فصل ۱
ماتریس و کاربردها

(ابتدا درسنامه مربوط به این فصل را در بخش درسنامه مطالعه نمایید.)

قسمت اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تساوی، جمع و تفاضل ماتریس‌ها

ماتریس اگر خوب مطالعه شود، بهترین نتیجه را در این بخش خواهید گرفت و همهٔ تست‌های آن را به درستی در کنکور جواب خواهید داد.

☆۱. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با فرض $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i\ge j \\ j & j>i \end{cases}$ تعریف می‌شود، مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲. اگر $A=[ij]_{۳\times۲}$ و $B=[(i-j)^{۲}]_{۲\times۲}$، آن‌گاه مقدار $a_{۱۱}b_{۲۲}+b_{۲۱}a_{۳۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

☆۳. اگر $A=\begin{bmatrix} x-۲y & ۱ \\ z^{۳} & -۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & x+۲y \\ -۸ & -۴ \end{bmatrix}$ در صورتی‌که $A=B$ باشد، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۰

☆۴. اگر $A=\begin{bmatrix} x-۳y & x \\ ۱ & y \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۶-y \\ ۱ & ۶-x \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۴ & -۸ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ با فرض $A=B$ حاصل $۲B+C$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

☆۵. اگر برای ماتریس‌های A و B داشته باشیم $A+B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ آن‌گاه درایهٔ واقع بر سطر اول و ستون دوم ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

★۶. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$، $a_{ij}=\begin{cases} ۳i+۴j & i\le j \\ ۲i-j & i>j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲x+y & ۴a+b-۷ \\ a-b+۱ & ۳x+۵y \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه با فرض $A=B$ حاصل $(۳x+۲y-۳a)^{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۲۵

★۷. اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ i-j & i\ne j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه با فرض این‌که مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس $xA+yB$ برابر باشند، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $-\frac{۳}{۸}$

☆۸. اگر $\begin{bmatrix} x^{۲} & y^{۲} \\ z^{۴} & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۲y \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار xyz کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱- ۴) صفر

☆۹. اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۷ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}$ و ماتریس B چنان باشد که $A+B=I$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی B کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۵-

دانش‌آموزان عزیز! در صورت کمبود وقت حتماً به تست‌های دارای علامت ☆ پاسخ دهید. تست‌های دارای علامت ★ کمی دشوارتر هستند.

۱۰. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}۳ & i=j\\ \sin\pi(i+j) & i\neq j\end{cases}$ کدام است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس همانی ۳) ماتریس سطری ۴) ماتریس اسکالر

۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $xA+yB=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$ آن‌گاه مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ x و y به‌دست نمی‌آید.

۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & b\\ ۳ & -۱\\ ۲ & a\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}a & ۳\\ b & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $C=A+B$ باشد و $c_{۱۱}=۲c_{۲۲}$ ، $c_{۱۲}=c_{۳۱}-۲$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۲

۱۳. اگر $C=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۴ & -۱\end{bmatrix}$، $D=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ k & ۲\end{bmatrix}$ و $C+۲D=۳I$، آن‌گاه مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B=A+۲A+۳A+\cdots+nA$ (n عددی طبیعی است) کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $n(n+۱)$ ۴) $\frac{n}{۲}(n+۱)$

۱۵. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}۳-a_{ij} & i\neq j\\ -a_{ij} & i=j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های ماتریس $A-\frac{۱}{۲}I$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۷/۵ ۴) ۸/۵

۱۶. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}۲i-a_{ji} & i<j\\ ۶-a_{ji} & i=j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۰ ۳) ۱۷ ۴) ۲۴

ضرب ماتریس‌ها، ماتریس‌های تعویض پذیر

درست نوشتن درایه‌های ماتریس و تسلط بر محاسبات ریاضی در این‌جا بسیار مهم است. با کمی دقت اغلب سؤال‌های این بخش را پاسخ خواهید داد.

۱۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۵ & b\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}-۲a & ۳\\ ۱ & c\end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix}۰ & -۵\\ -۶ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه abc کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۸ ۳) -۱۶ ۴) -۲

۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix}x & x\\ y & y\end{bmatrix}$ و $A^۲=A$، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟ $(xy\neq ۰)$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹. اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$، $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{۴\times۶}$، $b_{ij}=۲i+۳j$ آن‌گاه با فرض $C=AB$، $c_{۳۴}$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۶ ۴) ۳۰

۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ a^۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\\ a\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ و $AC=B$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۱. اگر $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}۱ & -۳ & ۲\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $A\times B=C$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۲. اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۴ & ۲\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۳ & -۹\\ ۶ & ۱۲\\ ۰ & ۱۵\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۴ & -۱ & ۵\\ ۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه با فرض $D=(۲A-\frac{۱}{۳}B)C$، $d_{۲۲}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) -۶ ۴) -۲

۲۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس $A^۲B+BAB$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۶ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲ & ۶\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -\frac{۳}{۲} & \frac{۷}{۴}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۳ & -۱\\ -\frac{۳}{۲} & -\frac{۷}{۴}\end{bmatrix}$

۲۴. با توجه به تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$، مقدار b کدام است؟

۱) $\cos(\alpha-\beta)$ ۲) $\sin(\alpha-\beta)$ ۳) $\sin(\beta-\alpha)$ ۴) $\sin(\alpha+\beta)$

۲۵. جواب‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ کدام‌اند؟

۱) $-۱,-۳$ ۲) $۱,-۳$ ۳) $-۱,۳$ ۴) $۱,۳$

۲۶. اگر ماتریس $A_{۲\times ۲}$ چنان باشد که $A\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\ -a\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A^۲\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱\\ -۲\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۲\\ -۱\end{bmatrix}$

۲۷. کدام گزینه می‌تواند $A\times B-B\times A$ باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۷\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$

۲۸. ماتریس $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\times\cdots\times\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۷ & ۱\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲۸ & ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲۱ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳۶ & ۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲۵ & ۱\end{bmatrix}$

۲۹. اگر $A+I=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ و $B+۲I=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $AB+۲A+B+۲I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۷ & ۲\\ ۶ & ۶\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۷ & -۲\\ -۶ & ۶\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۷ & -۲\\ -۶ & ۶\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۷ & ۲\\ ۶ & -۶\end{bmatrix}$

۳۰. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ را با فرض $a_{ij}=\begin{cases}i & i>j\\ j & i\le j\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲$ چقدر بیش‌تر از مجموع درایه‌های ماتریس A است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۳۱. اگر $AB=\begin{bmatrix}۶ & -۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$، $BC=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ و $CA=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $(ABC)^۲$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۷ & -۲\\ ۴ & -۴\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۳ & -۴\\ ۳ & -۸\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۰ & -۲\\ ۱۸ & -۱۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-۱۲ & ۱\\ -۳۶ & ۰\end{bmatrix}$

۳۲. اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & a\\ b & -۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و ماتریس $A\times B$ قطری باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳. به ازای کدام مقدار y,x ماتریس $\begin{bmatrix}x & -۱ & ۴\\ ۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ ۱ & ۰\\ y & ۱\end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۸)

