



Bertrand Russell
1872-1970

M[atrix]_{m×n}

CHAPTER 1

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

درس اول



صفحه ۱۰ تا ۲۱ کتاب درسی



تعریف ماتریس و مفاهیم اولیه آن



10

فصل ۱

ماتریس و کاربردها • ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و تعدادی ستون یک **ماتریس** نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در این ماتریس، یک **درایه** یا **عنصر** نامیده می‌شود. ماتریس‌ها را معمولاً با حروف بزرگ مانند **A**، **B**، **C** و ... نشان می‌دهند.

ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$$

ستون سوم A
درایه

ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

سطر دوم B

ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سطر اول C

اگر ماتریسی مانند **A** دارای **m** سطر و **n** ستون باشد، به صورت $A_{m \times n}$ یا $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نوشته می‌شود و **A** را ماتریسی از مرتبه $m \times n$ (یا به طور خلاصه m در n) می‌گویند.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

ماتریس ۲ در ۳

۲ سطر و ۳ ستون

 $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$

ماتریس ۱ در ۳

هر درایه ماتریس را با دو اندیس نشان می‌دهیم. اندیس اول شماره سطر و اندیس دوم شماره ستون را نشان می‌دهد، یعنی a_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام است.

درایه سطر اول و ستون دوم

 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

درایه سطر اول و ستون دوم

 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

درایه سطر اول و ستون سوم

 $D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \end{bmatrix}_{1 \times 3}$

Test تعداد درایه‌های کدام ماتریس از بقیه بیشتر است؟

$$[a_{ij}]_{2 \times 6} \quad (2)$$

$$[a_{ij}]_{3 \times 4} \quad (1)$$

(4) هر سه گزینه برابر است.

$$[a_{ij}]_{6 \times 2} \quad (3)$$

۴ تعداد درایه‌ها در یک ماتریس $m \times n$ برابر با $m \times n$ است، بنابراین همه ماتریس‌های داده شده در گزینه‌ها ۱۲ درایه دارند.

۱. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ کدام گزینه درست نیست؟

(2) تعداد ستون‌ها برابر ۳ است.

(1) در هر سطر ۳ درایه وجود دارد.

(4) در هر ستون ۳ درایه وجود دارد.

(3) تعداد سطرها برابر ۲ است.

۲. اگر تعداد سطرها و ستون‌ها در ماتریس $A = [a_{ij}]_{(n-1) \times 3}$ با هم برابر باشد، تعداد درایه‌های کدام ماتریس از سایرین کمتر است؟

$$[a_{ij}]_{(n+1) \times 2} \quad (2)$$

$$[a_{ij}]_{n \times 3} \quad (1)$$

$$[a_{ij}]_{5 \times (n-1)} \quad (4)$$

$$[a_{ij}]_{6 \times (n-2)} \quad (3)$$



۳. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) $a_{11} = 1$ (۲) $a_{11} = 2$
(۳) $a_{31} = 2$ (۴) $a_{23} = 1$

۴. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ درایه‌های به صورت a_{2j} معرف درایه‌های است و دامنه j به صورت می‌باشد.

- (۱) درایه‌های سطر دوم - $1 \leq j \leq 3$
(۲) درایه‌های ستون دوم - $1 \leq j \leq 3$
(۳) درایه‌های ستون دوم - $1 \leq j \leq 2$
(۴) درایه‌های سطر دوم - $1 \leq j \leq 2$

۵. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x & 5 \\ 3 & -1 & 4 & y \\ 7 & 8 & 9 & x-2 \end{bmatrix}$ اگر درایه سطر اول و ستون سوم از درایه سطر سوم و ستون دوم ۵ واحد بزرگتر باشد، حاصل $\sum_{j=1}^4 a_{3j}$ کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۳۷
(۳) ۳۴ (۴) ۳۵

۶. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $\sum_{j=1}^3 a_{2j}$ چقدر از $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij}$ کمتر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶
(۳) ۵ (۴) ۴

در بعضی از ماتریس‌ها، درایه‌ها را به طور مستقیم معرفی نمی‌کنند و آن‌ها را برحسب تابعی از اندیس‌های سمت چپ و سمت راست درایه بیان می‌کنند. در این موارد ممکن است تابع چندضابطه‌ای نیز باشد که برای پیدا کردن درایه‌ها باید به شرط‌های گفته شده دقت کنید. ...
... در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ اگر به ازای هر $1 \leq i \leq m$ و هر $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $a_{ij} = 5$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

□ $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ جمع درایه‌ها = ۲۰

... در ماتریس $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ اگر به ازای هر $1 \leq i \leq m$ و هر $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $b_{ij} = i + j$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

□ $B = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ جمع درایه‌ها = ۲۱

... در ماتریس $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ اگر $c_{ij} = \begin{cases} i \times j & ; i \geq j \\ 7 & ; i < j \end{cases}$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

□ $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 7 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ جمع درایه‌ها = ۱۴

Test در ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ اگر $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 2j & ; i \neq j \\ i + j & ; i = j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم A کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) -۳ (۴) ۲

۲

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1^2 - 2 \times 2 \\ 2^2 - 2 \times 1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ جمع درایه‌های ستون دوم = $-3 + 4 = 1$



۷. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ اگر درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام از رابطه $j - i^2 = a_{ij}$ به دست آید، مجموع درایه های ماتریس کدام است؟

۵ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۸. در ماتریس $A = [2i - j]_{3 \times 3}$ اگر i شماره سطر و j شماره ستون باشد، مجموع درایه های واقع بر سطر دوم چقدر است؟

۱ (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) -۴ (۴)

۹. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ با کدام گزینه برابر است؟ [i شماره سطر و j شماره ستون]

$[i+j]_{2 \times 2}$ (۱) $[2i+j]_{2 \times 2}$ (۲) $[i+j]_{2 \times 2}$ (۳) $[ij]_{2 \times 2}$ (۴)



معرفی ماتریس مربعی

اگر در ماتریس A ، تعداد سطرها با تعداد ستون ها برابر و مساوی n باشد، A را یک **ماتریس مربعی** از مرتبه n (یا $n \times n$) می نامیم.

a_{ij} روی قطر فرعی $i+j=n+1 \Leftrightarrow$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

a_{ij} روی قطر اصلی $i=j \Leftrightarrow$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0/2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه بر اساس رابطه بین i و j می توان موقعیت درایه را نسبت به قطر اصلی تشخیص داد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

[بالای قطر اصلی] $i < j$

[پایین قطر اصلی] $i > j$

[روی قطر اصلی] $i = j$

Test در ماتریس $A = [2i + j]_{3 \times 3}$ اگر i شماره سطر و j شماره ستون باشد، مجموع درایه های زیر قطر اصلی کدام است؟

۱۵ (۴) ۱۲ (۳) ۲۸ (۲) ۲۵ (۱)

۲ لازم نیست همه درایه های A را پیدا کنید یافتن درایه های زیر قطر اصلی کافیت [در ضمن $a_{ij} = 2i + j$]

$$A = \begin{bmatrix} \text{purple} & \text{green} & \text{red} \\ a_{21} & \text{orange} & \text{blue} \\ a_{31} & a_{32} & \text{pink} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{purple} & \text{green} & \text{red} \\ 7 & \text{orange} & \text{blue} \\ 10 & 11 & \text{pink} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه های زیر قطر اصلی} = 7 + 10 + 11 = 28$$

۱۰. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ کدام درایه بالای قطر اصلی قرار دارد؟

a_{13} (۴) a_{31} (۳) a_{22} (۲) a_{11} (۱)

۱۱. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با فرض $\begin{cases} i-j & ; & i < j \\ i+j & ; & i = j \\ ij & ; & i > j \end{cases}$ مجموع درایه های ستون سوم چقدر است؟

۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

۱۲. در ماتریس $A = [4i - j]_{3 \times 3}$ اگر i شماره سطر و j شماره ستون باشد، مجموع درایه های زیر قطر اصلی کدام است؟

۱۵ (۴) ۱۲ (۳) ۲۸ (۲) ۲۵ (۱)

۱۳. در ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ که $\begin{cases} i-jx & ; & i > j \\ ij & ; & i = j \\ 2ix+j & ; & i < j \end{cases}$ اگر مجموع درایه های بالای قطر اصلی با مجموع درایه های پایین قطر اصلی برابر باشد، مقدار x کدام است؟

۲ (۴) صفر (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)

گاهی اوقات یک ماتریس از ماتریس‌های کوچکتر [زیر ماتریس] تشکیل شده است، که چندین بار در کنکور مورد سؤال قرار گرفته است. نمونه‌ای از این ماتریس‌ها به صورت زیر است:

$$M_l = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad M_r = [A \ B] \quad M_r = \begin{bmatrix} a & b & c \\ A & d & e \end{bmatrix} \quad M_r = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

در چنین مواردی یا موارد مشابه آن‌ها باید، درایه‌های هر زیر ماتریس را مطابق نظمی که در ماتریس اصلی قرار گرفته، در آن قرار دهیم. مخصوصاً اگر زیر ماتریس‌ها بر حسب تابعی از i و j داده شوند، ابتدا باید هر زیر ماتریس را تشکیل دهیم و سپس آن را در ماتریس اصلی قرار دهیم.

❖ اگر $A = [1 \ 2 \ 3]$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس C را بنویسید. جمع درایه‌های قطر اصلی C کدام است؟

❑ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ➡ جمع درایه‌های قطر اصلی $= 2 + 0 + 3 = 5$

❖ در مثال فوق، اگر ماتریس C را به صورت $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس D کدام است؟

❑ با توجه به ماتریس C ، خواهیم داشت: $D = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ➡ جمع درایه‌های قطر فرعی $= 2 + 7 = 9$

❖ اگر $A = [i+j]_{3 \times 3}$ ، $B = [i \times j]_{3 \times 3}$ و i شماره سطر و j شماره ستون باشد، ماتریس $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ را بنویسید.

