

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سوالات و مسائل مسابقات ریاضی نهم

از مجموعه مرشد

بیش از ۳۰۰۰ سؤال چندگزینه‌ای (شامل: آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و ممتاز تهران و مراکز استان‌های کشور، آزمون‌های پیشرفت تحصیلی، مسابقات جهانی ریاضی، المپیادها و مسابقات علمی داخلی و خارجی، سؤالات کنکورهای سراسری و آزاد و...) بیش از ۶۰۰ نکته‌ی کلیدی درس ریاضی سوم دبیرستان (کلاس نهم) که دانش‌آموزان علاقه‌مند باید فراگیرند. پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

وحدادی‌کیا

مرشد: مرجع رشد و شکوفایی دانش‌آموزان

ویژه دانش‌آموزان ممتاز و داوطلبان شرکت در مسابقات
و آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و برتر

الرحمة الرحمة

به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «مسابقات ریاضی نهم» یا «۳۰۰۰ تست مرشد» را از مجموعه‌ی «مرشد» منتشر می‌کنیم. این کتاب که توسط آقای وحید اسدی کیا تألیف شده است، دانش‌آموزان کلاس نهم (پایه سوم دوره اول متوسطه) را برای شرکت در مسابقات ریاضی و امتحانات و آزمون‌های ورودی مدارس استعدادهای درخشان و خاص آماده می‌کند. در تألیف این کتاب از منابع متعددی استفاده شده است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱- آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و ممتاز استان تهران و مرکز استان‌های کشور
 - ۲- آزمون‌های پیشرفت تحصیلی تیزهوشان
 - ۳- مسابقات علمی کشوری و بین‌مدرسه‌ای
 - ۴- المپیادهای ریاضی داخلی و خارجی
 - ۵- مسائل مسابقات جهانی کانگورو و آزمون‌های جهانی ریاضی IMC, TIMSS, ABC و آزمون‌های GRE و GMAT
 - ۶- مسائل مسابقات خارجی (کشورهای آمریکا، انگلیس، مجارستان، بلژیک، آفریقای جنوبی و...)
 - ۷- مسائل المپیادهای کشوری مبتکران و آزمون‌های نشانه‌ی مبتکران
 - ۸- آزمون‌های چهارگزینه‌ای داخلی مدارس تیزهوشان استان تهران و مراکز استان‌های کشور
 - ۹- آزمون‌های ورودی روبوکاپ
- و منابع دیگر

مسائل این آزمون‌ها، براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی ریاضی نهم (سوم دبیرستان دوره اول متوسطه) طبقه‌بندی شده و از آسان به سخت مرتب گردیده‌اند. برخی از آن‌ها بدون راهنمایی و اشاره به نکته کلیدی قابل حل نیستند که با علامت $\square$ مشخص شده‌اند تا دانش‌آموزان قبل از اقدام به حل آن‌ها، ابتدا نکته‌ی مورد نظر را مطالعه کنند. (تعداد پاکت‌ها نشان دهنده‌ی تعداد نکته‌های آن سؤال می‌باشد)

لازم به ذکر است کتاب ریاضی مرشد نهم در دو جلد تألیف شده است:

- جلد اول: شامل سؤالات همراه با پاسخ‌نامه‌ی کلیدی آن‌ها
 - جلد دوم: شامل پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سؤالات و نکات مهم مربوط به آن‌ها
- امیدواریم این کتاب، مورد توجه خانواده‌ها، دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر افتد.
- در پایان، وظیفه‌ی خود می‌دانیم از مؤلف کتاب آقای وحید اسدی‌کیا و دبیر مجموعه‌ی مرشد آقای هادی عزیززاده و از آقایان یدالله باقری، اباصلت نورالهی، مهندس پرهام اسدی، مهندس پوریا اسدی، فتح‌اله پرباز (دبیر تیزهوشان استان اردبیل) و مهدی قدیری (دبیر تیزهوشان استان اصفهان) و محمدرضا گلزار (دبیر تیزهوشان استان اصفهان) و دارا نیکبخت (استان اصفهان) و مهندس امیرمسعود طهماسبی، علی بدخشان و علیرضا دولتیاری و خانم‌ها: مهندس ندا قدسی و فاطمه ستاری مرجانی و مریم مقصودی و مهندس لیلا عباس‌زاد که بنا به گزارش مؤلف با وی همکاری علمی داشته‌اند و بخش‌هایی از کتاب را ویرایش کرده‌اند، تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم‌ها لیلا مهرعلی‌پور (که زحمت حروف‌چینی، ترسیم شکل‌ها و صفحه‌آرایی کتاب را برعهده داشتند) و بهاره خدایی (گرافیکست) بسیار ممنونیم و برای همه‌ی این عزیزان آرزوی موفقیت داریم.

انتشارات مبتکران



۷



۲۹۱



۵۹



۳۷۹



۱۰۱



۴۱۹



۱۵۵

پاسخ سؤالات ریاضی آزمون ورودی ۴۸۴
مدارس تیزهوشان سال تحصیلی ۹۵-۹۶
پاسخ سؤالات ریاضی آزمون ورودی ۴۸۸
مدارس تیزهوشان سال تحصیلی ۹۶-۹۷
پاسخ سؤالات ریاضی آزمون ورودی ۴۹۲
مدارس تیزهوشان سال تحصیلی ۹۷-۹۸



۲۲۳





قسمت اول

معرفی مجموعه‌ها و اعضاها

۱. گزینه د

نکته ۱: هر دسته یا گروه از اشیاء، شکل‌ها، اعداد، حروف و... که عضوهای آن قابل تشخیص باشند یا هیچ عضوی نداشته باشند را مجموعه می‌نامیم. در ریاضیات، هر مجموعه را با یکی از حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنند و عضوهای آن را داخل آکولاد قرار داده و بین عضوهای آن «و» و یا «ویرگول (کاما)» می‌گذارند مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد دو رقمی:

$$A = \{11, 13, 15, \dots, 99\}$$

از علامت سه نقطه «...» به معنای «به همین ترتیب» در مجموعه‌هایی که تعداد عضوهای آن زیاد و نوشتن اعضاها جاگیر یا زمان‌بر است استفاده می‌کنیم.

در گزینه‌ی (د)، اعضاها به طور کامل مشخص نیستند پس طبق نکته‌ی (۱)، تشکیل مجموعه نمی‌دهند. توجه داشته باشید که در گزینه‌ی (ب) کاملاً مشخص است که هیچ عضوی وجود ندارد پس طبق نکته‌ی (۱)، تشکیل مجموعه می‌دهد.

۲. گزینه الف

نکته ۲: یادآوری برخی از مجموعه‌های مهم ریاضی:

- مجموعه‌ی اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- مجموعه‌ی اعداد حسابی: $\mathbb{I}$ یا $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- مجموعه‌ی اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعه‌ی اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\text{اعداد کسری با صورت و مخرج صحیح که مخرج صفر نیست}\}$

در تقسیم مخرج نباید صفر باشد، پس فقط مجموعه‌ی اعداد طبیعی قابل قبول است.