۱) $x=۱,\ y=-۷$ ۲) $x=۲,\ y=-۷$ ۳) $x=۲,\ y=-۵$ ۴) $x=۱,\ y=-۵$

۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-۴ & p & -۲\\ ۴ & ۲ & q\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}q & -۴\\ ۲ & ۲q\\ ۴p & ۶\end{bmatrix}$ و AB یک ماتریس قطری باشد، آن‌گاه $q-p$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵. اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$ باشد، آن‌گاه زوج‌مرتب (α,β) کدام است؟

۱) $(-۱,۶)$ ۲) $(۱,-۶)$ ۳) $(-۱,-۶)$ ۴) $(۱,۶)$

۳۶. اگر $A=\begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y \in \mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۱)

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۲

۳۷. اگر $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ y & t & 0 \\ z & u & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & t & u \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ a & 4 & 2 \\ b & c & 4 \end{bmatrix}$ و همهٔ پارامترها مثبت باشند، آن‌گاه r کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۳۸. از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}=0$ ، x عدد غیرصفر، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۸)

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۳۹. حاصل $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

۴۰. اگر $A+B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $AB+BA=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & -7 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^2+B^2 کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۴۱. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 2 & i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های A^2-4A کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۴۲. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & z \end{bmatrix}$ و ستون سوم ماتریس A^2B برابر $\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۴ ۳) ۴- ۴) ۵

۴۳. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و ستون دوم ماتریس A^2-B برابر $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۴. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 22 & 36 \\ 10 & 31 & 52 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 & 15 \\ 4 & 20 & 17 \\ 302 & 153 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۴۵. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های A^2B^3 کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱ ۳) ۱۹ ۴) ۲

۴۶. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ، p و q دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ماتریس pA^2+qB^2 همواره کدام است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس ستونی ۳) ماتریس اسکالر ۴) ماتریس همانی

۴۷. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & ۲ & ۰ \\ b & c & ۴ \end{bmatrix}$ و $AB=I$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۸/۷۵ ۳) ۸/۲۵ ۴) ۸

۴۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $AB=I$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس B کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) -۳

۴۹. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C^۲$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴ (سراسری ریاضی- ۹۷)

۵۰. فرض کنید $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}=A$. مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۵۱. فرض کنید $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=A$ مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۵۲. اگر برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ A و B رابطهٔ $A\times B=-۲B\times A$ برقرار باشد، ماتریس $(A+B)^۲$ کدام است؟

۱) $A^۲+A\times B+B^۲$ ۲) $A^۲-B\times A+B^۲$ ۳) $A^۲-A\times B+B^۲$ ۴) $A^۲+B^۲$

۵۳. اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، چند ماتریس مانند $B=\begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۲ & b \end{bmatrix}$ وجود دارد که A با B تعویض‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۵۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ و $AX=۳X$، آن‌گاه حاصل $\frac{a-b+c}{c}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

۵۵. اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ c & ۵ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه $a+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۶. اگر $(A+I)^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A-I)^۲=-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A_{۲\times ۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۵۷. اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند و $AB=\begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^۲B^۲$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲۵ & ۵ \\ ۵ & ۲۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲۶ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۲۶ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲۶ \\ ۲۶ & ۱۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۵ & ۲۵ \\ ۲۵ & ۵ \end{bmatrix}$

۵۸. اگر $A=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & b & a \\ ۳ & a & ۲ \\ a & -۲ & b \end{bmatrix}$ و $B=\frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & a \\ b & a & -۲ \\ a & ۲ & b \end{bmatrix}$ و $AB=I$، آن‌گاه مقادیر a و b به ترتیب کدامند؟

۱) ۶ و ۳ ۲) ۶ و -۳ ۳) -۶ و -۳ ۴) -۶ و ۳

۵۹. اگر $A^۲=-A-I$، آن‌گاه حاصل $A(A+۲I)$ کدام است؟

۱) $A-I$ ۲) $A+I$ ۳) $-A+I$ ۴) $۲A-I$

★۶۰. اگر $A=\begin{bmatrix} a-2 & 4 & -7\\ b & 0 & b+2\\ 7 & a & 0\end{bmatrix}$ و به ازای هر i و j رابطه $a_{ij}=-a_{ji}$ باشد. آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^2 کدام است؟

۱) -120 ۲) -130 ۳) -138 ۴) -200

☆۶۱. اگر A، B و C ماتریس‌های مربع باشد به طوری‌که $A+B=I$ و $A=BC$، آن‌گاه $AC-C$ کدام است؟

۱) $-B$ ۲) $-C$ ۳) $-A$ ۴) $-I$

۶۲. اگر A، B و C ماتریس‌های مربع باشد به طوری‌که $A+B=I$ و $A=BC=CB$، آن‌گاه حاصل $AC-CA$ کدام است؟

۱) I ۲) B ۳) $\bar{O}$ ۴) A

★۶۳. اگر برای ماتریس A داشته باشیم $A^2+3A+I=\bar{O}$ و ماتریس‌های B و C چنان باشند که $2A=B^3+C^3$، آن‌گاه $B-C$ کدام است؟

۱) A ۲) $2A$ ۳) $A+2I$ ۴) $A-2I$

★۶۴. اگر A و B دو ماتریس 2×2 و $AB=B$ و $BA=A$ باشد آن‌گاه $(A+B)^3$ کدام است؟

۱) $8A$ ۲) $2A+6B$ ۳) $8B$ ۴) $4(A+B)$

☆۶۵. اگر برای ماتریس 2×2، A داشته باشیم $A^2=I-A$ آن‌گاه حاصل $A^2(A+I)^2$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\bar{O}$ ۴) $-A$

۶۶. اگر برای ماتریس 2×2، A داشته باشیم $A^2=\bar{O}$، آن‌گاه $A(I-A)^3$ کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) $\bar{O}$ ۴) I

☆۶۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ و $A^3=mA+nI$ آن‌گاه n^m کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -2

☆۶۸. اگر A و B ماتریس‌های مربعی 2×2 باشند به طوری‌که $A+B=2AB$، آن‌گاه حاصل $A^2+B^2+AB+BA$ کدام است؟

۱) $(AB)^2$ ۲) $4(AB)^2$ ۳) $(BA)^2$ ۴) $4(BA)^2$

★۶۹. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری‌که $A+B+AB=\bar{O}$ آن‌گاه $(A+I)(B+I)$ کدام است؟

۱) $2AB$ ۲) $2BA$ ۳) O ۴) I

☆۷۰. اگر A ماتریس مربعی باشد، به طوری‌که $A^2-A-2I=\bar{O}$ آن‌گاه حاصل A^3+I کدام است؟

۱) $3A+3I$ ۲) $2A+2I$ ۳) $3A-3I$ ۴) $2A-2I$

✪۷۱. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 6\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $A^3-7A^2+2A+4I$ کدام است؟

۱) $4I$ ۲) $3I$ ۳) $5I$ ۴) $6I$

☆۷۲. اگر $A^2=A$ باشد و $AB=I$، آن‌گاه حاصل A^3B^2 کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) B ۴) $\bar{O}$

★۷۳. اگر A و B ماتریس‌های مربعی 2×2 باشند، به طوری‌که $AB+BA=I$ آن‌گاه حاصل A^2B-BA^2 کدام است؟