❑ ابتدا باید ماتریس‌های A و B را تشکیل دهیم و سپس زیر هم بنویسیم:

$$A = [1+1 \ 1+2 \ 1+3] = [2 \ 3 \ 4] \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 \times 1 & 1 \times 2 & 1 \times 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 2 & 1 \times 3 \end{bmatrix}$$

❖ بعضی‌ها ممکن است ماتریس C را به صورت $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \end{bmatrix}$ تشکیل دهند که کاملاً اشتباه است. و اشتباه آن در درایه‌های سطر دوم است.

Test اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشد و ماتریس C را به صورت $C = \begin{bmatrix} 3 \\ E \end{bmatrix}$ نشان دهیم، مجموع درایه‌های

قطر اصلی E کدام است؟

❑ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ جمع درایه‌های قطر اصلی $= 3$

۱۴. اگر $A = [i+j]_{3 \times 3}$ و $B = [i^2 + j^2]_{3 \times 3}$ و ماتریس C به صورت $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس C کدام است؟

۲۳ (۱) ۱۵ (۲)

۱۶ (۳) ۲۴ (۴)

۱۵. اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ را به صورت $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ B & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ نشان دهیم، در ماتریس B مجموع درایه‌های قطر فرعی کدام است؟

۲ (۱) ۴ (۲)

۵ (۳) ۶ (۴)



Tweet



Euclid 

@Euclid Mid-4 century BC

در هندسه هیچ راه شاهانه‌ای وجود ندارد.

There is no royal way in **geometry**

..... : درس اول :  آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

..... : درس دوم :  دایره

..... : درس سوم :  بیض و سهم

[Translate Tweet](#)

07:30 . 5/31/20

 View Tweet activity

 1,337

 2,416

 8,150,910,208



Add another Tweet





Conic Sections

CHAPTER 2

Euclid

Mid-4 century BC

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

درس اول



صفحه ۳۴ تا ۳۹ کتاب درسی



مقاطع مخروطی

فهرست آئین در گajmarket.com

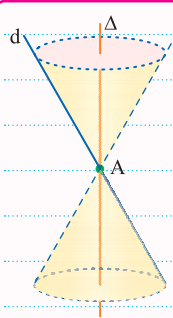


80

فصل ۲

مقاطع مخروطی

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

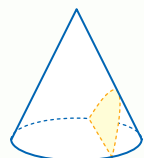


دو خط d و Δ را که در نقطه A مانند شکل متقاطع (غیر عمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط Δ ثابت باشد و خط d را حول خط Δ دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را **رویه مخروطی** [سطح مخروطی] می‌نامیم. در این حالت خط Δ را **محور**، خط d را **مولد** و نقطه A را **رأس** سطح مخروطی می‌نامیم. فصل مشترک یک صفحه و سطح مخروطی، **مقطع مخروطی** نامیده می‌شود و انواع مختلفی دارد که عبارت‌اند از **دایره**، **بیضی**، **سه‌می** و **هذلولی** که البته در حالت‌های خاص ممکن است **نقطه**، **یک خط** یا **دو خط متقاطع** باشند، نوع مقطع ایجاد شده بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و Δ دارد که در جدول زیر این حالات بررسی شده است:

هذلولی	سه‌می	بیضی	دایره
صفحه P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و هر دو نیمه سطح مخروطی را قطع می‌کند.	صفحه P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.	صفحه P بر محور Δ عمود نبوده و غیر موازی با مولد d است.	صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.
حالات خاص			
در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کرده و هر دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک دو خط متقاطع خواهد بود.	در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط یک خط خواهد بود.	در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطه رأس خواهد بود.	در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطه رأس خواهد بود.

اگر دو صفحه موازی، یک رویه مخروطی را قطع کنند، سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سه‌می، دو هذلولی می‌تواند **سه‌می** و **خط** یا **دایره و نقطه یا بیضی و نقطه یا هذلولی و دو خط متقاطع** نیز باشد.

Test مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، یک سه‌می است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی کدام وضع را دارد؟



- (۱) موازی یک مولد
 - (۲) موازی محور
 - (۳) عمود بر یک مولد
 - (۴) گذرا از نقطه تلاقی محور و مولد
- ۱ اگر صفحه موازی با مولد مخروط، رویه مخروطی را قطع کند، سه‌می به وجود می‌آید.



۳۸۵. دو خط Δ و d در نقطه A متقاطع اند، اگر d حول Δ دوران کند، سطح حاصل از دوران را و فصل مشترک هر صفحه با آن را می نامند.

- (۱) رویه مخروطی - مقطع مخروطی
(۲) مقطع مخروطی - رویه مخروطی
(۳) رویه مخروطی - سطح مخروطی
(۴) سطح مخروطی - رویه مخروطی

۳۸۶. اگر صفحه ای غیر عمود بر محور و غیر موازی با مولد یکی از دامنه های رویه مخروطی را قطع کند، سطح مقطع به وجود آمده کدام است؟

- (۱) بیضی (۲) هذلولی (۳) سهمی (۴) یک خط

۳۸۷. فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی کدام گزینه **نمی تواند** باشد؟

- (۱) دو خط متقاطع (۲) سهمی (۳) دایره (۴) دو خط موازی

۳۸۸. اگر صفحه ای به موازات مولد رویه مخروطی آن را قطع کند، مقطع حاصل کدام می تواند باشد؟

- (۱) بیضی (۲) سهمی (۳) هذلولی (۴) دایره

۳۸۹. اگر صفحه ای عمود بر محور سهمی آن را قطع کند، مقطع به وجود آمده کدام می تواند باشد؟

- (۱) بیضی (۲) دایره (۳) سهمی (۴) هذلولی

۳۹۰. اگر صفحه ای به موازات محور رویه مخروطی آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل کدام می تواند باشد؟

- (۱) دایره (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) سهمی

۳۹۱. اگر دو صفحه موازی یک سطح مخروطی را قطع کنند، کدام گزینه می تواند فصل مشترک های ایجاد شده توسط این دو صفحه باشد؟

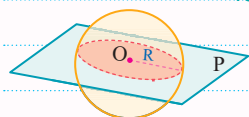
- (۱) دایره و بیضی (۲) دایره و خط (۳) خط و سهمی (۴) نقطه و سهمی



هرگاه دو خط d و Δ موازی باشند و فاصله آن ها برابر r باشد، از دوران d حول Δ سطحی ایجاد می شود که آن را یک سطح استوانه ای می نامیم. حال اگر یک صفحه مانند P **سطح استوانه ای** را قطع کند، سطح مقطع پدید آمده **مقطع استوانه ای** نامیده می شود که به یکی از چهار حالت زیر است:

یک خط	دو خط موازی	بیضی	دایره
صفحه P موازی Δ و به فاصله r از Δ	صفحه P موازی Δ و به فاصله کمتر از r از Δ	صفحه P غیر عمود و غیر موازی با Δ	صفحه P عمود بر Δ

اگر یک کره به مرکز O و شعاع R داشته باشیم، سطح مقطع صفحه P با سطح این کره همواره در تمام حالات یک **دایره** است.



اگر از تقاطع صفحه P و یک سطح استوانه ای یک بیضی ایجاد شده باشد، وضعیت صفحه نسبت به محور سطح استوانه ای چیست؟

صفحه باید غیر موازی با محور سطح استوانه ای و همچنین غیر عمود بر آن باشد، چون در صورت عمود شدن سطح مقطع به صورت دایره ای خواهد بود و در صورت موازی شدن با محور سطح استوانه ای به صورت دو خط موازی یا یک خط خواهد بود.



پزری تمرین ۴ صفحه ۵۷ کتاب درسی

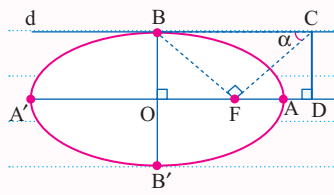
۶۵۳. در یک بیضی نقاط $A(5, 0)$ و $A'(-5, 0)$ دو سرقطر بزرگ بیضی و $B(0, 3)$ بالاترین نقطه بیضی است، در این بیضی دایره‌ای که دو سرقطر آن کانون‌های بیضی باشد، بیضی را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

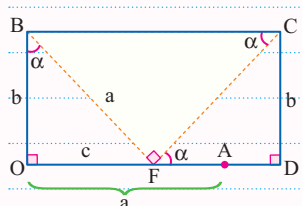
۶۵۴. یک بیضی به کانون‌های F و F' با دایره به قطر FF' مشترک ندارد. کدام گزینه می‌تواند خروج از مرکز این بیضی باشد؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

در بیضی زیر AA' و BB' دو قطر بیضی هستند، خط d در نقطه B بر بیضی مماس است پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند، اگر $\angle BCF = \alpha$ باشد، می‌توان نشان داد:



$$\frac{AD}{AF} = \frac{1}{e}$$



در مثلث OBF و BFC متشابه‌اند، بنابراین:

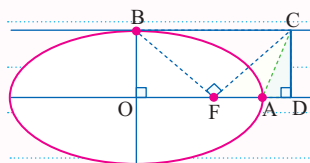
$$\frac{a}{BC} = \frac{c}{a} = \frac{b}{CF} \Rightarrow BC = \frac{a^2}{c}$$

با توجه به این که $AD = OD - OA$ و همچنین $AF = OA - OF$ خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{OD - OA}{OA - OF} = \frac{BC - OA}{OA - OF} = \frac{\frac{a^2}{c} - a}{a - c} = \frac{a^2 - ac}{c(a - c)} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$$

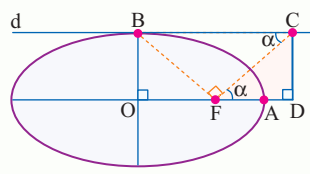
یک نتیجه جالب و مهم از رابطه فوق رابطه خروج از مرکز و زاویه α است: اگر به مثلث OBF نگاه کنیم خواهیم داشت:

$$\sin \alpha = \frac{c}{a} = e \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{1}{\sin \alpha}$$



$$\frac{S_{ACD}}{S_{ACF}} = \frac{AD}{AF} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{e}$$

Test در شکل زیر خط d در نقطه B بر بیضی مماس است، اگر $\frac{FD}{FC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



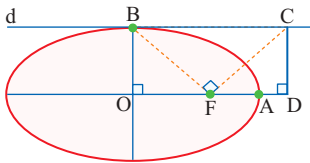
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

با توجه به شکل داده شده داریم:

$$\cos \alpha = \frac{FD}{FC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

بنابراین $e = \sin \alpha = \frac{1}{2}$ است.

