



DISCRET MATHEMATICS 12

Password

ن وَالْقَلَمِ وَمَا يَسْطُرُونَ



www.gaj.ir



Other user

ENG



همکارانی که تجربه فراوان آن‌ها در تدریس و تألیف پشتوانه این کتاب شد :

✓ همکاران تألیف



M. Hoseyni fard مهندس محمدرضا حسینی فرد
M . Esmaeili مهندس محسن اسمعیلی
B . Jalali مهندس بهرام جلالی
N.O. Shojaee مهندس نوید اورازانی شجاعی
M. Sehat kar مهندس محمد صحت‌کار
K . Darabi مهندس کیوان دارابی

May29



virastarni ke ba deghat va hoseleye bimanand satr be satr ketab ra khandand :

M. Sasani مهندس مریم ساسانی
Dr . P. tayoub دکتر پیام طیوب
Dr . A. Ashtab دکتر آرمان آشتاب
A . KHavanin Zadeh مهندس امین خوانین‌زاده
E . Vahabi مهندس ایمان وهابی
M. Samadi مهندس میثم صمدی

✓ ویراستاران علمی



Today

کارشناسان خبره‌ای که دانش و تجربه خود را با ما به اشتراک گذاشتند :

✓ کارشناسان علمی



V. Yavari مهندس وجیه‌الله یآوری
M.alae nasab مهندس مجید علائی نسب
M. Arbab bahrami مهندس محمد ارباب بهرامی
H. khazae مهندس حسین خزائی
H. Pirzad مهندس حسین پیرزاد
S. Roshani مهندس سوگند روشنی



Message|



طوفانی از کتاب‌های حرفه‌ای در راه است ...





Tweet



Rene Descartes 
@Rene 1596

من فکر میکنم، پس هستم

I think therefor I am.

درس اول : استدلال ریاضی 

درس دوم : بخش پذیری در اعداد صحیح 

درس سوم : هم‌نهشتی 

[Translate Tweet](#)

07:30 . 5/31/20

 View Tweet activity

رنه دکارت ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی پدر فلسفه مدرن و هندسه تحلیلی کسی که فلسفه را از خواب سنگین قرون وسطی بیدار کرد.

 4,337

 7,412

 6,720,310,808



Number

CHAPTER 1

Theory

Add another Tweet



♣ $(2, 3) = 1$ ♣ $(-3, -4) = 1$ ♣ $(-9, 10) = 1 \dots\dots\dots$

وقتی گفته می‌شود دو عدد متوالی، منظور مقدار اعداد از نظر قدر مطلق است. بنابراین -9 و 10 را نیز متوالی فرض می‌کنیم چون علامت نقشی در ب.م.م ندارد.

سایر متباین‌های مهم

$(2k-1, 2k+1) = 1$	❶ دو عدد فرد متوالی همواره نسبت به هم اول اند. ♣ $(3, 5) = 1$ ♣ $(-5, 7) = 1$ ♣ $(-11, -13) = 1$
$(2k+1, 2^n) = 1$	❷ تمام اعداد فرد نسبت به 2 (و توان‌های 2) اول اند. ♣ $(3, 2) = 1$ ♣ $(7, 16) = 1$ ♣ $(15, 32) = 1$
$(p, q) = 1$	❸ اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند، آنگاه نسبت به هم اول اند. ♣ $(3, 5) = 1$ ♣ $(7, 11) = 1$ ♣ $(11, 19) = 1$
$(a, \pm 1) = 1$	❹ تمام اعداد صحیح نسبت به 1 و -1 اول اند. ♣ $(2, 1) = 1$ ♣ $(24, \pm 1) = 1$ ♣ $(15, \pm 1) = 1$

🍏 دو عدد فرد غیر متوالی ممکن است نسبت به هم اول یا غیر اول باشند:

♣ $(3, 9) = 3$ ♣ $(7, 15) = 1$ ♣ $(15, 25) = 5$

مینی‌تست

- ❶ حاصل $(a, 1)$ برابر با است. A ۱ B |a|
- ❷ حاصل $(a, -1)$ برابر با است. A ۱ B -۱
- ❸ حاصل $(7, 11)$ برابر با است. A ± 1 B ۱
- ❹ اگر p, q دو عدد اول متمایز باشد، حاصل (p, q) برابر با است. A ۱ B $\text{Min}\{p, q\}$
- ❺ حاصل $(n, n+1)$ برابر با است. A n B ۱
- ❻ حاصل $(3k+1, 3k+2)$ برابر با است. A ۱ B $3k+1$
- ❼ هر دو عدد نسبت به هم اول اند. A زوج متوالی B فرد متوالی
- ❽ اگر a مضرب 6 نباشد آنگاه $(a, 6)$ A الزاماً برابر ۱ است B برابر ۱ یا ۲ یا ۳ است
- ❾ اگر a مضرب 7 نباشد، آنگاه $(a, 7)$ A الزاماً برابر ۱ است B برابر ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ است

- ❶ حاصل $(2m+1, 2)$ برابر با است. A ۲ B ۱
- ❷ حاصل $(2^n, 2k+1)$ برابر با است. A ۱ B ۲
- ❸ ب.م.م دو عدد زوج متوالی برابر با است. A ۲ B 2 یا 4
- ❹ حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است. A 2 B $2|m|$
- ❺ حاصل (m^2, m^3) برابر با است. A m^2 B $|m^3|$
- ❻ حاصل $(2m, 2m^2)$ برابر با است. A $|m|$ B $6m^2$
- ❼ دو عدد نسبت به هم اول اند. A $7, 91$ B $4, 9$
- ❽ عدد نسبت به هر سه عدد $81, 49, 25$ اول است. A 21 B 22
- ❾ حاصل $(12, 1)$ برابر با است. A 12 B ۱

← NEXT



19 اگر p اول و a عددی صحیح باشد به طوری که $a \mid p$ آنگاه با استفاده از
می توان نشان داد: $(a, p) = 1$

A برهان خلف B اثبات بازگشتی

20 اگر m زوج باشد، حاصل $(m, 2)$ برابر با است.

A ۲ یا ۴ B ۲

21 اگر m فرد باشد، حاصل $(m, 2)$ برابر با است.

A ۱ B ۲

22 حاصل $(5^9, 9^5)$ برابر با است.

A ۱ B 5×9

اگر $(a, b) = 1$ باشد:

23 حاصل $(ab, a+b)$ برابر با است.

A ۱ B ۲ یا ۱

24 حاصل (a, b^2) برابر با است.

A ۱ B ۱ یا ۳

25 حاصل $(a+b, a-b)$ برابر با است.

A ۱ B ۱ یا ۲

26 حاصل (a, bc) برابر با است.

A c B (a, c)

27 حاصل (a^n, b^m) برابر با است.

A ۱ B (m, n)

28 حاصل $(a, a+b)$ برابر با است.

A ۱ B ۱ یا ۲

29 حاصل $(ab, a^n + b^m)$ برابر با است.

A ۱ B ۱ یا ۲

19 A 20 B 21 A 22 A 23 A 24 A 25 B 26 B 27 A 28 A 29 A

63 کدام یک از اعداد زیر نسبت به هر سه عدد ۱۶، ۲۷، ۲۵ اول است؟

۲۱ (۱) ۷۷ (۲) ۵۵ (۳) ۲۶ (۴)

64 بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $5k+1$ و $5k+2$ کدام است؟

۳ (۱) ۱ یا ۲ (۲) ۱ (۳) ۱ یا ۴ (۴)

65 عدد b را کدام انتخاب کنیم تا به ازای هر عدد فرد a ، تساوی $(a, b) = 1$ برقرار باشد؟

۶ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۲۵ (۴)

66 اگر p یک عدد اول دو رقمی باشد، حاصل $(\Delta p^2, 108)$ کدام است؟

Δp^2 (۱) ۱۰۸ (۲) ۱ (۳) p^2 (۴)

67 اگر $(a, b) = 1$ باشد، حاصل $(3a^2b, 3ab^2)$ برابر با است.

$3 \mid ab$ (۱) ۳ (۲) $9a^2b^2$ (۳) $3a^2b^2$ (۴)

68 اگر $a \mid 19$ حاصل $(7a, 19^2)$ کدام است؟

۷ (۱) ۱ (۲) ۱۹ (۳) 7×19 (۴)

69 حاصل $(6a+1, 12)$ کدام است؟

۱ یا ۳ (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۱۲ یا ۱ (۴)

70 حاصل $(15a+2, 45), (9a+3)$ کدام است؟

۱ (۱) ۳ یا ۱ (۲) ۳ یا ۱ (۳) ۳ (۴)

71 اگر $(a, 2) = 1$ باشد، حاصل $(2a, a^2+8)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ یا ۱ (۲) ۳ یا ۱ (۳) ۱ یا ۳ یا ۹ (۴)

72 اگر $(a, 3) = 1$ باشد، حاصل $(3a, a+3)$ کدام است؟

۱ (۱) ۳ یا ۱ (۲) ۳ یا ۱ (۳) ۳ یا ۶ (۴)

73 اگر $(a, 5) = 1$ باشد، حاصل $(a+5, a-5)$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ یا ۱ (۲) ۲ یا ۱ (۳) ۵ یا ۲ (۴)



7 کوچک ترین مضرب مشترک ۶ و ۸ عبارت است از

۲ A ۲۴ B

8 حاصل $[3, 4]$ برابر با است.

۱۲ A ۱ B

9 حاصل $[36, 48]$ برابر با است.

۱۰۸ A ۱۴۴ B

10 حاصل $[8, 16]$ برابر با است.

۱۶ A ۸ B

11 حاصل $[8, 1]$ برابر با است.

۸ A ۱ B

12 حاصل $[[8, 10], 15]$ برابر با است.

۱۲۰ A ۲۴۰ B

13 حاصل $[-10, -6, 4]$ برابر با است.

۱۲۰ A ۶۰ B

14 حاصل $[a, 1]$ برابر با است.

۱ A $|a|$ B

15 حاصل $[a, -1]$ برابر با است.

۱ A $|a|$ B

16 حاصل $[a, a]$ برابر با است.

$|a|$ A ۱ B

17 حاصل $[a, a^n]$ برابر با است.

$|a|^n$ A $|a|$ B

18 اگر a, b نسبت به هم اول باشند $[a, b]$ برابر با است.

۱ A $|ab|$ B

19 حاصل $[-a, b]$ برابر با است.

$-[a, b]$ A $[a, b]$ B

20 حاصل $[-a, -b]$ برابر با است.

$[a, b]$ A $-[a, b]$ B

21 اگر $a | b$ حاصل $[a, b]$ برابر با است.

$|a|$ A $|b|$ B

22 اگر $a | b$ باشد آنگاه

$a | b$ A $b | a$ B

23 اگر $a, b = c$ حاصل $[a, c]$ برابر با است.

c A $|a|$ B

24 حاصل $[a, -b], -a]$ برابر با است.

$[a, b]$ A $|a|$ B

25 حاصل $[a, (a, b)]$ برابر با است.

$[a, b]$ A $|a|$ B

26 حاصل $(a, [a, b])$ برابر با است.

$[a, b]$ A $|a|$ B

27 حاصل $[a, [a, b]]$ برابر با است.

$|a|$ A $[a, b]$ B

28 حاصل $(1397, 2019), (1397, 2019)]$ برابر با است.

۱۳۹۷ A ۲۰۱۹ B

29 حاصل $(1398, 2020), (1398, 2020)]$ برابر با است.

۲۰۲۰ A ۱۳۹۸ B

30 حاصل $[18, 12], 18]$ برابر با است.

۳۶ A ۱۴۴۴ B

31 حاصل $(m^3, m^2), m]$ برابر با است.

$|m^3|$ A m^2 B

32 حاصل $([m^2, m^3], m)$ برابر با است.

m^2 A $|m|$ B

33 حاصل $([m^2, m^4], [-m^3, m^2])$ برابر با است.

m^2 A m^4 B

34 اگر $a | b$ کدام نتیجه درست است؟

$[a^2, b] = |b|$ A $[a, b^2] = b^2$ B

35 اگر $ab | c$ حاصل $[a, c]$ برابر با است.

$|c|$ A $|a|$ B

36 اگر $a + b | a$ حاصل $[a + b, b]$ برابر با است.

$|b|$ A $|a + b|$ B

37 اگر $a, b = c$ باشد، حاصل $[ab, c^2]$ برابر با است.

$|ab|$ A c^2 B

38 اگر $a, b = c$ باشد، حاصل $[ac, c^2]$ برابر با است.

c A c^2 B

85 کوچک ترین عضو مجموعه $A = \{x > 0 : 24 | x, 18 | x\}$ کدام است؟

۶ (۱) ۱۸ (۲) ۷۲ (۳) ۴۳۲ (۴)

86 حاصل $([a, -1], a^2)$ کدام است؟

۱ (۱) $|a|$ (۲) a^2 (۳) -1 (۴)

87 اگر $a^3 | b^2$ کدام نتیجه گیری الزاماً صحیح نیست؟

$(a, b) = |a|$ (۱) $[a, b] = |b|$ (۲) $[a, b^2] = b^2$ (۳) $(a^2, b) = a^2$ (۴)

88 با توجه به نمادهای «بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچک ترین مضرب مشترک» عدد $[154, (27, 429)]$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۴۶۲ (۱) ۴۷۸ (۲) ۵۰۶ (۳) ۹۲۴ (۴)

89 اگر m یک عدد طبیعی باشد، حاصل $[m^2, m], 2m^3$ برابر با است.

$2m^3$ (۱) m^2 (۲) m^4 (۳) m (۴)

90 اگر $(a^2, b) = a^2$ باشد، حاصل $[a, 2b^2]$ برابر با است.

$2ab^2$ (۱) a (۲) $2b^2$ (۳) a^2 (۴)

91 اگر $a = 3k + 1$ باشد، حاصل $[(a, a+3), [a, a+3]]$ برابر با است.