۱) I ۲) $\bar{O}$ ۳) A ۴) B

★۷۴. A یک ماتریس 2×2 است، به طوری‌که $A^2+3A-I=O$ می‌باشد و اگر $AU=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ به طوری‌که $U=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ در این‌صورت A^3U کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}7\\10\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}7\\-10\end{bmatrix}$

☆۷۵. اگر $AB=\lambda BA$، آن‌گاه حاصل $(AB)^2-A^2B^2$ کدام است؟

۱) λA^2B^2 ۲) $\frac{\lambda-1}{\lambda}A^2B^2$ ۳) $\frac{1-\lambda}{\lambda}A^2B^2$ ۴) $\bar{O}$

✪۷۶. اگر $AB-BA=2I$، آن‌گاه حاصل $(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)$ کدام است؟

۱) $2I$ ۲) $-2I$ ۳) I ۴) $\bar{O}$

توان ماتریس‌ها

در این مبحث با توجه به خواص ضرب ماتریس‌ها و نتیجه‌گیری صحیح استقرایی می‌توانیم بدون دردسر زیاد، توان‌های بالای ماتریس‌ها را به‌دست آوریم.

.۷۷ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^{۵}$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۱۶

.۷۸ اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) A ۲) $\frac{۱}{۲^{۱۰۰}}A$ ۳) $۲^{۱۰۰}A$ ۴) I

.۷۹ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $A^n=I$ است، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

.۸۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $\frac{۱}{۲^{۸-n}}(A-A^{۲})^n$ برابر I باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

.۸۱ اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۱ \\ ۰ & a \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^n کدام است؟

۱) a^n ۲) $۲a^n$ ۳) na^n ۴) صفر

.۸۲ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B=A^{۵۰}$ آن‌گاه $b_{۱۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷^{۵۰}-۱}{۳}$ ۲) $\frac{۷^{۵۰}-۲}{۳}$ ۳) $\frac{۷^{۵۰}+۱}{۳}$ ۴) $\frac{۷^{۵۰}+۲}{۴}$

.۸۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=A+A^{۲}+A^{۳}+\cdots+A^{۲۰۲۲}$ آن‌گاه B کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $۲۰۲۲A$ ۴) $A-I$

.۸۴ اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۲۰۱۰}$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\overline{O}$ ۴) $-I$

.۸۵ اگر $M=\begin{bmatrix} ۲\cos^{۲}\theta & \sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & ۲\sin^{۲}\theta \end{bmatrix}$، آن‌گاه $M^{۳}$ کدام است؟

۱) M ۲) $۲M$ ۳) $۳M$ ۴) $۴M$

.۸۶ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس $A^{۸}\times B^{۹}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۸ \\ ۹ & ۷ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۸ \\ ۹ & ۷۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۸ \\ ۹ & ۷۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۹ \\ ۸ & ۷۳ \end{bmatrix}$

.۸۷ اگر A ماتریس مربعی ۲×۲ و $A^{۲}-A+I=\overline{O}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $A^{۳۰}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

.۸۸ اگر $A^{۲}=B^{۲}=I$، $AB=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $((A+B)(A-B))^{۱۴۰۱}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) $\overline{O}$ ۴) $۲I$

.۸۹ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول $A^{۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

.۹۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A+I)^{۶}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۳۶

۹۱. اگر $A^2 = \overline{O}$ ، حاصل $(I-A)^4(I+A)^5$ کدام است؟

۱) $I+A$ ۲) $I-A$ ۳) $20A$ ۴) O

۹۲. اگر $A^2 = A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(I+A)^4$ کدام است؟

۱) $15A$ ۲) $16A$ ۳) $I+15A$ ۴) $I+16A$

۹۳.☆ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه A^{40} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 2^{40} & 0 \\ 0 & 2^{40} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2^{39} & 2^{39}\sqrt{3} \\ -2^{39}\sqrt{3} & 2^{39} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -2^{39} & 2^{39}\sqrt{3} \\ -2^{39}\sqrt{3} & -2^{39} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2^{39}\sqrt{3} & -2^{39} \\ 2^{39} & 2^{39}\sqrt{3} \end{bmatrix}$

۹۴. اگر A و B دو ماتریس 2×2 و $AB = A$ و $BA = B$ باشد حاصل $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{1401}$ کدام است؟

۱) $1400A$ ۲) $1401A$ ۳) $1400B$ ۴) $1401A$

۹۵.☆ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $C = AB$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های $C^n + A^2$ کدام است؟ (n عدد طبیعی)

۱) صفر ۲) $2+2(-1)^n$ ۳) $(-1)^n+1$ ۴) $2(-1)^n+3$

۹۶.☆ اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ و ماتریس B چنان باشد که درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر باشد و $AB = I$ باشد آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

۹۷.☆ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^n برابر ۲۴۴ باشد آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۹۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^n کدام است؟

۱) $-n$ ۲) صفر ۳) $2-n$ ۴) $1-n$

۹۹.☆ اگر $A^2 = 2A - I$ آن‌گاه $A^{10} = aA + bI$. زوج مرتب (a, b) کدام است؟

۱) $(10, -9)$ ۲) $(10, 9)$ ۳) $(9, -10)$ ۴) $(9, 10)$

۱۰۰.☆ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$ (n عدد طبیعی) آن‌گاه مجموع درایه‌های B کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(n-n^2)$ ۲) $2n-2n^2$ ۳) $2n-n^2$ ۴) $n-n^2$

۱۰۱.★ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{200}$ کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۳۹۸ ۴) ۳۹۹

۱۰۲.☆ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt[5]{2} & 0 \\ \sqrt[5]{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{4} \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{10} کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۲

۱۰۳.★ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبهٔ ۳ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^3 - 2A^2 + 5I$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۰۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^4 کدام است؟

۱) ۹۶ ۲) ۹۷ ۳) ۹۹ ۴) ۹۸

☆۱۰۵. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^4، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}$

☆۱۰۶. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$، ماتریس A^4 کدام می‌باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است. ۲) درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.
۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

☆۱۰۷. اگر $A=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول A^3، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix}30&6&64\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}30&6&78\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}24&8&86\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}30&6&86\end{bmatrix}$

☆۱۰۸. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۱)

۱) $\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}9&12&16\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1&0&-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}9&5&-7\end{bmatrix}$

☆۱۰۹. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های A^{11} از مجموع درایه‌های قطر اصلی چقدر بیش‌تر است؟

۱) 2^9 ۲) 2^{10} ۳) 2^{11} ۴) 2^{12}

☆۱۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{42}+A^{55}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

☆۱۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ آن‌گاه A^{100} کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) I ۴) $3I$

☆۱۱۲. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$، $a_{ij}=|i-j|+j-i$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B=A+A^2+A^3+\cdots+A^{1401}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴۰۱

۱۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $\frac{1}{36}A^{40}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳۶ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{36}$

☆۱۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ و $A^{100}=2^K A^2$ باشد آن‌گاه K کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۹۹ ۳) ۹۸ ۴) ۱۰۱

☆۱۱۵. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{n+1} (n عدد طبیعی) کدام است؟