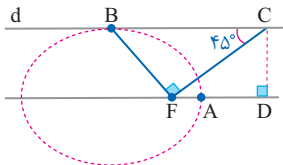
۶۵۵. در شکل زیر خط d در نقطه B بر بیضی مماس است، اگر F کانون بیضی و $\frac{AD}{AF} = 3$ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

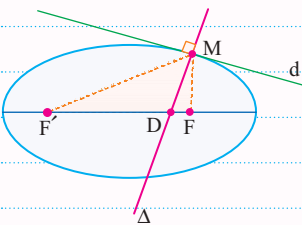
۶۵۶. در بیضی شکل زیر نقطه F کانون بیضی است و خط d در رأس ناکانونی بیضی بر بیضی مماس است، حاصل $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



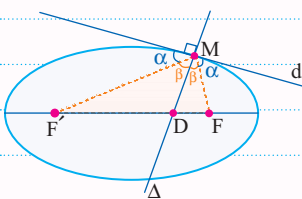
۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{2}$

در نقطه M واقع بر بیضی E به کانون های F و F' مماس d را بر آن رسم کرده ایم، اگر خط Δ در نقطه M عمود بر d بوده و قطر بزرگ بیضی را در D قطع کند، می توان نشان داد:



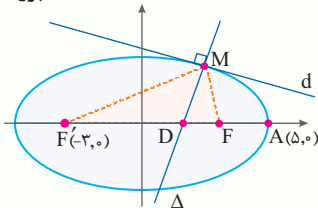
$$e = \frac{DF}{MF}$$



در صفحات بعد خواهیم دید زاویه شعاع های حامل با خط مماس با هم برابر است، بنابراین متمم های آنها نیز با هم برابر است. $[\beta = \alpha]$ در نتیجه Δ در مثلث $MF'F$ نیمساز محسوب می شود، بنابراین ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می کند:

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{DF}{DF'} \Rightarrow \frac{MF}{MF+MF'} = \frac{DF}{DF+DF'} \Rightarrow \frac{MF}{2a} = \frac{DF}{2c} \Rightarrow \frac{DF}{MF} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = e$$

Test در شکل زیر نقاط F و F' کانون های بیضی هستند و خط d در نقطه M بر بیضی مماس است و خط Δ در M بر خط d عمود شده و قطر بزرگی



بیضی را در D قطع کرده است، $\frac{DF}{MF}$ کدام است؟

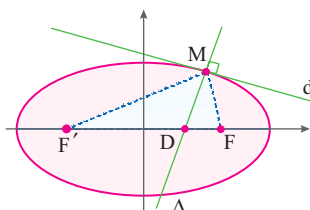
۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$

۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۲ می دانیم $e = \frac{DF}{MF}$ است، بنابراین باید خروج از مرکز بیضی را پیدا کنیم، مطابق شکل داریم: $\begin{cases} a=5 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{DF}{MF} = \frac{3}{5}$

۶۵۷. در شکل زیر نقاط F و F' کانون های بیضی هستند و خط d در نقطه M بر بیضی مماس است و خط Δ در M بر خط d عمود شده است. اگر خط Δ قطر بزرگ

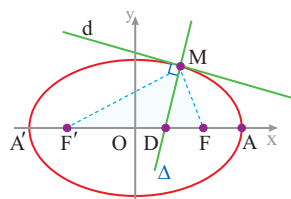
را در D قطع کند و $\frac{DF}{MF} = \frac{1}{3}$ و اندازه قطر کوچک بیضی $2\sqrt{2}$ باشد، اندازه قطر بزرگ بیضی کدام است؟



۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{5}$

۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

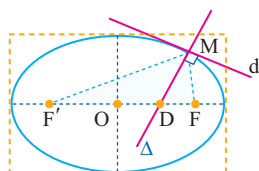
۶۵۸. در بیضی شکل زیر خط d در نقطه M واقع بر بیضی بر آن مماس بوده و خط Δ در همان نقطه بر d عمود است و محور x ها را در D قطع کرده است. اگر



بوده و محیط مثلث MFF' برابر ۲۴ باشد، بیضی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

- (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $9\sqrt{3}$ (۴) $6\sqrt{3}$

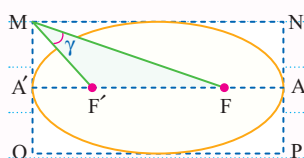
۶۵۹. در مستطیل به اضلاع ۱۰ و ۸ بزرگ‌ترین بیضی ممکن به کانون‌های F و F' را قرار داده‌ایم. در نقطه M خط d را بر بیضی مماس کرده‌ایم و خط Δ در M بر



d عمود شده و محور بیضی را در D قطع کرده حاصل $\frac{DF}{MF}$ کدام است؟

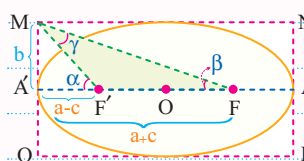
- (۱) $3/0$ (۲) $4/0$ (۳) $8/0$ (۴) $6/0$

اگر بیضی E مطابق شکل درون مستطیل $MNPQ$ قرار گرفته باشد و از رأس M به کانون‌های بیضی یعنی نقاط F, F' وصل کنیم، می‌توان



$$\tan \gamma = \frac{c}{b}$$

با توجه به این که در مثلث MFF' زاویه α زاویه خارجی محسوب می‌شود، بنابراین با جمع دو زاویه داخلی غیر مجاور برابر است:



$$\begin{aligned} \triangle MAF': \tan \alpha &= \frac{b}{a-c} \\ \triangle MAF: \tan \beta &= \frac{b}{a+c} \end{aligned}$$

$$\tan \gamma = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{b}{a-c} - \frac{b}{a+c}}{1 + \frac{b}{a-c} \times \frac{b}{a+c}}$$

با ساده کردن عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\tan \gamma = \frac{\frac{b(a+c) - b(a-c)}{a^2 - c^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2 - c^2}} = \frac{\frac{2bc}{a^2 - c^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2 - c^2}} = \frac{2bc}{2b^2} = \frac{c}{b}$$

می‌توان زاویه γ [زاویه رویت پاره خط FF' از رأس‌های مستطیل محیط بر بیضی] را بر حسب خروج از مرکز نیز محاسبه کرد:

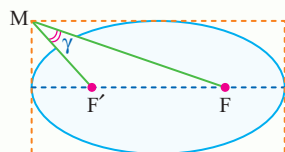
$$\tan \gamma = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 &= 1 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1-e^2} \\ \frac{a^2}{b^2} &= 1 + \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow \frac{1}{1-e^2} = 1 + \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{1}{1-e^2} - 1} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned} \right. \Rightarrow \tan \gamma = \frac{c}{b} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}$$

Test درون مستطیل به اضلاع ۶ و $4\sqrt{3}$ بزرگ‌ترین بیضی ممکن به کانون‌های F و F' را قرار داده‌ایم، پاره خط FF' از یکی از رأس‌های مستطیل با

کدام زاویه رویت می‌شود؟

- (۱) 3° (۲) 45° (۳) 6° (۴) 12°



$$\begin{cases} 2b=6 \Rightarrow b=3 \\ 2a=4\sqrt{3} \Rightarrow a=2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12 - 9} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \gamma = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \gamma = 3^\circ$$

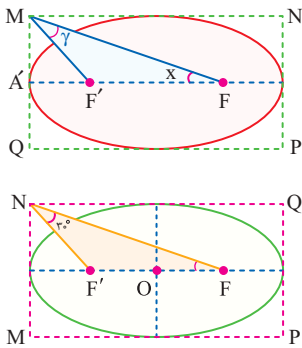
۱ شکل مسئله به صورت مقابل است:

۶۶۰. در بیضی مقابل خروج از مرکز برابر $\frac{1}{4}$ و اندازه قطر بزرگ برابر ۴ است، زاویه $\widehat{MFA'}$ کدام است؟

- (۱) 30° (۲) 60° (۳) 45° (۴) 75°

۶۶۱. در شکل مقابل نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$



اگر یک خط به فاصله k واحد از مرکز بیضی و عمود بر قطر بزرگ بیضی [موازی قطر کوچک] مطابق شکل بیضی را قطع کند، اندازه پاره خط ایجاد شده با سه بار استفاده از قضیه فیثاغورس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$MN = \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - k^2}$$