$a(a+3)$ (۱) a (۲) $\frac{a(a+3)}{3}$ (۳) $a+3$ (۴)

21

چاقی و لاغری درب.م.م و ک.م.م

می دانیم ب.م.م هر دو عدد، هر یک از اعداد را می شمارد و ک.م.م هر دو عدد، بر هر یک از اعداد بخش پذیر است:

ادامه لورل - هاردی درب.م.م و ک.م.م

$$a | b \xrightarrow[\text{لاغرتر}]{\text{لاغر}} (a, \text{cloud}) | a \quad a | (b, \text{cloud}) \xrightarrow[\text{چاقتر}]{\text{چاق}} a | b$$

1 گرفتن ب.م.م بین دو عدد باعث لاغر شدن می شود، یعنی برای هر عدد دلخواه a عدد (a, cloud) همواره لاغرتر از a است.

$$a | b \xrightarrow[\text{چاقتر}]{\text{چاق}} a | [b, \text{cloud}] \quad [a, \text{cloud}] | b \xrightarrow[\text{لاغرتر}]{\text{لاغر}} a | b$$

2 گرفتن ک.م.م بین دو عدد باعث چاق شدن می شود، یعنی برای هر عدد دلخواه a عدد $[a, \text{cloud}]$ همواره چاق تر از a است.

$$c | [a, b] \xrightarrow[\text{چاقتر}]{\text{چاق}} c | a \times b \quad a \times b | c \xrightarrow[\text{لاغرتر}]{\text{لاغر}} [a, b] | c$$

3 می دانیم $a \times b = [a, b] \times (a, b)$ یعنی حاصل ضرب دو عدد همواره چاق تر از ک.م.م دو عدد است.

مینی تست

5 کدام نتیجه گیری درست است؟

$a | [b, c] \Rightarrow a | (b, c)$ (B) $a | (b, c) \Rightarrow a | [b, c]$ (A)

6 کدام نتیجه گیری درست است؟

$[a, b] | c \Rightarrow (a, b) | c$ (B) $(a, b) | c \Rightarrow [a, b] | c$ (A)

7 کدام نتیجه گیری درست است؟

$a | bc \Rightarrow a | [b, c]$ (B) $a | [b, c] \Rightarrow a | bc$ (A)

8 کدام نتیجه گیری درست است؟

$[a, b] | c \Rightarrow ab | c$ (B) $ab | c \Rightarrow [a, b] | c$ (A)

1 کدام نتیجه گیری درست است؟

$a | b \Rightarrow a | (b, c)$ (A) $a | b \Rightarrow (a, c) | b$ (B)

2 کدام نتیجه گیری درست است؟

$a | (b, c) \Rightarrow a | b$ (A) $(b, c) | a \Rightarrow b | a$ (B)

3 کدام نتیجه گیری درست است؟

$a | b \Rightarrow a | [b, c]$ (A) $a | b \Rightarrow [a, c] | b$ (B)

4 کدام نتیجه گیری درست است؟

$[b, c] | a \Rightarrow b | a$ (A) $a | [b, c] \Rightarrow a | b$ (B)

1 B 2 A 3 A 4 A 5 A 6 B 7 A 8 A



22 اگر $a \equiv 14$ و $b \equiv 31$ باشد، باقی‌مانده $a^{17} + b^{16}$ بر ۱۵ برابر است.....

A صفر B ۲

23 اگر $a \equiv b$ و $n | m$ باشد است.

A $a \equiv b$ B $a \equiv n$

24 اگر باقی‌مانده a بر ۲۴ برابر ۱۷ باشد، باقی‌مانده a بر نیز معلوم است.

A ۱۶ B ۱۲

25 اگر $a \equiv 5$ باشد آنگاه

A $a \equiv 5$ B $a \equiv 1$

26 اگر $a \equiv 15$ باشد، باقی‌مانده a بر ۷ برابر است.

A ۱ B ۶

27 اگر $2x \equiv 4$ آنگاه

A $x \equiv 1$ B $x \equiv 2$

28 اگر $2x \equiv 4$ آنگاه

A $x \equiv 2$ B $x \equiv 3$

29 اگر $6x \equiv 9y$ باشد، آنگاه

A $2x \equiv 3y$ B $2x \equiv 3y$

30 از رابطه هم‌نهشتی $15a \equiv 20b$ می‌توان نتیجه گرفت

A $3a \equiv 4b$ B $3a \equiv 4b$

31 از رابطه هم‌نهشتی $3a \equiv 4b$ می‌توان نتیجه گرفت

A $b \equiv 0$ B $b \equiv 0$

32 از رابطه هم‌نهشتی $3a \equiv 4b$ می‌توان نتیجه گرفت

A $a \equiv 0$ B $a \equiv 0$

33 اگر $18a \equiv 12b$ آنگاه

A $a \equiv 1$ B $b \equiv 0$

34 اگر $15x \equiv 7y$ آنگاه

A $x \equiv 0$ B $y \equiv 0$

35 اگر $5a \equiv 1$ آنگاه

A $a \equiv 3$ B $a \equiv 2$

36 اگر $2a \equiv -1$ باشد، باقی‌مانده a بر ۷ برابر است.

A ۳ B ۴

37 اگر $3a \equiv 2$ باشد، باقی‌مانده a بر ۸ برابر است.

A ۶ B ۲

38 اگر $7a \equiv 11$ باشد، باقی‌مانده a بر ۱۱ برابر است.

A ۵ B ۷

39 اگر $23a \equiv 15$ باشد، باقی‌مانده a بر ۱۲ برابر است.

A ۳ B ۹

3 اگر $a \equiv b$ آنگاه

A $ac \equiv bc$ B $ac \equiv mbc$

4 اگر $a \equiv 5$ باشد، باقی‌مانده $2a$ بر ۹ برابر است.

A ۱ B ۸

5 اگر $a \equiv 4$ باشد، باقی‌مانده $a + 9$ بر ۷ برابر است.

A ۱ B ۶

6 اگر $a \equiv 5$ باشد، باقی‌مانده $3 + 6a$ بر ۱۷ برابر است.

A ۱ B ۱۶

7 اگر $a \equiv -3$ باشد، باقی‌مانده $2 + 7a$ بر ۷ برابر است.

A ۱ B ۸

8 اگر $a \equiv 6$ و $b \equiv 7$ باشد، باقی‌مانده $a + b$ بر ۹ برابر است.

A ۵ B ۴

9 اگر $a \equiv 5$ و $b \equiv 4$ باشد، باقی‌مانده ab بر ۷ برابر است.

A ۱ B ۶

10 اگر $a \equiv 4$ و $b \equiv 5$ باشد، باقی‌مانده $a + b - ab$ بر ۸ برابر است.

A ۵ B ۳

11 اگر $a = 23k - 7$ و $b = 23k' + 4$ باشد،

A $2a - 3b \equiv 20$ B $2a - 3b \equiv 3$

12 اگر $a \equiv 4$ باشد، باقی‌مانده a^2 بر ۷ برابر است.

A ۹ B ۲

13 اگر $a \equiv 7$ باشد، باقی‌مانده a^2 بر ۷ برابر است.

A ۵ B $a \equiv 7 \Rightarrow a \equiv -2 \Rightarrow$

14 اگر $a \equiv 11$ باشد، باقی‌مانده a^9 بر ۱۲ برابر است.

A ۱ B ۱۱

15 اگر $a \equiv 29$ باشد، باقی‌مانده a^{1399} بر ۱۵ برابر است.

A ۱ B ۱۴

16 اگر $a \equiv 26$ باشد، باقی‌مانده a^{1398} بر ۹ برابر است.

A ۱ B ۸

17 باقی‌مانده 15^6 بر ۱۳ برابر است.

A ۱ B ۱۲

18 باقی‌مانده 25^{251} بر ۱۳ برابر است.

A ۱ B ۱۲

19 باقی‌مانده $6^{17} + 8^{17}$ بر ۷ برابر است.

A صفر B ۲

20 باقی‌مانده $12^4 + 15^4$ بر ۱۳ برابر است.

A ۳ B ۴

21 اگر $a \equiv 3$ و $b \equiv 2$ باشد، باقی‌مانده $3a^2 + 2b^3$ بر ۷ برابر است.

A ۱ B ۵

143 از رابطه هم‌نهشتی $20b \equiv 15a \pmod{30}$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) $3a \equiv 4b \pmod{2}$ (۲) $3a \equiv 4b \pmod{2}$ (۳) $b \equiv 0 \pmod{3}$ (۴) $a \equiv 0 \pmod{4}$

(خارج - ۸۵)

144 از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۹) $12b \equiv 18a$ ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) (پیمانه ۲) $a \equiv 0$ (۲) (پیمانه ۳) $b \equiv 0$ (۳) (پیمانه ۳) $3a \equiv b$ (۴) (پیمانه ۳) $3a \equiv 2b$

(داخل - ۸۸)

145 از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۸۴) $36a \equiv 192$ ، کدام نتیجه‌گیری در پیمانه ۷ نادرست است؟

- (۱) $a \equiv 3$ (۲) $a \equiv 4$ (۳) $2a \equiv -1$ (۴) $2a \equiv 2$

(داخل - ۸۷)

146 از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۱۸) $9a \equiv 6b$ ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) (پیمانه ۲) $a \equiv 0$ (۲) (پیمانه ۳) $b \equiv 0$ (۳) (پیمانه ۶) $a \equiv 2$ (۴) (پیمانه ۶) $3a \equiv 2b$

147 اگر $a^2 - a + 1 \equiv m \pmod{a^2 - 1}$ و $(a^2 - 1, m) = 1$ آن‌گاه:

- (۱) $m | a - 2$ (۲) $m | a - 1$ (۳) $m | a + 1$ (۴) $m | a + 2$

148 اگر باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۷ برابر ۱۱ باشد، باقی‌مانده تقسیم $3a - 100$ بر ۱۷ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱ (۳) ۱۳ (۴) ۹

149 اگر $a = 7k - 3$ و $b = 7k' + 2$ آن‌گاه باقی‌مانده $ab - 2a + 4$ بر ۷ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

150 اگر $a = 17k + 23$ باشد، باقی‌مانده $a^5 + 27$ بر ۱۷ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۷

151 اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b به ترتیب ۳ و ۵ باشد، عدد $3a^2 - 5ab + b^3$ به کدام دسته هم‌نهشتی در پیمانه ۹ تعلق دارد؟

- (۱) [۳] (۲) [۶] (۳) [۵] (۴) [۸]

152 اگر باقی‌مانده تقسیم a بر ۹۱ برابر ۲۷ باشد، باقی‌مانده a بر ۱۳ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

ترکیب تقسیم و هم‌نهشتی 35

در مسائل تقسیم اگر بگویند **مقسوم، مضرب فلان عدد است**، بهتر است مسأله به کمک هم‌نهشتی حل شود؛ یعنی عبارت $a = bq + r$ را در پیمانه داده شده، برابر **صفر** می‌گذاریم. در این مسائل اگر صحبت از کوچک‌ترین مقدار a یا b شد، حتماً از شرط تقسیم $[0 \leq r < b]$ باید استفاده کرد.

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت و باقی‌مانده به ترتیب ۱۶ و ۲۳ هستند، اگر a مضرب ۱۷ باشد، کوچک‌ترین مقدار b کدام است؟

$$\boxed{\text{■}} a = b \times 16 + 23 \xrightarrow{a \equiv 0 \pmod{17}} 16b + 23 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow -b + 6 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow b \equiv 6 \pmod{17} \Rightarrow b = 17k + 6$$

a مضرب ۱۷ است.

حال برای یافتن کوچک‌ترین مقدار b ، می‌گوییم باید $b > r$ باشد ($r = 23$):

$$17k + 6 > 23 \Rightarrow 17k > 17 \Rightarrow \text{Min}(k) = 1 \Rightarrow \text{Min}(b) = (17 \times 1) + 6 = 23$$

در بعضی از مسائل تقسیم، علاوه بر این‌که گفته می‌شود مقسوم یعنی a ، مضرب فلان عدد است، برای مقسوم شرط‌هایی مانند **دو رقمی، سه رقمی و ...** نیز قائل می‌شوند و تعداد جواب‌های ممکن را از ما می‌خواهند. در این نوع مسائل بعد از استفاده از هم‌نهشتی و یافتن جنس b بر حسب پیمانه، از شرط تقسیم و شرط داده شده استفاده می‌کنیم و با اشتراک‌گیری از آن‌ها تعداد حالات ممکن برای b را پیدا می‌کنیم.

در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت ۸ و باقی‌مانده ۱۱ است. اگر عدد a مضرب ۷ و کوچک‌تر از ۲۰۰ باشد، تعداد جواب‌های a کدام است؟

$$\boxed{\text{■}} a = (b \times 8) + 11 \xrightarrow{a \equiv 0 \pmod{7}} 8b + 11 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow b + 4 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow b \equiv -4 \pmod{7} \Rightarrow b = 7k - 4$$

حال باید دو شرط را برای یافتن تعداد جواب‌های ممکن برای b در نظر بگیریم:

$$\boxed{\text{1}} b > r \Rightarrow 7k - 4 > 11 \Rightarrow 7k > 15 \Rightarrow k \geq 3$$

$$\boxed{\text{2}} a < 200 \Rightarrow 8b + 11 < 200 \Rightarrow 8b < 189 \Rightarrow b \leq 23 \Rightarrow 7k - 4 \leq 23 \Rightarrow 7k \leq 27 \Rightarrow k \leq 3 \dots$$

حال با اشتراک $\boxed{\text{1}}$ و $\boxed{\text{2}}$ معلوم می‌شود تنها $k = 3$ قابل قبول است، یعنی برای a نیز یک جواب وجود دارد که برابر است با:

$$k = 3 \Rightarrow b = (7 \times 3) - 4 = 17 \Rightarrow a = (17 \times 8) + 11 = 136 + 11 = 147 \Rightarrow \text{یک جواب}$$

در محاسبه باقی‌مانده اعداد توان‌دار بر یک عدد طبیعی اگر توان پارامتری بود، ابتدا کوچک‌ترین توان از پایه را پیدا می‌کنیم که باقی‌مانده آن در پیمانه داده‌شده برابر ۱ یا -۱ باشد. سپس با به توان رساندن مناسب سعی می‌کنیم توان مجهول را پیدا کنیم.