۱) $2^{n+1}+1$ ۲) $2^{n+2}+1$ ۳) 2^n-1 ۴) $2^{n-1}+1$

☆۱۱۶. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ و $A^{49}=\begin{bmatrix}1&0&0\\49&1&0\\x&49&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) ۱۲۳۵ ۲) ۱۲۲۵ ۳) ۱۱۲۵ ۴) ۱۲۷۵

★۱۱۷. اگر $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $2I+A+A^2+\cdots+A^{24}+A^{25}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^2+2A)^{10}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

★۱۱۹. اگر $A=\begin{bmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^2-2A+2I)^6$ کدام است؟

۱) I ۲) $\overline{O}$ ۳) A ۴) $-I$

۱۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^3+3I)^4$ کدام است؟

۱) $27I$ ۲) $81I$ ۳) $16I$ ۴) $64I$

☆۱۲۱. اگر $A=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{bmatrix}$، با فرض $(A-kI)^n=\overline{O}$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $k+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆۱۲۲. اگر $4A^2=3A$، آن‌گاه ماتریس A^4 کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}A$ ۲) $\frac{9}{16}A$ ۳) $\frac{27}{64}A$ ۴) $\frac{81}{256}A$

۱۲۳. اگر $A^2=A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A-\frac{I}{2})^6$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{64}I$ ۲) $\frac{1}{32}I$ ۳) $\frac{1}{32}A$ ۴) $\frac{1}{64}A$

★۱۲۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های $(2I-A)^{100}$ کدام است؟

۱) ۳۰۱ ۲) ۳۰۲ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۳

★۱۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(ABC)^n=I$. کم‌ترین مقدار n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

قسمت دوم: وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان ۲×۲

محاسبهٔ دترمینان ۲ × ۲ ساده می‌باشد. در این مبحث دانستن خواص دترمینان و دقت در محاسبه بسیار مهم است.

☆۱۲۶. اگر $32=\begin{vmatrix}a&b\\6&-5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&-b\\2&3\end{vmatrix}$ آن‌گاه $\begin{vmatrix}4a&b\\-4&1\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

☆۱۲۷. اگر $A=\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}4&2\\0&3\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $\frac{|A^2+AB|}{|B^2+BA|}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

☆۱۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ و $B=A+A^3+A^5+\dots+A^{2n-1}$ (n عدد طبیعی) آن‌گاه $|B|$ کدام است؟

۱) n^2 ۲) $-n^2$ ۳) $-(2n-1)^2$ ۴) $(2n-1)^2$

☆۱۲۹. اگر A و B ماتریس‌های ۲×۲ باشند، به طوری‌که $A+2B=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 0 & -3\end{bmatrix}$ و $2A-B=\begin{bmatrix}5 & -11\\ -5 & 4\end{bmatrix}$، آن‌گاه $|A|+|B|$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۷- ۴) ۱۰-

۱۳۰. اگر A یک ماتریس ۲×۲ باشد، به طوری‌که $|A|=3$، آن‌گاه حاصل $|A+I|+|A-I|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۴

۱۳۱. دترمینان ماتریس ۲×۲، A را Δ و مجموع درایه‌های قطر اصلی A^2 را T می‌نامیم. مربع مجموع درایه‌های قطر اصلی A کدام است؟

۱) $T+\Delta$ ۲) $T^2+2\Delta$ ۳) $2\Delta+T$ ۴) $\Delta+2T$

☆۱۳۲. اگر $A=[a_{ij}]_{2\times2}$، $a_{ij}=\begin{cases}2i-j & i<j\\ i & i\geq j\end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times2}$، $b_{ij}=\begin{cases}i+2j & i\leq j\\ 2+j & i>j\end{cases}$. آن‌گاه با فرض $AX=B$ حاصل $|X|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

☆۱۳۳. اگر $A=[a_{ij}]_{2\times3}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times2}$ به طوری‌که $a_{ij}=(-1)^i-j$ و $b_{ij}=(-1)^j+i$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A\times B$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۴- ۳) ۲۰ ۴) ۲۰-

★۱۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ و $B=A+A^2+A^3+\dots+A^{2022}$ آن‌گاه دترمینان ماتریس B کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

☆۱۳۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2-4x+1=0$ باشد آن‌گاه دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}\alpha+\beta & \alpha+\beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

★۱۳۶. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس $A^{4n}+A^{4n+1}$ برابر $a^{n+35}+a^{n+37}$ باشد، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۳۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$ و $B=A+I$ آن‌گاه دترمینان ماتریس $A^{2022}+B$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲۰۲۱- ۳) ۲۰۲۱ ۴) ۱

۱۳۸. اگر $2A=\begin{bmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل دترمینان $A|A|$ کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۴- ۳) ۸ ۴) ۴

۱۳۹. اگر $2A+3I=\begin{bmatrix}9 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ آن‌گاه دترمینان ماتریس A^2-3A کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۲-

☆۱۴۰. اگر $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ a & 2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3 & a\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $C=A\times B$، آن‌گاه به ازای کدام مجموعه مقادیر a، حاصل دترمینان C منفی است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶، با کمی تغییر)

۱) $\varnothing$ ۲) $\{a : a<1\}$ ۳) $\{a : a>1\}$ ۴) $\mathbb{R}$

☆۱۴۱. اگر A و B ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ ۲ بوده و $A\times B=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 7 & 10\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $B\times A$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}15 & 2\\ 8 & 2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-15 & -2\\ -8 & 2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}15 & 2\\ 8 & -2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-15 & 2\\ -8 & -2\end{bmatrix}$

☆۱۴۲. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1 & a & 3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ a & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ و $ACB=52I$، اگر $|B|=104$ باشد آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰، با کمی تغییر)

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ فصل ۱ ماتریس و کاربردها

۱
۱ ۲ **۳** ۴

درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$a_{ij}=\begin{cases} i-j & i\ge j\\ j & j>i\end{cases}\Rightarrow a_{۱۱}=۱-۱=۰,\ a_{۲۲}=۲-۲=۰,\ a_{۳۳}=۳-۳=۰$$

$$a_{۱۲}=۲\ ,\ a_{۱۳}=۳\ ,\ a_{۲۱}=۲-۱=۱\ ,\ a_{۲۳}=۳$$

$$,\ a_{۳۱}=۳-۱=۲, a_{۳۲}=۳-۲=۱$$

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۰ & ۳\\ ۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}۱+۲+۱+۲+۳+۳=۱۲$$

۲
۱ ۲ **۳** ۴

$$A=[ij]_{۳\times۳}\Rightarrow a_{۱۱}=۱\ ,\ a_{۳۲}=۳\times۲=۶$$

$$B=[(i-j)^{۲}]_{۲\times۲}\Rightarrow b_{۲۲}=(۲-۲)^{۲}=۰,\ b_{۲۱}=(۲-۱)^{۲}=۱$$

$$a_{۱۱}b_{۲۲}+b_{۲۱}a_{۳۲}=۱\times۰+۱\times۶=۶$$

۳
۱ ۲ ۳ ۴

نکته: دو ماتریس A و B برابرند، هرگاه مرتبهٔ آن‌ها یکی باشد و درایه‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix} -۳ & x+۲y\\ -۸ & -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-۲y & ۱\\ z^{۳} & -۴\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x-۲y=-۳\\ x+۲y=۱\\ z^{۳}=-۸\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=-۱\\ y=۱\\ z=-۲\end{cases}\Rightarrow x+y+z=-۱+۱-۲=-۲$$