۳. گزینه الف

$1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ است در نتیجه این مجموعه فقط یک عضو دارد یعنی $\{1\}$ است.

۴. گزینه ب

حاصل $13 - \sqrt{13}$ ، نه و خورده‌ای و حاصل $-17 + \sqrt{17}$ ، -12 و خورده‌ای می‌شود که شامل اعداد صحیح از

۹ تا -12 است.

۵. گزینه د

نکته ۳: در مجموعه‌ها، نماد $\in$ به معنای «عضو بودن» و نماد $\notin$ به معنای «عضو نبودن» است. به طور مثال

می‌نویسیم $5 \in \mathbb{N}$ و می‌خوانیم عدد پنج عضو مجموعه‌ی اعداد طبیعی است و یا می‌نویسیم $-6 \notin \mathbb{N}$ و می‌خوانیم عدد -6 عضو مجموعه‌ی اعداد طبیعی نیست.

مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ اعداد منفی را شامل نمی‌شود.

۶. گزینه ج

نکته ۴: در هر مجموعه، عضوهای تکراری فقط یک بار شمارش می‌شوند: $A = \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2\} = \{1, 2\}$

هم‌چنین در هر مجموعه جابه‌جایی اعضوها تأثیری در مجموعه ندارد و با جابه‌جا کردن اعضوها، مجموعه‌ی جدیدی به وجود نمی‌آید. به طور مثال:

$$A = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{2, 3, 1\}$$

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\} \in A$$

مجموعه‌ی A فقط شامل یک عضو است:

۷. گزینه الف

$$A = \{a, \{a\}\}$$

طبق نکته‌ی (۴) مجموعه‌ی A شامل ۲ عضو است:

۸. گزینه ب

$$S = \{\{x\}, \{\{x\}\}, \{\{\{x\}\}\}, x\}$$

مجموعه‌ی S را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

۹. گزینه د

۱۰. گزینه الف

نکته ۵: هر عدد صحیح که در ۲ یا مضرب‌های ۲ ضرب شود، حاصل همواره عددی زوج است. هم‌چنین

داریم:

$$\text{زوج} = \text{زوج} \pm \text{زوج} \quad \text{فرد} = \text{فرد} \pm \text{زوج} \quad \text{فرد} = \text{زوج} \pm \text{فرد} \quad \text{زوج} = \text{زوج} \pm \text{فرد}$$

$$\underbrace{2K}_{\text{زوج}} - \underbrace{5}_{\text{فرد}} = \underbrace{\quad}_{\text{فرد}}$$

طبق نکته‌ی (۵)، $2K$ عددی زوج است. پس داریم:

۱۱. گزینه د

نکته ۶: به دنباله‌ای از اعداد که هر عدد با اضافه شدن عددی ثابت (یا کم شدن عددی ثابت) به عدد قبلی

خود به دست می‌آید، «تصاعد عددی» یا «دنباله عددی» می‌گویند. به عبارت دیگر می‌توان گفت اختلاف هر دو عدد متوالی، مقداری ثابت است که به این مقدار ثابت، «قدر نسبت» می‌گویند و آن را با حرف d نمایش می‌دهند. اگر a_1 به معنای اولین عدد تصاعد و a_n ($n \in \mathbb{N}$) به معنای عدد n ام در این سری باشد، همواره

$$a_n = a_1 + (n-1) \times d$$

داریم:

و هم‌چنین اگر آخرین عدد دنباله را a_m در نظر بگیریم، برای به دست آوردن تعداد اعداد دنباله داریم:

$$m = \frac{a_m - a_1}{d} + 1$$

عضوهای این مجموعه یکی در میان مثبت و منفی هستند. با در نظر نگرفتن علامت‌ها و با استفاده از نکته‌ی (۶) می‌توان نوشت:

$$a_{31} = 2 + (31-1) \times 5 \Rightarrow a_{31} = 2 + 150 \Rightarrow a_{31} = 152$$

و چون جملات با شماره‌ی فرد مثبت هستند، پس سی و یکمین عضو، عدد ۱۵۲ است.

۱۲. گزینه ب

$$A = \{1, 3, 8, 10, 15, 17, 22, \dots\}$$

$\xrightarrow{+2} \quad \xrightarrow{+5} \quad \xrightarrow{+2}$
 $\xleftarrow{+2} \quad \xleftarrow{+5} \quad \xleftarrow{+2}$

اگر اعداد با شماره‌ی زوج را در نظر بگیریم (زیرا ۱۲۰ عددی زوج است) کافی است شصتمین عضو ($120 \div 2 = 60$) را به دست آوریم. طبق نکته‌ی (۶) داریم:

$$\{3, 10, 17, \dots\} \rightarrow a'_{60} = 3 + (60-1) \times 7 \Rightarrow a'_{60} = 416$$

در نتیجه یکصد و بیستمین عضو یعنی $a_{120} = 416$ است.

۱۳. گزینه ب

نکته ۷: در هر دنباله‌ی عددی با n جمله، مجموع عضوهای دنباله (تصاعد) برابر است با: $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n$

با توجه به نکته‌های (۶) و (۷) می‌توان نوشت:

$$\frac{59-2}{3} + 1 = 20 \quad A \text{ تعداد عضوهای مجموعه‌ی}$$

$$S_{20} = \frac{2+59}{2} \times 20 \Rightarrow S_{20} = 610$$

۱۴. گزینه ب
مجموعه‌ی A_1 ، تا ۱ و مجموعه‌ی A_2 تا $1+2=3$ و مجموعه‌ی A_3 تا $1+2+3=6$ و مجموعه‌ی A_4 تا $1+2+3+4=10$ نوشته شده است. پس مجموعه‌ی A_9 تا $1+2+3+\dots+9=45$ نوشته می‌شود. در نتیجه اولین عضو مجموعه‌ی A_1 ، $46=45+1$ است.

۱۵. گزینه ب
مانند سؤال قبل، ابتدا عضوهای A_{21} را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن اولین عضو، مانند سؤال قبل عمل می‌کنیم. داریم:

$$1+2+3+\dots+20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210 \quad \text{آخرین عضو } A_{20}$$

در نتیجه اولین عضو A_{21} ، ۲۱۱ است و آخرین عضو A_{21} برابر است با:

$$1+2+3+\dots+21 = \frac{21 \times 22}{2} = 231$$

$$\Rightarrow A_{21} = \{211, 212, 213, \dots, 231\} \quad \text{با توجه به نکته (۷)} \Rightarrow S_{21} = \frac{211+231}{2} \times 21 = 4641$$

مجموعه‌ی تهی

۱۶. گزینه د

نکته ۸: مجموعه‌ای که شامل هیچ عضوی نباشد، مجموعه‌ی تهی می‌نامند و آن را با نمادهای $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهند.