❖ شکل کلی n هایی را پیدا کنید که $2^n + 1$ بر ۶۵ بخش پذیر باشد.

بنابراین باید توانی از ۲ را پیدا می‌کنیم که در پیمانه ۶۵ برابر -۱ باشد و ...

در محاسبه باقی‌مانده اعداد توان‌دار بر یک عدد طبیعی، اگر توان دو تا از پایه‌ها پارامتری بود ابتدا از پایه کوچک تر فاکتور می‌گیریم و طرفین رابطه هم‌نهشتی را بر آن تقسیم می‌کنیم تا به یک عدد با توان پارامتری برسیم. سپس همانند مسأله قبلی عمل می‌کنیم.

❖ شکل کلی n هایی را پیدا کنید که $3^n - 1$ مضرب ۱۷ باشد.

ابتدا داده مسئله را کمی ساده می‌کنیم:

$$12^n - 3^n \equiv 0 \Rightarrow 3^n (4^n - 1) \equiv 0 \xrightarrow{(+3^n, 17)=1} 4^n - 1 \equiv 0 \Rightarrow 4^n \equiv 1$$

بنابراین باید توانی از ۴ را پیدا کنیم که در پیمانه ۱۷ برابر ۱ شود و ...

مینی تست

۱ می‌دانیم $2^6 \equiv -1$ بنابراین اگر $2^n \equiv 1$ باشد، n به صورت است.

۱۲k (A) $12k+6$ (B)

۲ می‌دانیم $2^5 \equiv 1$ بنابراین اگر $2^n \equiv -1$ باشد، n به صورت است.

۵k (A) $10k+5$ (B)

۳ اگر $5^n - 10^n \equiv 0$ باشد، آنگاه:

$2^n \equiv 1$ (A) $2^n \equiv -1$ (B)

۴ اگر $2^n + 1 \equiv 0$ باشد، n به صورت است.

$3k$ (A) $6k+3$ (B)

1 B 2 A 3 A 4 B

۱۸۳ تعداد اعضای مجموعه $A = \{n : 65 \mid 2^n + 1\}$ از مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۱۸۴ به ازای چند عدد طبیعی n کوچک‌تر از ۵۰، عدد $7^n + 42$ بر ۴۳ بخش پذیر است؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۱۸۵ اگر عدد $7^n + 37$ مضرب ۱۹ باشد، برای n چند جواب مربع کامل دو رقمی وجود دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۸۶ اگر $10^n - 5^n$ مضرب ۱۷ باشد، برای n چند جواب دو رقمی وجود دارد؟

۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۲۵ (۴)

۱۸۷ اگر عدد $(6^n - 3^n)$ مضرب ۲۵ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی n کدام است؟

۱۶ (۱) ۱۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴)

۱۸۸ تعداد اعداد دو رقمی a به طوری که $11^a \equiv 1$ کدام است؟

۲۵ (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴)

۱۸۹ اگر $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 100!$ و عدد $A^n + 1$ مضرب ۷ باشد، برای n چند جواب دو رقمی کوچک‌تر از ۵۰ وجود دارد؟

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

بعضی از معادلات هم‌نهشتی درجه ۲ با پیمانه مرکب طوری طراحی شده‌اند که هر یک از عبارت‌های درجه اول موجود در تجزیه عبارت درجه ۲، دقیقاً بر یکی از عامل‌های موجود در پیمانه بخش‌پذیر است. مثلاً ممکن است پیمانه ۶ باشد و عبارت‌های درجه اول طوری طراحی شده باشند که یکی از آن‌ها هرگز مضرب ۲ و دیگری هرگز مضرب ۳ نشود. در این شرایط برای این که کل عبارت مضرب ۶ شود، معلوم است که کدام یک از دو عبارت باید مضرب ۲ و کدام یک مضرب ۳ شود. در این تیپ مسائل، ابتدا هر یک از معادله‌های هم‌نهشتی درجه اول را حل می‌کنیم و سپس دو پیمانه را یکی می‌کنیم.

♣ در معادله $0 \equiv (2X+1)(5X+2) \pmod{10}$ مقدار X کدام است؟

❑ دقت کنید که $10 = 2 \times 5$ ، از طرفی عبارت $2X+1$ فرد است و بر ۲ بخش‌پذیر نیست، عبارت $5X+2$ نیز معلوم است که نمی‌تواند مضرب ۵ باشد؛ بنابراین باید دو معادله $0 \equiv 2X+1 \pmod{5}$ و $0 \equiv 5X+2 \pmod{2}$ را حل کنیم:

$$\begin{aligned} 5X+2 \equiv 0 \pmod{2} &\Rightarrow 5X \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow X \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow X \equiv 2 \pmod{2} \\ 2X+1 \equiv 0 \pmod{5} &\Rightarrow 2X \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 2X \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow X \equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

مینی تست

- 1 اگر $7x \equiv 3 \pmod{12}$ باشد، آنگاه
 $x = 5k - 1$ (A) $x = 5k + 1$ (B) $x = 12k + 1$ (A) $x = 12k - 1$ (B)
- 2 اگر $9x \equiv 11 \pmod{12}$ باشد، آنگاه
 $x = 11k - 2$ (A) $x = 11k + 2$ (B)
- 3 اگر $23x \equiv 20 \pmod{24}$ باشد، آنگاه
 $x = 6k - 2$ (A) $x = 6k + 2$ (B)
- 4 اگر $5x - 7 \equiv 12 \pmod{12}$ باشد، آنگاه
 $x = 12k + 1$ (A) $x = 12k - 1$ (B)
- 5 اگر $27 \equiv 18x \pmod{27}$ باشد، آنگاه کوچک‌ترین عدد دورقمی x برابر با است.
 11 (A) 14 (B)
- 6 اگر $0 \equiv (x-1)(x+2) \pmod{11}$ باشد، آنگاه
 $x = 7k + 1$ یا $x = 7k - 2$ (A) $x = 7k + 2$ یا $x = 7k - 4$ (B)

1 A 2 B 3 A 4 B 5 B 6 A



206 معادله هم‌نهشتی $10x \equiv 7 \pmod{13}$ در مجموعه اعداد دو رقمی چند جواب دارد؟

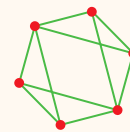
- 207 به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ اگر $11n + 3 \mid \alpha$ و $5n + 4 \mid \alpha$ و $\alpha \neq 1$ ، آنگاه تعداد اعداد دو رقمی n در این حالت کدام است؟
 2 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D)
- 208 به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ اگر $13n + 3 \mid \alpha$ و $7n + 4 \mid \alpha$ و $\alpha \neq 1$ باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n کدام است؟
 7 (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D)
- 209 اگر عدد $6 - x - 2x^2$ مضرب 53 باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه رقمی x کدام است؟
 6 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D)
- 210 اگر عدد $2 - 5x - 3x^2$ مضرب 41 باشد، مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد دو رقمی x کدام است؟
 9 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D)
- 211 اگر $1 - x - 6x^2$ مضرب 6 باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد دو رقمی x کدام است؟
 4 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D)
- 212 اگر $2 \equiv x^2 - x \pmod{11}$ برای x چند جواب طبیعی کم‌تر از 20 وجود دارد؟
 5 (A) 10 (B) 11 (C) 14 (D)

کاربرد معادله هم‌نهشتی

🍏 اگر طرف چاق یک بخش‌پذیری یک عبارت پارامتری و طرف لاغر یک عدد معلوم باشد، بهتر است برای پیدا کردن مقادیر پارامتر، بخش‌پذیری را به هم‌نهشتی تبدیل کنیم و از حل معادله هم‌نهشتی برای پیدا کردن پارامتر استفاده می‌کنیم:

$$a \mid f(n) \Rightarrow f(n) \equiv 0 \pmod{a}$$

27 در گراف دو رأس فول وجود دارد.



28 یک گراف هم رأس فول و هم رأس ایزوله داشته باشد.

A می تواند

B نمی تواند

29 در گرافی با p رأس، یک رأس از درجه $p-1$ است. این گراف ندارد.

A رأس درجه 2

B رأس ایزوله

30 اگر در یک گراف از مرتبه p دو رأس از درجه $p-1$ وجود داشته باشد، درجه

سایر رأس ها، است.

A دقیقاً 2

B حداقل 2

31 در گراف های ساده درجه دو رأس یکسان باشد.

A می تواند

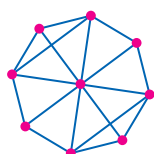
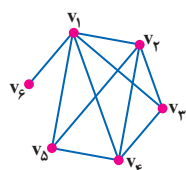
B نمی تواند

32 در هر گراف ساده، درجه

A حداقل دو رأس یکسان است

B هیچ دو رأسی یکسان نیست

27 B 28 B 29 B 30 B 31 A 32 A



247 در شکل مقابل، نمودار گراف G داده شده است. اختلاف تعداد رأس های زوج و رأس های فرد گراف کدام است؟

- (1) 2
(2) 4
(3) صفر
(4) 4

248 در گراف G مطابق شکل حاصل $\Delta(G) - \delta(G)$ کدام است؟

- (1) 4
(2) 3
(3) 6
(4) 5

249 در گراف ساده ای با 8 رأس اگر مینیمم درجه رأس های گراف 3 باشد، این گراف حداکثر چند یال دارد؟

- (1) 22
(2) 23
(3) 24
(4) 25

250 در گراف ساده $G = (V, E)$ ، دو رأس از درجه $\delta = 1$ وجود دارد. اگر مرتبه گراف 9 باشد، گراف حداکثر چند یال دارد؟

- (1) 21
(2) 22
(3) 23
(4) 24

251 در گراف ساده ای با 12 یال اگر ماکزیمم درجه رأس ها 5 باشد، حداقل تعداد اعضای مجموعه V کدام است؟

- (1) 5
(2) 6
(3) 7
(4) 8

252 در گراف ساده G با 5 رأس، اگر $\Delta(G) = 4$ و $\delta(G) = 2$ باشد، یال وجود دارد.

- (1) حداقل 5
(2) حداکثر 8
(3) حداکثر 7
(4) حداقل 7

253 حاصل ضرب درجات رأس های یک گراف برابر 7 است. این گراف حداقل چند رأس دارد؟

- (1) 14
(2) 7
(3) 8
(4) چنین گرافی وجود ندارد

254 حاصل ضرب درجات رأس های گراف G برابر 13 است. حاصل $\Delta(G) - \delta(G)$ کدام است؟

- (1) 12
(2) 13
(3) 2
(4) 1

255 در یک گراف ساده با 9 رأس و 6 یال حداکثر چند رأس ایزوله وجود دارد؟

- (1) 2
(2) 3
(3) 4
(4) 5

256 در یک گراف ساده با 10 رأس و 11 یال حداکثر چند رأس ایزوله وجود دارد؟

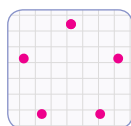
- (1) 3
(2) 4
(3) 5
(4) 6

257 در یک گراف ساده از مرتبه 12 و اندازه 4 حداقل چند رأس ایزوله وجود دارد؟

- (1) 4
(2) 5
(3) 6
(4) 7

258 در گراف ساده ای از مرتبه 20 اندازه برابر 5 است. این گراف حداقل چند رأس ایزوله دارد؟

- (1) 10
(2) 12
(3) 14
(4) 15





14 اندازه گراف K_p برابر است.

۶ (A) ۴ (B)

15 اندازه گراف K_8 برابر است.

۱۰ (A) ۱۵ (B)

16 اندازه گراف کاملی برابر ۱۵ است. این گراف رأس دارد.

۷ (A) ۶ (B)

17 اندازه گراف کاملی برابر ۲۱ است. این گراف رأس دارد.

۷ (A) ۸ (B)

18 اندازه گراف چهار برابر مرتبه آن است.

K_8 (A) K_9 (B)

19 در گراف کامل مرتبه و اندازه برابر است.

K_7 (A) K_8 (B)

20 در چند گراف کامل مرتبه از اندازه بزرگ تر است؟

۳ (A) ۲ (B)

6 هر گراف یک گراف است.

کامل - منتظم (A) منتظم - کامل (B)

7 هر گراف الزاماً یک گراف نیست.

کامل - منتظم (A) منتظم - کامل (B)

8 گراف G که در آن تمام رأس های آن برابر با $V(G)$ باشد، است.

همسایگی باز - منتظم (A) همسایگی بسته - کامل (B)

9 درجه همه رأس های گراف K_p برابر با است.

$p-1$ (A) p (B)

10 در گراف درجه همه رأس ها ۵ است.

K_5 (A) K_6 (B)

11 هر گراف از مرتبه p یک گراف کامل است که آن را با K_p نشان می دهند.

$(p-1)$ - منتظم (A) p - منتظم (B)

12 گراف ۳ - منتظم مرتبه ۴ را با نشان می دهند.

K_7 (A) K_8 (B)

13 اندازه گراف کامل مرتبه p از رابطه به دست می آید.