۴
۱ ۲ ۳ ۴

$$A=B\Rightarrow\begin{bmatrix} x-۳y & x\\ ۱ & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۶-y\\ ۱ & ۶-x\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x-۳y=۲\\ x=۶-y\\ y=۶-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x-۳y=۲\\ x+y=۶\end{cases}\Rightarrow x-۳y+۳x+۳y=۲+۱۸\Rightarrow ۴x=۲۰$$

$$\Rightarrow x=۵\ ,\ y=۶-۵=۱$$

$$۲B+C=۲\begin{bmatrix} ۲ & ۶-۱\\ ۱ & ۶-۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ & -۸\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۱۰\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ & -۸\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$$

۵
۱ ۲ **۳** ۴

$$(A+B)+(A-B)=\begin{bmatrix} ۳ & -۲\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۴ & -۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow a_{۱۲}=-۱$$

۶
۱ ۲ ۳ ۴

$$a_{ij}=\begin{cases} ۳i+۴j & i\le j\\ ۲i-j & i>j\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۱\\ ۳ & ۱۴\end{bmatrix}$$

$$B=A\Rightarrow\begin{bmatrix} ۲x+y & ۴a+b-۷\\ a-b+۱ & ۳x+۵y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۱\\ ۳ & ۱۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} ۲x+y=۷\\ ۳x+۵y=۱۴\end{cases},\ \begin{cases} ۴a+b-۷=۱۱\\ a-b+۱=۳\end{cases}$$

از حل دو دستگاه نتیجه می‌شود $x=۳$، $y=۱$، $a=۴$ و $b=۲$ و نهایتاً داریم:

$$(۳x+۲y-۳a)^{b}=(۳\times۳+۲\times۱-۳\times۴)^{۲}=(۱۱-۱۲)^{۲}=۱$$

۷
۱ ۲ ۳ **۴**

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j\\ i-j & i\ne j\end{cases}\Rightarrow A=[a_{ij}]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲\\ ۱ & ۴ & -۱\\ ۲ & ۱ & ۶\end{bmatrix}$$

$$xA+yB=x\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲\\ ۱ & ۴ & -۱\\ ۲ & ۱ & ۶\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۳\\ ۱ & ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲x+۲y & -x-y & -۲x\\ x+y & ۴x+۲y & -x+۳y\\ ۲x+y & x+y & ۶x+۲y\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$\Rightarrow ۲x+۲y+۴x+۲y+۶x+۲y=۲x+y+۴x+۲y-۲x$$

$$\Rightarrow ۳y=-۸x\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{۳}{۸}$$

۸
۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix} x^{۲} & y^{۲}\\ z^{۴} & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & ۱\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۲y\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x^{۲}+x & y^{۲}+۱\\ z^{۴}-۲ & ۵\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۲y\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x^{۲}+x=-\frac{۱}{۴}\\ y^{۲}+۱=۲y\\ z^{۴}-۲=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (x+\frac{۱}{۲})^{۲}=۰\\ (y-۱)^{۲}=۰\\ z^{۴}=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}, y=۱, z=\pm۱$$

$$\max(xyz)=-\frac{۱}{۲}\times۱\times(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

۹ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$B \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی} =$$
$$I \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی} - A \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی}$$

با توجه به اینکه $A=\begin{bmatrix}5&8&4\\3&2&5\\7&6&0\end{bmatrix}$ و $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ داریم:

$$B \text{ مجموع درایه‌های قطر اصلی} = 3-(5+2+0)=3-7=-4$$

۱۰ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

نکته: اگر k یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه $\sin k\pi = 0$

$$a_{ij}=\begin{cases}3 & i=j\\ \sin\pi(i+j) & i\neq j\end{cases}\Rightarrow a_{11}=a_{22}=a_{33}=3$$

$$,a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=0$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow$$ A یک ماتریس اسکالر است.

۱۱ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$xA+yB=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow x\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0&-x\\-x&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y&0\\y&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}y&-x\\y-x&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}$$

تساوی فوق امکان‌پذیر نیست؛ زیرا به ازای $y=1$ یا $y=3$ همهٔ درایه‌های نظیر برابر نیستند؛ پس x و y ای وجود ندارد که داشته باشیم $xA+yB=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}$

۱۲ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$C=A+B=\begin{bmatrix}1&b\\3&-1\\2&a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&3\\b&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+1&b+3\\b+3&1\\3&a+1\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}c_{11}=2c_{22}\Rightarrow a+1=2\times1\Rightarrow a=1\\ c_{31}-2=c_{12}\Rightarrow 3-2=b+3\Rightarrow b=-2\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=1-2=-1$$

۱۳ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$C+2D=3I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\4&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0\\k&2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3&0\\4+2k&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}\Rightarrow 4+2k=0\Rightarrow k=-2$$

۱۴ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$B=A+2A+3A+\cdots+nA=(1+2+3+\cdots+n)A$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{bmatrix}-2&0\\4&-2\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-n(n+1)&0\\2n(n+1)&-n(n+1)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}2n(n+1)-2n(n+1)=0$$

۱۵ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$a_{ij}=\begin{cases}3-a_{ij} & i\neq j\\ -a_{ij} & i=j\end{cases}\Rightarrow a_{11}=-a_{11}\Rightarrow a_{11}=0$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}}a_{22}=a_{33}=0$$

$$a_{12}=3-a_{12}\Rightarrow a_{12}=\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}}a_{13}=a_{21}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=\frac{3}{2}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&0\end{bmatrix}\Rightarrow A-\frac{1}{2}I=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}6\times\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=\frac{15}{2}=7.5$$

۱۶ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$a_{ij}=\begin{cases}2i-a_{ji} & i<j\\ 6-a_{ji} & i=j\end{cases}\Rightarrow a_{11}=6-a_{11}\Rightarrow a_{11}=3$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}}a_{22}=a_{33}=3$$

$$a_{12}=2-a_{21}\Rightarrow a_{12}+a_{21}=2,\ a_{13}=2-a_{31}\Rightarrow a_{13}+a_{31}=2$$

$$a_{23}=4-a_{32}\Rightarrow a_{23}+a_{32}=4$$

$$A=\begin{bmatrix}3&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&3&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}$$

$$9+(a_{12}+a_{21})+(a_{13}+a_{31})+(a_{23}+a_{32})=9+2+2+4=17$$

۱۷ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\5&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2a&3\\1&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a+2&3+2c\\b-10a&15+bc\end{bmatrix}$$

$$(\text{فرض})\ AB=\begin{bmatrix}0&-5\\-6&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2a+2&3+2c\\b-10a&15+bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-5\\-6&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2a+2=0\\3+2c=-5\\b-10a=-6\\15+bc=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=1,\ c=-4,\ b=4\Rightarrow abc=1\times4\times(-4)=-16$$

۱۸ ‏ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}x&x\\y&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&x\\y&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+xy&x^2+xy\\yx+y^2&yx+y^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\text{فرض})\ A^2=A}\begin{bmatrix}x^2+xy&x^2+xy\\yx+y^2&yx+y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&x\\y&y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+xy=x\\yx+y^2=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\x+y=1\end{cases}$$