تذکر: $\{\emptyset\}$ یا $\{\{\}$ ، مجموعه‌ی تهی نیستند بلکه شامل یک عضو می‌باشند.

بین ۲۴ و ۲۸، عدد اولی وجود ندارد پس گزینه‌ی (د)، مجموعه‌ی تهی است.

۱۷. گزینه د
معادله‌ی $x^2 + 8 = 0$ جواب «صحیح» ندارد پس مجموعه‌ی جواب آن در اعداد صحیح، $\{\}$ است.

باز یا بسته بودن یک مجموعه

۱۸. گزینه د

نکته ۹: می‌گوییم مجموعه‌ی A نسبت به عملی بسته است که به ازای هر عضو یا عضوهایی از مجموعه‌ی A ، حاصل نیز عضوی از مجموعه‌ی A باشد. هم‌چنین مجموعه‌ی A نسبت به عملی باز است که به ازای هر عضو یا عضوهایی از مجموعه‌ی A ، حاصل عضوی از مجموعه‌ی A نباشد. به طور مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع بسته است زیرا مجموع هر دو عدد طبیعی همواره عددی طبیعی است و نسبت به عمل تفریق، باز است زیرا به طور مثال $3, 5 \in \mathbb{N} \Rightarrow (3-5) \notin \mathbb{N}$

مثال نقض:

$$-4, 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-4}{0} \notin \mathbb{Z}$$

$$1, 2 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1-2 = -1 \notin \mathbb{N}$$

مثال نقض:

پاسخ درست در میان گزینه‌ها نیست! برای هر کدام مثال نقض نوشته شده است:

(الف) : $3, 5 \in \mathbb{N} \Rightarrow 3-5 = -2 \notin \mathbb{N}$

(ب) : $6, 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{6}{0} \notin \mathbb{Z}$

(ج) : $\frac{4}{5}, -\frac{4}{5} \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow \frac{4}{5} + (-\frac{4}{5}) = 0 \notin \mathbb{Q} - \{0\}$

(د) : $2, 3 \in \mathbb{W} \Rightarrow 2-3 = -1 \notin \mathbb{W}$

۲۱. گزینه الف

نکته ۱۰: مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج را با E و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد را با O نمایش می‌دهند:

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$O = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد نسبت به عمل جمع بسته نیست. زیرا:

روش اول: حالت کلی؛

$$n \in \mathbb{N}, \forall n+1 \in O, \forall n'+1 \in O$$

$$\Rightarrow (n+1) + (n'+1) = n + n' + 2 = 2(n + n' + 1) \in E$$

$$5, 7 \in O \Rightarrow 5 + 7 = 12 \in E$$

روش دوم: مثال نقض؛

$$1, 1 \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow 1 + 1 = 2 \notin \{-1, 0, 1\}$$

مثال نقض برای عبارت (الف):

$$5, 7 \in \{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow 5 + 7 = 12 \notin \{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

مثال نقض برای عبارت (ب):

عبارت (ج) درست است زیرا در حالت کلی می‌توان نوشت: $2^n, 2^{n'} \in \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow 2^n \times 2^{n'} = 2^{n+n'} = 2^{n''} \in \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

عبارت (د) نادرست است زیرا مجموعه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ نسبت به عمل ضرب بسته است.

۲۲. گزینه ج

نکته ۱۱: به اعدادی که پس از تجزیه به عوامل اول، دارای توان زوج هستند، مربع کامل می‌گویند.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی مربع کامل نسبت به عمل ضرب بسته هستند:

$$a^{2m} \times b^{2n} = (a^m \times b^n)^2$$

اگر a و b و m و n اعداد طبیعی باشند، داریم:

مشخص است که $(a^m \times b^n)^2$ مربع کامل است.

در مورد اعمال جمع، تقسیم و جذر می‌توان مثال نقض نوشت. به طور مثال $\sqrt{25} = 5$ می‌شود که مربع کامل نیست.

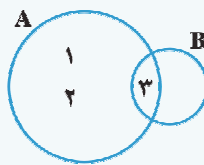
نمایش مجموعه‌ها با نمودار ون

۲۴. گزینه د

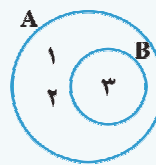
نکته ۱۲: در ریاضیات، مجموعه‌ها را می‌توان به ۳ صورت مختلف نمایش داد که عبارت‌اند از:

(۱) نمایش هندسی (نمودار ون) - (۲) نمایش تفصیلی (نوشتن اعضا) - (۳) نمایش توصیفی (علایم ریاضی)
نمایش عضوهای مجموعه در یک منحنی بسته یا خط شکسته‌ی بسته را نمایش هندسی یا نمودار ون می‌گویند و از شکل‌های هندسی برای نمایش آن استفاده می‌کنند. این نمودار منسوب به دانشمند انگلیسی، آقای «جان ون» است.

تذکر: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3\}$ باشد، نمایش به صورت شکل (۱) نادرست و نمایش به صورت شکل (۲) درست است:



شکل (۱)



شکل (۲)

طبق نمودار داده شده، در میان گزینه‌ها فقط عدد ۱۶۸ مضرب ۷ و مضرب ۱۲ است ولی مضرب ۹ نیست.

۲۵. گزینه د

۲۶. گزینه ه

توجه: اگر عددی ۳ رقمی را ۲ بار پشت سر هم بنویسیم، همواره بر اعداد ۷ و ۱۳ بخش پذیر است. عدد ۱۲۷۱۲۷ مضرب ۷ و ۱۳ است ولی مضرب ۵ نیست. بنابراین عدد ۱۲۷۱۲۷ در جای نقطه‌ی «ه» قرار دارد.

۲۷. گزینه د

$$\text{رابطه‌ی (۱)} \quad x + w + z + 4 + 9 = x + y + 7 + 8 \Rightarrow w + z = y + 2$$

$$x + 9 + 4 + z + w + y + 7 + 8 + 6 = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$$

$$\Rightarrow x + y + z + w = 11 \quad \text{رابطه (۱)} \Rightarrow x + 2y = 9 \Rightarrow x = 5, y = 2$$

نمایش مجموعه‌ها با اعضا و علائم ریاضی: (مقدماتی)

با توجه به این که اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند، $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ است.