$\frac{p(p-1)}{2}$ (A) $\frac{p(p+1)}{2}$ (B)

6 A 7 B 8 B 9 A 10 B 11 A 12 B 13 A 14 A 15 A 16 B 17 A 18 B 19 A 20 B

277 در گراف کاملی مجموع مرتبه و اندازه ۶ است. این گراف چند رأس دارد؟

۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴)

278 مجموع مرتبه و اندازه گراف کاملی ۱۰ است. این گراف چند یال دارد؟

۶ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴)

279 مجموع مرتبه و اندازه گراف کاملی ۱۵ است. این گراف چند رأس دارد؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

280 حاصل ضرب مرتبه و اندازه گراف کاملی ۲۴ است. این گراف چند یال دارد؟

۶ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

281 حاصل ضرب مرتبه و اندازه گراف کاملی ۵۰ است. این گراف چند یال دارد؟

۱۰ (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۱۵ (۴)

282 حاصل ضرب مرتبه و اندازه گراف کاملی ۹۰ است. در این گراف درجه رأس ها کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

283 تفاضل اندازه و مرتبه گراف کاملی ۱۴ است. در این گراف همسایگی باز هر رأس چند عضو دارد؟

۸ (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

284 تفاضل مرتبه و اندازه گراف کاملی ۲۰ است. در این گراف همسایگی بسته هر رأس چند عضو دارد؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

285 گراف مقابل با اضافه شدن چند یال، کامل می شود؟

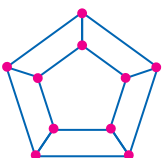
۱۰ (۱) ۹ (۲)

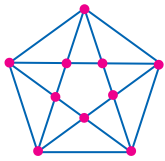
۸ (۳) ۱۱ (۴)

286 در گراف مقابل با اضافه شدن چند یال، درجه تمام رأس ها برابر ۹ می شود؟

۳۵ (۱) ۲۵ (۲)

۳۰ (۳) ۳۰ (۴)





287 گراف G مطابق شکل مفروض است، با اضافه شدن چند یال در این گراف $\delta(G)=9$ خواهد شد؟

- ۲۵ (۱) ۳۰ (۲)
۳۵ (۳) ۲۰ (۴)

288 یک گراف ۳- منتظم مرتبه ۶ با اضافه شدن چند یال، به یک گراف ۵- منتظم مرتبه ۶ تبدیل می شود؟

- ۹ (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۷ (۴)

289 یک گراف ۲- منتظم مرتبه ۸ با اضافه شدن چند یال، همسایگی بسته تمام رأس ها یکسان می شود؟

- ۲۰ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۱ (۴)

290 یک گراف ۱- منتظم مرتبه ۶ با اضافه شدن چند یال، همسایگی باز تمام رأس ها ۵ عضوی خواهد شد؟

- ۹ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴)

291 به گراف ۴- منتظم G ، ۱۸ یال اضافه کرده ایم تا هردو رأس متمایزش مجاور شوند. گراف G چند رأس دارد؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

292 گراف ساده با اضافه شدن ۱۳ یال کامل و با کم شدن ۷ یال از آن ۲- منتظم می شود. مجموع مرتبه و اندازه این گراف کدام است؟

- ۲۱ (۱) ۲۲ (۲) ۱۹ (۳) ۲۳ (۴)

293 اگر مجموعه $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مجموعه رأس های گراف ساده G باشند و دو رأس متمایز با این شرط مجاور باشند که اعداد مربوط به رأس های

آن ها نسبت به هم اول باشند، این گراف با اضافه شدن چند یال کامل می شود؟

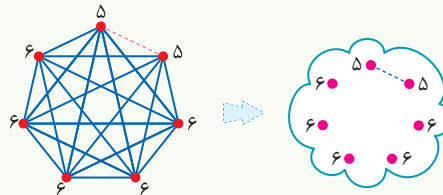
- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

10 گراف های نزدیک به کامل

اگر اندازه یک گراف نزدیک به یک گراف کامل باشد برای بررسی وضعیت، بهتر است آن را با گراف کامل هم مرتبه خودش، مقایسه کنیم. در این موارد به جای این که کل یال ها را رسم کنیم از روش نمادین برای رسم گراف استفاده می کنیم. به مثال زیر دقت کنید:

اگر اندازه یک گراف از مرتبه ۷ برابر ۲۰ باشد، این گراف چند رأس از درجه ۵ دارد؟

این گراف یک یال از گراف K_7 کمتر دارد. بنابراین همه رأس های آن به جز دو رأس، دارای درجه ۶ $\Delta = 6$ و آن دو رأس دارای درجه ۵ $\delta = 5$ هستند.

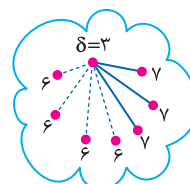


اگر اندازه یک گراف مرتبه ۸ برابر ۲۴ باشد، حداقل و حداکثر مقدار $\Delta - \delta$ را به دست آورید.

این گراف دارای ۲۴ یال است که نزدیک به گراف K_8 است، ولی ۴ یال کمتر از K_8 دارد. برای حل این مسئله، ابتدا فرض می کنیم که یک گراف

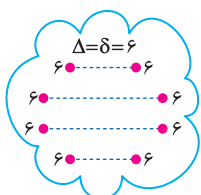
کامل مرتبه ۸ داریم. سپس برای یافتن حداکثر و حداقل $\Delta - \delta$ گراف مورد نظر به صورت زیر عمل می کنیم:

1. $\text{Max}(\Delta - \delta)$: برای این که $\Delta - \delta$ حداکثر شود، باید تا حد امکان Δ زیاد و δ کم شود. برای این منظور هر ۴ یال را از یک رأس برمی داریم:



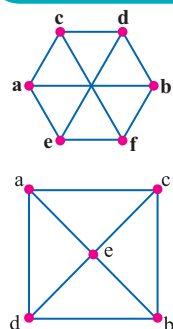
$$\text{Max}(\Delta - \delta) = 4 - 0 = 4$$

2. $\text{Min}(\Delta - \delta)$: برای این که $\Delta - \delta$ حداقل شود باید تا حد امکان Δ و δ به هم نزدیک شوند. برای این منظور یال های کنده شده را بین رأس ها پخش می کنیم:

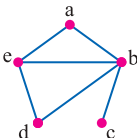
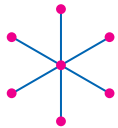
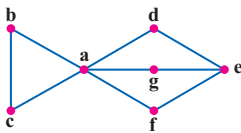


$$\text{Min}(\Delta - \delta) = 2 - 2 = 0$$

- 5 در گراف مقابل مسیر از a به b وجود دارد. 3 **A**
4 **B**
- 6 در گراف مقابل مسیر از a به b وجود دارد. 3 **A**
4 **B**
- 7 در گراف مقابل مسیر از a به b وجود دارد. 3 **A**
2 **B**
- 8 در گراف زیر: مسیر به طول 3 از a به b وجود دارد. 2 **A**
1 **B**
- 9 طول یک مسیر برابر با است. 2 **A**
1 **B**
- 10 تعداد یال های موجود در آن مسیر تعداد رأس های موجود در آن مسیر **B**
 طول یک مسیر همواره یکی کمتر از تعداد رئوس مسیر است **B**
 یکی بیشتر از تعداد یال های مسیر است **A**
- 11 اگر $abcdef$ یک مسیر بین دو رأس از گراف G باشد، طول این مسیر برابر است. 5 **B**
6 **A**
- 12 در گراف شکل زیر: به طول 2 بین a و b وجود دارد. 3 **A**
6 **B**
- 13 در هر گراف، دنباله متشکل از تنها یک رأس، یک مسیر محسوب نمی شود **B**
 یک مسیر با طول صفر است **A**
- 14 در گراف G از مرتبه p ، طول یک مسیر حداقل برابر با است. صفر **A**
یک **B**
- 15 در گراف G از مرتبه p ، طول یک مسیر بین دو رأس متمایز حداقل برابر با است. 1 **A**
2 **B**
- 16 گراف G از مرتبه p ، طول یک مسیر حداکثر برابر با است. 1 **A**
2 **B**
- 17 بین دو رأس a و b از گراف زیر: به طول 3 بین a و b وجود دارد. 2 **A**
4 **B**
- 18 اگر گرافی مسیری به طول 5 داشته باشد، تمام مسیرهای با طول 5 را دارد **A**
 ممکن است بعضی از مسیرهای به طول 5 را نداشته باشد **B**
- 19 اگر در گراف G داشته باشیم: $\delta(G) \geq k$ ، آن گاه گراف G شامل حداقل یک مسیر با طول k است **A**
 شامل حداقل یک مسیر با طول $k+1$ است **B**
- 20 در گراف G می دانیم $\delta=3$ است. در این گراف مسیرهایی با طول 1، 2، 3 بین رئوس متمایز وجود دارد **A**
 مسیرهایی با طول 3، 4، 5 بین رئوس متمایز وجود دارد **B**



- 310 بین دو رأس a و b از گراف شکل مقابل، چند مسیر وجود دارد؟ 10 (4)
- 311 در گراف G اگر $\delta=3$ باشد، آنگاه کدام گزینه الزاماً درست نیست؟ 9 (3)
8 (2)
7 (1)
- 1 مسیری به طول 2 دارد. 2 مسیری به طول 3 دارد. 3 مسیری به طول 4 دارد. 4 مسیری به طول 5 دارد. 10 (4)
- 312 بین دو رأس a و b از گراف شکل مقابل، چند مسیر وجود دارد؟ 7 (1)
8 (2)
9 (3)
10 (4)
- 313 در گراف G با مجموعه رأس های $V=\{a, b, c, d, e\}$ ، بین رأس های a و b فقط یک مسیر به طول 4 وجود دارد. این گراف دارد. حداقل 5 یال (1)
حداقل 4 یال (2)
دقیقاً 5 یال (3)
دقیقاً 4 یال (4)
- 314 در گراف G با مجموعه رأس های $V=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ بین رأس های a و b هیچ مسیری وجود ندارد. این گراف حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟ 15 (1)
9 (2)
10 (3)
6 (4)
- 315 در گراف G با مجموعه رأس های $V=\{a, b, c, d, e\}$ حداکثر چند مسیر به طول 2 بین رأس های a و b می تواند داشته باشد؟ 1 (1)
2 (2)
3 (3)
4 (4)



316 اگر x و y دو رأس از گراف مقابل باشند، آنگاه در این گراف چند مسیر به طول ۲ به شکل xay وجود دارد؟

۵ (۱) ۳ (۲)

۶ (۳) ۱۰ (۴)

317 در گراف مقابل چند مسیر به طول ۲ بین رئوس مختلف گراف وجود دارد؟

۱۰ (۱) ۶ (۲)

۵ (۳) ۱۵ (۴)

318 در گرافی ساده، ۷ مسیر به طول صفر وجود دارد. این گراف حداکثر چند مسیر با طول یک می تواند داشته باشد؟

۳ (۱) ۷ (۲) ۱۴ (۳) ۲۱ (۴)

319 در گراف مقابل اختلاف تعداد مسیرهای به طول یک و به طول صفر کدام است؟

۰ (۱) ۱ (۲)

۲ (۳) ۳ (۴)

320 در گرافی ساده با مجموعه رأس های $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ بین هر دو رأس دلخواه دقیقاً یک مسیر وجود دارد. این گراف چند یال دارد؟

۱) دقیقاً ۴ یال دارد (۲) حداقل ۴ یال دارد (۳) دقیقاً ۵ یال دارد (۴) حداقل ۵ یال دارد

321 در گراف G از مرتبه ۶ بین هر دو رأس دلخواه دقیقاً ۲ مسیر وجود دارد. این گراف چند یال دارد؟

۱) دقیقاً ۶ یال (۲) حداقل ۶ یال (۳) حداکثر ۶ یال (۴) نامشخص

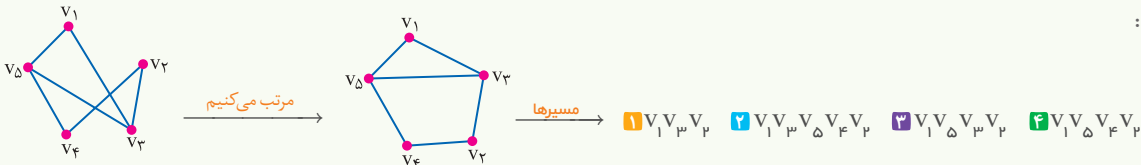
14

رسم گراف در حالات مختلف

اگر مجموعه رأس ها و مجموعه یال های یک گراف داده شود و درباره تعداد مسیرها در این گراف سؤالی پرسیده شود، باید گراف را رسم کنیم. بهترین راه برای رسم این است که رأس ها را گرد، دور هم بچینیم و یال های داده شده را به هم وصل کنیم.

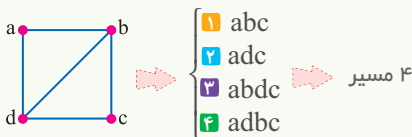
در گراف G اگر $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$ باشد، مسیرهای بین v_1 و v_5 را نام ببرید.

ابتدا گراف را رسم کرده سپس مرتب می کنیم یعنی طوری رأس ها را جابه جا می کنیم که در گراف رسم شده یال ها همدیگر را قطع نکنند و آنگاه مسیرها را پیدا می کنیم:



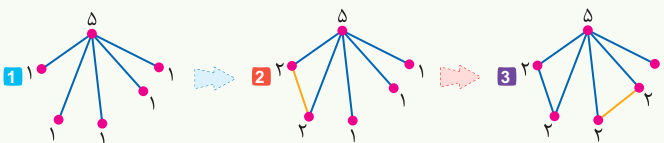
اگر نمودار یک گراف به صورت توصیفی داده شود، مثلاً تعداد یال ها و تعداد رأس ها داده شود باید آن را رسم کنیم تا بتوانیم به خصوصیات گراف پی ببریم.

در گرافی با ۴ رأس و ۵ یال، بین دو رأس از درجه کوچکتر چند مسیر وجود دارد؟
ابتدا گراف را رسم می کنیم، حال با توجه به شکل باید مسیرهای بین a و c را پیدا کنیم:



اگر درجه رأس های یک گراف داده شود نیز باید گراف را رسم کنیم تا بتوانیم به خصوصیات آن پی ببریم. بهترین راه برای رسم یک گراف از روی درجه رأس های آن، این است که در گام اول رأس های با درجه بزرگتر را رسم کنیم و در گام های بعدی، به ایجاد رأس های با درجه کوچک تر پردازیم.

برای رسم گرافی با درجه رئوس ۵، ۲، ۲، ۲، ۱ ابتدا ۶ نقطه قرار می دهیم:



۱ در گام اول رأس با درجه ۵ را رسم می کنیم.

۲ با وصل کردن دو رأس درجه ۱، دو رأس درجه ۲ حاصل می شود.

۳ با وصل کردن دو رأس درجه ۱ دیگر، دو رأس درجه ۲ حاصل می شود.