۱۹ — ۱ **۲** ۳ ۴

بنا به فرض $a_{ij}=i-j$ و $b_{ij}=2i+3j$ داریم:

$$C_{3\times6}=A_{3\times4}\times B_{4\times6}\Rightarrow c_{34}=(\text{سطرسوم } A)\times(\text{ستون‌چهارم } B)$$

$$\Rightarrow c_{34}=\begin{bmatrix}3-1 & 3-2 & 3-3 & 3-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2+12\\4+12\\6+12\\8+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14\\16\\18\\20\end{bmatrix}=28+16-20=24$$

۲۰ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$AC=B\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1\\a^2&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x+y\\a^2x+y\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=2\\x-y=a\\a^2x+y=1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a+2}{2},y=\frac{2-a}{2}$$

$$\xrightarrow{a^2x+y=1}a^2\times\frac{a+2}{2}+\frac{2-a}{2}=1$$

$$\Rightarrow a^3+2a^2+2-a=2\Rightarrow a(a^2+2a-1)=0$$

$\Rightarrow a=0$ یا $a^2+2a-1=0\xrightarrow{a_2+a_3=-2}a_1+a_2+a_3$

$=0-2=-2$

۲۱ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنا به فرض $B=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}_{3\times3}$ و $C=\begin{bmatrix}1&-3&2\\0&-1&1\end{bmatrix}_{2\times3}$ با توجه به تساوی $A\times B=C$ ماتریس A نیز 2×3 می‌باشد. فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}x&y&z\\t&u&v\end{bmatrix}_{2\times3}$ در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix}x&y&z\\t&u&v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\0&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x&-x+y-z&z\\t&-t+u-v&v\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-3&2\\0&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow x=1,\ z=2,\ t=0,v=1,\ -x+y-z=-3$$

$$,\ -t+u-v=-1\Rightarrow y=0,\ u=0$$

$$x+y+z+t+u+v=1+0+2+0+0+1=4$$

۲۲ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنا به فرض $A=\begin{bmatrix}-1&3\\4&2\\1&0\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}3&-9\\6&12\\0&15\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}4&-1&5\\2&1&1\end{bmatrix}$ و $D=(2A-\frac{1}{3}B)C$ می‌باشد.

$d_{22}=(2A-\frac{1}{3}B)$ سطر دوم $\times C$ ستون دوم

$$=\begin{bmatrix}2\times4-\frac{1}{3}\times6 & 2\times2-\frac{1}{3}\times12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-6$$

۲۳ — **۱** ۲ ۳ ۴

در این‌جا محاسبهٔ ماتریس‌های BAB و A^2B وقت‌گیر است؛ به همین جهت به کمک خواص ضرب ماتریس‌ها عبارت داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A^2B+BAB=A(AB)+B(AB)=(A+B)AB$$

$$A=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$,AB=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\\frac{3}{2}&\frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

$$A^2B+BAB=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\\frac{3}{2}&\frac{7}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2\\0&0\end{bmatrix}$$

۲۴ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta&\sin\beta\\-\sin\beta&\cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos(\alpha-\beta)&\sin(\beta-\alpha)\\\sin(\alpha-\beta)&\cos(\alpha-\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b=\sin(\beta-\alpha)$$

۲۵ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{bmatrix}x&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-x+2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-x^2+2x+3\end{bmatrix}=0\Rightarrow -x^2+2x+3=0\Rightarrow -(x+1)(x-3)=0$$

$\Rightarrow x=-1$ یا $x=3$

۲۶ — ۱ ۲ **۳** ۴

روش اول: بنابه فرض، ماتریس $A_{2\times2}$ چنان است که $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\-a\end{bmatrix}$ داریم:

$$A^2\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=A(A\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix})=A\begin{bmatrix}-(-2)\\-(-1)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

روش دوم: یکی از ماتریس‌های A که در تساوی $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\-a\end{bmatrix}$ صدق می‌کند، $A=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$ است. داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$,A^2\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

۲۷ — ۱ ۲ **۳** ۴

نکته: اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند، آن‌گاه درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A\times B-B\times A$ قرینهٔ یکدیگرند.

بنابراین از بین گزینه‌ها تنها ماتریس $\begin{bmatrix}3&0\\3&-3\end{bmatrix}$ می‌تواند $A\times B-B\times A$ باشد.

۲۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1+2&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0\\1+2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1+2+3&1\end{bmatrix}$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1&0\\7&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1+2+\cdots+7&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{7(7+1)}{2}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\28&1\end{bmatrix}$$

۲۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$AB+2A+B+2I=AB+B+2A+2I$$
$$=(A+I)B+(A+I)(2I)=(A+I)(B+2I)$$
$$=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\6&6\end{bmatrix}$$

۳۰ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$a_{ij}=\begin{cases}i & i>j\\ j & i\le j\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6\\6&8\end{bmatrix}$$

(مجموع درایه‌های ماتریس A^2) − (مجموع درایه‌های ماتریس A)

$$=(5+6+6+8)-(1+2+2+2)=25-7=18$$

۳۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

به کمک خواص ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$(ABC)^2=(ABC)(ABC)=(AB)C(ABC)$$
$$=(AB)(CA)(BC)$$
$$(ABC)^2=\begin{bmatrix}6&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-3&-4\\3&-8\end{bmatrix}$$

۳۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A\times B=\begin{bmatrix}5&a\\b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+5&a-10\\b-6&-2b-2\end{bmatrix}$$

برای این‌که ماتریس $A\times B$ قطری باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}a-10=0\\b-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=10\\b=6\end{cases}\Rightarrow a-b=10-6=4$$

۳۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

حاصل‌ضرب زیر یک ماتریس ۲ × ۲ است.

$$\begin{bmatrix}x&-1&4\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\\y&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-1+4y&-2x+4\\4+3+y&-4+1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2x+4y-1&-2x+4\\y+7&-3\end{bmatrix}$$

برای این‌که ماتریس فوق قطری باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}-2x+4=0\\y+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-7\end{cases}$$

۳۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$AB=\begin{bmatrix}-4&p&-2\\4&2&q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q&-4\\2&2q\\4p&6\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-4q+2p-8p&16+2pq-12\\4q+4+4pq&-16+4q+6q\end{bmatrix}$$

برای این‌که AB قطری باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}16+2pq-12=0\\4q+4+4pq=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}pq=-2\\q+1+pq=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow q+1-2=0\Rightarrow q=1,\ p=-2$$
$$q-p=1-(-2)=3$$

۳۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

روش اول:

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1\\4&8\end{bmatrix},\ A^2=\alpha A+\beta I$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}5&1\\4&8\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}5&1\\4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta-\alpha&\alpha\\4\alpha&2\alpha+\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\beta-\alpha=5\\2\alpha+\beta=8\\\alpha=1\end{cases}$$

با قرار دادن $\alpha=1$ در دو معادلهٔ دیگر مقدار $\beta=6$ می‌شود؛ پس $(\alpha,\beta)=(1,6)$

روش دوم:

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم: $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-(-1+2)A+(-2-4)I=\bar{O}$$
$$\Rightarrow A^2-A-6I=\bar{O}\Rightarrow A^2=A+6I=\alpha A+\beta I$$
$$\Rightarrow(\alpha,\beta)=(1,6)$$