۲۸. گزینه د

۲۹. گزینه ب

۳۰. گزینه د

۳۱. گزینه ج

ابتدا عضوهای مجموعه‌ی A را مشخص می‌کنیم و سپس عضوهای B را به دست می‌آوریم:

$$A = \{ -(-2)^2 + 1, -(-1)^2 + 1, -(0)^2 + 1, -(1)^2 + 1, -(2)^2 + 1 \} = \{-3, 0, 1\}$$

$$B = \{ -(-3)^3, -(0)^3, -(1)^3 \} \Rightarrow B = \{27, 0, -1\}$$

ابتدا عضوهای مجموعه‌ی A را نوشته و سپس عضوهای مجموعه‌ی B را به دست می‌آوریم:

۳۲. گزینه د

$$A = \{ 2 \times (-7), 2 \times (-6), 2 \times (-5) \} = \{-14, -12, -10\}$$

$$\Rightarrow B = \{ \frac{3}{4} \times (-14), \frac{3}{4} \times (-12), \frac{3}{4} \times (-10) \} \Rightarrow B = \{-21, -18, -15\}$$

$$B = \{-495, -490, \dots, 0, 5, 10, \dots, 500\}$$

۳۳. گزینه ب

$$n(B) = \frac{500 - (-495)}{5} + 1 = 200$$

$$A = \{5, 8, 11, 14, \dots, 302\} \Rightarrow A \cap B = \{5, 20, 35, \dots, 290\}$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = \frac{290 - 5}{15} + 1 = 20 \Rightarrow \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$$

۳۴. گزینه د

۳۵. گزینه ب

یادآوری: $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ و $2^0 = 1$ است.

۳۶. گزینه الف

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 25\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < \sqrt{25}\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

۳۷. گزینه د

حاصل جذر اعداد ۱، ۴، ۹ و ۱۶ و ...، اعداد طبیعی هستند.

۳۸. گزینه ب

$$2x - 1 > -7 \Rightarrow 2x > -7 + 1 \Rightarrow 2x > -6 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۳۹. گزینه ب

$$-3 < x + 2 < 4 \Rightarrow -3 - 2 < x + 2 - 2 < 4 - 2 \Rightarrow -5 < x < 2 \Rightarrow B = \{-4, -3, -2, \dots, 1\}$$

۴۰. گزینه الف

اعدادی که زوج بوده و بین ۱ و ۸ می‌باشند را به دست آورده و به توان ۳ می‌رسانیم:

۴۱. گزینه الف

$$A = \{2^3, 4^3, 6^3\} \Rightarrow A = \{8, 64, 216\}$$

۴۲. گزینه الف اعداد زوج از ۱ تا ۴ را به جای m در رابطه‌ی $\frac{2m+1}{3}$ قرار می‌دهیم:

$$\left\{ \frac{2 \times 2 + 1}{3}, \frac{2 \times 4 + 1}{3} \right\} = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{9}{3} \right\} = \left\{ \frac{5}{3}, 3 \right\}$$

$$A = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}, B = \{-1, -2, -3, \dots\} \Rightarrow -1 \in A, B$$

$$A = \{-2, -1, 0, 1, \dots\}, B = \{2, 1, 0, -1, \dots\} \Rightarrow -2 \in B$$

۴۳. گزینه ب
۴۴. گزینه الف
۴۵. گزینه د
۴۶. گزینه د
با توجه به تعداد عضوهایی که در A داده شده است، هر سه توصیف می‌تواند درست باشد و عضوهای پنجم و ششم می‌توانست توصیف دقیق را مشخص کند.

$$A = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7\} = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 7\}$$

۴۷. گزینه ب
۴۸. گزینه ج
مضرب‌های صحیح عدد ۳ بین ۱۰ و ۱۹، اعداد ۱۲، ۱۵، ۱۸ هستند و اعدادی که اگر آن‌ها را در ۳ ضرب کنیم، اعداد ۱۲، ۱۵ و ۱۸ به دست می‌آید عبارت‌اند از: ۴، ۵ و ۶ پس $B = \{-4, -5, -6\}$ است.

۴۹. گزینه د مجموعه‌های A ، B و C به صورت زیر هستند:

$$A = \{0, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\}, B = \{0\}, C = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

نمایش مجموعه‌ها با اعضا و علائم ریاضی: (پیشرفته)

۵۰. گزینه ب

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

نکته ۱۳:

$$A = \{x \mid x = (-1)^n \times ((n-1)!)^2, n \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x = (-1)^n \times (n-1)!, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow A = \{(-1)^1 \times (1-1)!, (-1)^2 \times (2-1)!, (-1)^3 \times (3-1)!, \dots\} = \{0, 1, -16, \dots\}$$

۵۱. گزینه ب این مجموعه را می‌توان به صورت $\{10^x + 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$ نیز نمایش داد.

۵۲. گزینه د

$$A = \{7 \times 1, 7 \times 11, 7 \times 111, 7 \times 1111, \dots\} = \left\{ 7 \times \frac{10-1}{9}, 7 \times \frac{10^2-1}{9}, 7 \times \frac{10^3-1}{9}, \dots \right\} = \left\{ 7 \times \frac{10^x-1}{9} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$$

۵۳. گزینه ب مجموعه‌های A و C به درستی نمایش داده شده‌اند اما مجموعه‌های B و D نادرست‌اند. در مجموعه‌ی D باید شرط $x \geq 2$ یا $x \neq 1$ به کار برده می‌شد.

۵۴. گزینه ج عضوهای مجموعه‌ی A ، شمارنده‌های صحیح عدد ۲۶ هستند. بنابراین اگر عدد ۲۶ را بر این اعداد تقسیم کنیم،

حاصل عددی صحیح می‌شود پس $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{26}{x} \in \mathbb{Z}\}$ است.

۵۵. گزینه ب اگر عضوها بر ۷ بخش‌پذیر باشند (یعنی باقی مانده صفر باشد)، عضوها به صورت $7x$ می‌باشند و چون هر

عضو ۵ واحد باقی مانده دارد پس عضوها به صورت $7x + 5$ هستند که در آن $x \in \mathbb{W}$ (اعداد حسابی) و $7x + 5 < 100 \Rightarrow x < \frac{95}{7}$ است.

۵۶. گزینه د x می‌تواند اعداد منفی نیز باشد:

$$\{x \mid \frac{12}{x-1} \in \mathbb{Z}\} = \{-11, -5, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 7, 13\}$$

۵۷. گزینه ج اگر عددی منفی به توان زوج برسد، مثبت می‌شود پس عضوها در گزینه‌ی (ج) باید مثبت باشند.

۵۸. گزینه ب

ابتدا x و y های طبیعی را که مجموع آن ها ۵ می باشد را مشخص می کنیم و سپس آن ها را در توان جایگذاری

$$\left. \begin{array}{l} x=1, y=4 \rightarrow 2^4=16 \\ x=2, y=3 \rightarrow 2^6=64 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \{16, 64\}$$

می کنیم:

توجه کنید که در این سؤال $x=1$ و $y=4$ فرقی با $x=4$ و $y=1$ ندارد زیرا ضرب خاصیت جابه جایی دارد.