برای اثبات کافیت از M به F و F' وصل کنیم، بنابراین داریم:

$$\textcircled{1} MHF : h^2 = x^2 - (c-k)^2$$

$$x^2 - (c-k)^2 = (a-x)^2 - (c+k)^2$$

$$\textcircled{2} MF'H : h^2 = (a-x)^2 - (c+k)^2$$

$$(a-x)^2 - x^2 = (c+k)^2 - (c-k)^2 \Rightarrow (a-x-x)(a-x+x) = (2c)(2k) \Rightarrow 4(a-x)(a) = 4ck \Rightarrow x = a - \frac{ck}{a}$$

$$h^2 = (a - \frac{ck}{a})^2 - (c-k)^2 = a^2 + \frac{c^2 k^2}{a^2} - 2ck - (c^2 + k^2 - 2ck) = a^2 - c^2 + \frac{c^2 k^2}{a^2} - k^2$$

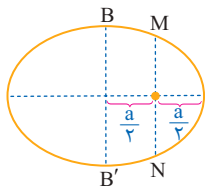
$$= b^2 - k^2 (1 - \frac{c^2}{a^2}) = b^2 - k^2 (\frac{b^2}{a^2}) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - k^2) \Rightarrow h = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - k^2} \Rightarrow MN = 2h = \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - k^2}$$

$$MF, MF' = a \pm ek$$

یکی از نتایج جالب اثبات فوق یافتن اندازه شعاع‌های حامل بیضی است، که برابر است با:

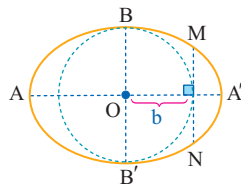
حالات خاص

$$k = \frac{a}{2}$$



$$MN = \sqrt{3}b$$

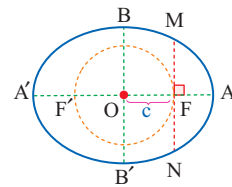
$$k = b$$



وتر مماس بر دایره فرعی

$$MN = \frac{2bc}{a}$$

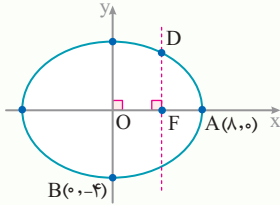
$$k = c$$



وتر مماس بر دایره کانونی

$$MN = \frac{2b^2}{a}$$

(تمرین کتاب درسی)



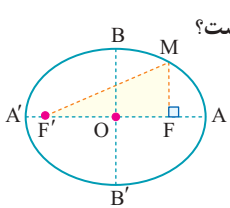
Test در بیضی شکل زیر F یکی از کانون های بیضی است، مختصات نقطه D کدام است؟

- (۱) $(4\sqrt{3}, 4)$
- (۲) $(2, 4\sqrt{3})$
- (۳) $(4\sqrt{3}, 2)$
- (۴) $(4, 4\sqrt{3})$

۳ در این بیضی $a=8$ و $b=4$ است، بنابراین:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3} \Rightarrow FD = \frac{b^2}{a} = \frac{4^2}{8} = 2 \Rightarrow D(4\sqrt{3}, 2)$$

۶۶۲. در شکل زیر F و F' کانون های بیضی هستند. اگر قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی برابر ۶ و $2\sqrt{5}$ باشند، مساحت مثلث رنگ شده چقدر است؟



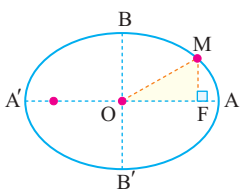
$$\frac{10}{3} \quad (2)$$

$$\frac{8}{3} \quad (1)$$

$$\frac{18}{5} \quad (4)$$

$$\frac{12}{5} \quad (3)$$

۶۶۳. در بیضی شکل زیر F کانون است. اگر قطر بزرگ برابر ۵ و قطر کوچک برابر $\sqrt{21}$ باشد، مساحت مثلث رنگ شده چقدر است؟



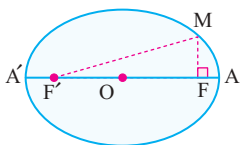
$$4/2 \quad (2)$$

$$2/1 \quad (1)$$

$$3/5 \quad (4)$$

$$1/5 \quad (3)$$

۶۶۴. در شکل مقابل طول قطر بزرگ و فاصله کانونی بیضی به ترتیب برابر ۸ و ۴ است، طول MF' چقدر است؟



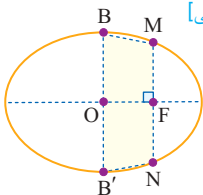
$$5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

$$7 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

۶۶۵. در بیضی شکل مقابل اندازه وتر MN برابر $3/6$ و اندازه قطر بزرگ بیضی ۱۰ است، مساحت چهار ضلعی رنگ شده کدام است؟ $[F$ کانون بیضی]



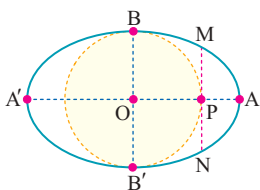
$$14/8 \quad (2)$$

$$14/6 \quad (1)$$

$$16/8 \quad (4)$$

$$19/2 \quad (3)$$

۶۶۶. در بیضی شکل زیر MN بر دایره فرعی (دایره به قطر BB') مماس است. اگر قطر بزرگ و فاصله کانونی بیضی برابر ۱۰ و ۸ باشد، طول MN چقدر است؟



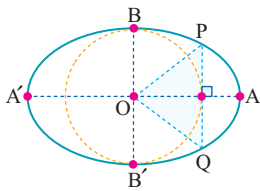
$$4/8 \quad (1)$$

$$3 \quad (2)$$

$$3/6 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$

۶۶۷. در بیضی شکل مقابل قطر بزرگ برابر ۸ و فاصله کانونی برابر ۴ است. مساحت مثلث رنگی کدام است؟



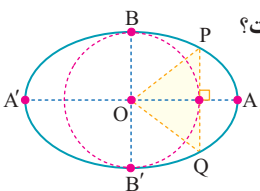
$$12 \quad (2)$$

$$10 \quad (1)$$

$$8 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

۶۶۸. در شکل مقابل PQ بر دایره به قطر BB' مماس است، اگر مثلث OPQ متساوی الاضلاع باشد، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟



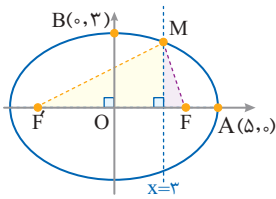
$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

۶۶۹. در بیضی شکل مقابل اندازه پاره خط MF کدام است؟



- ۱) ۲/۴
۲) ۲/۶
۳) ۲/۸
۴) ۲/۵



اندازه وتر گذرا از کانون و محدود به دایره اصلی

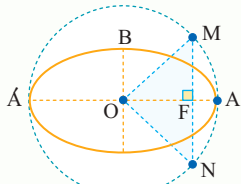
اگر از کانون F در یک بیضی، عمودی بر قطر بزرگ رسم کنیم تا دایره اصلی را در M و N قطع کند، اندازه پاره خط MN با قطر کوچک بیضی برابر است:

$MN = 2b$

کافیست از M به مرکز بیضی وصل کنیم، مثلث OMF قائم الزاویه است و داریم:

$MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$

Test در شکل زیر F کانون بیضی است. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، پاره خط MN از مرکز بیضی با کدام زاویه رویت می شود؟

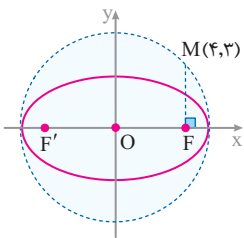


- ۱) ۳۰°
۲) ۶۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۴۵°

۲ می دانیم $MF = b$ است، حال اگر فرض کنیم $\widehat{MOF} = \alpha$ باشد $\tan \alpha = \frac{b}{c}$ خواهد بود، اما جواب مسئله 2α است، بنابراین ابتدا باید $\frac{b}{c}$ را پیدا کنیم:

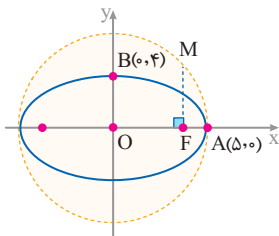
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} + 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} + 1 \Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ$$

۶۷۰. در شکل مقابل F کانون بیضی است و M روی دایره اصلی بیضی قرار دارد. کمترین فاصله نقطه F از دایره چقدر است؟



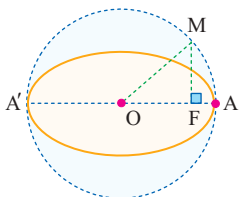
- ۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶۷۱. در بیضی شکل مقابل نقطه F یکی از کانون های بیضی است، مختصات نقطه M کدام است؟



- ۱) (۳, ۶)
۲) (۳, ۵)
۳) (۴, ۴)
۴) (۳, ۴)

۶۷۲. در شکل زیر قطر دایره بر قطر بزرگ بیضی منطبق است و F کانون بیضی است. اگر طول قطر بزرگ برابر ۱۰ و فاصله کانونی بیضی برابر ۶ باشد، فاصله کانون



F از شعاع OM چقدر است؟

- ۱) ۱/۲
۲) ۳/۶
۳) ۴/۸
۴) ۲/۴



Tweet



Maryam Mirzakhani 
@Maryam1977

ریاضیات زیبایی خود را تنها به افراد صبور نشان میدهد.

