac{x^۲}{۲}\in\mathbb{N}\ ,\ ۰\le x\le ۱۰\}$ و $A=\{\frac{x+۱}{۲}\}$ و $B=\{x-\frac{۱}{۲}\mid x\in A\}$، آن‌گاه حاصل‌ضرب اعضای B کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲

۴۲ اگر $\{\sqrt{۲۵-x^۲}\in\mathbb{N}\mid x\in\mathbb{Z}\}=A$ و $\{\sqrt{۱۶-x^۲}\in\mathbb{N}\mid x\in\mathbb{Z}\}=B$، آن‌گاه A و B چند عضو مشترک دارند؟

۱) صفرتا ۲) یکی ۳) دوتا ۴) سه‌تا

۴۳ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{x\mid x^۲=x\}$ چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{x\mid x^۳=x\}$ است؟

۱) برابرند. ۲) نصف ۳) ۲ ۴) ۴

۴۴ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نمایش مجموعهٔ $\{۹,۹۹,۹۹۹,\ldots\}$ است؟

۱) $\{۹(۱۰-۱)^n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ۲) $\{۱۱^n\times۹\mid n\in\mathbb{N}\}$ ۳) $\{۱۰^n-۱\mid n\in\mathbb{N}\}$ ۴) $\{۹\times(۱۰^n-۱)\mid n\in\mathbb{N}\}$

۴۵ نمایش مجموعهٔ $\{۲,۶,۱۲,۲۰,۳۰,۴۲,۵۶\}$ به کدام‌یک از صورت‌های زیر است؟

۱) $\{x^۲+۱\mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ ۱\le x\le ۸\}$ ۲) $\{x^۲-x\mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ ۱\le x\le ۸\}$

۳) $\{x^۲+x\mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ ۱\le x\le ۸\}$ ۴) $\{x^۲-x\mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ ۲\le x\le ۸\}$

۴۶ کدام گزینه نمایش‌دهندهٔ مجموعهٔ $\{\ldots,\frac{۴}{۶۲۵},\frac{۳}{۶۴},\frac{۲}{۹},\frac{۱}{۲}\}$ است؟

۱) $\{(\frac{n}{n+۱})^۲\mid n\in\mathbb{N}\}$ ۲) $\{(\frac{n}{n+۱})\mid n\in\mathbb{N}\}$

۳) $\{(\frac{n}{n+۱})^n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ۴) $\{\frac{n}{(n+۱)^n}\mid n\in\mathbb{N}\}$

۴۷ نمایش جبری مجموعهٔ $\{۲,-۳,۴,-۵,۶,-۷,۸,-۹\}$ به کدام‌یک از صورت‌های زیر است؟

۱) $\{-n\mid n\in\mathbb{N}\ ,\ ۲\le n\le ۹\}$ ۲) $\{(-۱)^n n\mid n\in\mathbb{N}\ ,\ ۱\le n\le ۹\}$

۳) $\{(-۱)^{n+۱}(n+۱)\mid n\in\mathbb{N}\ ,\ ۱<n<۱۰\}$ ۴) $\{(-۱)^{n-۱}(n+۱)\mid n\in\mathbb{N}\ ,\ ۱\le n<۹\}$

۴۸ نمایش ریاضی $A=\{-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۱۰},-\frac{۲}{۱۷},\ldots\}$ کدام گزینه است؟

۱) $A=\{\frac{-n}{n+۱}\mid n\in\mathbb{N}\}$ ۲) $A=\{\frac{(-۱)^{n-۱}(n-۲)}{n^۲+۱}\mid n\in\mathbb{N}\}$

۳) $A=\{\frac{(-۱)^n n^۲}{۲n-۱}\mid n\in\mathbb{N}\}$ ۴) $A=\{\frac{n-۲}{۳n^۲-۲}\mid n\in\mathbb{N}\}$

۴۹ می‌دانیم A مجموعه‌ای است که تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{\{۱,۲\},A,۳\}$، $\frac{۱}{۴}$ تعداد زیرمجموعه‌های آن است. اگر یکی از عضوهای A را حذف کنیم، چندتا از تعداد زیرمجموعه‌های آن کم می‌شود؟

۱) ۴تا ۲) ۸تا ۳) ۱۶تا ۴) ۳۲تا

۵۰ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$، هشت برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اعداد صحیح بین دو عدد a و ۱۰ است $(a<۱۰)$. a برابر کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۱ مجموعهٔ A، n عضوی است. اگر این مجموعه ۵تا زیرمجموعهٔ $n-۱$ عضوی داشته باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی آن چندتا است؟

۱) ۱۵تا ۲) ۱۲تا ۳) ۱۰تا ۴) ۸تا

۵۲ وقتی به مجموعهٔ A، دو عضو جدید اضافه می‌کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های A، ۴۸ واحد اضافه می‌شود. تعداد زیرمجموعه‌های حداقل دوعضوی مجموعهٔ A چندتا است؟

۱) ۱۰تا ۲) ۱۱تا ۳) ۱۲تا ۴) ۱۳تا

پاسخ‌نامه

پاسخ پرسش‌های تشریحی

پاسخ ۱

۱ نیست

۲ نمی‌شود

۳ ۳

۴ نمایش ـ مشخص ـ متمایز

۵ تهی ـ $\varnothing$ ـ $\{\}$

۶ $\sqrt{۴}=\frac{۲}{۲}=۱\in A$ ، $۷\notin A$

پاسخ ۲

۱ $A=\{a,k,h,i,c,m,b,g,e,j\}$

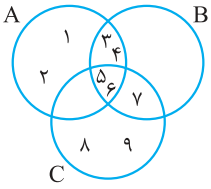
$B=\{m,b,g,e,j,f,n,d,l,o,p\}$

۲ سه عضو انتخابی باید از قسمت مشترک بین A و B در نمودار باشند، مثلاً m، b و g یا g، e و j یا ... .

پاسخ ۳

با توجه به عضوهای مشترک در مجموعه‌ها نمودار را رسم می‌کنیم.

۱ عضوهای مشترک A و B با توجه به نمودار، اعداد ۳، ۴، ۵ و ۶ هستند.



۲ عضوهای مشترک B و C با توجه به نمودار، اعداد ۵، ۶ و ۷ هستند.

۳ عضوهایی که در هر سه مجموعه قرار دارند، اعداد ۵ و ۶ هستند.

پاسخ ۴

۱ این مجموعه تهی است؛ زیرا تنها عدد اول زوج، ۲ است و بقیهٔ اعداد زوج همگی مضرب ۲ هستند و اول محسوب نمی‌شوند.

۲ واضح است که بین دو عدد طبیعی متوالی ۱۳۹۷ و ۱۳۹۸ هیچ عدد طبیعی دیگری وجود ندارد؛ پس این مجموعه هم تهی است.

۳ دو عدد $\frac{۱}{۱۳۹۷}$ و $\frac{۱}{۱۳۹۸}$ گویا هستند و می‌دانیم بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد؛ پس این مجموعه تهی نیست.

۴ ۷ تنها عدد اول یک‌رقمی موجود در این مجموعه است. چون صورت سؤال اعداد اول یک‌رقمی ناکم‌تر از ۷ را خواسته، یعنی خود ۷ هم قابل قبول است؛ پس این مجموعه تهی نیست.

۵ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد که از ۵ بزرگ‌تر باشد و در عین حال از -۷ کم‌تر باشد، پس این مجموعه تهی است.

پاسخ ۵

۱

۱- مجموعهٔ انسان‌هایی که بیش از ۱۰ متر قد دارند!

۲- مجموعهٔ اعدادی که هم اول‌اند و هم مرکب.

۳- مجموعهٔ شترهایی که قادر به صحبت‌کردن به زبان چینی هستند.

۲

۱- مجموعهٔ اعداد اول زوج

۲- مجموعهٔ اعدادی که نه مثبت‌اند و نه منفی.

۳- مجموعهٔ سیاره‌های شناخته‌شده‌ای که در آن‌ها اکسیژن وجود دارد.

۳

۱- مجموعهٔ اعداد اول بین ۲ و ۱۰

۲- مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۵ و ۹

۳- مجموعهٔ ماه‌های تابستان

پاسخ ۶

۱ ☒ به علت مشخص‌نبودن اعضا، عبارت موردنظر مجموعه به حساب نمی‌آید.

۲ ☑ مجموعهٔ موردنظر، مجموعهٔ $\{۲۴,۲۶,۲۸,۳۰\}$ است.

۳ ☑ مجموعهٔ موردنظر $\{۹۷\}$ است.

۴ ☒ اعضای عبارت داده‌شده مشخص نیستند؛ پس تشکیل مجموعه نمی‌دهند.

۵ ☑ ۱۰۱ عددی اول است و شمارندهٔ مرکبی ندارد؛ پس مجموعهٔ موردنظر مجموعهٔ $\{\}$ است.

۶ ☒ اعضا مشخص نیستند.

۷ ☒ اعضا مشخص نیستند. *(البته اصلاً مگه غذای ایرونی بدمزه داریم؟!)*

۸ ☑ جواب معادله برابر $x=۱$ بوده و در نتیجه مجموعهٔ موردنظر $\{۱\}$ است.

۹ ☑ این مجموعه همان مجموعهٔ تهی است، چون هیچ عددی وجود ندارد که مضرب ۴ باشد، ولی زوج نباشد.

پاسخ ۷

$۵\leftrightarrow A$ $۴\leftrightarrow B$

$۶\leftrightarrow C$ $۱\leftrightarrow D$

$۳\leftrightarrow E$ $۸\leftrightarrow F$

$۲\leftrightarrow G$ $۷\leftrightarrow H$

پاسخ ۸

۱ مجموعهٔ اعداد اول بین ۵۰ و ۸۰

۲ مجموعهٔ اعداد طبیعی مربع کامل از ۳۶ تا ۱۶۹ یا مربع اعداد طبیعی بین ۵ و ۱۴

۳ مجموعهٔ اعداد طبیعی مکعب کامل بین ۶۰ و ۳۵۰ یا مکعب اعداد طبیعی بین ۳ و ۸

۴ مجموعهٔ مضارب صحیح عدد ۷ از -۲۱ تا ۲۸

۵ مجموعهٔ مضارب صحیح عدد ۴ که بزرگ‌تر یا مساوی -۸ هستند.

پاسخ ۹

۱ $\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,\ldots,۱۳۹۵\} \Rightarrow$ تعداداعضا $= \frac{۱۳۹۵-۳}{۳}+۱$
$= ۴۶۴+۱ = ۴۶۵$

۲ $\{\}$ (عدد طبیعی بین ۱۲۲۵ و ۱۲۲۶ وجود ندارد.)
$\Rightarrow$ تعداد اعضا $= ۰$

۳ $\{\}$ (بین -۱ و ۱۰ عدد صحیح منفی وجود ندارد و همگی نامنفی‌اند!)
$\Rightarrow$ تعداد اعضا $= ۰$

۴ $\{۴۷\}$ (تنها مضرب اول هر عدد اول، خود آن عدد است.)
$\Rightarrow$ تعداد اعضا $= ۱$

۵ باید مجموعهٔ اعداد دورقمی که مجموع ارقام آن‌ها صفر، ۱، ۲ یا ۳ است را تشکیل دهیم. $\{۱۰,۲۰,۱۱,۳۰,۲۱,۱۲\}$
$\Rightarrow$ تعداد اعضا $= ۶$

۶ فراموش نکنید که مربع هر عدد اول، همواره شامل سه شمارندهٔ مثبت است. پس مجموعهٔ موردنظر برابر است با: $\{۴,۹,۲۵,۴۹\}$
$\Rightarrow$ تعداد اعضا $= ۴$

پاسخ ۱۰

۱ $\{۷,-۷\},\{-۷,۰,۷\},\{-۷,۰,۱,۷\}$

۲ دقت کنید که اعضای مجموعهٔ موردنظر از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب می‌شوند. حالا چون این مجموعه شامل سه عدد اول است و ۳ نیز خود عددی اول است، بنابراین در این مجموعه حتماً باید دوتا از اعداد ۲، ۵ یا ۷ وجود داشته باشند. پس مجموعه‌های قابل قبول به صورت زیر ساخته می‌شوند: $\{۳,۴,۵,۷\},\{۳,۴,۲,۷\},\{۳,۴,۲,۵\}$

که تعداد آن‌ها نیز برابر ۳تا است.

پاسخ ۱۱

۱ بله، هر دو معرف مجموعهٔ تهی‌اند.

۲ خیر، مجموعهٔ اول تهی است و شامل هیچ عضوی نیست، در حالی که مجموعهٔ دوم یک عضو دارد ($\emptyset$، تنها عضو مجموعهٔ $\{\emptyset\}$ است).

۳ دو عضو! داخل مجموعه، $\{\}$ و $\emptyset$ یکسان حساب می‌شوند و یک عضو در نظر گرفته می‌شوند.

۴ $\{\} \not\ni \emptyset$، چون $\{\}$ هیچ عضوی ندارد، اما واضح است که $\emptyset \in A$ برقرار است.