۵۹. گزینه د

نکته ۱۴: اگر عضوهای مجموعه ای یکی در میان مثبت و منفی باشند، در توصیف مجموعه با علامیم ریاضی،

باید از ضرب $(-1)^n$ یا $(-1)^{n+1}$ که $n \in \mathbb{N}$ یا $n \in \mathbb{W}$ است، استفاده کرد.

$$\{(-2)^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{(-1)^x \times 2^x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$$

۶۰. گزینه ج

۶۱. گزینه د

نکته ۱۵: در مجموعه هایی که عضوهایش دو تا در میان مثبت و منفی هستند، ضرب $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ یا

$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ و اگر سه تا در میان باشند، از $(-1)^{\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor}$ که در آن $[]$ علامت جزء صحیح است، استفاده می شود.

۶۲. گزینه ج

با توجه به نکته ی (۱۵) و با امتحان گزینه ها، جواب درست مشخص می شود.

۶۳. گزینه ب

با امتحان گزینه ها و به دست آوردن K از طریق معادله برای هر گزینه داریم: گزینه ی (الف) می تواند عضو

$$\frac{2K-1}{3K+1} = \frac{23}{37} \Rightarrow 74K - 37 = 69K + 23 \Rightarrow 5K = 60 \Rightarrow K = 12 \in \mathbb{Z}$$

مجموعه ی داده شده باشد. زیرا:

ولی گزینه ی (ب) نمی تواند عضو مجموعه ی داده شده باشد. زیرا برای K مقدار صحیح حاصل نمی شود:

$$\frac{2K-1}{3K+1} = \frac{20}{31} \Rightarrow 62K - 31 = 60K + 20 \Rightarrow 2K = 51 \Rightarrow K \notin \mathbb{Z}$$

عدد گویا، عددی است که اولاً بتوان آن را به صورت کسر نوشت. ثانیاً صورت و مخرج عضو اعداد صحیح بوده

۶۴. گزینه ب

و مخرج صفر نباشد.

۶۵. گزینه ب

یادآوری: مجموعه ی اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نمایش می دهند.

$\sqrt{3} \simeq 1,73$ و $\sqrt{2} \simeq 1,41$ است. در میان اعداد داده شده $\frac{1}{6} = 1,6$ است که بین $1,4$ و $1,7$ قرار دارد.

مشخص است که عدد مخرج، یکی بیش تر از صورت کسر است.

۶۶. گزینه د

$$\frac{a}{b} = \frac{3b}{b} = 3$$

طبق توصیف مجموعه ی B ، $a = 3b$ است. پس می توان نوشت:

۶۷. گزینه ج

$$x-1=3y \Rightarrow x-3y=1 \Rightarrow 2^x-3^y=2^1=2 \Rightarrow A=\{2\}$$

۶۸. گزینه ج

$$4y-x=2 \Rightarrow 4y=x+2$$

با توجه به شرط توصیفی مجموعه داریم:

۶۹. گزینه ب

$$\frac{3x+1}{9^2y} = \frac{3x+1}{3^4y} = \frac{3x+1}{3^{x+2}} = 3^{x+1-(x+2)} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \{\frac{1}{3}\}$$

از طرفی با توجه به توصیف مجموعه می توان نوشت:

$$-2 < x^2 - 1 < 15 \Rightarrow -1 < x^2 < 16 \quad x \in \mathbb{N} \Rightarrow B = \{1, 2, 3\}$$

۷۰. گزینه د

A و B فقط دارای ۲ عضو مشترک هستند که عبارت اند از: ۲ و ۳

۷۱. گزینه الف

ابتدا x و y های صحیحی به دست می‌آوریم که حاصل ضربشان -۲ است و سپس عضوهای A را به دست

$$x = 1, y = -2 \Rightarrow 3 \times (1)^{-(-2)} - 2 \times (-(-2))^{-1} = 3 - 2 \times \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

می‌آوریم:

$$x = -1, y = 2 \Rightarrow 3 \times (-1)^{-2} - 2 \times (-2)^{-(-1)} = 3 + 4 = 7$$

$$x = 2, y = -1 \Rightarrow 3 \times 2^{-(-1)} - 2 \times (-(-1))^{-2} = 6 - 2 = 4$$

$$x = -2, y = 1 \Rightarrow 3 \times (-2)^{-1} - 2 \times (-1)^{-(-2)} = \frac{-3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \Rightarrow A = \{2, 4, 7, -\frac{7}{2}\}$$

تعداد عضوهای مجموعه

۷۲. گزینه ج

طبق نکته‌ی (۶) می‌توان نوشت:

$$\frac{137-5}{2} + 1 = 67$$

تعداد عضوهای مجموعه‌ی A

$$\frac{123-3}{4} + 1 = 31$$

تعداد عضوهای مجموعه‌ی B

در نتیجه تعداد عضوهای مجموعه‌ی A ، $67 - 31 = 36$ عضو بیش‌تر از تعداد عضوهای مجموعه‌ی B است.

۷۳. گزینه ب

نکته ۱۶: تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را با نمادهای $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهند. هم‌چنین به تعداد عضوهای هر مجموعه، «عدد اصلی» آن مجموعه می‌گویند.

$$n(A) = \frac{105-3}{3} + 1 \Rightarrow n(A) = 35$$

طبق نکته‌های (۶) و (۱۶) تعداد عضوهای هر یک از مجموعه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$n(B) = \frac{+17-(-35)}{2} + 1 \Rightarrow n(B) = 27$$

$$n(C) = \frac{1000-(110)}{5} \Rightarrow n(C) = 179$$

در مجموعه‌ی C ، ابتدا علامت‌ها را حذف کرده و سپس تعداد را به دست می‌آوریم:

$$n(D) = \frac{9-(-9/25)}{0/25} + 1 \Rightarrow n(D) = 74$$

بنابراین در سؤال، $n(B)$ نادرست نوشته شده است.

۷۴. گزینه ب

مجموعه‌ی M ، 11 عضو دارد $\rightarrow M = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}\}$

مجموعه‌ی E ، 9 عضو دارد $\rightarrow E = \{3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots, 3^8\}$

در نتیجه اختلاف عضوهای دو مجموعه‌ی M و E ، $11 - 9 = 2$ عضو است.

۷۵. گزینه ج

$$-6 \frac{1}{4} < x < 5 \frac{2}{3} \rightarrow \{-6, -5, -4, \dots, 5\} \rightarrow 12 \text{ عضو دارد}$$

۷۶. گزینه ج

$$-6 \leq 3x < 6 \Rightarrow -2 \leq x < 2 \rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1\}$$

۷۷. گزینه الف

$$x \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A = \{\frac{1+1}{1}, \frac{2+1}{2}, \frac{3+1}{3}, \frac{4+1}{4}\} \Rightarrow A = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\} \rightarrow n(A) = 4$$

۷۸. گزینه د

با بررسی گزینه‌ها می‌توان دریافت که مجموعه‌های داده شده در گزینه‌ی (الف) و (ب) به ترتیب برابر با

۷۹. گزینه د

$\{2, -2\}$ و $\{2, 0\}$ هستند. همچنین مجموعه‌ی داده شده در گزینه‌ی (ج) دارای بی‌شمار عضو است. اما مجموعه‌ی داده شده در

گزینه‌ی (د) برابر است با $\{1\}$ که فقط یک عضو دارد.