335 کدام یک از گراف های زیر ناهمبند است؟

- K_1 (۱) C_5 (۲) ۱-۳ منتظم مرتبه ۴ P_4 (۴)

336 یک گراف همبند که مجموع مرتبه و اندازه آن ۸ باشد، با افزودن چند یال کامل می شود؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)

337 یک گراف ناهمبند از مرتبه ۷ حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

- ۱۵ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴)

338 گراف ناهمبندی از مرتبه ۷ بیش ترین یال ممکن را دارد. چند یال به این گراف اضافه کنیم تا کامل شود؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

339 در یک گراف همبند با کم ترین مرتبه ممکن حاصل ضرب مرتبه و اندازه برابر ۲۰ است. با حذف چند یال این گراف همبند و منتظم می شود؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

340 در یک گراف همبند با اندازه ۱۲، مرتبه گراف چند مقدار مختلف می تواند باشد؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

341 در گراف G از مرتبه ۶ همسایگی باز هر رأس دارای ۳ عضو است. این گراف است.

- (۱) همبند و غیر منتظم (۲) همبند و منتظم (۳) ناهمبند و منتظم (۴) ناهمبند و غیر منتظم

342 در گراف G از مرتبه ۶ اگر $V=\{a, b, c, d, e, f\}$, $N_G[a]=\{a, b, c\}$ باشد، با کدام شرایط گراف قطعاً همبند است؟

- $N_G(b)=\{a, c\}$ (۱) $N_G[f]=\{f, e, c\}$ (۲) $N_G[c]=\{b, c\}$ (۳) $N_G(e)=\{f, d, c\}$ (۴)

343 در یک گراف ناهمبند از مرتبه ۷ و اندازه ۱۵ چند رأس از درجه ماکزیم وجود دارد؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴)

344 در یک گراف مرتبه ۶ دارای ۱۲ یال است. این گراف

- (۱) قطعاً ناهمبند است (۲) قطعاً همبند است

- (۳) می توان همبند یا ناهمبند باشد (۴) همبند است و با حذف یک یال، ناهمبند می شود

345 یک گراف ناهمبند از مرتبه ۷ دارای ۱۰ یال است. این گراف حداکثر چند رأس تنها دارد؟

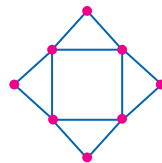
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) این گراف قطعاً رأس تنها ندارد

18

گراف اویلری

اگر در یک گراف بتوان با آغاز از هر رأس دلخواه، از روی تمام یال ها دقیقاً یک بار گذشت و به رأس اولیه بازگشت، آن گراف را **اویلری** می نامند. در واقع می توان گفت گراف اویلری نوعی از گراف است که با شروع از یک نقطه و بدون برداشتن قلم از روی کاغذ و بدون این که از هیچ خطی [یالی] دو بار عبور کنیم، می توانیم آن را رسم کنیم و به نقطه شروع برگردیم.

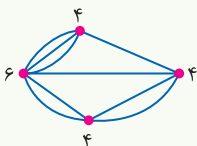
نمونه های از گراف های اویلری



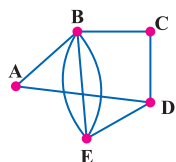
در هنگام عبور از تمام یال ها ممکن است از یک رأس چندین بار عبور کنیم که هیچ اشکالی ندارد.

شرط لازم و کافی برای بودن یک گراف همبند آن است که درجه تمام رأس های آن زوج باشد.

این قضیه در گراف های غیر ساده و چندگانه نیز صادق است. گراف مقابل یک گراف چند گانه اویلری است:



348 شکل زیر، ۵ منطقه A, B, C, D, E را با ۸ پل به هم راه داده است. اگر مجاز باشیم از هر پل دقیقاً یک بار عبور کنیم، با شروع از منطقه B، منطقه



پایان کدام است؟

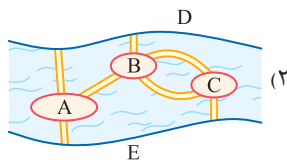
B (۲)

(۱) نشدنی

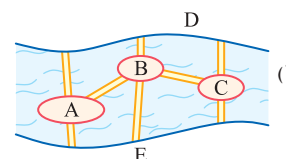
E (۴)

D (۳)

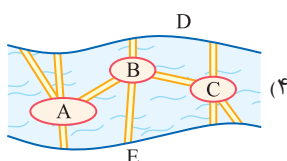
349 در کدام یک از نقشه‌های داده شده، با شروع از یکی از مناطق پنج‌گانه می‌توان از روی هر پل دقیقاً یک بار گذشت و به منطقه اولیه رسید؟



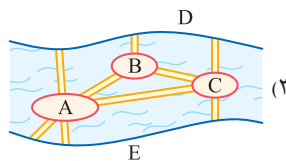
(۲)



(۱)

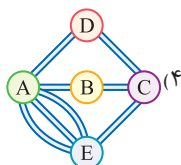


(۴)

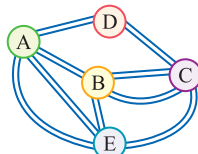


(۳)

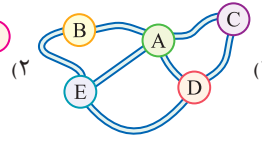
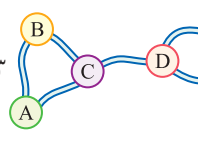
350 در کدام یک از نقشه‌های داده شده نمی‌توان از یک نقطه شروع به حرکت کرد، از هر جاده دقیقاً یک بار عبور کرد و به نقطه‌ای غیر از نقطه شروع رسید؟



(۴)



(۳)

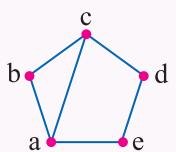


(۱)

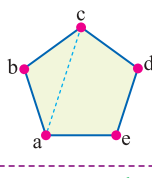
20

دور

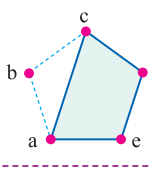
دنباله $v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_1$ ($n \geq 3$) از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک **دور به طول n** می‌نامیم. در واقع دور نوعی مسیر است که رأس ابتدا و انتهای آن یکسان است. طول دور نیز همانند طول مسیر، تعداد یال‌های موجود در آن دور است.



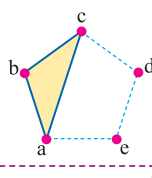
دور به طول ۵: abcdea



دور به طول ۴: acdea

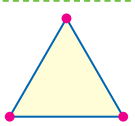


دور به طول ۳: abca

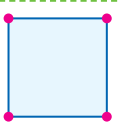


در یک دور جهت چرخش یا محل شروع حرکت اهمیتی ندارد و آنچه که دو دور را از هم متمایز می‌کند فقط ترتیب قرار گرفتن رأس‌ها در دور است؛ به عبارت دیگر دو دور متفاوت، دورهایی هستند که حداقل یک یال متفاوت داشته باشند. در گراف فوق دوره‌های abca و acba و bcab و cbac همگی یکسان هستند.

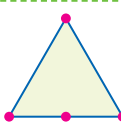
در یک گراف p رأسی، دور با طول کم‌تر از ۳ و با طول بیشتر از p وجود ندارد. در ضمن هر n ضلعی در یک گراف، فقط یک دور به طول n را مشخص می‌کند.



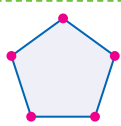
دور به طول ۳



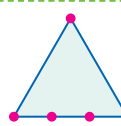
دور به طول ۴



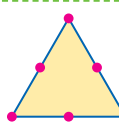
دور به طول ۵



دور به طول ۶

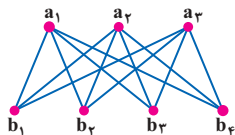


دور به طول ۷



دور به طول ۸

356 بازه‌های $(1, 3), (2, 5), (3, 5), (1, 6)$ را در نظر بگیرید. دو رأس متناظر با بازه‌های $(a, b), (c, d)$ در گراف G مجاورند به شرط آن‌که اشتراک این دو بازه تهی نباشد، در این گراف چند دور وجود دارد؟



۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

357 گراف مقابل چند دور به طول ۴ دارد؟

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

۱۵ (۴)

۶ (۳)

358 در گرافی با درجه رئوس $4, 3, 3, 2, 2$ چند دور وجود دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

359 در یک گراف ۲-منتظم مرتبه ۹ تعداد دورها کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

360 در یک گراف ناهمبند از مرتبه ۷ همسایگی هر رأس دارای ۲ عضو است، این گراف چند دور دارد؟

۳ (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

361 در گراف G همسایگی بسته تمام رأس‌ها سه عضوی است، اگر مرتبه گراف ۱۳ باشد، این گراف حداکثر چند دور دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

21

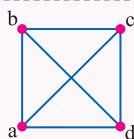
دور در گراف‌های کامل

گراف K_p ، به ازای هر n که در شرط $3 \leq n \leq p$ صدق کند، دارای دورهایی با طول n است.

دورهای به طول ۴



گراف K_4 دورهایی با طول ۳ و ۴ دارد



دورهای به طول ۳



اگر دقت کنید دورهای با طول ۴ در گراف K_4 ، رأس‌های یکسان دارند ولی هر کدام یالی دارد که دیگری ندارد.

تعداد دورهای با طول m در گراف K_p از رابطه زیر به دست می‌آید [m رأس از p رأس را انتخاب و با آن‌ها گردنبد می‌سازیم]

تعداد دورهای با طول ۵ در گراف K_5 برابر است با:

$$\binom{5}{5} \times \frac{(5-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

تعداد دورهای با طول ۳ در گراف K_6 برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times 1 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

مینی تست

3 گراف K_4 دارای دور است که شامل همه رأس‌ها باشد.

۱۲ (B)

۶ (A)

4 گراف K_4 دارای دور با طول فرد است.

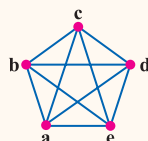
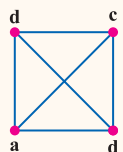
۴ (B)

۳ (A)

5 گراف K_4 دارای دور با طول زوج است.

۳ (B)

۴ (A)



1 گراف K_4 دارای به طول ۴ است.

۳ دور (A)

۱ دور (B)

2 گراف K_4 دارای به طول ۳ است.

۱۰ دور (A)

۱۵ دور (B)



(خارج - ۹۲)

362 در یک گراف کامل، حاصل ضرب اندازه و مرتبه آن ۵۰ می باشد. در این گراف چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴)

(مشابه خارج - ۹۲)

363 در گراف کاملی تفاضل مرتبه و اندازه گراف ۱۴ است، در این گراف چند دور با طول ۳ وجود دارد؟

۳۰ (۱) ۳۵ (۲) ۲۸ (۳) ۲۱ (۴)

(خارج - ۸۷)

364 در یک گراف ساده ناهمبند و ۳-منتظم که دارای ۸ رأس باشد، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

(مشابه خارج - ۹۸)

365 در گراف ناهمبند G با درجه رؤس ۱، ۱، ۳، ۳، ۳، ۳ چند دور وجود دارد؟

۸ (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

(خارج - ۹۸)

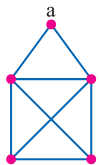
366 در یک گراف با درجه رأس های ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، تعداد دورها به طول ۳، کدام است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

(خارج - ۸۶)

367 گراف ناهمبند ۳-منتظم دارای ۱۲ یال است، این گراف چند دور با طول ۴ دارد؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)



368 در گراف مقابل چند دور وجود دارد که از رأس a عبور نکنند؟

۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

369 یک گراف ناهمبند با ۶ رأس و ۱۰ یال چند دور با طول فرد دارد؟

۱۲ (۱) ۱۰ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴)

370 در گراف K_5 تعداد دورهای با کدام طول از همه بیشتر است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۴ (همگی برابر است)

371 گراف K_p دارای ۱۲ دور است که از همه رؤس می گذرد، این گراف چند دور با طول ۳ دارد؟

۸ (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۵ (۴)

دور در گراف های متقارن

22

در گراف هایی که کامل نیستند رابطه بخصوصی برای محاسبه تعداد دورها وجود ندارد. اما در پاره ای از گراف های یک **نظم و تقارن هندسی** دیده می شود که شمارش تعداد دورها در آن را از گراف های عادی ساده تر می کند. در این حالت، هر نمونه دور را با توجه به **تقارن مسئله**، در تعداد تکرار آن ضرب می کنیم.

تعداد دورهای به طول ۴ را در هر یک از گراف های زیر پیدا کنید.

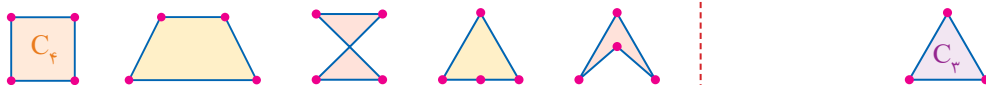
1 [داخل - ۸۹] $6 + 3 = 9$

روی هر کدام از ضلع های ۶ ضلعی دوزنقه دیده می شود

2 [داخل - ۹۸] $6 + 3 + 6 = 15$

گرافی را که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد با C_n نمایش می دهیم.

1 گراف C_3 یا دور به طول ۳ همواره به شکل مثلث است: 2 گراف C_4 یا دور به طول ۴ را می توان به شکل های زیر در گراف ها مشاهده کرد:



3 گراف C_5 یا دور به طول ۵ را می توان به شکل های زیر در گراف ها مشاهده کرد:



پاسخنامه
تمام تشریحات
و تمام رنگی

ANSWERS

Password

سُوگند به قَلَم و آن چه می نویسند



www.gaj.ir



Other user

ENG





Number Theory فصل اول

۱ عبارت $4k+1$ مربع کامل است، زیرا:

$$4k+1 = 4(n(n+1))+1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

۲ بررسی گزینه‌ها:

$$1) (2k-1) + (2k+1) = 4k$$

$$2) (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 2k' + 1$$

$$3) n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1) = 3k$$

$$4) 2k + (2k+2) = 4k + 2 \neq 4k'$$

۳ بررسی گزینه‌ها:

۱ به ازای $n=6$ عبارت $2^n - 1 = 63$ خواهد شد و مرکب است.

۲ مجموع دو عدد گنگ $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ برابر صفر است که گنگ نیست.

۳ اگر $x=1$ و $y=1$ فرض شود $\sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}$

۴ این گزاره درست است و مثال نقضی ندارد.