پاسخ ۱۲

۱ $Y - X$

۲ خود آن مجموعه

۳ عضوی در X پیدا کنیم که در Y نیست.

۴ $\emptyset$ (تهی)

۵ تهی

۶ $O = \{۲k-۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$

۷ $Q = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\}$

پاسخ ۱۳

۱ ابتدا اعداد موردنظر را پیدا می‌کنیم. فرض کنید این اعداد به صورت x، $x+۱$، $x+۲$، $x+۳$ و $x+۴$ باشند، در این صورت داریم:

$x+x+۱+x+۲+x+۳+x+۴ = ۸۵$

$\Rightarrow ۵x+۱۰ = ۸۵ \Rightarrow ۵x = ۷۵ \Rightarrow x = ۱۵$

$\Rightarrow$ مجموعهٔ موردنظر: $\{۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹\}$

۲ ۱- مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۱۴ و ۲۰

۲- مجموعهٔ پنج عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱۵

پاسخ ۱۴

۱ ابتدا اعضای مجموعهٔ سمت راست را به ساده‌ترین صورت نوشته و سپس با مجموعهٔ سمت چپ تساوی، مقایسه می‌کنیم:

$\frac{۳}{۲۴} = \frac{۱}{۸}, \frac{\sqrt{y}}{۳^۲} = \frac{\sqrt{y}}{۹}, \sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۳}{۵}$

$\Rightarrow \{۲,x+۱,\frac{۳}{۵},۰/۲۵\} = \{\underbrace{\frac{۱}{۴}}_{۰/۲۵},\frac{۱}{۸},\frac{\sqrt{y}}{۹},\frac{۳}{۵}\}$

حالا با مقایسهٔ دو مجموعه می‌توان فهمید که روابط زیر باید برقرار باشند:

$x+۱ = \frac{۱}{۸}, \frac{\sqrt{y}}{۹} = ۲$

$\Rightarrow \begin{cases} x+۱ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{۱}{۸}-۱ \Rightarrow x = -\frac{۷}{۸} \\ \frac{\sqrt{y}}{۹} = ۲ \Rightarrow \sqrt{y} = ۱۸ \Rightarrow y = ۱۸^۲ \Rightarrow y = ۳۲۴ \end{cases}$

۲ مشابه قسمت قبل ابتدا اعضای مجموعهٔ سمت راست را ساده‌سازی می‌کنیم:

$\frac{۷}{۲۱} = \frac{۱}{۳}, -\frac{۳}{۴} = -۰/۷۵, \sqrt{\frac{۴۹}{۲۵}} = \frac{۷}{۵}$

$\Rightarrow \{\frac{۷}{۵},-۷,۲x+۱,-۰/۷۵\} = \{\frac{۱}{۳},۳x+y,-۰/۷۵,\frac{۷}{۵}\}$

حالا با توجه به برابربودن دو مجموعه باید داشته باشیم $۲x+۱ = \frac{۱}{۳}$ و $۳x+y = -۷$؛ پس:

$۲x+۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۲x = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$ (I)

$۳x+y = -۷ \xrightarrow{(I)} ۳(-\frac{۱}{۳})+y = -۷$

$\Rightarrow -۱+y = -۷ \Rightarrow y = -۶$

۳ ابتدا اعضای دو مجموعه که قابل ساده‌سازی‌اند را ساده می‌کنیم، سپس مشابه دو قسمت قبل، مقادیر مجهول را می‌یابیم.

$$۰/۸=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵},\ \sqrt{\frac{۲۵}{۸۱}}=\frac{۵}{۹},\ -\frac{۳}{۲}=-۱/۵,\ ۰/۶۲۵=\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰}$$

$$=\frac{۵}{۸},\ \sqrt{\sqrt{۱۶}}=\sqrt{۴}=۲$$

$$\Rightarrow \{۸,\frac{۴}{۵},\frac{۵}{۹},-۱/۵,x-y,\frac{۵}{۸}\}=\{\frac{۴}{۵},x+y,\frac{۵}{۹},\frac{۵}{۸},-۱/۵,۲\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=۸ \\ x-y=۲ \end{cases}$$

$$۲x=۱۰ \Rightarrow x=۵ \Rightarrow y=۸-۵=۳$$

پاسخ ۱۵

۱ نادرست است؛ ۶ عضو مجموعهٔ سمت چپ هست ولی در مجموعهٔ سمت راست نیست؛ پس مجموعهٔ $\{۴,۵,۶\}$ نمی‌تواند زیرمجموعهٔ $\{-۴,-۵,-۶,۰,۴,۵\}$ باشد.

۲ نادرست است؛ مجموعهٔ اعداد زوج نامنفی به صورت $\{۰,۲,۴,۶,۸,۱۰,\ldots\}$ است و مجموعهٔ اعداد زوج مثبت نیز به صورت $\{۲,۴,۶,۸,۱۰,\ldots\}$ می‌باشد؛ بنابراین مجموعهٔ اول چون شامل صفر است ولی صفر در مجموعهٔ دوم نیست، پس زیرمجموعهٔ مجموعهٔ دوم نمی‌باشد.

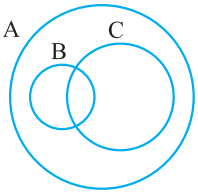
۳ نادرست است؛ چون $A\subseteq B$، پس هر عضوی که در A باشد، باید در B هم باشد، یعنی A حداکثر می‌تواند به تعداد اعضای B عضو داشته باشد، در غیر این صورت عضوی در A است که در B نیست و این خلاف رابطهٔ $A\subseteq B$ است.

۴ درست است. $\{\varnothing\}$ عضوی از مجموعهٔ $\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ است، نه زیرمجموعهٔ آن، در واقع اگر $\varnothing$ عضو مجموعه‌ای باشد، آن وقت $\{\varnothing\}$ زیرمجموعه‌اش است.

۵ درست است. چون $\{a\}$ عضو مجموعهٔ $\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$ است، پس $\{\{a\}\}$ یک زیرمجموعهٔ تک‌عضوی آن است.

پاسخ ۱۶

چون B و C هر دو زیرمجموعهٔ A هستند، پس نمودارهای مربوط به B و C داخل نمودار مربوط به A قرار می‌گیرند؛ از طرف دیگر چون B و C زیرمجموعه هم نیستند، پس نمودارهای آن‌ها نباید درون هم قرار بگیرند، اما باید همدیگر را قطع کنند، چون عضو مشترک دارند. در واقع عضو مشترک باید در فضای بین دو مجموعه قرار بگیرد.



پاسخ ۱۷

۱ نادرست است؛ $D\notin A$ بلکه $D\subseteq A$؛ چون درون A قرار دارد.

۲ درست است؛ چون A به طور کامل درون C قرار نگرفته، پس $A\not\subseteq C$.

۳ نادرست است؛ D به طور کامل در داخل B قرار ندارد، پس $D\not\subseteq B$.

۴ درست است؛ B به طور کامل درون C قرار دارد.

۵ نادرست است؛ D به طور کامل درون C قرار دارد، پس $D\subseteq C$.

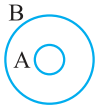
۶ درست است؛ $B\neq C$ بلکه $B\subseteq C$.

۷ هم می‌تواند درست باشد و هم نادرست؛ اگر D حداقل یک عضو داشته باشد، حکم برقرار است و در غیر این صورت D خودش تهی بوده و تهی زیرمجموعهٔ خودش هم محسوب می‌شود.

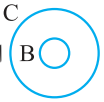
۸ درست است؛ هر زیرمجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است.

پاسخ ۱۸

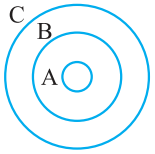
چون $A\subseteq B$، پس نمودار مربوط به مجموعه‌های A و B به صورت



است و به همین ترتیب نمودار مربوط به مجموعه‌های B و C با توجه به رابطهٔ $B\subseteq C$، به صورت



است. حالا چون A داخل B قرار دارد، پس نمودار مربوط به هر سه مجموعه به صورت



خواهد بود؛ در نتیجه چون A هم به طور کامل در C قرار می‌گیرد، باید داشته باشیم $A\subseteq C$.

پاسخ ۱۹

۱ $۱۲\in B$ ولی $۱۲\notin A$، پس B نمی‌تواند زیرمجموعهٔ A باشد، در نتیجه این رابطه نادرست است.

۲ $۱۹\in A$ ولی $۱۹\notin C$، پس $A\not\subseteq C$، بنابراین رابطه نادرست است.

۳ $۲۳\in D$ ولی $۲۳\notin B$، پس $D\not\subseteq B$، بنابراین رابطه درست است.

۴ همهٔ اعضای B، عضو مجموعهٔ C هم هستند، پس رابطهٔ $B\subseteq C$ درست است.

۵ عدد ۱۱ عضو مجموعهٔ C است، پس رابطهٔ $۱۱\in C$ درست است.

۶ $\{۱۲,۱۳\}$ عضو مجموعهٔ B نیست، پس رابطهٔ $\{۱۲,۱۳\}\in B$ نادرست است و درست آن به صورت $\{۱۲,۱۳\}\subseteq B$ است.

۷ هر سه عدد ۱۱، ۱۲ و ۱۷ عضو مجموعهٔ C هستند، پس رابطهٔ داده‌شده درست است.

۸ هم ۱۱ و هم ۲۳ عضو مجموعهٔ C هستند، پس مجموعهٔ $\{۱۱,۲۳\}$ زیرمجموعهٔ C است. در نتیجه رابطهٔ داده‌شده درست است.

۹ D عضو A نیست، بلکه زیرمجموعهٔ A است، یعنی $D\subseteq A$، پس رابطهٔ داده‌شده نادرست است.

پاسخ ۲۰

۱ مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی به صورت $\{2,3,5,7\}$ است، پس زیرمجموعه‌های آن عبارت‌اند از:

$\varnothing,\{2\},\{3\},\{5\},\{7\},\{2,3\},\{2,5\},\{2,7\},\{3,5\},\{3,7\},$
$\{5,7\},\{2,3,5\},\{2,3,7\},\{2,5,7\},\{3,5,7\},\{2,3,5,7\}$

۲ مجموعهٔ حروف صدادار انگلیسی به صورت $\{a,o,i,u,e\}$ هستند و زیرمجموعه‌های آن به صورت زیر خواهند بود:

صفرعضوی‌ها: $\{\}$

تک‌عضوی‌ها: $\{a\},\{o\},\{u\},\{e\},\{i\}$

دوعضوی‌ها: $\{a,o\},\{a,i\},\{a,e\},\{a,u\},\{o,u\},\{o,e\},$
$\{o,i\},\{u,e\},\{u,i\},\{e,i\}$

سه‌عضوی‌ها: $\{a,o,u\},\{a,o,e\},\{a,o,i\},\{a,u,e\},\{a,u,i\},$
$\{a,e,i\},\{o,u,e\},\{o,u,i\},\{o,e,i\},\{u,e,i\}$

چهارعضوی‌ها: $\{a,o,u,e\},\{a,o,u,i\},\{a,u,e,i\},\{o,u,e,i\},$
$\{a,o,i,e\}$

پنج‌عضوی‌ها: $\{a,o,u,e,i\}$

۳ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ موردنظر به صورت زیر هستند:

$\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},$
$\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$

پاسخ ۲۱

۱ کافی است زیرمجموعه‌ای مثال بزنیم که اعضای آن جزء اعداد زوج بین -21 و ۱۸ باشند، مثلاً مجموعهٔ $\{-18,-6,0,6,18\}$ مجموعهٔ موردنظر نیز حداکثر می‌تواند به تعداد اعداد زوج بین -21 و ۱۸ یعنی اعداد $-18,-12,-6,0,6,12$ و ۱۸ که تعداد آن‌ها برابر ۷تا است، عضو داشته باشد.

۲ $\{3\}$

۳ عضوهایی از A که مضرب ۵ هستند، عبارت‌اند از اعداد -15، ۰ و ۱۵؛ ضمناً هر زیرمجموعه‌ای از این اعداد، زیرمجموعه‌های A نیز محسوب می‌شوند که عبارت‌اند از:

$\{-15,0,15\},\{0,15\},\{-15,15\},\{-15,0\},\{15\},\{0\},\{-15\}$

پس تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با ۷تا.

پاسخ ۲۲

۱ الف) درست است؛ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است.

ب) نادرست است؛ $1\in A$، نه $1\in A$. به عبارت دیگر چون $1\in A$، پس $\{1\}\subseteq A$.

پ) نادرست است؛ چون $\{1\}\notin A$، پس $\{\{3\},\{2\},\{1\}\}$ نمی‌تواند زیرمجموعهٔ A باشد.

ت) درست است؛ $1,2,3\in A$، پس $\{1,2,3\}\subseteq A$.

ث) درست است؛ $2\in A$ و $\{2\}\in A$، پس $\{2,\{2\}\}\subseteq A$.

ج) درست است؛ $\{1,2,3\}$ عضوی از A است.