توجه: مجموعه‌ی اعداد غیرگویا است.

۸۰. گزینه د

نکته ۱۷: بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویای دیگر وجود دارد.

$$N = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(N) = 4$$

۸۱. گزینه ج

مجموعه A ، توصیف شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶ است که تعداد آن‌ها برابر است با:

۸۲. گزینه د

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \Rightarrow n(A) = 9$$

۸۳. گزینه الف

نکته ۱۸: برای به دست آوردن شمارنده‌های صحیح هر عدد طبیعی، کافی است تعداد شمارنده‌های طبیعی آن

را ۲ برابر کنیم. برای به دست آوردن شمارنده‌های طبیعی هر عدد طبیعی، ابتدا آن عدد را به شمارنده‌های اول

تجزیه کرده، سپس به هر توان، یک واحد اضافه کرده و توان‌های جدید را در هم ضرب می‌کنیم. به حل سؤال

۸۳ توجه کنید.

طبق نکته‌ی (۱۸)، ابتدا تعداد شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۶۸۰۰ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$16800 = 2^5 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1 \rightarrow (5+1) \times (1+1) \times (2+1) \times (1+1) = 6 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$$

طبق نکته‌ی (۱۸)، تعداد شمارنده‌های صحیح عدد ۱۶۸۰۰ برابر است با $72 \times 2 = 144$. پس مجموعه‌ی B دارای ۱۴۴ عضو می‌باشد.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} < 1, b < 13, a, b \in \mathbb{N} \right\}$$

۸۴. گزینه ب

- اگر صورت ۱ باشد، ۱۱ کسر شامل: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{12}$

- اگر صورت ۲ باشد، ۵ کسر شامل: $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \frac{2}{11}$

- اگر صورت ۳ باشد، ۶ کسر شامل: $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{3}{11}$

هم‌چنین اگر صورت ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ باشد به ترتیب ۴، ۶، ۲، ۵، ۲، ۱ و ۱ کسر می‌توان نوشت که تعداد آن‌ها ۴۵ کسر است.

با توجه به این که اعداد منفی جذر ندارند، داریم:

۸۵. گزینه ب

$$E = \{\sqrt{x} \mid x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}\} \Rightarrow E = \{\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \Rightarrow n(E) = 4$$

$$B = \left\{ \frac{1}{21}, \frac{2}{22}, \frac{3}{23}, \frac{4}{24} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4} \right\} \Rightarrow n(B) = 3$$

۸۶. گزینه الف

اگر x مثبت و بر ۳ بخش‌پذیر باشد، حاصل کسر $\frac{5x}{3}$ عددی طبیعی می‌شود. در نتیجه عضوهای مجموعه‌ی

۸۷. گزینه د

$$A = \left\{ \frac{5 \times 3}{3}, \frac{5 \times 6}{3}, \frac{5 \times 9}{3} \right\} = \{5, 10, 15\} \Rightarrow n(A) = 3$$

A برابرند با:

۸۸. گزینه الف

$$\left. \begin{aligned} x=1, y=6 &\Rightarrow \frac{3 \times 1 + 6}{3 \times 1 - 6} = \frac{9}{-3} = -3 \\ x=6, y=1 &\Rightarrow \frac{3 \times 6 + 1}{3 \times 6 - 1} = \frac{19}{17} \\ x=2, y=3 &\Rightarrow \frac{3 \times 2 + 3}{3 \times 2 - 3} = \frac{9}{3} = 3 \\ x=3, y=2 &\Rightarrow \frac{3 \times 3 + 2}{3 \times 3 - 2} = \frac{11}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow J = \left\{ -3, \frac{19}{17}, \frac{11}{7}, 3 \right\} \Rightarrow n(J) = 4$$

۸۹. گزینه ب

$$x = \frac{K}{K^2} \Rightarrow x = \frac{1}{K}, K \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{-1, 1\} \Rightarrow n(A) = 2$$

۹۰. گزینه ب می‌دانیم اعداد منفی جذر ندارند. پس x عددی نامنفی است. با توجه به شرط $\sqrt{x} \leq 5$ نتیجه می‌گیریم:

$x \in \{0, 23, 24, 25\}$. با توجه به توصیف مجموعه‌ی F ، عضوهای مثبت آن برابر است با:

$$2 \times 2 - 3, 2 \times 3 - 3, 2 \times 4 - 3, \dots, 2 \times 25 - 3 \Rightarrow 24 \text{ عضو مثبت دارد}$$

$$A = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\} \Rightarrow 0, 1, 2 \in \mathbb{Z}$$

$$n \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A = \{1^1 + 1^2, 2^1 + 2^2, 3^1 + 3^2, 4^1 + 4^2\} = \{3, 8, 17, 32\}$$

در نتیجه عضوهای اول مجموعه‌ی A ، ۳ و ۱۷ یعنی ۲ عضو است.

۹۳. گزینه ج اعداد کم‌تر از ۲۰ که پس از کم کردن ۲ واحد از هر یک از آن‌ها، حاصلشان مربع کامل شود، مطلوب هستند.

آن‌ها عبارت‌اند از: $\{2, 3, 6, 11, 18\}$ که تعدادشان ۵ تا است.

۹۴. گزینه ب

نکته ۱۹: اگر n عدد طبیعی زوج و m عدد طبیعی فرد باشد، همواره داریم: $(-1)^n = +1, (-1)^m = -1$

نکته ۲۰: در ضرب اعداد طبیعی زوج و فرد داریم:

$$\text{زوج} \times \text{زوج} = \text{زوج} \quad \text{زوج} \times \text{فرد} = \text{فرد} \quad \text{فرد} \times \text{فرد} = \text{زوج}$$

با توجه به نکته‌ی (۲۰)، چون ۱۰۰۰ عددی زوج است، پس نمی‌تواند حاصل ضرب دو عدد فرد باشد. پس طبق نکته‌ی (۱۹) فقط ۲

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{\text{زوج}} + (-1)^{\text{زوج}} &= 1 + 1 = 2 \\ (-1)^{\text{فرد}} + (-1)^{\text{زوج}} &= -1 + 1 = 0 \\ (-1)^{\text{فرد}} + (-1)^{\text{فرد}} &= 1 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \{0, 2\} \Rightarrow n(A) = 2$$

حالت متمایز به وجود می‌آید که عبارت‌اند از:

۹۵. گزینه ب با شرایط مسئله، مجموعه‌ی B فقط ۲ عضو می‌تواند داشته باشد. زیرا:

$$\frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}, \frac{(-\frac{2}{5})^2}{2} = \frac{\frac{4}{25}}{2} = \frac{2}{25} \notin \mathbb{N}, \frac{0^2}{2} = 0 \notin \mathbb{N}, \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \in \mathbb{N}, \frac{(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}, \frac{2^2}{2} = 2 \in \mathbb{N}$$