۴ اعدادی به شکل 2^n رانمی‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.

$$1) 10 = 1+2+3+4 \quad 2) 9 = 2+3+4 \quad 3) 12 = 3+4+5$$

۵ به ازای $n=2, n=3, n=4$ این نامساوی برقرار نیست

۶ عبارت $n^2 + 2n + 5$ همواره فرد است، برای اثبات n را یک بار فرد و یک بار

زوج در نظر می‌گیریم:

$$1) n=2k \Rightarrow n^2 + 2n + 5 = (2k)^2 + 2(2k) + 5 = 4k^2 + 4k + 5 = 2k' + 1$$

$$2) n=2k+1 \Rightarrow n^2 + 2n + 5 = (2k+1)^2 + 2(2k+1) + 5 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 5 = 4k^2 + 8k + 8 = 2k'' + 1$$

۷ هر عدد فرد را به صورت $a = 2k+1$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

حال برای k دو حالت رخ می‌دهد [اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها]:

$$1) k=2q \Rightarrow a^2 = 4q(2q+1) + 1 = 4k' + 1$$

$$2) k=2q+1 \Rightarrow a^2 = 4(2q+1)(2q+2) + 1 = 4k'' + 1$$

۸ گزینه ۳ گزاره درستی نیست که بتوان آن را با برهان خلف ثابت کرد، چون

اگر a و b گنگ باشند $\sqrt{ab}$ می‌تواند گویا باشد:

$$a = \sqrt{5} - 1, b = \sqrt{5} + 1 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \sqrt{4} = 2$$

۹ برای اثبات این گزاره از روش اثبات مستقیم استفاده می‌شود.

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} = \frac{A}{B}$$

۱۰ برای اثبات گنگ بودن اعداد از برهان خلف استفاده می‌کنیم کافی است

فرض کنیم $\sqrt{2}$ گویا است و ...

۱۱ طرفین نامساوی رانمی‌توان به توان زوج رساند بنابراین گزینه ۲ نادرست است.

$$x^r + y^r \geq xy(x^r + y^r) \Rightarrow x^r - x^r y + y^r - xy^r \geq 0$$

$$\Rightarrow x^r(x-y) - y^r(x-y) \geq 0 \Rightarrow (x-y)(x^r - y^r) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(x-y)(x^r + xy + y^r) \geq 0 \Rightarrow (x-y)^2(x^r + xy + y^r) \geq 0$$

۱۳ همه پارامترها را به طرف اول منتقل می‌کنیم:

$$a^r + b^r + c^r + m \geq 2(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^r - 2a + b^r - 2b + c^r - 2c + m \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^r - 1 + (b-1)^r - 1 + (c-1)^r - 1 + m \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^r + (b-1)^r + (c-1)^r + m - 3 \geq 0 \Rightarrow m - 3 \geq 0 \Rightarrow m \geq 3$$

۱۴ طرفین نامساوی $x^r + y^r + z^r \geq xy + xz + yz$ را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2x^r + 2y^r + 2z^r \geq 2xy + 2xz + 2yz$$

حال همه پارامترها را به طرف اول منتقل می‌کنیم و $2x^r, 2y^r, 2z^r$ را به شکل $x^r + x^r, y^r + y^r, z^r + z^r$ می‌نویسیم و خواهیم داشت:

$$(x^r - 2xy + y^r) + (x^r - 2xz + z^r) + (y^r - 2yz + z^r) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$

۱۵ تنها عددی که بر صفر بخش پذیر است خود صفر است:

$$n^r - n = 0 \Rightarrow n(n^{r-1} - 1) = 0 \Rightarrow n = 0, 1, -1 \xrightarrow{n \geq 0} n = 0, 1$$

۱۶ تنها اعدادی که ۱ را می‌شمارند اعداد ۱ و -۱ هستند:

$$\begin{cases} n^r + 2n = -1 \Rightarrow n^r + 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n+1)^r = 0 \Rightarrow n = -1 \\ n^r + 2n = 1 \Rightarrow n^r + 2n - 1 = 0 \Rightarrow \text{ریشه صحیح ندارد} \end{cases}$$

۱۷ گزینه ۲ همواره درست است. دقت کنید که گزینه ۱ به شرطی درست است که $b \neq 0$ باشد و گزینه‌های ۳ و ۴ نیز به شکل غم‌انگیزی نادرست هستند.

۱۸ تنها صفر بر اعداد بزرگ‌تر از خود بخش پذیر است، بنابراین باید $m^r - 4 = 0$

$$\text{باشد، در نتیجه } m = \pm 2$$

۱۹ در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳، لاغر، لاغرتر و یا چاق، چاق‌تر شده است اما در

گزینه ۴ لاغر چاق شده و در عین حال نیز چاق هم لاغر شده که نادرست است.

۲۰ در گزینه ۴ لاغر، چاق شده و نادرست است.

۲۱ در گزینه ۴ طرفین به یک نسبت چاق شده‌اند (در c ضرب شده‌اند) و درست است.

۲۲ در گزینه‌های ۱ و ۲ چاق، چاق‌تر شده و در گزینه ۳ لاغر، لاغرتر شده است اما گزینه ۴ هیچ‌کدام از این دو اتفاق رخ نداده است.

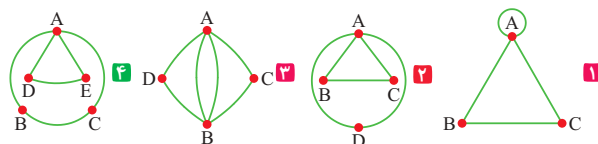
$$ab|c^2 \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} a|c^2 \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} a|c^3$$

۲۴ طبق قانون گفته شده در درسنامه فقط گزینه ۱ درست است.

233 بررسی گزینه‌ها:

- بین دو رأس a و b ، یال‌های موازی وجود دارد؛ بنابراین گراف ساده نیست.
- یال‌های گراف، جهت‌دار هستند؛ بنابراین گراف ساده نیست.
- رأس a دارای طوقه است؛ بنابراین گراف طوقه‌دار است و ساده نیست.
- گراف ساده است، چون بین هر دو رأس متمایز، بیش از یک یال وجود ندارد و همچنین طوقه و یال جهت‌دار در آن وجود ندارد.

234 بررسی گزینه‌ها:



- از آن‌جا که در نقشه داده شده، چهار ناحیه A, B, C, D دیده می‌شود بنابراین گراف مورد نظر دارای ۴ رأس است و چون ۷ یال وجود دارد، این گراف دارای ۷ یال خواهد بود. برای رسم گراف مورد نظر، کافی است مطابق شکل مقابل ناحیه‌ها را با نقطه نشان دهیم و به جای هر یال، یک یال رسم کنیم.

- رأس a در گراف داده شده به دو رأس دیگر وصل است در حالی که در گزینه ۲ تنها به یک رأس وصل شده است.

- در این گراف ۶ رأس و ۹ یال وجود دارد بنابراین $p(G) = 6$ ، $q(G) = 9$ در نتیجه: $q(G) - p(G) = 9 - 6 = 3$

$$0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 25 \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p(p-1) \geq 50 \quad 238$$

$$\xrightarrow{\text{آزمون و خطا}} \text{Min}(p) = 8$$

$$q = 2p \Rightarrow 2p \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 4p \leq p(p-1) \Rightarrow 4 \leq p-1 \quad 239$$

$$\Rightarrow p \geq 5 \Rightarrow q \geq 10$$

240 ابتدا یک جدول صلیبی رسم می‌کنیم:

p	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$\text{Max}(q) = 3$

✓ ✓ ✓ ✓ ✗ ✗ ✗

241 ابتدا یک جدول صلیبی رسم می‌کنیم:

p	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

$\text{Min}(p) = 4$

✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✗ ✗ ✗

242 ابتدا یک جدول صلیبی رسم می‌کنیم:

p	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
q	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

$P = 4, 5, \dots, 9$
جواب ۶

✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✗ ✗ ✗

243

p	۳۰	۱۵	۱۰	۶	۵	۳	۲	۱
q	۱	۲	۳	۵	۶	۱۰	۱۵	۳۰

$\text{Min}(p) = 5$

✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✗ ✗ ✗

244

p	۴۵	۱۵	۹	۵	۳	۱
q	۱	۳	۵	۹	۱۵	۴۵

$\text{Max}(q) = 9$

✓ ✓ ✓ ✓ ✗ ✗

245

p	۷۲	۳۶	۲۴	۱۸	۱۲	۹	۸	۶	۴	۲	۱
q	۱	۲	۳	۴	۶	۸	۹	۱۲	۱۸	۳۶	۷۲

$\text{Max}(q) = 12$

✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✗ ✗ ✗

246

p	۴۸	۲۴	۱۶	۱۲	۸	۶	۴	۳	۲	۱
q	۱	۲	۳	۴	۶	۸	۱۲	۱۶	۲۴	۴۸

$\text{Max}(q) = 8$

✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✗ ✗ ✗

247 درجه رأس‌های گراف به صورت زیر است:

$$d(v_1) = 5, d(v_2) = 4, d(v_3) = 3, d(v_4) = 4, d(v_5) = 3, d(v_6) = 1$$

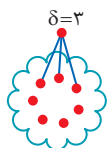
بنابراین گراف ۴ رأس فرد و دو رأس زوج دارد، در نتیجه:

$$4 - 2 = 2 = \text{تعداد رأس‌های زوج} - \text{تعداد رأس‌های فرد}$$

248 در گراف داده شده درجه رأس‌ها ۳ یا ۴ یا ۸ است بنابراین:

$$\Delta(G) = 8 \text{ و } \delta(G) = 3 \Rightarrow \Delta(G) - \delta(G) = 8 - 3 = 5$$

- یک رأس را کنار می‌گذاریم تا با آن $\delta = 3$ را ایجاد کنیم. بقیه رأس‌ها را پراز یال می‌کنیم و سپس رأس کنار گذاشته شده را با ۳ یال به مجموعه ۷ رأسی پراز یال وصل می‌کنیم:



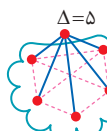
$$\text{Max}(q) = \binom{7}{2} + 3 = 24$$

- دو رأس را کنار می‌گذاریم و بقیه را پراز یال می‌کنیم، سپس دو رأس درجه ۱ را اضافه می‌کنیم:



$$\text{Max}(q) = \binom{7}{2} + 1 + 1 = 23$$

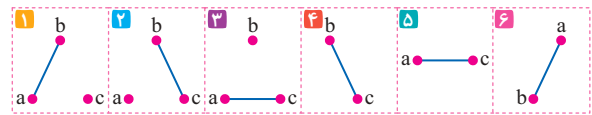
- ابتدا یک رأس درجه ۵ رسم می‌کنیم تا $\Delta = 5$ ایجاد شود. حال ۷ یال دیگر داریم که برای جا دادن آن‌ها باید حداقل ۵ رأس در نظر بگیریم:



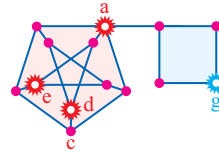
$$\text{Min}(p) = 6$$

470 ۱ این گراف دارای ۶ زیرگراف است که هر کدام دارای دو ۷- مجموعه

تمایز هستند:



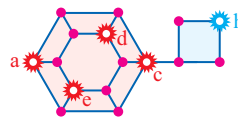
471 ۲ این گراف از اتصال گراف پترسن و گراف



C_4 به دست آمده است و مجموعه $\{a, d, e, g\}$

یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است که مینیمم نیز محسوب می‌شود.

472 ۳ این گراف از اتصال یک گراف همبلتی



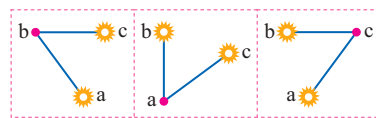
نوع دوم و یک گراف C_4 به دست آمده است و

مجموعه $\{a, c, e, d, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است که مینیمم نیز محسوب می‌شود.

473 ۳ ابتدا n را به دست می‌آوریم: $n - 4 = 9 \Rightarrow n = 13$

بنابراین یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال حداکثر $\left\lceil \frac{13}{2} \right\rceil = 7$ عضو دارد.

474 ۲ تنها سه گراف مطابق شکل وجود دارد:



475 ۳

p	۲۰	۱۰	۵	۴	۲	۱
q	۱	۲	۴	۵	۱۰	۲۰

1 اگر $p=5, q=4$ باشد، سه گراف مختلف قابل رسم است:

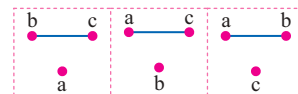


2 اگر $p=4, q=5$ باشد، یک گراف قابل رسم است:

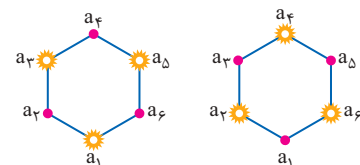


بنابراین یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال حداکثر ۴ عضو دارد.

476 ۳ تنها سه گراف مطابق شکل وجود دارد:

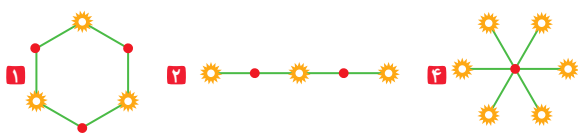


477 ۲ این گراف دارای ۲ مجموعه احاطه‌گر مینیمال سه عضوی به صورت زیر است:



478 ۳ در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال غیرمینیم

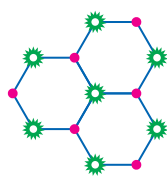
نیز وجود دارد:



اما در گزینه ۳ هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال و هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم دو عضوی است.

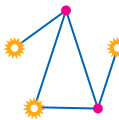
در گراف‌های C_3, C_4, C_5 هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال مجموعه احاطه‌گر مینیمم نیز هست.

479 ۳ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال حداکثر ۷ عضو دارد.



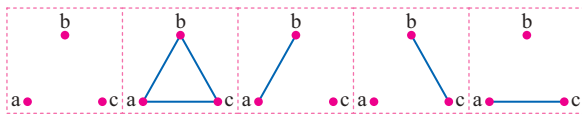
480 ۲

حداکثر ۳ عضو $18 = 3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1$



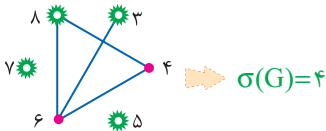
481 ۳ در گراف‌هایی به شکل زیر هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعه

احاطه‌گر مینیمم نیز محسوب می‌شود:



بنابراین ۵ گراف می‌توان ساخت که هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم نیز باشد.