چ) درست است؛ چون ۱ و ۲ هر دو عضو A هستند، پس $\{1,2\}\subseteq A$.

۲ $\{\}$ زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است که در خود A نیز هست. ضمناً چون $1,2,3\in A$ هستند، بنابراین $\{1,2\}$، $\{1,2,3\}$، $\{2\}$ و $\{3\}$ همگی زیرمجموعه‌های A می‌باشند که اعضای A نیز محسوب می‌شوند، پس جمعاً ۵تا از زیرمجموعه‌های A، عضو A هم هستند.

پاسخ ۲۳

۱ $\{2\}$ باید عضو مجموعهٔ A باشد و چون $\{2\}\subseteq A$، پس $2\in A$، بنابراین کوچک‌ترین مجموعه با شرایط مطرح‌شده، مجموعهٔ $\{2,\{2\}\}$ است.

۲ $\{2\}$ و ۳ باید عضو A باشند، پس مجموعهٔ موردنظر به صورت $\{2,\{2\},3\}$ است.

۳ $\{2\}$ و $\{3\}$ و هر دو عدد ۲ و ۳ با توجه به رابطهٔ $\{2,3\}\subseteq A$ باید عضو مجموعهٔ موردنظر باشند، پس این مجموعه به صورت $\{3\},\{2\},\{2,3\}$ قابل نمایش است.

۴ چون $\{2,3\}\subseteq A$، پس $2\in A$ و ۳، به همین ترتیب چون $\{3,\{2\}\}\subseteq A$، پس رابطهٔ $\{2\}\in A$ نیز برقرار است، بنابراین مجموعهٔ موردنظر به صورت $\{2,\{2\},3\}$ قابل نمایش است.

۵ چون $\{2,3\}\in A$، پس مجموعهٔ موردنظر شامل عضو $\{2,3\}$ است. از طرفی چون $\{2,3\}\subseteq A$، پس $2\in A$ و $3\in A$ و به همین ترتیب از طرف دیگر چون $\{\{2,3\},\{3\},\{2\}\}\subseteq A$، پس $\{2\}\in A$ و $\{3\}\in A$؛ بنابراین مجموعهٔ A مجموعهٔ $\{\{2,3\},\{3\},\{2\},2,3\}$ است.

پاسخ ۲۴

زیرمجموعه‌ای از A که زیرمجموعهٔ تمامی زیرمجموعه‌های A است، همان مجموعهٔ $\varnothing$ می‌باشد که شامل صفر عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های تک‌عضوی یک مجموعه نیز برابر تعداد اعضای آن مجموعه است، پس چون تعداد زیرمجموعه‌های تک‌عضوی A برابر $5+1=6$ تا است، بنابراین خود مجموعهٔ A، ۶عضوی است. حالا مثلاً فرض می‌کنیم این مجموعه برابر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ باشد و با نوشتن تمام زیرمجموعه‌های ۲عضوی آن، پاسخ مسئله را پیدا می‌کنیم:

زیرمجموعه‌های ۲عضوی A: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},$
$\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},$
$\{4,6\},\{5,6\}$

همان‌طور که می‌بینید تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر ۱۵تا است، پس جواب مسئله نیز برابر ۱۵ است.

پاسخ ۲۵

۱ مجموعهٔ موردنظر، برابر مجموعهٔ اعداد فرد است، پس به صورت روبه‌رو قابل نمایش است: $\{۲k+۱ \mid k \in \mathbb{W}\}$

۲ مجموعهٔ داده‌شده، برابر مضارب طبیعی عدد ۵ است، پس به صورت روبه‌رو قابل نمایش است: $\{۵k \mid k \in \mathbb{N}\}$

۳ مجموعهٔ داده‌شده، اعداد صحیح بین -۴ و ۶ هستند، پس مجموعه به صورت روبه‌رو قابل نمایش است: $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۴ < x < ۶\}$

۴ مجموعهٔ داده‌شده، اعداد صحیح کوچک‌تر از -۱ است، پس به صورت روبه‌رو قابل نمایش است: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < -۱\}$

۵ اعداد مجموعهٔ داده‌شده، ۴تا ۴تا در حال اضافه‌شدن هستند، پس اعداد داده‌شده باید با مضارب طبیعی عدد ۴ رابطهٔ خاصی داشته باشند. حالا دقت کنید که: $۷=۴\times۱+۳, ۱۱=۴\times۲+۳,$
$۱۵=۴\times۳+۳, ۱۹=۴\times۴+۳, \ldots$

پس مجموعهٔ موردنظر به صورت زیر قابل نمایش است:
$\{۴k+۳ \mid k \in \mathbb{N}\}$

۶ اعداد موجود در صورت، ۴تا ۴تا و اعداد موجود در مخرج ۳تا ۳تا در حال اضافه‌شدن هستند، پس مثل قسمت قبل الگوی اعداد صورت و مخرج به صورت زیر به دست می‌آید:

الگوی اعداد صورت: $۳=۴\times۰+۳, ۷=۴\times۱+۳, ۱۱=۴\times۲+۳, \ldots$

الگوی اعداد مخرج: $۲=۳\times۰+۲, ۵=۳\times۱+۲, ۸=۳\times۲+۲,$
$۱۱=۳\times۳+۲, ۱۴=۳\times۴+۲, \ldots$

مجموعهٔ موردنظر $\Rightarrow$: $\{\frac{۴k+۳}{۳k+۲} \mid k \in \mathbb{W}\}$

۷ دقت کنید که $۲^۱=۲، ۲^۲=۴، ۲^۳=۸، ۲^۴=۱۶، ۲^۵=۳۲$ و ...،
پس مجموعهٔ داده‌شده به صورت زیر قابل بازنویسی است:
$\{۲^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

۸ مشابه قسمت قبل داریم: $\frac{۱}{۳^۱}=\frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۳^۲}=\frac{۱}{۹}، \frac{۱}{۳^۳}=\frac{۱}{۲۷}$ و ...

پس مجموعه به صورت روبه‌رو است: $\{\frac{۱}{۳^n} \mid n \in \mathbb{N}, n \le ۵\}$

۹ $\mathbb{W}=\{x \mid x+۱ \in \mathbb{N}\}$ یا $\mathbb{W}=\{x-۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$

۱۰ $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\}$

پاسخ ۲۶

۱ به جای x مقادیر ۱، ۲، ۳ و ... را قرار داده و مجموعه را به دست می‌آوریم، البته واضح است که مجموعهٔ داده‌شده، مجموعهٔ اعداد فرد بزرگ‌تر از ۱ است.

$\Rightarrow A=\{۲\times۱+۱, ۲\times۲+۱, ۲\times۳+۱, \ldots\}$

$\Rightarrow A=\{۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, \ldots\}$

۲ مشابه قسمت قبل داریم:

$B=\{۳\times۱-۲, ۳\times۲-۲, ۳\times۳-۲, ۳\times۴-۲, \ldots\}$

$\Rightarrow B=\{۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, \ldots\}$

۳ مجموعهٔ داده‌شده، مجموعهٔ اعداد صحیح از -۳ تا ۶ است، پس داریم: $C=\{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$

۴ به جای x مقادیر -۲، -۱، ۰، ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم، پس داریم:

$D=\{-۲-۱, -۱-۱, ۰-۱, ۱-۱, ۲-۱\}$

$\Rightarrow D=\{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱\}$

۵ $E=\{۳\times۰, ۳\times۳, ۳\times۴, ۳\times۹\}$

$\Rightarrow E=\{۰, ۹, ۱۲, ۲۷\}$

۶ ابتدا معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$۵x-۱=۱۹ \Rightarrow ۵x=۲۰ \Rightarrow x=۴$

پس مجموعهٔ داده‌شده، معادل مجموعهٔ زیر است:

$F=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x=۴\} \Rightarrow F=\{۴\}$

۷ ابتدا معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$(x^۲-۴)(۳x^۲-۲۷)=۰$

$$\begin{cases} x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=۲ \text{ یا } x=-۲ \\ ۳x^۲-۲۷=۰ \Rightarrow ۳x^۲=۲۷ \Rightarrow x^۲=۹ \\ \Rightarrow x=+۳ \text{ یا } x=-۳ \end{cases}$$

پس مجموعهٔ داده‌شده، معادل مجموعهٔ زیر است:

$G=\{x \in \mathbb{Z} \mid x=۲ \text{ یا } x=-۲ \text{ یا } x=۳ \text{ یا } x=-۳\}$

$\Rightarrow G=\{-۲, ۲, ۳, -۳\}$

۸ به جای x مقدارهای صحیح از -۴ تا -۲ را قرار می‌دهیم، پس داریم:

$H=\{\frac{-۴-۱}{-۴+۱}, \frac{-۳-۱}{-۳+۱}, \frac{-۲-۱}{-۲+۱}\}$

$\Rightarrow H=\{\frac{-۵}{-۳}, \frac{-۴}{-۲}, \frac{-۳}{-۱}\} \Rightarrow H=\{\frac{۵}{۳}, ۲, ۳\}$

۹ ابتدا دقت کنید که چون $\frac{۲۴}{x}$ باید صحیح باشد، بنابراین x نیز حتماً باید جزء شمارنده‌های مثبت $(x \in \mathbb{N})$ عدد ۲۴ باشد؛ در نتیجه x می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ و ۲۴ باشد، پس مجموعهٔ موردنظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$I=\{۱^۲-۱, ۲^۲-۱, ۳^۲-۱, ۴^۲-۱, ۶^۲-۱, ۱۲^۲-۱, ۲۴^۲-۱\}$

$\Rightarrow I=\{۰, ۳, ۸, ۱۵, ۳۵, ۱۴۳, ۵۷۵\}$

۱۰ دقت کنید با توجه به مجموعهٔ داده‌شده x می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد و در نتیجه چون $y=x+۲$، پس y نیز به ازای xهای مختلف مقادیر زیر را می‌گیرد:

$x=۳ \Rightarrow y=۳+۲=۵$, $x=۴ \Rightarrow y=۴+۲=۶$

$x=۵ \Rightarrow y=۵+۲=۷$, $x=۶ \Rightarrow y=۶+۲=۸$

پس مجموعهٔ موردنظر برابر است با:

$g=\{\frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۶}, \frac{۵}{۷}, \frac{۶}{۸}\} \Rightarrow g=\{\frac{۳}{۵}, \frac{۲}{۳}, \frac{۵}{۷}, \frac{۳}{۴}\}$

پاسخ ۲۷

۱ مجموعه‌های B ،C و D را با اعضایشان مشخص کرده و سپس با هم مقایسه می‌کنیم.

B: چون $x^2 \leq 2$ و از بین اعضای A فقط اعداد -1، ۰ و ۱ این خاصیت را دارند که توان دوم آن‌ها کم‌تر یا مساوی ۲ است، بنابراین مجموعهٔ B برابر است با: $B = \{-1, 0, 1\}$

C: چون $-4 < x < 2$، پس داریم: $C = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

D: ابتدا معادلهٔ داده‌شده را حل کرده و سپس با توجه به مجموعهٔ A، مجموعهٔ D را مشخص می‌کنیم. $(x^4 - 16)(x^4 - 81) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 - 16 = 0 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2 \\ x^4 - 81 = 0 \Rightarrow x^4 = 81 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -3 \end{cases}$$

حالا چون از بین اعداد به دست آمده، عدد ۳ عضو مجموعهٔ A نیست، پس داریم: $D = \{-3, -2, 2\}$

پس با توجه به مجموعه‌های به دست آمده نتیجه می‌گیریم که هیچ‌کدام از مجموعه‌های داده‌شده با هم برابر نیستند.

۲ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ D عبارت‌اند از:

$$\varnothing, \{-3\}, \{-2\}, \{2\}, \{-3, -2\}, \{-3, 2\}, \{-2, 2\}, \{-3, -2, 2\}$$

پاسخ ۲۸

۱ ابتدا مجموعهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$A = \{2\times 1 - 1, 2\times 2 - 1, 2\times 3 - 1\} \Rightarrow A = \{1, 3, 5\}$$

حالا مجموعهٔ A را می‌توان به صورت زیر هم نمایش داد:

$$A = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 2\}$$

۲ x می‌تواند برابر هر یک از مقادیر -1، ۰ و ۱ باشد، پس مجموعهٔ B برابر است با:

$$B = \{3\times(-1) + 5, 3\times 0 + 5, 3\times 1 + 5\} \Rightarrow B = \{2, 5, 8\}$$

حالا با توجه به اعضای B می‌توان این مجموعه را به صورت زیر هم نمایش داد: $B = \{3x + 2 \mid x \in \mathbb{W}, x < 3\}$

۳ با توجه به معادلهٔ داده‌شده در مجموعهٔ C می‌دانیم که x می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۲ یا -2 باشد. از طرفی جواب‌های معادلهٔ $x^2 - 4 = 0$ هم اعداد $+2$ و -2 هستند، پس مجموعهٔ C به صورت مقابل هم قابل نوشتن است: $C = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$

پاسخ ۲۹

۱ اگر تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه با هم برابر باشد، آن‌گاه تعداد اعضای آن‌ها نیز باید با هم برابر باشد. از طرفی چون مجموعهٔ B به صورت $B = \{80, 85, 90, 95\}$ است، پس مجموعهٔ A باید مثل B شامل ۴ عضو باشد، بنابراین x در مجموعهٔ A می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد و در نتیجه مقدار عددی a با توجه به رابطهٔ $x < a$ برابر ۵ می‌شود، پس داریم:

$$A = \{2x + 3 \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$$

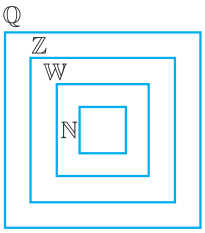
۲ $A = \{2\times 1 + 3, 2\times 2 + 3, 2\times 3 + 3, 2\times 4 + 3\}$

$\Rightarrow \{5, 7, 9, 11\}$

۳ کافی است زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{5, 7, 11\}$ را به دست آوریم که با توجه به سه‌عضوی بودن این مجموعه تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر $2^3 = 8$ تا می‌باشد. البته دقت کنید $\varnothing$ جزء زیرمجموعه‌های قابل قبول نیست، پس پاسخ مسئله برابر $8 - 1 = 7$ تا زیرمجموعه است.