۹۶. گزینه الف

$$\left. \begin{aligned} x = 1, y = 8 &\rightarrow 1^8 = 1 \\ x = 8, y = 1 &\rightarrow 8^1 = 8 \\ x = 2, y = 4 &\rightarrow 2^4 = 16 \\ x = 4, y = 2 &\rightarrow 4^2 = 16 \\ x = -1, y = -8 &\rightarrow (-1)^{-8} = 1 \\ x = -8, y = -1 &\rightarrow (-8)^{-1} = -\frac{1}{8} \\ x = -2, y = -4 &\rightarrow (-2)^{-4} = \frac{1}{16} \\ x = -4, y = -2 &\rightarrow (-4)^{-2} = \frac{1}{16} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \{1, 8, 16, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\} \Rightarrow n(A) = 5$$

۹۷. گزینه ب

$$x = 3K \rightarrow -1386 \leq 3K < 2007 \Rightarrow -462 \leq x < 669$$

$$\Rightarrow K \in \{-462, -461, -460, \dots, 668\} \Rightarrow n(K) = 668 - (-462) + 1 \Rightarrow n(K) = 1131$$

بنابراین برای x نیز ۱۱۳۱ عدد مختلف حاصل می شود پس $n(A) = 1131$

۹۸. گزینه ج

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$$

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 1$$

نکته ۲۱: اگر a مثبت باشد، همواره داریم:

توجه: اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، همواره داریم:

$$\text{کسر } \frac{\sqrt{2880} - \sqrt{2879}}{2}, \text{ کسری کوچکتر از واحد است پس مقدار آن بین } 0 \text{ و } 1 \text{ است. هم چنین کسر } \frac{\sqrt{2251} - \sqrt{2250}}{2} \text{ نیز}$$

کسری کوچکتر از واحد یعنی بین صفر و ۱ است. پس می توان نوشت:

$$\text{خوردهای } 0 < x < 1 \Rightarrow \text{خوردهای } -1 < x < 0 \Rightarrow \text{خوردهای } 0 < x < 1 \Rightarrow \text{خوردهای } -2 < x < -1$$

در نتیجه عضوهای این مجموعه عبارت اند از: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. پس این مجموعه ۹ عضو دارد.

تعداد عضوهای هر مجموعه را به دست آورده و با هم مقایسه می کنیم:

۹۹. گزینه ج

$$(الف) : 0 \leq x^2 \leq 10 \Rightarrow x = 1, 2, 3 \rightarrow n(الف) = 3$$

$$(ب) : 0 \leq \sqrt{x} \leq 10 \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, \dots, 100 \rightarrow n(ب) = 100$$

$$(ج) : 0 \leq \sqrt{x} \leq 10 \Rightarrow x = 0, 1, 2, \dots, 100 \rightarrow n(ج) = 101 \text{ بیشترین تعداد عضو را دارد.}$$

$$(د) : 0 \leq x^2 \leq 10 \Rightarrow x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \rightarrow n(د) = 7$$

۱۰۰. گزینه ج با توجه به این که $2^{12} = 2 \times 2^{11} = 2^{11} + 2^{11}$ می توان نوشت:

$$A = \{2^{11} + 2 \times 1, 2^{11} + 2 \times 2, 2^{11} + 2 \times 3, 2^{11} + 2 \times 4, \dots, 2^{11} + 2 \times 2^{10}\}$$

پس می توان نتیجه گرفت مجموعه A دارای 2^{10} عضو است.

۱۰۱. گزینه د

نکته ۲۲: مجموعه ای که فقط یک عضو دارد، مجموعه ی یکانی نام دارد.

در گزینه ی (الف)، عدد ۱۰۰۱ بر ۱۱ و عدد ۱۰۰۳ بر ۱۷ بخش پذیر است پس بین ۱۰۰۰ و ۱۰۰۵ عدد اول وجود ندارد. در گزینه ی

(ب)، $n(A) = 2$ است. در گزینه ی (ج) $n(B) = 2$ است. در گزینه ی (د) داریم:

$$x^7 + x^5 + x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^6 + x^4 + x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow n(C) = 1$$

$$(x-2)^{x+3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0, x-2 \neq 0 \Rightarrow x=-3 \\ x-2=1, (x+3) \in \mathbb{R} \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1, (x+3) \text{ زوج} \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

۱۰۲. گزینه د

$$51 = 1 \times 51 = -1 \times -51 = 3 \times 17 = -3 \times -17$$

۱۰۳. گزینه د

$$\begin{cases} x+y+5=1 \rightarrow \begin{cases} x=19 \\ y=-23 \end{cases} & \begin{cases} x+y+5=51 \rightarrow \begin{cases} x=19 \\ y=27 \end{cases} & \begin{cases} x+y+5=3 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5=17 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases} & \begin{cases} x+y+5=-1 \rightarrow \begin{cases} x=-33 \\ y=27 \end{cases} & \begin{cases} x+y+5=-51 \rightarrow \begin{cases} x=-33 \\ y=-23 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5=-3 \rightarrow \begin{cases} x=-17 \\ y=9 \end{cases} & \begin{cases} x+y+5=-17 \rightarrow \begin{cases} x=-17 \\ y=-5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \left\{ -\frac{19}{23}, \frac{19}{27}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{9}, -\frac{33}{27}, -\frac{33}{23}, -\frac{17}{9}, \frac{17}{5} \right\} \rightarrow$$

مجموعه A دارای ۸ عضو متمایز است.

بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو

در مجموعه‌ی $A = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ بزرگ‌ترین عضو، -1 است.

بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی B ، 3 و کوچک‌ترین عضو، $+1$ است که جمع آن‌ها 4 می‌شود.

عدد 10 غیراول است و $10^2 < 135 < 10^3$ است.

۱۰۴. گزینه ب

۱۰۵. گزینه ب

۱۰۶. گزینه د

۱۰۷. گزینه الف اگر $x = 1$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی A به دست می‌آید:

$$-(x-1)^2 + 1 \stackrel{x=1}{\Rightarrow} -(1-1)^2 + 1 = +1$$

۱۰۸. گزینه الف با توجه به این که $\sqrt{11} \simeq 3/3$ و $2^1 < 3/3$ می‌توان نوشت:

$$\{3x - 5 \mid x \in \mathbb{Z}, 2^x < \sqrt{11}\} = \{3x - 5 \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 1\} = \{\dots, -11, -8, -5, -2\}$$

در نتیجه بزرگ‌ترین عضو، عدد -2 می‌باشد.