Mathematics reveals its beauty only to those who are patient

درس اول :  **مفهوم فضای $\mathbb{R}^3$**

درس دوم :  **ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها**

[Translate Tweet](#)

07:30 . 5/31/20

 View Tweet activity

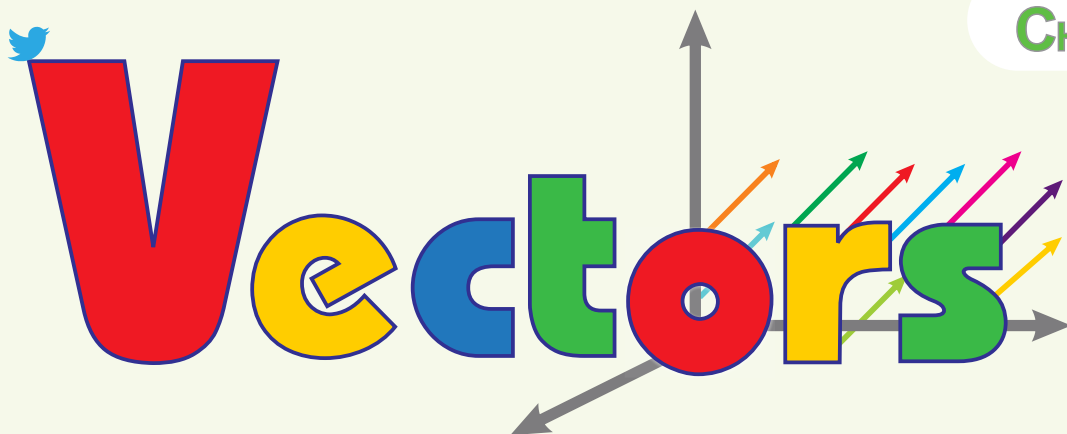
 91,337

 5,847

 8,150,910,208



CHAPTER 3

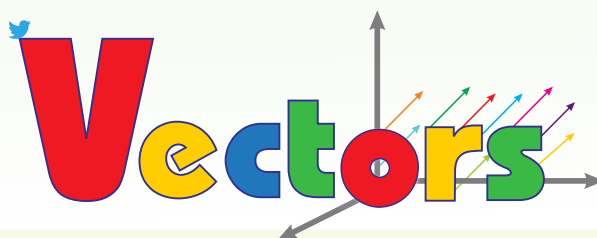


Add another Tweet





Maryam Mirzakhani
1977-2017



CHAPTER 3

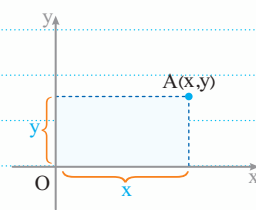
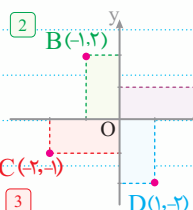
معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

درس اول



صفحه ۶۲ تا ۷۶ کتاب درسی

هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (x, y) مشخص می‌شود و برعکس هر زوج مرتب مانند (x, y) معرف یک نقطه از صفحه است و علامت مؤلفه‌های x و y مطابق جدول زیر است:



شماره ناحیه	x	y
1	+	+
2	-	+
3	-	-
4	+	-



معرفی فضای $\mathbb{R}^2$

• اگر نقطه $A(m-1, m-2)$ در ربع چهارم دستگاه مختصات واقع باشد، حدود m کدام است؟

$$\begin{cases} m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ m-2 < 0 \Rightarrow m < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < m < 2$$

مجموعه $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آن را با $\mathbb{R}^2$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

هر نقطه به صورت $M(0, y)$ روی محور y ها و هر نقطه به صورت $N(x, 0)$ روی محور x ها واقع است. یعنی هر نقطه‌ای که روی یکی از محورهای مختصات واقع باشد، مؤلفه دیگر آن صفر است. [روی محور x ها، عرض نقطه‌ها برابر صفر است و روی محور y ها، طول نقطه‌ها برابر صفر است.]

• اگر نقطه $A(m-1, m-2)$ روی محور y ها واقع باشد، فاصله آن از محور x ها چقدر است؟

روی محور y ها باید طول نقطه (یعنی x آن) صفر باشد:

$$m-1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow A(0, -1) \Rightarrow \text{فاصله از محور } x \text{ ها } = |y| = 1$$

Test اگر نقطه $A(m-3, m+1)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات قرار داشته باشد، حدود m کدام است؟

$$m > 3 \quad (1)$$

$$-1 < m < 3 \quad (2)$$

$$m < -1 \quad (3)$$

۲ در ناحیه دوم دستگاه مختصات دو بعدی باید $x < 0$ و $y > 0$ باشد:

$$\begin{cases} m-3 < 0 \Rightarrow m < 3 \\ m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 3$$

۷۹۴. به ازای کدام مقدار m نقطه $A(m+3, m-1)$ بر محور x ها واقع است؟

$$-3 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۷۹۵. اگر نقطه $A(m+3, m-1)$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات قرار داشته باشد، حدود m کدام است؟

$$m < 3 \quad (4)$$

$$m < -3 \quad (3)$$

$$-3 < m < 1 \quad (2)$$

$$m > -3 \quad (1)$$

۷۹۶. اگر یکی از دو نقطه $A(n-1, m^2+1)$ و $B(n^2+2, m+2)$ بر محور x ها و دیگری بر محور y ها واقع باشد، فاصله آن‌ها از هم چقدر است؟

$$\sqrt{33} \quad (4)$$

$$\sqrt{34} \quad (3)$$

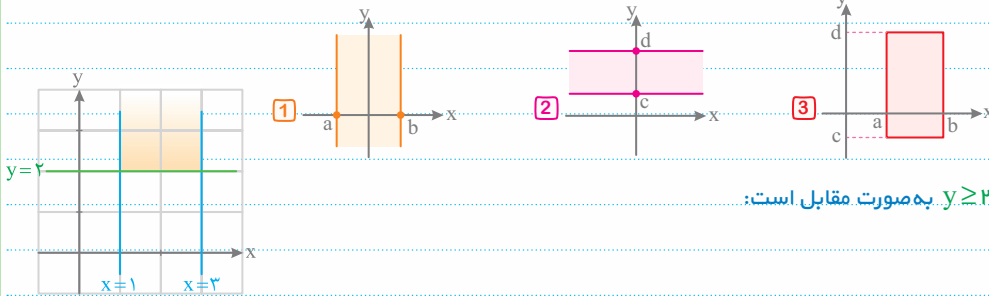
$$\sqrt{29} \quad (2)$$

$$\sqrt{31} \quad (1)$$

نمودار یک رابطه شامل تمام نقاطی است که مختصات آن‌ها در آن رابطه صدق می‌کند، در حالت کلی نمودار رابطه‌های مقدماتی شامل مدل‌های زیر است:

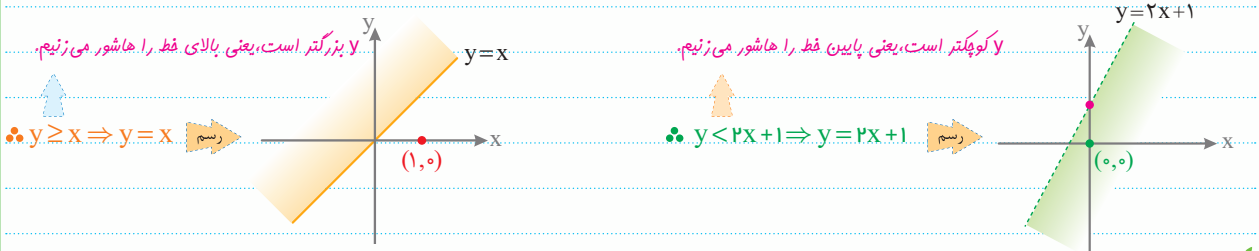
پاره خط افقی	پاره خط قائم	نیم خط افقی	نیم خط قائم	خط افقی	خط قائم
$a \leq x \leq b$ و $y = c$	$x = a$ و $c \leq y \leq d$	$y = c$ و $x \geq a$	$x = a$ و $y \geq c$	$y = c$	$x = a$

رابطه $a \leq x \leq b$ تمام ناحیه بین دو خط قائم $x = a$ و $x = b$ [شکل 1] و رابطه $c \leq y \leq d$ تمام ناحیه بین دو خط افقی $y = c$ و $y = d$ [شکل 2] است. همچنین رابطه $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ یک مستطیل است [شکل 3] که ابعاد آن $|b-a|$ و $|d-c|$ است.



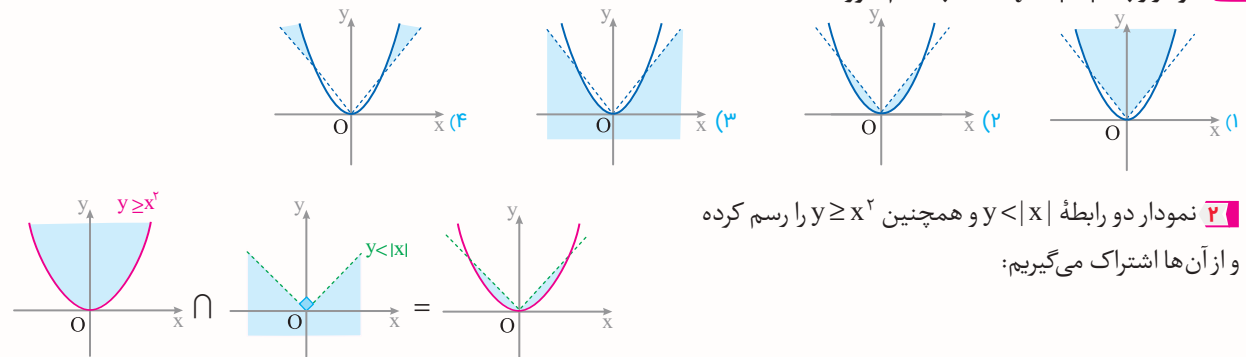
نمودار رابطه $1 \leq x \leq 3$ و $y \geq 2$ به صورت مقابل است:

به طور کلی برای رسم نمودار یک رابطه که به صورت نامساوی داده شده است، ابتدا آن رابطه را در حالت تساوی رسم می‌کنیم، سپس یک نقطه مشخص از صفحه را درون آن رابطه قرار می‌دهیم. اگر نقطه درون رابطه صدق کرد همان سمتی از نمودار که شامل آن نقطه است را هاشور می‌زنیم (جواب است)، و اگر صدق نکرد سمت دیگر نمودار، جواب است.