پاسخ ۳۰

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$



۱ درست است. $(\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q})$

۲ نادرست است. $(\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z})$

۳ نادرست است. $(\mathbb{W} \not\subseteq \mathbb{N})$

۴ نادرست است (چون $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$، پس همهٔ اعداد صحیح گویا هستند).

۵ درست است. $(\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q})$

۶ نادرست است (همهٔ اعداد صحیح نامنفی، حسابی‌اند).

پاسخ ۳۱

ابتدا دو مجموعهٔ داده‌شده را به همراه اعضایشان مشخص می‌کنیم:

$$A = \{0^2 - 2, 1^2 - 2, 2^2 - 2, \ldots, 5^2 - 2\}$$

$$\Rightarrow A = \{-2, -1, 2, 7, 14, 23\}$$

$$B = \{5\times 3 - 3, 5\times 4 - 3, \ldots, 5\times 9 - 3\}$$

$$\Rightarrow B = \{12, 17, 22, 27, 32, 37, 42\}$$

۱ چون A، ۶ عضو دارد، پس $2^6 = 64$ تا زیرمجموعه دارد و چون B دارای ۷ عضو است، پس تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر $2^7 = 128$ تا است.

۲ با توجه به اعضای A برای به دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌هایی که همهٔ عضوهای آن‌ها اول هستند باید تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{2, 7, 23\}$ را به دست آوریم که این تعداد نیز برابر $2^3 = 8$ تا است، البته باید حواسمان باشد که $\varnothing$ جزء مجموعه‌های قابل قبول نیست، پس پاسخ مسئله، برابر $8 - 1 = 7$ تا است.

۳ پاسخ مسئله برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{12, 22, 32, 42\}$ به‌جز $\varnothing$ است، که برابر با $2^4 - 1 = 15$ تا است.

پاسخ ۳۲

۱ چون تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر $2^6 = 64$ تا است، پس داریم: $2^{n+1} = 2^6 \Rightarrow n + 1 = 6 \Rightarrow n = 5$

۲ اگر سه‌تا از اعضای A را حذف کنیم، به یک مجموعهٔ سه‌عضوی می‌رسیم که تعداد زیرمجموعه‌های آن نیز برابر $2^3 = 8$ تا است، پس این مجموعه به تعداد $64 - 8 = 56$ تا زیرمجموعه از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اولیه کم‌تر دارد.

پاسخ ۶۰

ابتدا دقت کنید که چون $A \subseteq \{۳,۴,۱\}$، پس $۳ \in A$، $۴ \in A$ و $۱ \in A$. از طرف دیگر چون $A \subseteq \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$، پس هر یک از اعداد ۲، ۵، ۶ و ۷ یا عضو A هستند یا عضو A نیستند. پس هر زیرمجموعه‌ای از عضوهای مجموعهٔ $\{۲,۵,۶,۷\}$ در کنار اعداد ۱، ۳ و ۴ می‌توانند برابر مجموعهٔ A شوند و چون این مجموعه $۲^۴ = ۱۶$ تا زیرمجموعه دارد، پس به ۱۶ طریق می‌توان مجموعهٔ A را تولید کرد.

۱ A یا سه‌عضوی است و یا چهارعضوی. پس حالت‌های مطلوب عبارت‌اند از:

$$A = \{۱,۳,۴\} \text{یا} \{۱,۳,۴,۲\} \text{یا} \{۱,۳,۴,۷\} \text{یا} \{۱,۳,۴,۶\} \text{یا} \{۱,۳,۴,۵\}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = ۵$$

$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{۵}{۱۶}$$

۲ در این صورت A باید توسط اعداد ۱، ۳، ۴، ۲ و ۵ تولید شود، پس حالت‌های مطلوب عبارت‌اند از:

$$A = \{۱,۳,۴\} \text{ یا } \{۱,۳,۴,۲\} \text{ یا } \{۱,۳,۴,۵\} \text{ یا } \{۱,۳,۴,۲,۵\}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = ۴$$

$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

۳ ابتدا دقت کنید که چون $۱,۳,۴ \in A$ و $۸ = ۴ + ۳ + ۱$ برابر عددی زوج است؛ پس برای این‌که مجموع اعداد مجموعهٔ A برابر عددی فرد شود، باید بقیهٔ عضوهای انتخابی، یا خودشان فرد باشند یا مجموعشان برابر عددی فرد باشد که وقتی با ۸ جمع می‌شوند حاصل باز هم برابر عددی فرد شود. پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر تعداد راه‌های انتخاب عدد یا اعدادی با مجموع فرد از بین اعداد ۲، ۵، ۶ و ۷ است که این کار نیز مطابق حالت‌های زیر قابل انجام است.

$$\{۷,۱,۳,۴\}, \{۵,۱,۳,۴\}, \{۶,۷,۱,۳,۴\}, \{۷,۲,۱,۳,۴\},$$
$$\{۶,۵,۱,۳,۴\}, \{۵,۲,۱,۳,۴\}, \{۷,۶,۲,۱,۳,۴\}, \{۶,۵,۲,۱,۳,۴\}$$

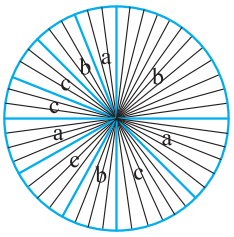
$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = ۸$$

$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر} = \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲}$$

۴ با توجه به این‌که مجموعهٔ A حتماً شامل عدد ۳ است، پس برای این‌که حاصل‌ضرب اعضا بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد و بر ۴۵ بخش‌پذیر نباشد، کافیست اولاً A حتماً شامل ۵ باشد و حتماً شامل ۶ نباشد، پس مجموعهٔ A علاوه بر داشتن عضوهای ۱، ۳، ۴ و ۵ می‌تواند شامل هر یک از اعداد ۲ یا ۷ هم باشد، پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر ۴ و احتمال موردنظر برابر $\frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$ است.

پاسخ ۶۱

دایره به چهار قسمت مساوی تقسیم شده که یک بخش آن به ۴ بخش مساوی کوچک‌تر، یک بخش به سه بخش مساوی کوچک‌تر و بخش دیگر نیز به دو بخش مساوی کوچک‌تر تقسیم شده است، پس هر کدام از این چهار بخش را می‌توان به $۱۲ = [۲,۳,۴]$ بخش کاملاً مساوی تقسیم کرد، یعنی در واقع می‌توان دایره را به $۴ \times ۱۲ = ۴۸$ بخش کاملاً مساوی تقسیم نمود.



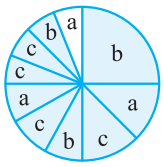
حالا توجه کنید که از این ۴۸ بخش، تعداد ۱۹ بخش متعلق به b، ۱۳ بخش متعلق به a و ۱۶ بخش هم متعلق به c است، پس داریم:

۱ $\text{احتمال این‌که عقربه روی a بایستد} = \frac{۱۳}{۴۸}$

$\text{احتمال این‌که عقربه روی b بایستد} = \frac{۱۹}{۴۸}$

$\text{احتمال این‌که عقربه روی c بایستد} = \frac{۱۶}{۴۸} = \frac{۱}{۳}$

۲ با توجه به شکل زیر احتمال این‌که عقربه روی قسمت رنگی قرار بگیرد، برابر $\frac{۹۳۷/۵}{۱۰۰۰} = ٪۹۳/۷۵ = ۱ - \frac{۳}{۴۸}$ است.



پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای

۱ گزینهٔ ●● الف) مجموعه نیست، چون اعضای آن مشخص نیستند، مثلاً A می‌تواند هم برابر اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا ۸ باشد، هم برابر اعداد طبیعی متوالی از ۲ تا ۹.

ب) مجموعه است. درست است که اعضای این مجموعه خیلی زیادند، نزدیک ۶ میلیارد! اما چون اعضا مشخص هستند، پس مجموعه است.

پ) مجموعه است! هیچ فیلی وجود ندارد که قادر به پروازکردن باشد، پس مجموعهٔ فیل‌های پرنده در واقع همان مجموعهٔ $\varnothing$ است.

بنابراین دوتا از عبارت‌های داده‌شده، مجموعه‌اند.

۲ گزینهٔ ●● این مجموعه دوعضوی است. چون $\varnothing = \{\}$، پس مجموعه به صورت $\{۰,\varnothing\}$ قابل بازنویسی است که این مجموعه نیز شامل دو عضو است.

۳ گزینهٔ ● این مجموعه‌ها به‌جز ارقام ۱ تا ۸ می‌توانند شامل ۹ باشند یا نباشند، یعنی مجموعه‌های موردنظر به صورت $\{۱,۲,\ldots,۸\}$ و $\{۱,۲,\ldots,۸,۹\}$ است که تعداد آن‌ها نیز برابر ۲ تا می‌باشد.

۴ گزینهٔ چون $\{x,y,۳,۴\}$ دوعضوی است، پس حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:

۱) $x=y=۳ \Rightarrow x+y=۶$

۲) $x=y=۴ \Rightarrow x+y=۸$

۳) $x=۳\,,\,y=۴ \Rightarrow x+y=۷$

۴) $x=۴\,,\,y=۳ \Rightarrow x+y=۷$

پس $x+y$ یا برابر ۶ است یا ۷ و یا ۸.

۵ گزینهٔ مجموعهٔ $\{a,a,a,a\}$ همان مجموعهٔ $\{a\}$ است که تنها شامل یک عضو می‌باشد، پس مجموعهٔ $\{\frac{۶-x}{۲},\frac{۵+x}{۳}\}$ هم باید تک‌عضوی باشد، بنابراین داریم:

$$\frac{۶-x}{۲}=\frac{۵+x}{۳} \xrightarrow{\times ۶} ۳(۶-x)=۲(۵+x)$$

$$\Rightarrow ۱۸-۳x=۱۰+۲x \Rightarrow ۵x=۸ \Rightarrow x=\frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۶}{۱۰} \Rightarrow x=۱/۶$$

۶ گزینهٔ چون $۵\in A$، پس حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:

۱) $x-۱=۵ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow A=\{۵,۴,۳\}$

$\Rightarrow$ مجموع اعضا $=۵+۴+۳=۱۲$

۲) $x-۲=۵ \Rightarrow x=۷ \Rightarrow A=\{۶,۵,۴\}$

$\Rightarrow$ مجموع اعضا $=۶+۵+۴=۱۵$

۳) $x-۳=۵ \Rightarrow x=۸ \Rightarrow A=\{۷,۶,۵\}$

$\Rightarrow$ مجموع اعضا $=۷+۶+۵=۱۸$

پس با توجه به مجموع‌های به دست آمده پاسخ مسئله برابر است با:

$۱۲+۱۵+۱۸=۴۵$

۷ گزینهٔ دقت کنید که چون $۱۰\in A$، پس هر یک از مجهول‌های x، $x+۱$، $x+۲$ و یا $x+۳$ می‌توانند برابر ۱۰ باشند، اما از طرفی اگر قرار دهیم $x+۲=۱۰$، آن‌گاه داریم $x=۸$ و در نتیجه $۸\in A$، که با فرض اولیه $(۸\notin A)$ در تناقض است؛ به همین علت $x+۳$ هم نمی‌تواند برابر ۱۰ باشد چون در این صورت $x+۳=۱۰ \Rightarrow x=۷ \Rightarrow x+۱=۷+۱=۸\in A$ که تناقض است، پس یا $x=۱۰$ یا $x+۱=۱۰$ که نتیجه می‌دهد $x=۹$. بنابراین x دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۸ گزینهٔ مجموعهٔ مضارب دورقمی عدد ۵ عبارت است از $\{۱۰,۱۵,۲۰,\ldots,۹۵\}$ که تعداد اعضای آن نیز برابر است با $\frac{۹۵-۱۰}{۵}+۱=۱۸$ تا. پس مجموعهٔ اعداد صحیح بین x و ۹۷ باید شامل $۱۸-۷=۱۱$ عضو باشد، بنابراین مجموعهٔ اعداد صحیح بین x و ۹۷ باید به صورت $\{۹۶,۹۵,۹۴,۹۳,۹۲,۹۱,۹۰,۸۹,۸۸,۸۷,۸۶\}$ باشد، در نتیجه x می‌تواند هر مقداری بین ۸۵ و ۸۶ داشته باشد؛ چون اگر x در این بازه باشد، آن‌گاه اولین عدد صحیح بزرگ‌تر از x برابر ۸۶ خواهد بود.