482 ۳



$\sigma(G) = 4$

483 ۳



$\sigma(G) = 3$

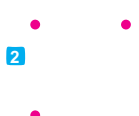
484 ۲ این گراف دو تیپ زیرگراف دارای که دارای مجموعه احاطه‌گر مینیمال

سه عضوی یکتا هستند.



یکی از رأس‌ها را به عنوان رأس تنها انتخاب می‌کنیم.

۸ = جواب



سه رأس را از میان ۴ رأس انتخاب می‌کنیم.

۴ = تعداد

493 منظور از اتومبیل غیر برقی، بنزینی یا گازوئیلی است. بنابراین طبق اصل

ضرب تعداد انواع اتومبیل برابر است با: $2 \times 1 \times 3 \times 8 \times 4 = 192$
حجم موتور رنگ مدل
غیر برقی $\rightarrow$ اتومات

494 پرتاب اول و سوم هر کدام ۳ حالت و پرتاب دوم ۴ حالت دارد. بنابراین

طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با: $3 \times 4 \times 3 = 36$

495 فرض کنیم تعداد سکه‌ها برابر n باشد:

$$6 \times 2^n = 384 \Rightarrow 2^n = \frac{384}{6} = 64 = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

496 رُخ اول 8×8 مکان برای قرارگیری دارد، اما می‌دانیم هر مهره دیگری

که در سطر یا ستون مربوط به آن قرار گیرد، مورد تهدید این رُخ قرار می‌گیرد بنابراین برای رُخ دوم 7×7 انتخاب وجود دارد. در نتیجه تعداد راه‌های قرارگیری برابر با 49×64 خواهد بود.

497 در واقع این تاس همان ۶ حالت ممکن را دارد. چون وجه سفید هم

امکان نشستن دارد، بنابراین اگر آن را سه بار پرتاب کنیم $6 \times 6 \times 6 = 216$ حالت مختلف خواهد داشت.

498 هر دایره دارای ۲ حالت است و چون ماتریس ۶ دایره دارد تعداد حالات

ممکن طبق اصل ضرب برابر است با: $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^6$
بار ۶

499 دایره‌های قطر اصلی ۱ حالت دارند اما سایر دایره‌ها هر کدام ۲ حالت

دارند: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2^6$

500 برای a هر یک از ارقام $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ و برای b و c هر یک از ارقام

$\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ را می‌توان در نظر گرفت: $9 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^2$

501 برای a ، ۹ انتخاب و برای b ، ۱۰ انتخاب وجود دارد؛ بنابراین تعداد

اعداد ساخته شده برابر $9 \times 10 = 90$ است.

502 مسیرهایی که از A به B می‌توان رفت به صورت $(A \rightarrow C, C \rightarrow B)$

یا به صورت $(A \rightarrow D, D \rightarrow B)$ است. بنابراین تعداد راه‌های ممکن طبق

اصل ضرب و اصل جمع برابر است با: $3 \times 1 + 2 \times 4 = 11$

503 اگر در مسیر رفت از D عبور نکنیم تعداد راه‌های ممکن برای رفت برابر

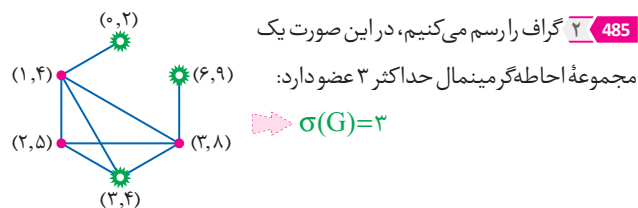
با $1 + 2 \times 3 \times 2 = 13$ است و اگر در برگشت از C عبور نکنیم تعداد راه‌های ممکن

برای برگشت برابر با $3 + 1 \times 2 = 3$ است، بنابراین تعداد راه‌های ممکن برای رفت

و برگشت برابر با $39 = 3 \times 13$ است.

504 برای رقم وسط هر یک از ارقام $\{0, 3, 6, 9\}$ را باید انتخاب کنیم، رقم

سمت چپ نیز صفر نمی‌تواند باشد: $9 \times 4 \times 10 = 360$



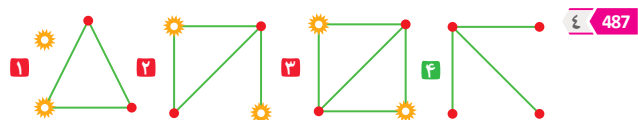
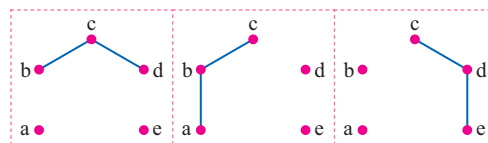
486 این گراف دارای دو تیپ زیرگراف است که مجموعه احاطه‌گر مینمال ۴

عضوی یکتا است که یک تیپ از آن مینیمم نیز هست:

1 تیپ اول انتخاب چهار رأس تنها که ۵ زیرگراف به این شکل وجود دارد که

چون مینیمم نیز هستند قابل قبول نیستند.

2 تیپ دوم انتخاب دو رأس تنها که سه گراف به این شکل وجود دارد:



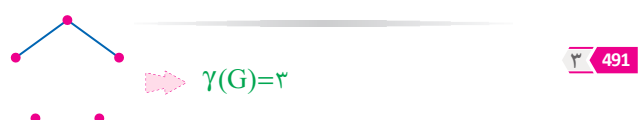
گزینه ۲ مجموعه‌های احاطه‌گر مینمال ۳ عضوی و یک عضوی دارد.

488 گراف همه گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



490 یک مجموعه احاطه‌گر مینمال در این گراف

حداکثر ۲ عضو دارد.



492 اگر گراف را به صورت زیر رسم کنیم حداکثر ۴ عضو خواهد داشت:



$$\binom{7}{4} - \binom{3}{2} \binom{2}{1} - \binom{3}{2} \binom{2}{1} = 35 - 2 - 2 = 31$$

دقت کنید که در شکل داده شده ۴ نقطه روی یک خط راست وجود نداشت!!

597 هر سه نقطه‌ای که انتخاب کنیم تشکیل مثلث می‌دهند مگر آن که روی

یک خط راست باشند:

$$\binom{9}{3} - \binom{3}{2} \binom{2}{1} = 84 - 3 = 81$$

598 فرض کنیم یک صفحه شطرنجی 4×4 داریم در این صورت تعداد مربع‌ها

برابر با $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4$ است. حال از این صفحه 4×4 یک مربع 1×1 یک مربع 2×2 یک مربع 3×3 و یک مربع 4×4 کنده شده است، بنابراین تعداد مربع‌ها برابر است با:

599 از یک صفحه شطرنجی 4×4 یک مربع 1×1 دو مربع 2×2 دو مربع

3×3 و همچنین یک مربع 4×4 کنده شده است، بنابراین تعداد مربع‌ها برابر است با:

600 باید دو خط افقی و دو خط عمودی انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{2} \binom{4}{2} = 10 \times 6 = 60$$

601 باید تعداد مربع‌ها را از تعداد مستطیل‌ها کم کنیم:

$$\binom{5}{2} \binom{4}{2} - [4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 1] = 60 - 20 = 40$$

602 دو کتاب تاریخ و دو کتاب ریاضی را انتخاب می‌کنیم سپس جواب را در

جایگشت آن‌ها ضرب می‌کنیم به گونه‌ای که دو کتاب تاریخ کنار هم نباشد:

$$\binom{4}{2} \binom{3}{2} \times [4! - 3! \times 2!] = 6 \times 3 \times 12 = 216$$

603 یک نفر را بین A و B قرار می‌دهیم و آن ۳ نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \Rightarrow \binom{3}{1} \times 3! \times 2! = 36$$

604 دو نفر را بین A و B قرار می‌دهیم و آن ۴ نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{A} \boxed{B} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \Rightarrow \binom{4}{2} \times 2! \times 3! \times 2! = 144$$

605 این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که ارقام متمایز باشند. بنابراین باید سه رقم

از میان ارقام ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ انتخاب کنیم که به $\binom{5}{3} = 10$ طریق امکان پذیر است. حال باید سه رقم را طوری قرار دهیم تا در عدد حاصل «صدگان < دهگان < یکان»

شود که این کار فقط به یک طریق امکان پذیر است. پس تعداد اعداد سه رقمی با

شرط فوق برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times 1 = 10$$

606 از بین ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ باید دو رقم را برای جایگاه یکان و صدگان

انتخاب کنیم. با داشتن دو رقم متمایز، فقط به یک طریق می‌توان یک عدد ساخت،

به طوری که «رقم صدگان < رقم یکان» باشد. در ضمن رقم دهگان می‌تواند هر رقم

دلخواهی باشد، پس:

$$\binom{10}{2} \times 1 \times 10 = 450$$

607 باید یک رقم از میان چهار رقم زوج ۲, ۴, ۶, ۸ و سه رقم دیگر را از میان

پنج رقم فرد ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ انتخاب کنیم و سپس جایگشت آن‌ها را محاسبه کنیم:

$$\binom{4}{1} \times \binom{5}{3} \times 4! = 4 \times 10 \times 24 = 960$$

608 باید دو رقم از میان ارقام ۲, ۴, ۶, ۸ و سه رقم دیگر را از میان ارقام

{۱, ۳, ۵, ۷, ۹} انتخاب کنیم و سپس با ارقام انتخاب شده عدد پنج رقمی بسازیم:

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$$

609 یا باید سه رقم زوج و یک رقم فرد انتخاب کنیم یا چهار رقم زوج و سپس

جایگشت آن‌ها را حساب کنیم:

$$\left[\binom{4}{3} \times \binom{2}{1} + \binom{4}{4} \right] \times 4! = 9 \times 24 = 216$$

610 ارقام ۲, ۳ که انتخاب شده‌اند. پس باید یک رقم دیگر از میان ارقام ۳, ۴, ۵

انتخاب کنیم و با آن یک عدد سه رقمی بسازیم:

$$\binom{3}{1} \times 3! = 18$$

611 ابتدا ۲ تیم را از ۶ تیم انتخاب می‌کنیم حال می‌خواهیم هر دو تیم دوبار با

هم مسابقه بدهند، بنابراین تعداد کل مسابقات برابر است با:

$$\binom{6}{2} \times 2 = 30$$

612 هر سه رنگی که انتخاب کنیم، یک رنگ جدید ساخته می‌شود، پس تعداد

کل رنگ‌ها برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times 1 = 20$$

613 مجموعه A به صورت $\{a, \{a\}, \{b\}, b, c\}$ است که یک مجموعه ۵

عضوی است. بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های فاقد عضو b برابر است با:

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

614 افزایش دو عضو A تنها به یک شکل کلی است:

$$N = \binom{3}{1} \binom{2}{2} = 3 \times 1 = 3$$

615 افزایش سه عضو A تنها به یک شکل کلی است:

$$N = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{2} \binom{2}{2}}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 1}{2} = 6$$

616 حداقل سه زیر مجموعه یعنی سه یا چهار زیر مجموعه:

$$N = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{2} \binom{2}{2}}{2!} + 1 = 6 + 1 = 7$$

617 دو حالت کلی برای چنین افزایشی وجود دارد:

$$N = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{2!} + \binom{5}{1} \binom{4}{2} = 20$$

618 مجموعه A به صورت $\{a, b, \{a, b\}, c\}$ است.

$$N = \frac{\binom{4}{1} \binom{2}{2}}{2!} + 1 = 3 + 1 = 4$$



619 این افرازاها به دو شکل کلی هستند:

$$N = \binom{4}{1} \binom{2}{2} + \frac{\binom{4}{2} \binom{2}{2}}{2!} = 4 + 3 = 7$$

620 این افرازاها به دو شکل کلی هستند:

$$N = \binom{5}{2} \binom{3}{3} + \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{2}}{3!} = 20$$

621 این افرازاها به یک شکل کلی هستند:

$$N = \frac{\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{3!} = \frac{15 \times 6 \times 1}{6} = 15$$

622 این افرازاها به یک شکل کلی هستند:

$$N = \binom{5}{2} \binom{3}{3} = 10$$

623 افراز مورد نظر به شکل زیر است که x نمی تواند a باشد و باید یکی از 6 عضو دیگر مجموعه باشد:

$$N = \frac{\binom{6}{1} \binom{6}{3} \binom{3}{3}}{2!} = \frac{6 \times 20 \times 1}{2} = 60$$

624 این افرازاها به یک شکل کلی هستند:

$$N = \frac{\binom{8}{3} \binom{5}{3} \binom{2}{2}}{2!} = \frac{56 \times 10}{2} = 280$$

625 مجموعه A_3 یک مجموعه 5 عضوی است زیرا:

$$A_3 = \{m \in \mathbb{Z} : m \geq -3, 2^m \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

بنابراین تعداد افرازاها 3 عضوی آن به صورت زیر به دست می آید:

$$N = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{3}}{2!} + \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{2!} = 25$$

626 باید تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

$$\binom{7+3}{3} = \binom{10}{3} = 120$$

627 باید $\binom{7+k-1}{k-1} = \binom{7+2}{2}$ باشد، در نتیجه:

$$\binom{k+1}{k-1} = \binom{9}{2} \Rightarrow \binom{k+1}{2} = \binom{9}{2} \Rightarrow k+1=9 \Rightarrow k=8$$

628 باید تعداد جواب های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 11$ را پیدا کنیم

$$\binom{11-1}{8-1} = \binom{10}{7} = 210$$

که برابر است با:

629 باید تعداد جواب های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ را پیدا کنیم که

$$\binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

برابر است با:

630 ابتدا x_1, x_2, x_3 را به دست می آوریم سپس این اعداد را در معادله جایگذاری

کرده و تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله حاصل را پیدا می کنیم:

$$\sqrt{x_1} = \frac{2}{x_2} = 2 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1 \Rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = 10 \Rightarrow \binom{10+2}{2} = 66$$

631 باید تعداد جواب های طبیعی $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 9$ را

$$\binom{9-1}{5-1} = 70$$

به دست آوریم که برابر است با:

632 باید تعداد جواب های طبیعی را از تعداد جواب های صحیح و نامنفی

$$\binom{6+3}{3} - \binom{6-1}{4-1} = 84 - 10 = 74$$

633 ابتدا از هر نوع گل 2 شاخه برمی داریم، در نتیجه 7 شاخه گل می ماند،

بنابراین کفایت تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

$$\binom{7+3}{3} = \binom{10}{3} = 120$$

را به دست آوریم که برابر است با:

634 باید تعداد جواب های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ را با شرایط

$1 \leq x_1 \leq 8$ به دست آوریم یعنی متغیرها باید حداقل برابر 1 باشند، بنابراین باید

$$\binom{10-1}{3-1} = 36$$

تعداد جواب های طبیعی معادله فوق را پیدا کنیم:

دقت کنید در این شرایط به طور ناخودآگاه هیچ کدام از متغیرها نمی تواند بزرگ تر از 8 باشد و حداکثر مقدار ممکن برای هر کدام از آن ها 8 است و مطرح کردن کران بالا برای متغیرها هیچ تأثیری در فرآیند حل مسئله ندارد و صرفاً جنبه تزئینی دارد.