در حالتی که نامساوی به صورت « $\geq$ » یا « $\leq$ » باشد، نقاط مرزی به شکل خط ممتد و اگر به صورت « $<$ » یا « $>$ » باشد، به شکل خط چین است.

Test نمودار رابطه $x^2 \leq y < |x|$ به کدام صورت است؟



نمودار دو رابطه $y < |x|$ و همچنین $y \geq x^2$ را رسم کرده و از آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

۱۰۱۹. اگر $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 12$ باشد، حداکثر عبارت $\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^2$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۱۶

۱۰۲۰. اگر $a = (x, y, z)$ و $b = (2, 1, 2)$ و حاصل ضرب داخلی آن‌ها برابر ۶ باشد، کمترین مقدار برای $x^2 + y^2 + z^2$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$



کوشی - شوارتز - ویتز - رتبه‌های زیر ۱۰۰

Test اگر $4x^2 + 2y - z = 18$ باشد، به ازای کدام مقدار x عبارت $4x^2 + y^2 + z^2$ حداقل می‌شود؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۶

۲ با فرض $u = (2x, y, z)$ و $v = (2, 2, -1)$ و با توجه به نامساوی کوشی - شوارتز می‌توان گفت که باید $\frac{2x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=-t \end{cases}$ دو بردار موازی شوند، تا عبارت $4x^2 + y^2 + z^2$ حداقل شود، بنابراین داریم:

حال می‌دانیم $4x + 2y - z = 18$ است. بنابراین مقادیر x, y, z را بر حسب t در آن جایگذاری می‌کنیم: $4(t) + 2(2t) - (-t) = 18 \Rightarrow 9t = 18 \Rightarrow t = 2$ بنابراین به ازای $x = 2$ عبارت داده شده حداقل می‌شود.

۱۰۲۱. اگر $2x - y + 3z = 12$ باشد، به ازای کدام مقدار y عبارت $x^2 + y^2 + 9z^2$ حداقل می‌شود؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳



تصویر بردار بر بردار

اگر a و b دو بردار باشند، در این صورت تصویر قائم بردار a بر بردار b را با a' یا $\text{proj}\left(\frac{a}{b}\right)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{proj}\left(\frac{a}{b}\right) = a' = \left(\frac{a \cdot b}{b \cdot b}\right) b = \left(\frac{a \cdot b}{|b|^2}\right) b$$

تصویر قائم a بر b همواره مضربی از بردار b است

اگر a' مضرب مثبت b است. $a \cdot b > 0$

اگر a' مضرب منفی b است. $a \cdot b < 0$

Test تصویر قائم بردار $a = (0, 3, -6)$ روی امتداد بردار $b = (1, 2, -2)$ کدام است؟

- (۱) $(2, -1, -2)$ (۲) $(2, 4, -4)$ (۳) $(-2, -4, 4)$ (۴) $(2, 3, -1)$

$$a' = \left(\frac{a \cdot b}{b \cdot b}\right) b = \left(\frac{0 + 6 + 12}{4 + 4 + 4}\right) b = 2b = (2, 4, -4)$$

۲ همیشه ابتدا عبارت داخل پرانتز را حساب می‌کنیم:

۱۰۲۲. تصویر قائم بردار $a = (0, -3, 6)$ روی امتداد بردار $b = (2, -1, -2)$ کدام است؟

- (۱) $(2, -1, -2)$ (۲) $(-2, 1, 2)$ (۳) $(4, -2, -4)$ (۴) $(2, 3, -1)$

1 در ماتریسی که به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نشان داده می شود، m معرف تعداد سطرها و n معرف تعداد ستون هاست؛ بنابراین در این ماتریس ۲ سطر و ۳ ستون وجود دارد، یعنی در هر سطر ۳ درایه و در هر ستون ۲ درایه وجود دارد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

2 باید $n - 1 = 3$ باشد، در نتیجه $n = 4$ است، بنابراین:

۱۰ درایه $[a_{ij}]_{5 \times 2}$ ۱۲ درایه $[a_{ij}]_{4 \times 2}$ ۱۲ درایه $[a_{ij}]_{6 \times 2}$ ۱۵ درایه $[a_{ij}]_{5 \times 3}$

3 در این ماتریس $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ است، بنابراین $a_{ii} = 1$ است در ضمن در سایر گزینه ها، گزینه ۳ نادرست است چون a_{21} یعنی درایه واقع در سطر ۲ و ستون ۱ است.

4 چون شماره سطر ثابت و برابر ۲ است این درایه ها در سطر دوم واقع اند: $A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \rightarrow a_{2j}, 1 \leq j \leq 2$

5 درایه سطر اول و ستون سوم همان X و درایه سطر سوم و ستون دوم عدد ۸ است، بنابراین $X = 8 + 5 = 13$ است، حال منظور از $\sum_{j=1}^4 a_{3j}$ مجموع درایه های سطر سوم است، زیرا اگر از ۱ تا ۴ تغییر کند، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^4 a_{3j} = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} = 7 + 8 + 9 + 1 = 25$$

6 عبارت $\sum_{j=1}^2 a_{2j}$ معرف مجموع درایه های سطر دوم و عبارت $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}$ معرف جمع کل درایه های ماتریس است، بنابراین اختلاف آن ها برابر است با:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} - \sum_{j=1}^2 a_{2j} = 8 - 2 = 6$$

7 به جای هر کدام از درایه ها با توجه به تابع داده شده بر حسب i و j مقدار عددی آن ها را قرار می دهیم، مثلاً در محاسبه a_{12} به جای $i = 1$ و به جای $j = 2$ قرار می دهیم در نتیجه درایه ها به صورت زیر خواهند بود:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 - 1 & 1^2 - 2 & 1^2 - 3 \\ 2^2 - 1 & 2^2 - 2 & 2^2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه ها} = 3$$

8 کافیت فقط درایه های سطر دوم را پیدا کنیم، یعنی $i = 2$ است:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه ها} = 3 + 0 + (-5) = -2$$

9 در ماتریس داده شده $a_{11} = 1$ است که تنها گزینه های ۳ و ۴ به ازای $i = 1$ و $j = 1$ برابر ۱ می شوند، در ضمن $a_{22} = 4$ است که تنها گزینه ۴ به ازای $i = 2$ و $j = 2$ برابر ۴ می شود، بنابراین $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ که $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ باشد به صورت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ است.

10 در درایه های بالای قطر اصلی باید شماره ستون بزرگتر از شماره سطر باشد، یعنی گزینه ۴ تنها درایه بالای قطر اصلی است و گزینه های ۱ و ۲ روی قطر اصلی و گزینه ۳ زیر قطر اصلی واقع است.

11 می دانیم در ماتریس های مربعی اگر $i < j$ درایه ها را با a_{ij} نشان دهیم روی قطر اصلی $i = j$ و بالای قطر اصلی $i < j$ و پایین قطر اصلی $i > j$ است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1-2 & 1-3 \\ 2 \times 1 & 2+2 & 2-3 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

مجموع = ۳

12 درایه های زیر قطر اصلی به شکل زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 11 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه های زیر قطر اصلی} = 28$$

$$A = \begin{bmatrix} 2X+2 & 2-X \end{bmatrix} \Rightarrow 2X+2 = 2-X \Rightarrow X = 0$$

14 ابتدا باید ماتریس های A و B را تشکیل می دهیم و سپس آن ها را در یک ماتریس زیر هم بنویسیم (یعنی A بالا و B پایین)

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 4+1 & 4+4 & 4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+4 & 1+9 \\ 4+1 & 4+4 & 4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه های ستون دوم برابر است با: $3 + 5 + 8 = 16$

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 3 & 3 \\ 1 & 2+2 & 3 \\ 1 & 1 & 3+3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه های قطری} = 1+4=5$$

16 این ماتریس به صورت $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ است که اسکالر غیر همانی است.