۹ گزینهٔ مجموعهٔ شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ عبارت است از $A=\{۴,۶,۱۰,۱۲,۱۵,۲۰,۳۰,۶۰\}$ که شامل ۸ عضو است. پس مجموعهٔ اعداد زوج بین x و ۱۲ باید یک عضو جدید به این مجموعه اضافه کند. حالا دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول $x<۱۲$، در این صورت x می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۷، ۶، ۵، ۴، ۳ و ۲ باشد، پس در این حالت مجموع مقادیر ممکن x برابر است با $۲+۳+۴+۵+۶+۷=۲۷$.

حالت دوم $x>۱۲$، در این صورت اگر قرار دهیم $x=۱۶$ یا $x=۱۵$، آن‌گاه عضو ۱۴ به مجموعهٔ A اضافه شده و خواستهٔ مسئله برآورده می‌شود. در این حالت نیز مجموع مقادیر ممکن برای x برابر است با $۱۵+۱۶=۳۱$، پس با توجه به اعداد به دست آمده پاسخ مسئله برابر است با: $۲۷+۳۱=۵۸$

۱۰ گزینهٔ مجموعهٔ A همان مجموعهٔ اعداد اول تک‌رقمی است، پس داریم: $A=\{۲,۳,۵,۷\} \Rightarrow n(A)=۴$

از طرفی می‌دانیم اعدادی تنها شامل سه شمارندهٔ مثبت‌اند که به فرم $P^۲$ باشند که P نیز عددی اول است. پس B برابر است با:

$$B=\{۲^۲,۳^۲\}=\{۴,۹\} \Rightarrow n(B)=۲$$

و در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با:

$$n(A)-n(B)=۴-۲=۲$$

۱۱ گزینهٔ دقت کنید که دو مجموعهٔ $\{\varnothing,\varnothing\}$ و $\{\varnothing,\varnothing,\varnothing\}$ یکسان و برابر مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ هستند، پس $\{\varnothing,\{\varnothing,\varnothing\},\{\varnothing,\varnothing,\varnothing\}\}$ برابر با مجموعهٔ $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ است که شامل ۲ عضو می‌باشد. از طرفی مجموعهٔ $\{\{\{\{\}\}\},\{\},\{\{\},\{\}\}\}$ همان مجموعهٔ $\{\{\{\{\}\}\},\{\},\{\{\}\}\}$ است که شامل ۳ عضو می‌باشد، پس نسبت موردنظر برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۱۲ گزینهٔ دقت کنید که با توجه به مجموعهٔ گزینهٔ (۱) داریم:

$$A=\{a,\{a\},\{\{a\},a\},\{a,\{a\},\{\{a\},a\}\}\}$$

$$a\in\{a\}\,,\,a\in\{\{a\},a\}\,,\,a\in\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\},$$

$$\{a\}\in\{\{a\},a\}\,,\,\{a\}\in\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\},$$

$$\{\{a\},a\}\in\{a,\{a\},\{a,\{a\}\}\}$$

۱۳ گزینهٔ ابتدا مجموعه‌های A، B، C و D را تشکیل داده و سپس برای آن‌ها نمودار ون مناسب رسم می‌کنیم:

$$A=\{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱\}$$

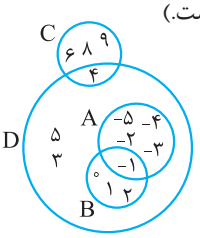
$$B=\{-۱,۰,۱,۲\}$$

از طرفی می‌دانیم کوچک‌ترین و تنها عدد اول زوج برابر ۲ و بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی برابر -۱ است.

$C=\{۴,۶,۸,۹\}$ (همهٔ اعداد تک‌رقمی به‌جز ۱ و اعداد اول)

$$D=\{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$$

(بزرگ‌ترین عدد صحیح کم‌تر از ۶ عدد ۵ است.)



حالا با توجه به مجموعه‌های به دست آمده، نمودار ون مربوط به این مجموعه‌ها به صورت مقابل قابل رسم است:

پس با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۴) صحیح است.

۱۴ گزینهٔ زیر قسمتی که جوهر ریخته شده، هر یک از ارقام ۲، ۳، ۷، ۸ و ۹ ممکن است ظاهر شده باشند، اما با توجه به این‌که مجموع اعداد این قسمت و عدد ۴ باید برابر عددی زوج باشد، پس باید از بین ارقام ذکرشده بیشترین تعداد رقم‌هایی را انتخاب کنیم که حاصل‌جمعشان با عدد ۴ برابر عددی زوج شود. برای این کار نیز کافیست همهٔ اعداد زوج و دو عدد فرد انتخاب کنیم؛ مثلاً اعداد ۲، ۳، ۷ و ۸ که در این صورت مجموعهٔ A به صورت $\{1,5,4,2,3,7,8\}$ خواهد بود که شامل ۷ عضو است.

۱۵ گزینهٔ چون $b \in k$، پس $\{b\} \subseteq k$.

۱۶ گزینهٔ دقت کنید اگر به جای n، مقادیر مربع کامل و صحیح قرار دهیم، آن‌گاه $\sqrt{n}$ حتماً برابر عددی طبیعی خواهد بود، پس با این استدلال می‌دانیم که همهٔ اعداد طبیعی عضو مجموعهٔ A هستند و در نتیجه $\mathbb{N} \subseteq A$.

۱۷ گزینهٔ می‌دانیم $\sqrt{3} \simeq 1/7$، پس $2-\sqrt{3} \simeq 2-1/7 \simeq 0/3$، همچنین $0/3 \geq -1$، پس $(2-\sqrt{3}) \in A$.

۱۸ گزینهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): هیچ عددی وجود ندارد که هم گنگ باشد و هم گویا، پس این گزینه نادرست است.

گزینهٔ (۲): نادرست است.

$$-3+\sqrt[3]{-27} = -3-3 = -6 \quad , \quad -6 \notin -3 \leq x < 9$$

گزینهٔ (۳): اعضای مجموعهٔ D اعداد حقیقی‌اند، نه عددهای صحیح، پس این گزینه هم نادرست است.

گزینهٔ (۴): صحیح است.

$$\sqrt{19}+\frac{11}{3} \simeq 4/3+3/6 \simeq 8 \Rightarrow \sqrt{19}+\frac{11}{3} \in D$$

۱۹ گزینهٔ چون x عددی صحیح است و بزرگ‌ترین عدد صحیحی که در رابطهٔ $2^x < \sqrt{11} \simeq 3/3$ صدق می‌کند، $x=1$ است، پس بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ داده‌شده نیز برابر می‌شود با:

$$3 \times 1 - 5 = 3 - 5 = -2$$

۲۰ گزینهٔ گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) همگی بیانگر مجموعهٔ $\{6,8,10\}$ هستند، اما گزینهٔ (۳) به صورت $\{2\}$ است.

۲۱ گزینهٔ مجموعهٔ B دارای دو عضو و مجموعهٔ A دارای یک عضو است، پس داریم:

$$\frac{\text{تعداد زیرمجموعه‌های B}}{\text{تعداد زیرمجموعه‌های A}} = \frac{2^2}{2^1} = \frac{4}{2} = 2$$

۲۲ گزینهٔ مجموعهٔ $A = \{1,2,\{1\},\{2\},\varnothing\}$ را در نظر بگیرید، در این صورت داریم:

$\varnothing \subseteq A \, , \, \varnothing \in A$ ☑

$1 \in A \Rightarrow \{1\} \subseteq A \, , \, \{1\} \in A$ ☑

$2 \in A \Rightarrow \{2\} \subseteq A \, , \, \{2\} \in A$ ☑

پس در این مجموعه ۳تا از زیرمجموعه‌ها، عضو مجموعه هم هستند.

۲۳ گزینهٔ چون این دو مجموعه با هم برابرند، پس باید داشته باشیم:

$$m-n = n^3 = -1 \xrightarrow{\text{چون}} n^3 = -1 \Rightarrow n = -1$$

$$\xrightarrow{\text{چون}} m-n = -1 \Rightarrow m-(-1) = -1$$

$$\Rightarrow m+1 = -1 \Rightarrow m = -2$$

پس حاصل‌ضرب mn برابر است با $(-2) \times (-1) = 2$.

۲۴ گزینهٔ چون $|x|$ همواره برابر عددی مثبت است، پس با توجه به برابری مجموعه‌های A و B باید داشته باشیم:

$$|x| = 1 \, , \, a = -5 \Rightarrow -2|x| + a = -2 \times 1 - 5 = -7$$

۲۵ گزینهٔ دو حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول

$$\begin{cases} x+y=3 \Rightarrow x=3-y \quad (I) \\ x-y=5 \xrightarrow{(I)} 3-y-y=5 \Rightarrow 3-2y=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2y=2 \Rightarrow y=-1 \xrightarrow{(I)} x=4$$

$$\Rightarrow 2x+3y = 2 \times 4 + 3 \times (-1) = 8-3 = 5$$

حالت دوم

$$\begin{cases} x+y=5 \Rightarrow x=5-y \quad (I) \\ x-y=3 \xrightarrow{(I)} 5-y-y=3 \Rightarrow 5-2y=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2y=-2 \Rightarrow y=1 \xrightarrow{(I)} x=4$$

$$\Rightarrow 2x+3y = 2 \times 4 + 3 \times 1 = 11$$

پس $2x+3y$ هم می‌تواند برابر ۵ باشد و هم برابر ۱۱.

۲۶ گزینهٔ می‌دانیم x، y و z هر کدام یا برابر ۳ هستند و یا برابر ۱۰. پس حاصل عبارت $x+y-z$ وقتی حداکثر است که داشته باشیم $x=y=10$ و $z=3$ و از طرف دیگر این حاصل، وقتی حداقل است که داشته باشیم $x=y=3$ و $z=10$، پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} \max = 10+10-3 = 17 \\ \min = 3+3-10 = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{حاصل‌جمع: } 17-4 = 13$$

۲۷ گزینهٔ دقت کنید چون $A = B$ و $10 \in A$، پس ۱۰ باید عضو B هم باشد و از آن‌جا که $10 \neq -8$، پس باید داشته باشیم:

$$۲\sqrt{y}=۱۰ \Rightarrow \sqrt{y}=۵ \Rightarrow y=۲۵ \ , \ B=\{-۸,۱۰\}$$

حالا چون $-۸\in B$ و $B=A$، دوباره داریم:

$$x^۲-۹=-۸ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=+۱ \text{ یا } x=-۱$$

هم‌چنین چون $C=\{\sqrt{۵z},-k^۲+۱\}$ و $\sqrt{۵z}$ نیز حتماً عددی مثبت است، پس باید داشته باشیم:

$$\sqrt{۵z}=۱۰ \Rightarrow ۵z=۱۰۰ \Rightarrow z=۲۰$$

$$-k^۲+۱=-۸ \Rightarrow -k^۲=-۹ \Rightarrow k^۲=۹$$

$$\Rightarrow k=+۳ \text{ یا } k=-۳$$

حالا برای این‌که کم‌ترین مقدار $x+y+z+k$ را به دست آوریم باید قرار دهیم $x=-۱$ و $k=-۳$، پس پاسخ مسئله برابر است با:

$$-۱+۲۵+۲۰-۳=۴۱$$

۲۸ گزینهٔ ●● چون $A=B$، پس داریم:

$$\{۷\}=\{a\} \Rightarrow a=۷ \Rightarrow \{a,b\}=\{۷,b\}$$

$$\Rightarrow \{۷,b\}=\{x,x^۲,\sqrt{۴۹}\} \Rightarrow \{۷,b\}=\{۷,x,x^۲\}$$

$$\Rightarrow x=x^۲=b$$

حالا چون $x=x^۲$، پس داریم:

$$x=x^۲ \Rightarrow x-x^۲=۰ \Rightarrow x(۱-x)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰ \text{ یا } ۱-x=۰ \Rightarrow x=۱$$

در نتیجه داریم:

اگر $x=۰ \Rightarrow b=۰$ و اگر $x=۱ \Rightarrow b=۱$

پس b دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

۲۹ گزینهٔ ●● چون A دوعضوی است و با مجموعهٔ B برابر است، بنابراین B هم باید دوعضوی باشد، پس با توجه به این‌که $a\neq ۰,۱$، در نتیجه $a\neq a^۲$، پس باید داشته باشیم:

$$\{۳\}=\{a\} \Rightarrow a=۳$$

$$\Rightarrow B=\{\{۳\},\{۳\},\{۳,۹\}\}=\{\{۳\},\{۳,۹\}\}$$

حالا با توجه به این مجموعه مقادیر مجهول موجود در مجموعهٔ A را به دست می‌آوریم:

$$A=B \Rightarrow \{x+۱\}=\{۳y-۹\}=\{۳\}$$

و $\{\frac{x+y}{۲},۵k-۶\}=\{۳,۹\}$

$$\Rightarrow x+۱=۳ \Rightarrow x=۲ \text{ و } ۳y-۹=۳ \Rightarrow ۳y=۱۲ \Rightarrow y=۴$$

$$\Rightarrow \{\frac{x+y}{۲},۵k-۶\}=\{\frac{۲+۴}{۲},۵k-۶\}=\{۳,۵k-۶\}$$

$$\Rightarrow \{۳,۵k-۶\}=\{۳,۹\} \Rightarrow ۵k-۶=۹ \Rightarrow ۵k=۱۵$$

$$\Rightarrow k=۳$$

پس با توجه به مقادیر به دست آمده، پاسخ مسئله برابر است با:

$$\frac{x+y}{a+k}=\frac{۲+۴}{۳+۳}=\frac{۶}{۶}=۱$$

۳۰ گزینهٔ ● ابتدا مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{۳^{x+۱}}{۹^{۲y}}=\frac{۳^{x+۱}}{(۳^۲)^{۲y}}=\frac{۳^{x+۱}}{۳^{۴y}}=۳^{x+۱-۴y}=۳^{\overbrace{x-۴y+۱}^{۲}}=۳^۳$$

$$\Rightarrow A=\{۳^۳\}$$

حالا چون $A=B$، پس حاصل $\frac{۹^{۲z}}{۲۷^{۲k+۱}}$ نیز باید برابر $۳^۳$ شود، در این صورت داریم:

$$\frac{۹^{۲z}}{۲۷^{۲k+۱}}=\frac{(۳^۲)^{۲z}}{(۳^۳)^{۲k+۱}}=\frac{۳^{۴z}}{۳^{۶k+۳}}=۳^{۴z-(۶k+۳)}=۳^{۴z-۶k-۳}$$

$$\xrightarrow{\text{باید داشته باشیم}} ۳^{۴z-۶k-۳}=۳^۳ \Rightarrow ۴z-۶k-۳=۳$$

$$\Rightarrow ۴z-۶k=۶ \xrightarrow{\div ۲} ۲z-۳k=۳$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)} ۳k-۲z=-۳$$

پس با توجه به رابطهٔ به دست آمده، نتیجه می‌گیریم $m=-۳$.

۳۱ گزینهٔ ●● مجموعهٔ A برابر است با: $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

پس با توجه به این مجموعه، زیرمجموعه‌های موردنظر عبارت‌اند از:

$$\{۳,۵,۴\},\{۳,۵,۱\},\{۲,۵,۴\},\{۲,۵,۱\},\{۲,۳,۴\},\{۲,۳,۱\}$$

که تعداد آن‌ها برابر ۶تا است.

۳۲ گزینهٔ ●● مجموعهٔ اعداد صحیح بین دو عدد ۸۷ و ۹۷ عبارت است از: $A=\{۸۸,۸۹,۹۰,۹۱,۹۲,۹۳,۹۴,۹۵,۹۶\}$

حالا اگر بخواهیم تعداد زیرمجموعه‌هایی از این مجموعه را به دست بیاوریم که تنها شامل اعداد فردند، کافیست تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ اعداد فرد A یعنی مجموعهٔ $\{۸۹,۹۱,۹۳,۹۵\}$ را به دست آوریم که این تعداد نیز برابر با $۲^۴-۱=۱۵$ تا است.

۳۳ گزینهٔ ● مجموعهٔ A شامل اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است. حالا اگر بخواهیم زیرمجموعه‌هایی از A بسازیم که فقط شامل اعداد زوج باشند، کافیست تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۲,۴,۶\}$ را به دست بیاوریم که این زیرمجموعه‌ها نیز به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\left.\begin{array}{l}\{۲\} \Rightarrow ۲\\ \{۴\} \Rightarrow ۴\\ \{۶\} \Rightarrow ۶\\ \{۲,۴\} \Rightarrow ۲+۴=۶\\ \{۲,۶\} \Rightarrow ۲+۶=۸\\ \{۴,۶\} \Rightarrow ۴+۶=۱۰\\ \{۲,۴,۶\} \Rightarrow ۲+۴+۶=۱۲\end{array}\right\} \Rightarrow \text{حاصل جمع همهٔ اعضا}$$

$$=۲+۴+۶+۶+۸+۱۰+۱۲=۴۸$$

۳۴ گزینهٔ ●● زیرمجموعه‌های موردنظر یا سه‌عضوی هستند یا دوعضوی یا تک‌عضوی. پس حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد.

حالت اول زیرمجموعه تک‌عضوی باشد:

در این حالت تنها زیرمجموعهٔ $\{۳\}$ را داریم که این هم مورد قبول نیست، چون قرار است مجموع اعضا برابر ۲۳ شود.

حالت دوم زیرمجموعه دوعضوی باشد:

در این حالت تنها زیرمجموعهٔ $\{۳,۲۰\}$ قابل قبول است.

حالت سوم زیرمجموعه سه‌عضوی باشد:

در این حالت چون مجموعه حتماً شامل عضو ۳ هست، پس مجموع دو عضو دیگر باید برابر $۲۰-۳=۲۳$ باشد. تعداد حالت‌های انتخاب دو عضو از بین اعداد ۱ تا ۲۰ که مجموع آن‌ها برابر ۲۰ باشد نیز با توجه به حالت‌های زیر برابر است با ۹تا.

$$(۱,۱۹),(۲,۱۸),(۳,۱۷),(۴,۱۶),(۵,۱۵),(۶,۱۴),(۷,۱۳),$$
$$(۸,۱۲),(۹,۱۱)$$

پس تعداد کل زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با $۱+۹=۱۰$ تا.

۳۵ گزینهٔ ابتدا توجه کنید که کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضوهای مجموعهٔ موردنظر یکی از حالت‌های زیر را می‌پذیرد.

شمارهٔ حالت	کوچک‌ترین عضو	بزرگ‌ترین عضو
(۱)	۱	۳
(۲)	۲	۴
(۳)	۳	۵
(۴)	۴	۶
(۵)	۵	۷
(۶)	۶	۸

حالا دقت کنید که هر کدام از حالت‌های بالا دو زیرمجموعهٔ مطلوب به ما می‌دهند؛ مثلاً در حالت (۱) زیرمجموعه‌های موردنظر ما مجموعه‌های $\{۱,۳\}$ و $\{۱,۲,۳\}$ هستند. (در واقع اعداد بین هر دو عدد داده‌شده در هر حالت یا در زیرمجموعه‌ای که می‌سازیم، هستند یا نیستند). در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با $۲\times۶=۱۲$ تا.

۳۶ گزینهٔ دو عضو ۷ و ۸ را در نظر نمی‌گیریم و تعداد زیرمجموعه‌هایی که با باقی اعضا تولید می‌شوند را محاسبه می‌کنیم، سپس ۷ را به همهٔ این زیرمجموعه‌ها اضافه می‌کنیم. در این صورت همهٔ زیرمجموعه‌های شامل عدد ۷ و فاقد عدد ۸ را شمارش کرده‌ایم که تعداد آن‌ها نیز برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ یعنی $۲^۶=۶۴$ تا است.

۳۷ گزینهٔ با توجه به این‌که $\frac{x}{۳}\in\mathbb{N}$ و $x\le۱۶$، پس x باید طبیعی، مضرب ۳ و کم‌تر یا مساوی ۱۶ باشد، پس x می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۳، ۶، ۹، ۱۲ یا ۱۵ باشد، در نتیجه داریم:

$$A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵\}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع اعضا: } ۳+۶+۹+۱۲+۱۵=۴۵$$

۳۸ گزینهٔ چون در مجموعهٔ داده‌شده $m+n\le۵$ و m و n، هر دو عددهای طبیعی هستند، پس ممکن است حالت‌های زیر رخ دهد:

$m+n=۴ \Rightarrow$

m	n
۱	۳
۲	۲
۳	۱

$m+n=۵ \Rightarrow$

m	n
۱	۴
۲	۳
۳	۲
۴	۱

$m+n=۲ \Rightarrow$

m	n
۱	۱

$m+n=۳ \Rightarrow$

m	n
۱	۲
۲	۱

پس با توجه به مقادیر به دست آمده برای m و n داریم:

$$A=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{N},m+n\le۵\}$$
$$=\{\frac{۱}{۴},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۲},\frac{۴}{۱},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۲},\frac{۳}{۱},\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۱},\frac{۱}{۱}\}$$
$$=\{\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۲},۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow n(A)=۹$$

۳۹ گزینهٔ ابتدا دقت کنید که $(x-۳)^۲$ مربع کامل است و اعداد مربع کامل بین ۱۰ و ۱۰۰ عبارت‌اند از ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴ و ۸۱ که این اعداد نیز به ترتیب به صورت $(\pm۴)^۲$، $(\pm۵)^۲$، $(\pm۶)^۲$، $(\pm۷)^۲$، $(\pm۸)^۲$ و $(\pm۹)^۲$ قابل نمایش هستند، پس $x-۳$ می‌تواند برابر هر یک از مقادیر $+۴$، $+۵$، $+۶$، $+۷$، $+۸$، $+۹$، -۹، -۸، -۷، -۶، -۵ و -۴ باشد و به این ترتیب x نیز می‌تواند برابر هر یک از مقادیر $۳+۴$، $۳+۵$، $۳+۶$، $۳+۷$، $۳+۸$، $۳+۹$، $۳-۹$، $۳-۸$، $۳-۷$، $۳-۶$، $۳-۵$ و $۳-۴$ باشد، پس با توجه به مقادیر به دست آمده برای x داریم:

$$\text{حاصل‌جمع مقادیر} = ۳+۶+۳-۵+۳+۵+۳-۴+۳+۴+۳-۳+۳+۲+۳-۲+۳+۱+۳-۱+۳+۰+۳-۰+۳-۱+۳+۱+۳-۱+۳+۲+۳-۲+۳+۳+۳-۳+۳+۴+۳-۴+۳-۶$$
$$=۱۲\times۳=۳۶$$

۴۰ گزینهٔ دقت کنید که چون $(x+۱)^۲$ مربع کامل است و اعداد مربع کامل صحیح بین دو عدد ۸ و ۱۰۱ عبارت‌اند از ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴، ۸۱ و ۱۰۰، بنابراین $x+۱$ می‌تواند برابر هر یک از مقدارهای ±۳، ±۴، ±۵، ±۶، ±۷، ±۸، ±۹ و ±۱۰ باشد.

حالا دقت کنید که کوچک‌ترین عضو صحیح A به ازای $x=-۸$ و بزرگ‌ترین عضو صحیح آن نیز به ازای $x=۱۰$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x=-۸ \Rightarrow \frac{x-۴}{۳}=\frac{-۸-۴}{۳}=\frac{-۱۲}{۳}=-۴ \\ \text{و} \\ x=۱۰ \Rightarrow \frac{x-۴}{۳}=\frac{۱۰-۴}{۳}=\frac{۶}{۳}=۲ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{تفاضل: } ۲-(-۴)=۶$$

۴۱ گزینهٔ ●● ابتدا اعضای مجموعهٔ A را تعیین می‌کنیم. دقت کنید که چون $\frac{x^۲}{۲} \in \mathbb{N}$، پس با توجه به شرط $۰ \le x \le ۱۰$، x حتماً باید برابر با عددی زوج، طبیعی و کم‌تر یا مساوی ۱۰ باشد، پس x می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ باشد، بنابراین داریم:

$$A = \{\frac{۲+۱}{۲}, \frac{۴+۱}{۲}, \frac{۶+۱}{۲}, \frac{۸+۱}{۲}, \frac{۱۰+۱}{۲}\}$$

$$\Rightarrow A = \{\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}, \frac{۷}{۲}, \frac{۹}{۲}, \frac{۱۱}{۲}\}$$

حالا با توجه به اعضای A، مجموعهٔ B را به همراه اعضایش به دست می‌آوریم:

$$B = \{\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۲}-\frac{۱}{۲}, \frac{۹}{۲}-\frac{۱}{۲}, \frac{۱۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\}$$

$$\Rightarrow B = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب اعضای } B = ۱\times۲\times۳\times۴\times۵ = ۱۲۰$$

۴۲ گزینهٔ ●● دقت کنید که چون زیر رادیکال همواره باید عددی نامنفی قرار بگیرد، پس داریم:

$$A: ۲۵ - x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ \le ۲۵$$

$$B: ۱۶ - x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ \le ۱۶$$

حالا چون در هر دو مجموعه $x \in \mathbb{Z}$، پس در مجموعهٔ A، x می‌تواند هر یک از مقدارهای ۰، ±۱، ±۲، ±۳، ±۴ و ±۵ را بگیرد و به همین ترتیب در مجموعهٔ B نیز x می‌تواند برابر مقدارهای ۰، ±۱، ±۲، ±۳ و ±۴ باشد. اما از طرف دیگر دقت کنید که با توجه به شرط مجموعه‌ها، دو عبارت $۲۵ - x^۲$ و $۱۶ - x^۲$ هر دو باید مربع کامل و طبیعی باشند که با امتحان‌کردن مقادیر به دست آمده معلوم می‌شود که $۱۶ - x^۲$ و $۲۵ - x^۲$ فقط به ازای $x = ۰$ نیز به ازای مقادیر $x = \pm۴, \pm۳, ۰$ مربع کامل است، پس داریم:

$$A = \{۰,۳,۴,-۳,-۴\} \quad , \quad B = \{۰\}$$

بنابراین A و B تنها یک عضو مشترک دارند.