۱۰۹. گزینه ب با توجه به این که اگر y عددی منفی باشد، حاصل x^y کوچک می‌شود، در y های مثبت داریم:

x	۱	۲	۳	۴	۶	۱۲
y	۱۲	۶	۴	۳	۲	۱ $\Rightarrow 3^4 - 1 = 81 - 1 = 80$
x^y	۱۲	۲۶	۳۴	۴۳	۶۲	۱۲۱

۱۱۰. گزینه د کم‌ترین مقدار برای x^{2y} زمانی حاصل می‌شود که x عددی کوچک و y نیز عددی کوچک باشد پس با

انتخاب $x = 8$ و $y = 1$ کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی A حاصل می‌شود:

$$A = \left\{ \frac{12x}{x^2} \mid x \in \mathbb{N}, -7 < \sqrt{x} \leq 4 \right\} = \left\{ \frac{12}{x} \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 16 \right\}$$

اگر x شمارنده‌ی 12 باشد، حاصل کسر $\frac{12}{x}$ عددی صحیح می‌شود پس از بین اعداد طبیعی از 1 تا 16 شمارنده‌های 12 یعنی $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ را کم می‌کنیم. در نتیجه $10 = 16 - 6$ عضو از مجموعه‌ی A عدد صحیح نیستند.

$$(140, 224) = 28 \Rightarrow 224x + 140y = 28k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 224x + 140y - 77 = 28k - 77 > 0 \Rightarrow k > \frac{77}{28} \Rightarrow k > 2 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow 28 \times 3 - 77 = 84 - 77 = 7 \quad \text{کوچک‌ترین عضو مثبت}$$

زیرمجموعه

۱۱۳. گزینه الف

نکته ۲۳: هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی B ، عضوی از مجموعه‌ی A باشد، یا این که همه‌ی عضوهای

مجموعه‌ی B ، از عضوهای مجموعه‌ی A انتخاب شده باشند، می‌گوییم B زیرمجموعه‌ی A است و

می‌نویسیم $B \subseteq A$ است. اگر عضوی در B باشد که از A انتخاب نشده باشد (یعنی این عضو در A نباشد)

می‌گوییم مجموعه‌ی B زیرمجموعه‌ی A نیست و می‌نویسیم: $B \not\subseteq A$

نکته ۲۴: هر زیرمجموعه، خودش یک مجموعه است. بنابراین علامت $\subseteq$ همواره باید بین دو مجموعه قرار

گیرد.

۱۱۴. گزینه ب

۱۱۵. گزینه الف

۱۱۶. گزینه ج

در گزینه ی (ب)، مجموعه ی A عضوی ندارد.

$$A = \{\emptyset, \{2\}, \{\emptyset, \{2\}\}\}$$

اما در گزینه ی (ج)، تهی عضوی از مجموعه ی A است زیرا:

در گزینه ی (د)، $A = \{\emptyset, \{2\}, \{\emptyset\}\}$ است و $\emptyset$ عضو A محسوب نمی شود. بلکه $\{\emptyset\}$ عضوی از A است.

نکته ۲۵: اگر نمودار داده شده به صورت  باشد، می نویسیم: $A = \{\emptyset, \{2\}, \{\emptyset, \{2\}\}\}$ زیرا طبق

نمودار $3 \in A$ و $4 \in A$ است. اگر اشتباهاً می نوشتیم $A = \{\emptyset, \{2\}, \{3, 4\}\}$ در این صورت ۳ و ۴ دیگر نمی توانستند عضوی از مجموعه ی A باشند. حتی نوشتن به صورت $A = \{\emptyset, \{2\}, C\}$ نادرست است زیرا در این

صورت نیز اعداد ۳ و ۴ فقط عضوی از C بودند نه A . پس اگر بخواهیم برای نمودار  مجموعه

بنویسیم، باید نوشت: $A = \{\emptyset, \{2\}, \{3, 4\}\}$, $C = \{3, 4\}$

۱۱۷. گزینه ب $\{a\}$ زیرمجموعه ی A نیست بلکه $\{a\}$ عضوی از A است. یعنی $\{a\} \in A$

۱۱۸. گزینه الف عضو $\{2\}$ در B وجود دارد که از A انتخاب نشده است پس $B \not\subseteq A$.

۱۱۹. گزینه ج در سؤالات قسمت های جلوتر در همین فصل می خوانید که به این نوع مجموعه ها، مجموعه ی توانی می گویند.

۱۲۰. گزینه د هر چهار مورد داده شده درست هستند.

۱۲۱. گزینه الف مشخص است که همه ی عضوهای مجموعه ی A از مجموعه ی اعداد اول (P) هستند پس $A \subseteq P$ است.

۱۲۲. گزینه د با توجه به توصیف مجموعه ی B ، همه ی عضوهای مجموعه ی B از A انتخاب شده اند پس $B \subseteq A$ است.

۱۲۳. گزینه ب مجموعه ی B دارای ۷ عضو است: $B = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$

۱۲۴. گزینه الف $\mathbb{R}$ مجموعه ی اعداد حقیقی است که در فصل دوم به طور کامل در مورد آن توضیح داده شده است.

۱۲۵. گزینه ب هر عضو دلخواه از مجموعه ی A ، در $32 = 2^5$ زیرمجموعه به کار رفته است. پس وقتی عضوهای همه ی

زیرمجموعه های مجموعه ی A را با هم جمع کنیم، هر عضو ۳۲ بار تکرار می شود. پس حاصل جمع برابر است با: $32 \times 40 = 1280$

نکته ۲۶: اگر A یک مجموعه ی n عضوی باشد به طوری که مجموع عضوهای آن عدد M باشد، مجموع

$$2^{n-1} \times M$$

همه ی زیرمجموعه های A برابر است با:

$$x^2 + K = 6 \Rightarrow x^2 = 6 - K$$

طبق تعریف مجموعه ی A و این که $6 \in A$ و $9 \in A$ است، داریم:

$$x'^2 + K = 9 \Rightarrow x'^2 = 9 - K$$

$6 - K$ و $9 - K$ مربع کامل هستند و ۳ واحد با یکدیگر اختلاف دارند که می توان نتیجه گرفت آن دو مربع کامل اعداد ۱ و ۴

هستند که در نتیجه $K = 5$ است. حال گزینه ها را بررسی می کنیم تا مشخص شود ۵ عضو کدام مجموعه است. داریم:

مجموعه ی (الف) $\Rightarrow \{5x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 1, 6, 11, \dots\} \Rightarrow 5 \notin$ ؛ مجموعه ی (ب) $\Rightarrow \{4x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 3, 7, 11, \dots\} \Rightarrow 5 \notin$

مجموعه ی (ج) $\Rightarrow \{2x + 6 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 2, 4, 6, 8, \dots\} \Rightarrow 5 \notin$ ؛ مجموعه ی (د) $\Rightarrow \{3x - 4 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} \Rightarrow 5 \in$

۱۲۷. گزینه ب

$$A \subseteq B \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}, \forall a + b = 0 \Rightarrow -2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$