372 ۱ ماتریس A یک ماتریس افقی و ماتریس B یک ماتریس قائم است بنابراین دترمینان ماتریس BA برابر صفر است اما دترمینان AB را باید محاسبه کرد:

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

373 ۳ $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-6}$

374 ۴ $(2A)(2A^{-1}) = 6(AA^{-1}) = 6I \Rightarrow |6I| = 6^2 |I| = 36$

375 ۴ $|2A^{-1}| \times \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 2^2 |A^{-1}| \times (-2) = 1$

$\Rightarrow \frac{-A}{|A|} = 1 \Rightarrow |A| = -8$

376 ۳ $|A^{-1}| = \frac{1}{2} \Rightarrow |A| = 2$

$$|-2A| |A| = (-2)^2 |A| |A| = 4 \times 2 \times A = 8^2 |A| = 64 \times 2 = 128$$

377 ۱ از طرفین تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$|-A^2| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^2 |A|^2 = 1(-9+8)$$

$|A|^2 = 1 \Rightarrow (A^{-1})^4 = |A^{-1}|^4 = \frac{1}{|A|^4} = 1$

378 ۱ $|(P^{-1}AP)^6| = |P^{-1}A^6P| = |P^{-1}| |A|^6 |P| = |A|^6 = (-1)^6 = 1$

379 ۱ ابتدا $A - I$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - I| = 2$$

$$|B(A - I)^{-1}| = |B| \times \frac{1}{|A - I|} = (-6) \left(\frac{1}{2}\right) = -3$$

380 ۴ ماتریس $2I$ را به طرف دوم می‌بریم و از طرفین تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$A^{-1}BA - 2I = A \Rightarrow A^{-1}BA = A + 2I$$

$$|A^{-1}BA| = |A + 2I| \Rightarrow |A^{-1}| |B| |A| = |A + 2I| \Rightarrow |B| = |A + 2I|$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 11$$

381 ۲ $|A^{-1}B + I| = |A^{-1}B + A^{-1}A|$

$$= |A^{-1}(B + A)| = |A^{-1}| |B + A| = \frac{|A + B|}{|A|} = \frac{-2}{3}$$

382 ۱ $|A^{-1}BA + 3I| = |A^{-1}BA + 3A^{-1}A|$

$$= |A^{-1}(B + 3I)A| = |A^{-1}| |B + 3I| |A| = |B + 3I| = 2$$

383 ۲ ابتدا دترمینان خواسته شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$|A^{-1} + A| = |A^{-1}(I + A^2)| = |A^{-1}| |I + A^2|$$

حال ماتریس $A^2 + I$ را تشکیل می‌دهیم و دترمینان آن را به دست می‌آوریم:

$$A^2 + I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^2 + I| = 6$$

بنابراین دترمینان خواسته شده برابر است با:

$$|A^{-1} + A| = \frac{|I + A^2|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

384 ۲ ماتریس A^{-1} به صورت $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$ و ماتریس B^{-1} را به صورت $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj}(B)$ می‌نویسیم:

$$|A^{-1} + B^{-1}| = |A^{-1}BB^{-1} + A^{-1}AB^{-1}|$$

$$= |A^{-1}(A + B)B^{-1}| = |A^{-1}| |A + B| |B^{-1}|$$

$$= \frac{|A + B|}{|A| |B|} = \frac{6}{|-2|} = \frac{6}{-2} = -3$$



مقاطع مخروطی



385 ۱ سطح حاصل از دوران رویه مخروطی یا سطح مخروطی نامیده می‌شود و فصل مشترک هر صفحه با یک رویه مخروطی مقطع مخروطی نامیده می‌شود.

386 ۱ صفحه‌ای که به طور مایل (و غیر موازی با مولد) رویه مخروطی را قطع می‌کند بیضی و در حالت خاصی که از رأس عبور کند نقطه به وجود می‌آورد.

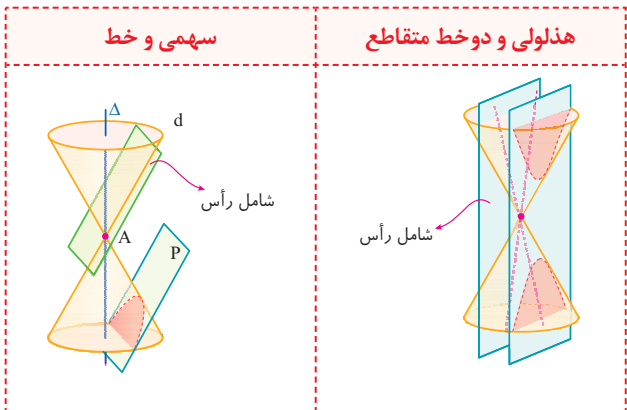
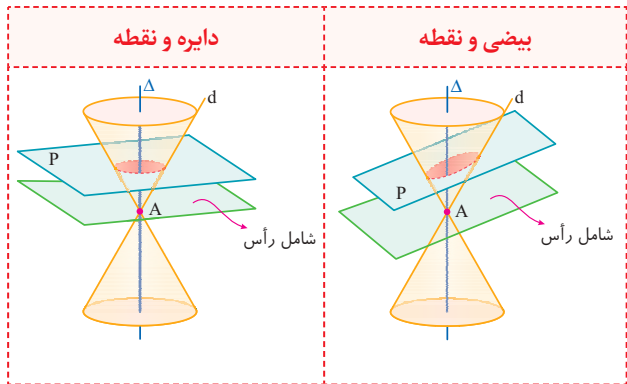
387 ۴ فصل مشترک یک صفحه و رویه مخروطی تحت هیچ شرایطی دو خط موازی نخواهد شد اما در حالت‌های خاص که دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی نباشد، دو خط متقاطع، یک خط یا یک نقطه می‌تواند باشد.

388 ۲ صفحه‌ای که به موازات مولد رویه مخروطی آن را قطع می‌کند سهمی و در حالت خاص که صفحه شامل رأس باشد، یک خط می‌تواند باشد.

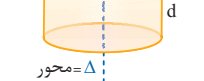
389 ۲ صفحه‌ای که عمود بر محور رویه مخروطی آن را قطع کند دایره و در حالت خاص که صفحه از رأس عبور کند نقطه به وجود می‌آورد.

390 ۳ صفحه‌ای که به موازات محور رویه مخروطی آن را قطع می‌کند هذلولی و در حالت خاص دو خط متقاطع به وجود می‌آورد.

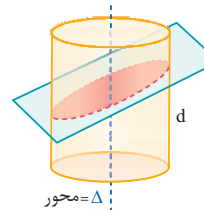
391 اگر دو صفحه موازی یک رویه مخروطی را قطع کنند سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سهمی و دو هذلولی می تواند سهمی و خط یا دایره و نقطه یا بیضی و نقطه یا هذلولی و دو خط متقاطع نیز باشد:



392 اگر صفحه عمود بر محور سطح استوانه ای آن را قطع کند، سطح مقطع به وجود آمده یک دایره است.



393 از دوران خط d حول Δ یک سطح استوانه ای به وجود می آید که اگر صفحه P غیر عمود بر Δ و غیر موازی با آن سطح استوانه ای را قطع کند، سطح مقطع به وجود آمده یک بیضی است.

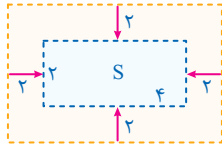


394 از تقاطع یک صفحه با همه رویه های کروی، استوانه ای و مخروطی امکان ایجاد مقطع دایره ای وجود دارد.

395 از تقاطع یک صفحه با رویه کروی هرگز یک بیضی ایجاد نمی شود و سطح مقطع حاصل همواره یک دایره و در حالت خاص که صفحه مماس بر رویه کروی باشد، یک نقطه خواهد بود.

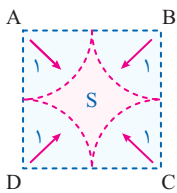
396 نقاط مورد نظر روی خطوط d_1 و d_2 هستند و از آن جایی که هر خط شامل بی شمار نقطه است، بنابراین گزینه **4** جواب است.

397 برای این که یک سکه کاملاً درون یک منحنی بسته قرار بگیرد باید فاصله مرکز سکه از تمام نقاط منحنی از شعاع سکه بزرگتر باشد، بنابراین باید فاصله مرکز سکه از تمام اضلاع مستطیل بیش از ۲ باشد:



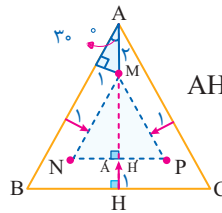
$$S = 4 \times 2 = 8$$

398 مکان هندسی نقاطی که فاصله آن ها از رأس A بزرگتر از ۱ است، بیرون دایره به مرکز A و به شعاع ۱ است و به طریق مشابه در سایر رئوس نیز این داستان برقرار است. بنابراین مکان هندسی مورد نظر مطابق شکل است و مساحت آن برابر است با:



$$S = 2^2 - 4 \left(\frac{1}{4} \pi \times 1^2 \right) = 4 - \pi$$

399 مکان هندسی نقاطی که فاصله آن ها از هر سه ضلع بزرگتر از ۱ است مثلث رنگ شده است و مساحت آن برابر است با:



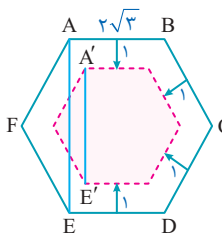
$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3}) = 3 \Rightarrow MH' = 3 - 2 - 1 = 3$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a' = 3 \Rightarrow a' = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

بنابراین مساحت خواسته شده برابر است با:

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{6}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 = 3\sqrt{3}$$

400 مکان هندسی نقاطی که فاصله آن ها از همه اضلاع بزرگتر از ۱ است، شش ضلعی رنگ شده است و مساحت آن برابر است با:



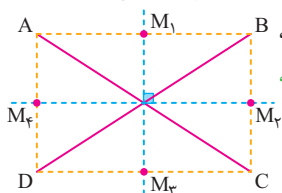
$$AE = \sqrt{3} \times (2\sqrt{3}) = 6$$

$$A'E' = 6 - 1 - 1 = 4$$

حال قطر کوچک شش ضلعی رنگ شده برابر ۴ است، بنابراین ضلع آن قابل به دست آوردن است:

$$4 = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{3} \right) = 8\sqrt{3}$$

401 مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو قطر مستطیل به یک فاصله هستند، محورهای تقارن مستطیل هستند،



این خطوط محیط مستطیل را در ۴ نقطه قطع می کنند.