۴۳ گزینهٔ ●● ابتدا هر مجموعه را مشخص کرده و سپس تعداد زیرمجموعه‌های هر یک را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \{x \mid x^۲ = x\} : x^۲ = x \Rightarrow x^۲ - x = ۰$$

$$\Rightarrow x(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \{۰,۱\} \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A = ۲^۲ = ۴$$

$$B = \{x \mid x^۳ = x\} : x^۳ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۲-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲-۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = +۱ \text{ یا } x = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \{-۱,۰,۱\} \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های } B = ۲^۳ = ۸$$

$$\Rightarrow \frac{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } A}{\text{تعداد زیرمجموعه‌های } B} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

۴۴ گزینهٔ ●● با توجه به محاسبات، زیرمجموعهٔ موردنظر به دست می‌آید:

$$۹ = ۱۰ - ۱ \ , \ ۹۹ = ۱۰۰ - ۱ = ۱۰^۲ - ۱ \ ,$$

$$۹۹۹ = ۱۰۰۰ - ۱ = ۱۰^۳ - ۱ \ , \ \ldots$$

$$\Rightarrow \{۹,۹۹,۹۹۹,\ldots\} = \{۱۰^۱ - ۱, ۱۰^۲ - ۱, ۱۰^۳ - ۱, \ldots\}$$

$$= \{۱۰^n - ۱ \mid n \in \mathbb{N}\}$$

۴۵ گزینهٔ ●● به محاسبات زیر دقت کنید:

$$۲ = ۲\times۱,۶ = ۳\times۲,۱۲ = ۴\times۳,۲۰ = ۵\times۴,۳۰ = ۶\times۵,$$

$$۴۲ = ۷\times۶,۵۶ = ۸\times۷ \Rightarrow \{۲,۶,۱۲,۲۰,۳۰,۴۲,۵۶\}$$

$$= \{x(x-۱) \mid ۲ \le x \le ۸\} = \{x^۲ - x \mid ۲ \le x \le ۸\}$$

۴۶ گزینهٔ ●● به محاسبات زیر دقت کنید:

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{(۱+۱)^۱}, \frac{۲}{۹} = \frac{۲}{(۲+۱)^۲}, \frac{۳}{۶۴} = \frac{۳}{(۳+۱)^۳}, \frac{۴}{۶۲۵} = \frac{۴}{(۴+۱)^۴}$$

$$\Rightarrow \{\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۹}, \frac{۳}{۶۴}, \frac{۴}{۶۲۵}, \ldots\} = \{\frac{n}{(n+۱)^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

۴۷ گزینهٔ ●● با تعیین مجموعه‌های داده‌شده در هر گزینه، پاسخ مسئله را پیدا می‌کنیم. (به جای n، مقادیر قابل قبول داده‌شده در هر مجموعه را قرار می‌دهیم.)

۱) $\{-۲,-۳,-۴,\ldots,-۹\}$ ☒

۲) $\{-۱,۲,-۳,۴,-۵,۶,-۷,۸,-۹\}$ ☒

۳) $\{-۳,۴,-۵,۶,-۷,۸,-۹,۱۰\}$ ☒

(دقت کنید n طبیعی بوده و از ۲ تا ۹ تغییر می‌کند.)

۴) $\{۲,-۳,۴,-۵,۶,-۷,۸,-۹\}$ ☑

(دقت کنید n طبیعی بوده و از ۱ تا ۸ تغییر می‌کند.)

۴۸ گزینهٔ ●● دقت کنید که مجموعهٔ A شامل عضو ۰ است. یعنی به ازای یک مقدار طبیعی n، باید حاصل عبارت داده‌شده در مجموعهٔ گزینهٔ موردنظر برابر ۰ شود، بنابراین چون در تمامی مجموعه‌ها $n \in \mathbb{N}$، پس گزینه‌های (۱) و (۳) به راحتی حذف می‌شوند (چون به ازای هیچ nای، حاصل عبارت داده‌شده در آن‌ها برابر صفر نمی‌شود). از طرفی با کمی دقت معلوم می‌شود که اعضای مجموعهٔ A یک در میان مثبت و منفی هستند، بنابراین گزینهٔ (۴) هم حذف می‌شود، چون به ازای هر $n \ge ۳$، حاصل عبارت $\frac{n-۲}{۳n^۲-۲}$ همواره برابر عددی مثبت خواهد بود. با بررسی مجموعهٔ گزینهٔ (۲) نیز معلوم می‌شود که نمایش جبری مجموعهٔ A به صورت همین گزینه خواهد بود.

۴۹ گزینهٔ ●● ابتدا دقت کنید که مجموعهٔ B، مجموعه‌ای سه‌عضوی و در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر $۲^۳ = ۸$ تا است. حالا چون این تعداد $\frac{۱}{۴}$ تعداد زیرمجموعه‌های A است، بنابراین مجموعهٔ A شامل $۸\times۴ = ۳۲$ تا زیرمجموعه است و چون

$۲^۵ = ۳۲$، پس A مجموعه‌ای ۵عضوی است. حالا اگر یکی از اعضای A را حذف کنیم به مجموعه‌ای ۴عضوی با $۲^۴ = ۱۶$ تا زیرمجموعه می‌رسیم، پس به تعداد $۳۲ - ۱۶ = ۱۶$ تا زیرمجموعه، از تعداد زیرمجموعه‌های A کم می‌شود.

۵۰ گزینهٔ • تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ برابر $۲^۳ = ۸$ تا است. یعنی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ شامل ۸ عضو است، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر $۲^۸$ تا است که این مقدار نیز ۸ برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ اعداد صحیح بین a و ۱۰ می‌باشد، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر $\frac{۲^۸}{۸} = \frac{۲^۸}{۲^۳} = ۲^۵$ تا است. پس مجموعهٔ اعداد صحیح بین a و ۱۰ یک مجموعهٔ ۵عضوی است، بنابراین a می‌تواند برابر ۴ باشد، چون بین ۴ و ۱۰، ۵ عدد صحیح موجود است.

۵۱ گزینهٔ •• دقت کنید که تعداد زیرمجموعه‌های $n-۱$ عضوی یک مجموعهٔ nعضوی، برابر تعداد زیرمجموعه‌های تک‌عضوی این مجموعه است و تعداد زیرمجموعه‌های تک‌عضوی هر مجموعه نیز برابر تعداد اعضای آن مجموعه است، بنابراین چون مجموعهٔ nعضوی شامل ۵ زیرمجموعهٔ $n-۱$ عضوی است، پس A، ۵عضوی است و در نتیجه $n = ۵$. حالا فرض می‌کنیم $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$، در این صورت با نوشتن تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی آن، تعداد این زیرمجموعه‌ها را به دست می‌آوریم:

زیرمجموعه‌های دوعضوی: $\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۱,۴\},\{۱,۵\},\{۲,۳\},$

$\{۲,۴\},\{۲,۵\},\{۳,۴\},\{۳,۵\},\{۴,۵\}$ $\Rightarrow$ تعداد $= ۱۰$

۵۲ گزینهٔ •• فرض کنید A، مجموعه‌ای nعضوی است، در این صورت اگر دو عضو جدید به آن اضافه کنیم، به مجموعهٔ $n+۲$ عضوی می‌رسیم. حالا چون در این حالت به تعداد زیرمجموعه‌های اولیه، ۴۸تا زیرمجموعهٔ جدید اضافه می‌شود، پس باید داشته باشیم: $۲^{n+۲} - ۲^n = ۴۸ \Rightarrow$ اختلاف تعداد زیرمجموعه $= ۴۸$

$$\Rightarrow ۲^n(۲^۲ - ۱) = ۴۸$$

$$\Rightarrow ۲^n \times ۳ = ۴۸ \xrightarrow{\div ۳} ۲^n = ۱۶ \Rightarrow ۲^n = ۲^۴ \Rightarrow n = ۴$$

پس A مجموعه‌ای ۴عضوی است و در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های حداقل دوعضوی آن که برابر است با تعداد کل زیرمجموعه‌ها منهای تعداد زیرمجموعه‌های تک‌عضوی و صفرعضوی، برابر می‌شود با:

$$۲^۴ - \underset{\text{تعداد تک‌عضوی}}{\downarrow ۴} - \underset{\emptyset}{\downarrow ۱} = ۱۶ - ۵ = ۱۱$$

۵۳ گزینهٔ •• چون $۲x \leq ۴ \Rightarrow -۴ \leq ۲x$، پس $-۲ \leq x$ و در نتیجه $x \leq ۱$ و ضمناً $۲x \leq ۴ \Rightarrow$ و این یعنی $x \leq ۲$، بنابراین $-۲ \leq x \leq ۱$. پس چون x عددی صحیح است، می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۱، ۰، -۱ و -۲ باشد. حالا چون $xy = ۱۲$، پس داریم:

$$x = -۲ \Rightarrow -۲y = ۱۲ \Rightarrow y = -۶$$

$$x = -۱ \Rightarrow -y = ۱۲ \Rightarrow y = -۱۲$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = ۱۲$$

پس با توجه به مقادیر به دست آمده برای x و y، مجموعهٔ A به صورت زیر خواهد بود.

$$A = \{۲^{۳(-۲)-۶}, ۲^{۳(-۱)-۱۲}, ۲^{۳(۱)+۱۲}\}$$

$$\Rightarrow A = \{۲^{-۱۲}, ۲^{-۱۵}, ۲^{۱۵}\} \Rightarrow n(A) = ۳$$

$$\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های } A = ۲^۳ = ۸$$

۵۴ گزینهٔ •• دقت کنید که چون $A = \{۵, \{۳, x\}\}$ زیرمجموعهٔ $B = \{x, y, \{۱۰, ۳\}\}$ است، پس باید داشته باشیم $\{۳, x\} \in B$، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\{۳, x\} = \{۱۰, ۳\} \Rightarrow x = ۱۰$$

پس داریم $A = \{۵, \{۳, ۱۰\}\}$ و $B = \{۱۰, y, \{۳, ۱۰\}\}$. حالا چون $۵ \in A$، پس باید $۵ \in B$ برقرار باشد، در نتیجه $y = ۵$. بنابراین داریم: $\{x, y, x-y, ۲y\} = \{۱۰, ۵, ۱۰-۵, ۲\times ۵\}$

$$= \{۱۰, ۵, ۵, ۱۰\} = \{۵, ۱۰\} \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = ۲^۲ = ۴$$

۵۵ گزینهٔ •• مجموعهٔ A به صورت $\{۱,۲,۳,\dots,۲۰\}$ است. حالا با توجه به این‌که $B \subseteq A$ است، باید به جای x در مجموعهٔ B مقادیری قرار دهیم که $۳x - ۷$ طبیعی و کم‌تر یا مساوی ۲۰ باشد. در این صورت با قراردادن مقادیر مختلف برای x داریم:

$$\underset{\downarrow}{x=۱} \quad \underset{\downarrow}{x=۲}$$

$$۳x - ۷ = -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, \dots$$

پس مجموعهٔ B برابر است با $\{۲,۵,۸,۱۱,۱۴,۱۷,۲۰\}$ و در نتیجه $n(B) = ۷$.