635 وقتی مجموع سه متغیر صحیح و نامنفی برابر 10 است خواه ناخواه همگی

آن ها کوچک تر مساوی 10 هستند بنابراین باید تعداد جواب های صحیح و نامنفی

معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ را با شرط $x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 1$ پیدا کنیم که برای

این منظور $3+2+1=6$ پرتقال از 10 پرتقال موجود را کنار می گذاریم و 4 پرتقال دیگر

را بین 3 نفر توزیع می کنیم، در نتیجه تعداد راه های ممکن برابر با:

$$\binom{4+2}{2} = 15$$

636 کفایت (-2) پرتقال به نفر اول و (-1) پرتقال به نفر دوم و (-2) پرتقال به

نفر سوم بدهیم و $6 = (-2) - (-1) - (-3) = 0$ پرتقال حاصل را بین 3 نفر توزیع

کنیم که تعداد راه ها برابر است با:

$$\binom{6+2}{2} = 28$$

637 باید تعداد جواب های صحیح و نامنفی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ را با این

شرط که دقیقاً دو تا از متغیرها صفر باشد پیدا کنیم، فرض کنیم $x_1 = x_2 = 0$ باشد،

در این صورت باید تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $0 + 0 + x_3 + x_4 = 8$

را پیدا کنیم و سپس جواب به دست آمده در تعداد حالاتی که می توان دو متغیر از

چهار متغیر را برای صفر شدن انتخاب کرد، ضرب کنیم:

$$\binom{8-1}{2-1} \times \binom{4}{2} = 7 \times 6 = 42$$

638 وقتی جمع سه متغیر که همگی بزرگ تر مساوی 1 هستند برابر 8 است

به طور ناخودآگاه هیچ کدام نمی توانند از 6 بیشتر باشند [حداکثر هر متغیر در این

شرایط برابر 6 است] بنابراین کفایت تعداد جواب های طبیعی معادله داده شده

را پیدا کنیم که برابر است با:

$$\binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$



Rene Descartes
1650-1596

Comprehensive Test

آزمون‌های جامع کنکور

سراسری ریاضی - داخل ۹۹

آزمون جامع ۱

دهم + یازدهم + دوازدهم

۱. اگر A و B دو مجموعه غیر تهی با شرط $A \subseteq B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

$$A - B' = A \quad (۲)$$

$$B - A' = A \quad (۱)$$

$$B \cap A' = \emptyset \quad (۴)$$

$$A \cap B' = \emptyset \quad (۳)$$

۲. مجموعه $((A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B)))$ با کدام مجموعه برابر است؟

$$A \cap B' \quad (۲)$$

$$A \cup B' \quad (۱)$$

$$B' \quad (۴)$$

$$A \quad (۳)$$

۳. در مجموعه‌های چهار عضوی $A = \{x+2, 1, 4, y\}$, $B = \{5, 7, z, t-1\}$ ، فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد. تعداد مجموعه‌های به صورت

$\{(x, y), (z, t)\}$ کدام است؟

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

$$۶ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

۴. کدام یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزاره $p \Leftrightarrow q$ است؟

$$(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q) \quad (۲)$$

$$(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) \quad (۱)$$

$$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \quad (۴)$$

$$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q) \quad (۳)$$

۵. تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش پذیر بر ۵، با ارقام غیر تکراری، کدام است؟

$$۹۵۲ \quad (۲)$$

$$۹۴۸ \quad (۱)$$

$$۹۷۲ \quad (۴)$$

$$۹۶۸ \quad (۳)$$

۶. تعداد جملات در بسط عبارت $(a+b+c)^{12}$ ، کدام است؟

$$۷۸ \quad (۲)$$

$$۷۲ \quad (۱)$$

$$۹۱ \quad (۴)$$

$$۸۴ \quad (۳)$$

۷. در جعبه‌ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه برداریم تا مطمئن باشیم، حداقل ۴ کتاب، هم

موضوع است؟

$$۹ \quad (۲)$$

$$۱۰ \quad (۱)$$

$$۷ \quad (۴)$$

$$۸ \quad (۳)$$

۸. به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

$$\frac{۳}{۵} \quad (۲)$$

$$\frac{۲}{۵} \quad (۱)$$

$$\frac{۸}{۱۵} \quad (۴)$$

$$\frac{۷}{۱۵} \quad (۳)$$

۹. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، کدام است؟

$$\frac{۱}{۲} \quad (۲)$$

$$\frac{۵}{۱۲} \quad (۱)$$

$$\frac{۳}{۴} \quad (۴)$$

$$\frac{۷}{۱۲} \quad (۳)$$

۱. فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی و جدا از هم، با یک مجموعه مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟

(۱) $A \subset B'$ (۲) $A - B' = \emptyset$

(۳) $A \cap B' = A$ (۴) $(A \cup B)' = \emptyset$

۲. مجموعه $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B))'$ با کدام مجموعه، برابر است؟

(۱) A (۲) B

(۳) A' (۴) B'

۳. اگر $A = [1, 4], B = (-1, 2]$ باشند. مساحت نمودار $A \times A - B \times B$ در صفحه مختصات، کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵

(۳) ۷ (۴) ۶

۴. کدام یک از گزاره‌های زیر، هم‌ارز منطقی گزاره $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q)$ است؟

(۱) p (۲) q

(۳) $p \wedge q$ (۴) $p \Rightarrow q$

۵. تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟

(۱) ۱۸۴۸ (۲) ۱۷۹۲

(۳) ۱۷۴۸ (۴) ۱۶۵۸

۶. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x + y + z + t = 11$ ، به شرط آن‌که $x < 5$ باشد، کدام است؟

(۱) ۲۱۰ (۲) ۲۲۰

(۳) ۲۷۰ (۴) ۲۸۰

۷. حداقل چند عدد از مجموعه اعداد طبیعی متوالی $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ انتخاب شود، تا مطمئن باشیم بین آن‌ها حداقل دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از یک، وجود دارد؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۲

(۳) ۱۱ (۴) ۱۰

۸. یک تاس سالم را سه بار به‌طور متوالی پرتاب می‌کنیم، احتمال روشن شدن حداقل یک بار عدد ۶، کدام است؟

(۱) $\frac{13}{36}$ (۲) $\frac{51}{108}$

(۳) $\frac{91}{216}$ (۴) $\frac{31}{72}$

۹. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های رو شده ۳ باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{15}{36}$

۱۰. در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبه دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

(۱) $\frac{20}{27}$ (۲) $\frac{24}{45}$

(۳) $\frac{38}{45}$ (۴) $\frac{23}{27}$

۱۱. در دو پیشامد مستقل A, B ، اگر $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ و با فرض $P(B') > P(B)$ ، احتمال وقوع پیشامد B ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{25}{2}$

داخل - ۹۹

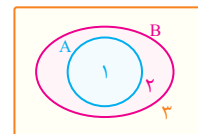
۱ ۴ یک شکل متناسب با $A \subseteq B$ رسم می‌کنیم، سپس به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ $B - A' \Rightarrow \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1\} = A$

۲ $A - B' \Rightarrow \{1\} \cup \{3\} = \{1\} = A$

۳ $A \cap B' = \{1\} \cap \{3\} = \emptyset$

۴ $B \cap A' \Rightarrow \{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \neq \emptyset$



۲ ۴ می‌دانیم طبق $A - B = A \cap B'$ است و همچنین طبق قانون جذب

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$$

$$(A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B))$$

$$\underbrace{A \cap B'}_{\text{جذب}} \underbrace{B' \cup C'}_{\text{جذب}} \underbrace{(B' \cup A) \cap B'}_{\text{جذب}} = B'$$

$$= (A \cap B') \cup ((B' \cup C') \cap B') = (A \cap B') \cup B' = B'$$

۳ ۳ می‌دانیم اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند و $A \times B = B \times A$

باشد، آنگاه $A = B$ خواهد بود، بنابراین حالات زیر قابل تصور است:

$$\begin{aligned} 1 \quad \begin{cases} x+2=5 \\ y=7 \\ z=1 \\ t-1=4 \end{cases} & \quad 2 \quad \begin{cases} x+2=5 \\ y=7 \\ z=4 \\ t-1=1 \end{cases} & \quad 3 \quad \begin{cases} x+2=7 \\ y=5 \\ z=1 \\ t-1=4 \end{cases} & \quad 4 \quad \begin{cases} x+2=7 \\ y=5 \\ z=1 \\ t-1=4 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین، تعداد مجموعه‌های به شکل $\{(x, y), (z, t)\}$ برابر است با ۴ است.

۱ ۴ می‌دانیم $p \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ بنابراین:

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim(p \vee q) \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$$

۲ ۵ چون تکرار ارقام مجاز نیست، باید مسئله را به دو قسمت تقسیم

کنیم، یعنی تعداد اعداد مضرب ۵ و مختوم به صفر را حساب کنیم و یک‌بار

تعداد اعداد مضرب ۵ و مختوم به ۵ را:

$$\begin{aligned} \{0\} & \downarrow \\ 9 \times 8 \times 7 \times 1 + 8 \times 8 \times 7 \times 1 &= 504 + 448 = 952 \end{aligned}$$

۴ ۶ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 12$

را به دست آوریم که برابر است با:

$$\binom{12+2}{2} = \binom{14}{2} = \frac{14 \times 13}{2} = 91$$

۲ ۷ بدترین حالات ممکن حالتی است که ۳ کتاب ادبی، ۳ کتاب هنر[که

(البته ۳ کتاب هنر نداریم و ۱۰ کتاب هنر برمی‌داریم)] و ۳ کتاب ریاضی برداریم که در

این حالت با این‌که ۸ کتاب برداشته‌ایم ولی هنوز ۴ کتاب هم موضوع نداریم.

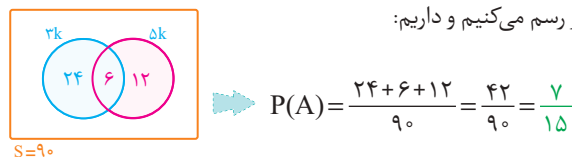
حال اگر یک کتاب دیگر برداریم این کتاب به یقین یا ادبی است یا ریاضی و ما

حداقل ۴ کتاب هم موضوع داریم، بنابراین حداقل تعداد کتاب‌ها برابر است

$$n = (3+2+3)+1 = 9$$

۳ ۸ تعداد اعداد دورقمی برابر با $9 \times 10 = 90$ است، حال یک

نمودار رسم می‌کنیم و داریم:



۱ ۹ فضای نمونه تعداد حالاتی است که مجموع سه تاس فرد آمده که

برابر با نصف کل حالات است یعنی:

$$n(S) = \frac{1}{7} \times 6 \times 6 \times 6 = 108$$

حال باید ببینیم در چند حالت از این ۱۰۸ حالت حداقل یکی از تاس‌های

روشنه «۲» است، ابتدا تعداد کل حالاتی که حداقل یکی از تاس‌ها «۲» باشد

را پیدا می‌کنیم:

$$n = 6 \times 6 \times 6 - 5 \times 5 \times 5 = 91$$

حال یکی از ۹۱ حالت (۲, ۲, ۲) است و از ۹۰ حالت باقی‌مانده دقیقاً در نصف

حالات مجموع زوج و در نصف دیگر حالات مجموع فرد است. یعنی در ۴۵

حالت مجموع فرد و حداقل یکی ۲ است، بنابراین حاصل این احتمال شرطی

برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{45}{108} = \frac{5}{12}$$

۲ ۱۰



از ظرف اول هر دو مهره‌ای که خارج کنیم الزاماً سفید است و احتمال لااقل یک

سیاه صفر است، از ظرف دوم هر دو مهره‌ای که خارج شود حتماً سیاه است و

احتمال لااقل یک سیاه برابر ۱ است و از ظرف سوم اگر دو مهره خارج کنیم در

صورتی حداقل یکی سیاه است که هر دو سفید نباشد:

$$P = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}}\right) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{11}{18}$$

۲ ۱۱ ابتدا به کمک $P(B|A)$ حاصل $P(A \cap B)$ را به دست می‌آوریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0/25 = \frac{P(B \cap A)}{0/4} \Rightarrow P(B \cap A) = 0/1$$

حال با معلوم بودن $P(A \cap B)$ می‌توانیم احتمال شرطی خواسته شده را

به دست آوریم:

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{1 - P(A)} = \frac{0/3 - 0/1}{1 - 0/4} = \frac{0/2}{0/6} = \frac{1}{3}$$

۳ ۱۲ ظاهراً نموداری که داده شده مربوط به درصد فراوانی نسبی است،

بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{100} = \frac{7 \times 12 + 12 \times 18 + 13 \times 25 + 17 \times 10 + 19 \times 25}{100} = 14$$