Vectors

بردارها

V

794 باید عرض نقطه برابر صفر باشد: $m-1=0 \Rightarrow m=1$

795 در ناحیه چهارم دستگاه مختصات دوی بعدی باید $x>0$ و $y<0$ باشد:

$$\begin{cases} m+3>0 \Rightarrow m>-3 \\ m-1<0 \Rightarrow m<1 \end{cases} \Rightarrow -3<m<1$$

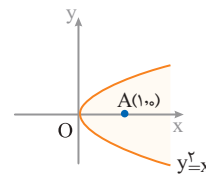
796 نقطه A نمی تواند روی محور X ها واقع شود چون عرض آن همواره مثبت است، همچنین نقطه B نمی تواند روی محور Y ها واقع شود چون طول آن همواره مثبت است، بنابراین A روی محور

$$\begin{cases} n-1=0 \Rightarrow n=1 \\ m+2=0 \Rightarrow m=-2 \end{cases}$$

یعنی: B روی محور X ها قرار دارد، یعنی:

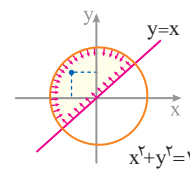
از طرفی فاصله دونقطه از رابطه $|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ به دست می آید، بنابراین: $|AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

797 باید نمودار سهمی $y=x^2$ را در بازه $[-1, 2]$ در نظر بگیریم که گزینه 1 شکل درست این نمودار را نشان می دهد.

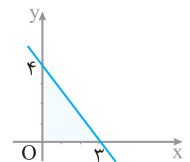


798 ابتدا نمودار $y^2 = x$ را رسم می کنیم، حال

چون نقطه $A(1, 0)$ در نامعادله صدق می کند، گزینه 2 جواب است.

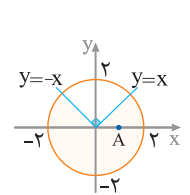


799 نمودارهای $y=x$ و $x^2+y^2=1$ را رسم می کنیم، سپس نقطه ای مانند $A(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ در هر دو نامعادله صدق می کند، بنابراین گزینه 1 جواب است.



800 نمودار خط $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ را رسم می کنیم و با نقطه گذاری به سطح مقابل می رسمیم:

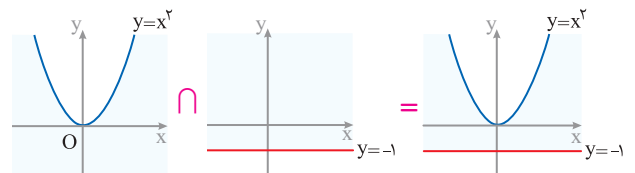
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$



801 نقطه $A(1, 0)$ در هر دو رابطه صدق می کند،

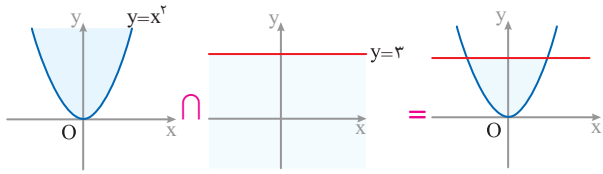
بنابراین سطح رنگ شده جواب مورد نظر است که مساحت دایره است: $S = \frac{3}{4}(\pi \times 2^2) = 3\pi$

802 نمودار رابطه های $y \geq -1$ و $y \leq x^2$ را رسم کرده و از آن ها اشتراک می گیریم:

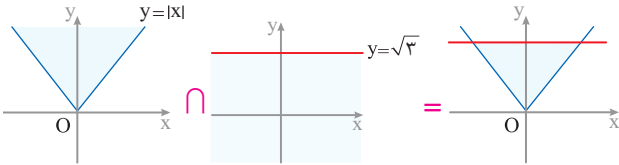


بنابراین گزینه 1 جواب است.

803 نمودار رابطه های $y \geq x^2$ و $y \leq 3$ را رسم کرده و از آن ها اشتراک می گیریم:



804 نمودار رابطه های $y \geq |x|$ و $y \leq \sqrt{3}$ را رسم کرده و از آن ها اشتراک می گیریم:



805 قسمت هاشور خورده درون دایره $x^2 + y^2 = 3$ و بیرون سهمی $y^2 = x$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3 \\ y^2 \geq x \end{cases} \Rightarrow x \leq y^2 \leq 3 - x^2$$

806 در ناحیه سوم دستگاه $\mathbb{R}^3$ همانند ناحیه سوم دستگاه $\mathbb{R}^2$ باید علامت x, y منفی باشد و علامت z نیز مثبت است. بنابراین تنها گزینه 2 در ناحیه سوم واقع است.

بررسی سایر گزینه ها:

1 ناحیه ششم 3 ناحیه چهارم 4 ناحیه پنجم.

807 در ناحیه پنجم دستگاه $\mathbb{R}^3$ علامت x, y همانند علامت x, y در ناحیه اول است ولی علامت z منفی است. یعنی $x>0, y>0, z<0$ است، بنابراین تنها گزینه 1 جواب است.

بررسی سایر گزینه ها:

2 ناحیه ششم 3 ناحیه هشتم 4 ناحیه هفتم

808 در ناحیه هشتم دستگاه $\mathbb{R}^3$ علامت x, y همانند علامت x, y در ناحیه چهارم است و علامت z منفی است، یعنی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x>0 \Rightarrow m>0 \\ y<0 \Rightarrow m-2<0 \\ z<0 \Rightarrow -2<0 \end{cases} \Rightarrow 0<m<2$$

809 نقطه ای که روی محور oy است، طول (x) و ارتفاع (z) آن صفر است، یعنی گزینه 2 جواب است.

810 باید عرض نقطه صفر باشد که در گزینه ها نقطه $(4, 0, 3)$ چنین است.

811 باید طول نقطه برابر صفر باشد، بنابراین گزینه 3 جواب است.

1137 حجم متوازی السطوح برابر با قدر مطلق ضرب مختلط این سه بردار است:

$$V = |(a \times b) \cdot ((a+b) \times (a-b))| = |(a \times b) \cdot (-a \times b + b \times a)| = 2|a \times b|^2$$

$$\begin{cases} a = (1, -1, 1) \\ b = (1, -2, 2) \end{cases} \Rightarrow a \times b = (0, -1, -1) \Rightarrow V = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 4$$

1138 با توجه به این که حجم متوازی السطوح برابر است با مساحت قاعده ضرب در ارتفاع، کافیتست حجم را بر مساحت قاعده تقسیم کنیم تا ارتفاع به دست آید:

$$\begin{cases} a = (2, -1, 0) \\ b = (0, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow a \times b = (-3, -6, 2), c = (4, 0, -1)$$

$$V = |c \cdot (a \times b)| = 14 \Rightarrow h = \frac{|c \cdot (a \times b)|}{|a \times b|} = \frac{14}{\sqrt{9+36+4}} = 2$$

1139 حجم هرم ساخته شده توسط ۳ بردار $\frac{1}{6}$ قدر مطلق ضرب مختلط ۳ بردار است:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} [1 \times (6) - 1 \times (-6)] = 2$$

1140 ابتدا عبارت درون پرانتز دوم را ساده می کنیم:

$$(a - c) \cdot ((b + a) \times c) = (a - c) \cdot (b \times c + a \times c)$$

حال عبارت $a - c$ را روی پرانتز دوم پخش می کنیم و حاصل برابر است با:

$$a \cdot (b \times c) + a \cdot (a \times c) - c \cdot (b \times c) - c \cdot (a \times c)$$

با توجه به جابه جایی دوری حاصل عبارت فوق برابر است با:

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = (1, 1, -2) \cdot (-2, 1, 0) = -1$$

1141 در گزینه های ۱، ۲، ۴ هر سه بردار در یک صفحه واقع اند و به طور قطع حاصل ضرب مختلط آن ها صفر است. اما در گزینه ۳ سه بردارها در یک صفحه قرار نمی گیرند و حاصل ضرب مختلط آن ها غیر صفر است.

1142 اگر $a \times c$ را به طرف اول ببریم و از a فاکتور بگیریم، داریم:

$$a \times b - a \times c = 0 \Rightarrow a \times (b - c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a \parallel b - c \\ b = c \end{cases}$$

وقتی $a \parallel b - c$ است دیگر عمود بر آن نیست و گزینه ۱ نادرست است، اما وقتی a با $b - c$ موازی است بردارهای a و $b - c$ یا به عبارتی a, b, c در یک صفحه هستند و ضرب مختلط آن ها صفر است.

1143 برای این که بتوان a را برحسب مجموع دو بردار در راستای V_1 و V_2 نوشت باید a و V_1 و V_2 هم صفحه باشند، یعنی ضرب مختلط آن ها صفر باشد:

$$a \cdot (V_1 \times V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-6) - 2(0-4) + m(0+2) = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

1144 کافیتست یکی از بردارها را برحسب بقیه حساب کنیم و در رابطه $a \cdot (b \times c)$ قرار دهیم:

$$c = 2a + 3b \Rightarrow a \cdot (b \times c) = a \cdot [b \times (2a + 3b)] = 2a \cdot (b \times a) = 0$$

همان طور که توضیح دادیم اگر ترکیب خطی سه بردار صفر باشد، سه بردار هم صفحه اند و ضرب مختلط آن ها صفر است.

1145 بردارهای $a \times b, a \times c, a \times d$ همگی بر بردار a عمود می باشند، بنابراین همگی درون یک صفحه قرار دارند یا به تعبیری دیگر، موازی یک صفحه اند.

1146 بردارهای $a \times i, b \times i, c \times i$ همگی عمود بر i هستند، پس قطعاً همگی درون یک صفحه قرار گیرند و در نتیجه ضرب مختلط آن ها صفر است.

1147 باید بردارهای $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ درون یک صفحه باشند یعنی ضرب مختلط آن ها صفر باشد.

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ a-1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$0(18-27) + 1(6-3a+2) - 2(9-3a+3) = 0$$

$$(9-3a) - 2(12-3a) = 0 \Rightarrow -15 + 3a = 0 \Rightarrow a = 5$$