۵۶ گزینهٔ •• چون x از ۱ تا ۳۰ تغییر می‌کند، بنابراین n هم از ۱ تا ۳۰ تغییر می‌کند و در نتیجه اعضای مجموعهٔ B به صورت زیر ساخته می‌شوند:

اعضای B: $۴\times ۱-۱, ۴\times ۲-۱, ۴\times ۳-۱, \dots, ۴\times ۳۰-۱$

$\Rightarrow$ اعضای B: $۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹,۲۳,۲۷,۳۱,۳۵,\dots,۱۱۹$

حالا دقت کنید که چون $B \subseteq A$، پس هر عضو B باید در A هم باشد، بنابراین B به صورت زیر خواهد بود:

$$B = \{۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹,۲۳,۲۷\} \Rightarrow n(B) = ۷$$

۵۷ گزینهٔ •• ابتدا مجموعهٔ A را تشکیل می‌دهیم. چون هر x که عضو A است، طبیعی و کم‌تر یا مساوی ۲۰ است، پس داریم:

$$A = \{۱,۲,۳,۴,\dots,۲۰\}$$

حالا مجموعهٔ B به صورت $\{\frac{x+۳}{۴} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq ۲۰\}$ قابل

نوشتن است، اما چون $B \subseteq A$ پس هر عضو B باید در A هم باشد، یعنی به ازای xهای مختلف، حاصل $\frac{x+3}{4}$ باید برابر عددی طبیعی و کم‌تر از ۲۰ شود (ضمن این‌که خود x هم از ۱ تا ۲۰ تغییر می‌کند). حالا برای پیداکردن xهای مختلف که در شرایط توضیح داده‌شده صدق می‌کنند، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$\frac{x+3}{4}=1 \Rightarrow x+3=4 \Rightarrow x=1$ ☑

$\frac{x+3}{4}=2 \Rightarrow x+3=8 \Rightarrow x=5$ ☑

$\frac{x+3}{4}=3 \Rightarrow x+3=12 \Rightarrow x=9$ ☑

$\frac{x+3}{4}=4 \Rightarrow x+3=16 \Rightarrow x=13$ ☑

$\frac{x+3}{4}=5 \Rightarrow x+3=20 \Rightarrow x=17$ ☑

$\frac{x+3}{4}=6 \Rightarrow x+3=24 \Rightarrow x=21$ ☒

با توجه به محاسبات، همان‌طور که می‌بینید اگر $\frac{x+3}{4}$ (یعنی اعضای B) مقداری بیش از ۵ داشته باشند، آن‌گاه x از ۲۰ بزرگ‌تر خواهد بود و این با فرض $x \in A$ در تناقض است، پس مجموعهٔ B تنها شامل ۵عضو است.

۵۸ گزینهٔ • چون x و y، $8=2^3$ تا زیرمجموعهٔ مشترک دارند، پس باید دقیقاً سه عضو مشترک داشته باشند، از طرفی به دنبال کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع اعضای y هستیم، با توجه به توضیحات نیز این مقدار وقتی به دست می‌آید که مجموعهٔ y را برابر ۳تا از کوچک‌ترین عضوهای x قرار دهیم، پس داریم:

$y=\{2,3,7\} \Rightarrow$ مجموع $=2+3+7=12$

۵۹ گزینهٔ ❁ دقت کنید که عبارت $\frac{3x+1}{2}$ فقط به ازای x های فرد برابر عددی طبیعی می‌شود، پس مجموعهٔ A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A=\{\frac{3\times1+1}{2},\frac{3\times3+1}{2},\frac{3\times5+1}{2},\frac{3\times7+1}{2},\frac{3\times9+1}{2},$$
$$\frac{3\times11+1}{2},\frac{3\times13+1}{2},\frac{3\times15+1}{2},\frac{3\times17+1}{2},\frac{3\times19+1}{2}\}$$

$$\Rightarrow A=\{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$$

حالا با توجه به اعضای مجموعهٔ A، مجموعهٔ B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B=\{2\times2-11,2\times5-11,2\times8-11,2\times11-11,$$
$$2\times14-11,2\times17-11,2\times20-11,\ldots\}$$
$$\Rightarrow B=\{-7,-1,5,11,17,23,29,\ldots\}$$

پس با توجه به مجموعه‌های A و B معلوم می‌شود که این دو مجموعه دارای پنج عضو مشترک $(5,29,23,17,11)$ هستند، پس زیرمجموعه‌هایی از این دو مجموعه که فقط شامل این اعضا باشند به همراه $\varnothing$، زیرمجموعه‌های مشترک دو مجموعهٔ A و B محسوب می‌شوند که این تعداد نیز با محاسبهٔ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{5,11,17,23,29\}$ به دست می‌آید، بنابراین پاسخ مسئله برابر $2^5=32$ است.

۶۰ گزینهٔ ❁ چون $A \subseteq \{1,2\}$، پس $1 \in A$ و $2 \in A$. از طرف دیگر چون A زیرمجموعهٔ $\{1,2,3,4,5\}$ است، پس A می‌تواند شامل هر یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ هم باشد. در نتیجه مجموعهٔ A به صورت‌های زیر می‌تواند ساخته شود:

(۱ حالت) $\{1,2\}$:دوعضوی‌ها

(۳ حالت) $\{1,2,5\},\{1,2,4\},\{1,2,3\}$:سه‌عضوی‌ها

(۳ حالت) $\{1,2,4,5\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,4\}$:چهارعضوی‌ها

(۱ حالت) $\{1,2,3,4,5\}$:پنج‌عضوی‌ها

پس A می‌تواند $1+3+3+1=8$ حالت مختلف داشته باشد.

۶۱ گزینهٔ • دقت کنید که چون $X \subseteq \{1,2,3,4,5\}$، پس X حتماً باید شامل اعضای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد و از طرف دیگر چون $X \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$، پس هر یک از اعداد ۶، ۷، ۸ و ۹ هم می‌توانند در مجموعهٔ X باشند و هم می‌توانند در مجموعهٔ X نباشند، اما دقت کنید که چون مجموعهٔ X شامل تعداد فردی عضو است، پس X یا ۵عضوی است یا ۷عضوی و یا ۹عضوی. پس حالت‌های زیر ممکن است رخ دهند:

۱) X ۵عضوی باشد $\Leftarrow X=\{1,2,3,4,5\}$ (۱ حالت)

۲) X ۷عضوی باشد، در این صورت X به‌جز عضوهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌تواند دو عضو دلخواه از بین اعداد ۶، ۷، ۸ و ۹ نیز داشته باشد، پس تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر تعداد حالت‌های دو عدد از بین اعداد ۶، ۷، ۸ و ۹ می‌باشد که با توجه به حالت‌های زیر این تعداد برابر است با ۶تا.

$(6,7),(6,8),(6,9),(7,8),(7,9),(8,9) \Rightarrow$ (۶ حالت)

۳) X ۹عضوی باشد $\Leftarrow X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (۱ حالت)

پس با توجه به توضیحات بالا تعداد زیرمجموعه‌های ممکن برای X برابر است با $8=1+6+1$ تا.

۶۲ گزینهٔ ❁ چون هر عضوی از A عضو B هم هست، پس $A \subseteq B$ و به همین ترتیب چون هر عضو از B نیز عضوی از A است، پس $B \subseteq A$ و نتیجه آن‌که $A=B$. حالا چون $n(A)=30-10+1=21$ و مجموعهٔ B نیز توسط اعضای مجموعهٔ C ساخته می‌شود، بنابراین $n(B)=n(C)=21$. حالا فرض کنید مجموعهٔ C به صورت $\{x_1,x_2,\ldots,x_{21}\}$ است که $x_1<x_2<\cdots<x_{21}$، در این صورت چون $A=B$، پس باید

داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x_1-1}{3}=10 \Rightarrow x_1-1=30 \Rightarrow x_1=31\\ \frac{x_2-1}{3}=11 \Rightarrow x_2-1=33 \Rightarrow x_2=34\\ \frac{x_3-1}{3}=12 \Rightarrow x_3-1=36 \Rightarrow x_3=37\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \frac{x_{21}-1}{3}=30 \Rightarrow x_{21}-1=90 \Rightarrow x_{21}=91\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow C=\{31,34,37,\ldots,91\}$$

حالا دقت کنید که با توجه به اعضای C داریم:

$$C=\{30+1,33+1,36+1,\ldots,90+1\}$$

$$=\{3\times10+1,3\times11+1,3\times12+1,\ldots,3\times30+1\}$$

$$=\{3k+1 \mid k\in\mathbb{Z},10\le k\le30\}$$

یا $\{3k+1 \mid k\in\mathbb{Z},9<k<31\}$

پس با بررسی گزینه‌ها معلوم می‌شود که پاسخ مسئله گزینهٔ (۴) است.

۶۳ گزینهٔ تنها مجموعه‌ای که دارای یک زیرمجموعه است، مجموعهٔ $\varnothing$ است، پس $A=\varnothing$. ضمناً اشتراک $\varnothing$ با هر مجموعهٔ دلخواهی همواره برابر $\varnothing$ است، بنابراین عبارت داده‌شده در گزینهٔ (۴) نادرست است.

۶۴ گزینهٔ با توجه به مجموعه‌های داده‌شده داریم:

$$A-B=\{1,2,3,4\}-\{\{3\},4\}=\{1,2,3\}$$

$$\Rightarrow (A-B)\cap C=\{1,2,3\}\cap\{3,\{2\},1\}=\{1,3\}$$

۶۵ گزینهٔ مجموعه‌های A_1 تا A_8 را تعیین کرده و اشتراک آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$A_1=\{1,2,3,\ldots,10\},\ A_2=\{2,3,\ldots,11\},$$

$$A_3=\{3,4,5,\ldots,12\},\ A_4=\{4,5,6,\ldots,13\},$$

$$A_5=\{5,6,7,\ldots,14\},\ A_6=\{6,7,8,\ldots,15\},$$

$$A_7=\{7,8,9,\ldots,16\},\ A_8=\{8,9,10,\ldots,17\}$$

حالا توجه کنید که برای محاسبهٔ $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_8$ کافیست اشتراک دو مجموعهٔ A_1 و A_8 را به دست آوریم، چون هر عضوی که در هر دوی این مجموعه‌ها باشد، حتماً در بقیهٔ مجموعه‌ها هم هست. پس داریم:

$$A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_8=A_1\cap A_8=\{8,9,10\}$$

پس اشتراک این مجموعه‌ها سه‌عضوی است.

۶۶ گزینهٔ ابتدا مجموعهٔ B را تشکیل می‌دهیم. در مجموعهٔ B چون x عددی طبیعی و کم‌تر از ۵ است، پس می‌تواند برابر هر یک از مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، بنابراین داریم:

$$B=\{2\times1+3,2\times2+3,2\times3+3,2\times4+3\}$$

$$\Rightarrow B=\{5,7,9,11\}$$

حالا با توجه به مجموعهٔ B و A داریم:

$$A\cap B=\{1,3,5,7,9\}\cap\{5,7,9,11\}=\{5,7,9\}$$

در نتیجه $A\cap B$ دارای سه زیرمجموعهٔ تک‌عضوی $\{5\}$، $\{7\}$ و $\{9\}$ است.

۶۷ گزینهٔ مجموعهٔ A و B را تشکیل داده و سپس مجموعهٔ حاصل از عبارت داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$A=\{2k \mid k=1,2,3,\ldots,9\}$$

$$\Rightarrow A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$$

$$B=\{3k-1 \mid k=1,2,3,4,5\} \Rightarrow B=\{2,5,8,11,14\}$$

$$\Rightarrow A\cap B=\{2,8,14\}$$

$$\Rightarrow A-(A\cap B)=\{4,6,10,12,16,18\}$$

۶۸ گزینهٔ مجموعه‌های A و B را تشکیل می‌دهیم و سپس با به دست آوردن $A-B$ مسئله را حل می‌کنیم:

$$A:|x|\le3,x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=\pm3,\pm2,\pm1,0$$

$$\Rightarrow A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

$$B:x^2<9,x\in\mathbb{N} \Rightarrow x=1,2 \Rightarrow B=\{1,2\}$$

$$\Rightarrow A-B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}-\{1,2\}$$

$$=\{-3,-2,-1,0,3\} \Rightarrow n(A-B)=5$$

$$\Rightarrow A-B \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } =2^5=32$$

۶۹ گزینهٔ «؟» قسمت رنگی متعلق به مجموعهٔ D بدون در نظر گرفتن قسمت مشترک با مجموعهٔ E است. D مجموعهٔ دانشجویان شهر است و E هم مجموعهٔ افرادی است که به زبان انگلیسی مسلط هستند، پس قسمت رنگی همان دانشجویانی هستند که به زبان انگلیسی مسلط نیستند و لزوماً همگی ریاضی‌دان هم نیستند، پس گزینهٔ (۳) نیز نمی‌تواند درست باشد و جواب در بین گزینه‌ها نیست!

۷۰ گزینهٔ قسمت رنگی، قسمت مشترک مجموعه‌های A و C است که در B قرار ندارد، پس قسمت رنگی معادل مجموعهٔ $(A\cap C)-B$ است.

۷۱ گزینهٔ با توجه به شکل، ناحیهٔ رنگی (۱) عضوهایی هستند که در C هستند ولی در A نیستند، پس ناحیهٔ (۱) همان مجموعهٔ $C-A$ است. از طرف دیگر ناحیهٔ رنگی (۲) عضوهایی هستند که هم در A و هم در B هستند، پس ناحیهٔ (۲) همان مجموعهٔ $A\cap B$ است. پاسخ مسئله هم که اجتماع این دو قسمت است. پس جواب صحیح $(A\cap B)\cup(C-A)$ است.