۳۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$AB=\begin{bmatrix}x&-1&-x\\0&0&4\\y&z&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2z&\frac{1}{2}&2\\2z&0&-4z\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2xz-2z&0&2x+4z\\0&2&0\\2yz+2z^2&\frac{y}{2}+\frac{z}{2}&2y-4z^2\end{bmatrix}$$

برای این‌که AB ماتریس اسکالر باشد باید درایه‌های غیر از قطر اصلی صفر و درایه‌های قطر اصلی برابر باشند. z نمی‌تواند صفر باشد زیرا درایه سطر اول و ستون اول صفر می‌شود.

$$\begin{cases}2x+4z=0\\2yz+2z^2=0\\\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2z\\y=-z\end{cases},\ \begin{cases}2xz-2z=2\\2y-4z^2=2\end{cases}$$

با قرار دادن $x=-2z$ و $y=-z$ در دستگاه سمت چپ داریم:

$$\begin{cases}-4z^2-2z=2\\ -2z-4z^2=2\end{cases}\Rightarrow 2z^2+z-1=0\Rightarrow z=-1 \text{ یا } z=-\frac{1}{2}$$

چون بنا به فرض y عددی صحیح است پس $z=-\frac{1}{2}$ قابل قبول نیست و نهایتاً داریم:

$$xy=(-2z)(-z)=2z^2=2(-1)^2=2$$

۳۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$\begin{bmatrix}x&0&0\\y&t&0\\z&u&r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y&z\\0&t&u\\0&0&r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&1\\a&4&2\\b&c&4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x^2&xy&xz\\xy&y^2+t^2&yz+tu\\zx&zy+ut&z^2+u^2+r^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&1\\a&4&2\\b&c&4\end{bmatrix}$$

$$x^2=4\Rightarrow x=2\,,\ xy=2\Rightarrow y=1\,,\ xz=1\Rightarrow z=\frac{1}{2}$$

$$a=xy=2\,,\ b=zx=1\,,\ y^2+t^2=4\Rightarrow 1+t^2=4\Rightarrow t=\sqrt{3}$$

$$yz+tu=c=2\Rightarrow 1\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times u=2\Rightarrow u=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2+u^2+r^2=4\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+r^2=4\Rightarrow r^2=4-1=3\Rightarrow r=\sqrt{3}$$

۳۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\begin{bmatrix}x&2x&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3x+8x-1&-x-2&x-4x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}11x-1&-x-2&-3x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x(11x-1)-2x(x+2)+3x=0\xrightarrow{x\neq0}$$

$$11x-1-2x-4+3=0\Rightarrow 9x=2\Rightarrow x=\frac{2}{9}$$

۳۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&2\\2&2&3\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\2&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\3&3\\5&5\\7&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\15\\25\\35\end{bmatrix}$$

۴۰ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B$$

$$=A^2+BA+AB+B^2$$

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&1&1\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&1&1\\2&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-6&6\\8&-3&7\\8&-4&8\end{bmatrix}$$

$$A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)=\begin{bmatrix}4&-6&6\\8&-3&7\\8&-4&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-3&3\\5&-7&5\\4&1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&\bigcirc&\bigcirc\\\bigcirc&4&\bigcirc\\\bigcirc&\bigcirc&5\end{bmatrix}$$

A^2+B^2 مجموع درایه‌های قطر اصلی $=2+4+5=11$

۴۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

بنا به فرض $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 2 & i\neq j\end{cases}$، پس درایه‌های ماتریس A به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

$$A^2-4A=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}15$$

۴۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نکته: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$، آن‌گاه داریم:

(ستون jام B) $\times$ (ماتریس A) $=$ ستون jام $(A\times B)$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&x&0\\0&0&y\\0&0&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x&0\\0&0&y\\0&0&z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x&xy\\0&0&yz\\0&0&z^2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0&0\\x&0&0\\0&y&z\end{bmatrix}$$

ستون سوم ماتریس $A^2B=\begin{bmatrix}1&x&xy\\0&0&yz\\0&0&z^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xyz\\yz^2\\z^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\2\\-1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}xyz=-6\\yz^2=2\\z^3=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xyz=-6\\yz^2=2\\z=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=2,x=3,x+y+z=3+2-1=4$$

۴۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&b&0\\0&c&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&a\\0&b&0\\0&c&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&ac&a\\0&b^2&0\\0&bc&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&b&c\\a&0&0\end{bmatrix}$$

ستون دوم ماتریس $(A^2-B)=\begin{bmatrix}ac\\b^2\\bc\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\b\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac\\b^2-b\\bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\6\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}ac=3\\b^2-b=2\Rightarrow b^2-b-2=0\Rightarrow(b+1)(b-2)=0\\bc=6\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=-1\,,\ c=-6\,,\ a=-\frac{1}{2}\\b=2\,,\ c=3\,,\ a=1\end{cases}$$

پس برای $a+b+c$ دو مقدار ۶ و ۷/۵- به‌دست می‌آید.

۴۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

نکته: برای هر دو ماتریس مربعی و هم مرتبه A و B، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $A\times B$ با حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $B\times A$ برابر است.

اگر فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}1&3&5\\7&22&36\\10&31&52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&17&15\\4&20&17\\302&153&-2\end{bmatrix}$

و $C=\begin{bmatrix}28&-1&-2\\-4&2&-1\\-3&-1&1\end{bmatrix}$ در این صورت $A=BC$ و می‌توان گفت مجموع درایه‌های قطر اصلی BC با مجموع درایه‌های قطر اصلی CB است.

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } A=\begin{bmatrix}28&-1&-2\\-4&2&-1\\-3&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&5\\7&22&36\\10&31&52\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10&17&15\\4&120&17\\302&153&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&17&15\\4&20&17\\302&153&-2\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر $10+20-2=28$ است.

۴۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$AB=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-1&-1\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^2B^3=A(AB)B^2=AIB^2=AB^2=(AB)B=IB=B$$

$$=\begin{bmatrix}6&-1&-1\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A^2B^3 برابر مجموع درایه‌های ماتریس B می‌باشد یعنی عدد یک.

۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&-2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&-2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$B^2=\begin{bmatrix}3&6&-2\\-2&-4&1\\-2&-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&6&-2\\-2&-4&1\\-2&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$M=pA^2+qB^2=pI+qI=(p+q)I$$

پس M یک ماتریس اسکالر است.

۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&n&p\\q&r&s\\t&u&v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

از تساوی فوق بلافاصله نتیجه می‌شود $n=p=s=0$ و داریم:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&0&0\\q&r&0\\t&u&v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}m&0&0\\\bigcirc&2r&0\\\bigcirc&\bigcirc&4v\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m=1,\ r=\frac{1}{2},\ v=\frac{1}{4}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $(A+B)$ = مجموع درایه‌های قطر اصلی A

$+B$ مجموع درایه‌های قطر اصلی =

$$1+2+4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=8+\frac{3}{4}=\frac{35}{4}=8/75$$

۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

از تساوی فوق بلافاصله نتیجه می‌شود $a=1$، $b=0$ و $c=0$ و در ادامه داریم:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\\bigcirc&\bigcirc&f+3i\\\bigcirc&\bigcirc&i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow f+3i=0,\ i=1\Rightarrow f=-3i=-3$$

پس درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس B برابر -3 است.

۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴

با فرض $A=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$

و $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$، داریم:

$$D=C^2=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$$

لزومی به محاسبهٔ همهٔ درایه‌های C^2 نیست چون درایه‌های قطر اصلی C^2 را می‌خواهیم:

$$D_{11}=1\times1+3\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{6}+24\times\frac{1}{24}=1+1+1+1=4$$

$$D_{22}=\frac{1}{3}\times3+1\times1+2\times\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{8}=1+1+1+1=4$$

$$D_{33}=\frac{1}{6}\times6+\frac{1}{2}\times2+1\times1+4\times\frac{1}{4}=1+1+1+1=4$$

$$D_{44}=\frac{1}{24}\times24+\frac{1}{8}\times8+\frac{1}{4}\times4+1\times1=1+1+1+1=4$$

$$D_{11}+D_{22}+D_{33}+D_{44}=4+4+4+4=16$$

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\text{درایهٔ سطر اول و ستون اول } A=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=9$$

$$\text{درایهٔ سطر دوم و ستون دوم } A=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&8&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=7$$

$$\text{درایهٔ سطر سوم و ستون سوم } A=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=5$$

$$\text{مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس } A=9+7+5=21$$

روش دوم:

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{C}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی BC با مجموع درایه‌های قطر اصلی CB فرقی نمی‌کند بنابراین داریم:

مجموع درایه‌های قطر اصلی A = مجموع درایه‌های قطر اصلی CB

$$CB=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } CB=(7+0+0)+(0+0+9)+(0+5+0)=21$$

۵۱

نکته: سطر iام ماتریس ABC برابر است با: $(\text{سطر } i\text{ام } A)\times B\times C$

$$\text{سطر سوم ماتریس } A=\begin{bmatrix}0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&7&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&1&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}7+1-5=3$$

۵۲

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B$$

$$=A^2+B\times A+A\times B+B^2$$

بنابه فرض $A\times B=-2B\times A$ است؛ پس نتیجه می‌شود:

$$(A+B)^2=A^2+B\times A-2B\times A+B^2$$

$$=A^2-B\times A+B^2$$

۵۳

برای این‌که ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&a\\2&b\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، باید داشته باشیم:

$$A\times B=B\times A\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&a\\2&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&a\\2&b\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}5&3b-a\\-1&a-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-1&3-a\\b-2&6-b\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a-1=5\\3b-a=3-a\\b-2=-1\\a-b=6-b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=1\end{cases}$$

بنابراین ماتریس $B=\begin{bmatrix}1&6\\2&1\end{bmatrix}$ با ماتریس A تعویض‌پذیر است.

۵۴

$$AX=3X\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&-2\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+2c\\2b-2c\\-b+c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a\\3b\\3c\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+2c=3a\\2b-2c=3b\\-b+c=3c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=a\\b=-2c\\b=-2c\end{cases}\Rightarrow\frac{a-b+c}{c}=\frac{c+2c+c}{c}=4$$

۵۵

$$A\times B=B\times A\Rightarrow\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a&1\\c&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&1\\c&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2a-c&-3\\3a+c&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+3&-a+1\\2c+15&-c+5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a-c=2a+3\\-3=-a+1\\3a+c=2c+15\\8=-c+5\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c=-3\\a=4\\c+15=3a\\c=-3\end{cases}$$

مقادیر $a=4$ و $c=-3$ در تساوی $c+15=3a$ صدق می‌کنند پس دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4&1\\-3&5\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند و $a+c=4-3=1$ است.

۵۶

نکته: ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبهٔ A و I همواره تعویض‌پذیرند و اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است.

$$(A+I)^2-(A-I)^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow(A^2+2A+I)-(A^2-2A+I)=\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4A=\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

و مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر است با $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

۵۷

$$(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B\xrightarrow{AB=BA}$$

$$(AB)^2=A(AB)B=(A^2B)B=A^2B^2$$

$$\Rightarrow A^2B^2=\begin{bmatrix}5&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26&10\\10&26\end{bmatrix}$$

۵۸

$$AB=I\Rightarrow\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&b&a\\3&a&2\\a&-2&b\end{bmatrix}\times\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&3&a\\b&a&-2\\a&2&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4+b^2+a^2&ab+2a+6&2a-2b+ab\\6+ab+2a&13+a^2&a+2b\\2a-2b+ab&a+2b&a^2+b^2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49&0&0\\0&49&0\\0&0&49\end{bmatrix}$$

$$13+a^2=49 \Rightarrow a^2=36 \Rightarrow a=\pm 6$$

$$\Rightarrow 4+b^2+a^2=49 \Rightarrow b^2=49-4-36=9 \Rightarrow b=\pm 3$$

چون $a+2b=0$ پس a و b مختلف العلامت هستند.

اگر $a=6$ و $b=-3$ باشند در تساوی‌های $6+ab+2a=0$ و $2a-2b+ab=0$ صدق می‌کنند. اما $a=-6$ و $b=3$ در تساوی‌های فوق صدق نمی‌کنند پس تنها جواب قابل قبول $a=6$ و $b=-3$ است.

۵۹ — **۱** ۲ ۳ ۴

$$A(A+2I)=A^2+2AI=A^2+2A \xrightarrow{A^2=-A-I\ (\text{فرض})} A(A+2I)=-A-I+2A=A-I$$

۶۰ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنا به فرض در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-2 & 4 & -7 \\ b & 0 & b+2 \\ 7 & a & 0 \end{bmatrix}$ برای هر i و j داریم $a_{ij}=-a_{ji}$ پس نتیجه می‌شود:

$$a_{11}=-a_{11} \Rightarrow a_{11}=0,\ a_{22}=-a_{22} \Rightarrow a_{22}=0,\ a_{33}=-a_{33} \Rightarrow a_{33}=0$$

بنابراین $a-2$ باید صفر باشد که نتیجه می‌دهد $a=2$ و در ادامه داریم:

$$a_{12}=-a_{21} \Rightarrow 4=-b \Rightarrow b=-4$$

$$a_{23}=-a_{32} \Rightarrow b+2=-a \Rightarrow b=-2-2=4$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ -4 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ و داریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ -4 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ -4 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -65 & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & -20 & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & -53 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } A^2} -65-20-53=-138$$

۶۱ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنا به فرض $A+B=I$ و $A=BC$ می‌باشند. داریم:

$$AC-C=(A-I)C=(I-B-I)C=-BC=-A$$

۶۲ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنا به فرض $A+B=I$ و $A=BC=CB$ می‌باشند. داریم:

$$AC-CA=CBC-CA=C(BC-A)=C(BC-BC)=C\times \bar{O}=\bar{O}$$

۶۳ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2+3A+I=\bar{O} \xrightarrow{\times A} A^3+3A^2+IA=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^3+3A^2+A=\bar{O} \Rightarrow A^3+3A^2+3A+I=2A+I$$

$$\Rightarrow (A+I)^3=2A+I \Rightarrow (A+I)^3-I=2A$$

$$\Rightarrow (A+I)^3+(-I)^3=2A$$

با فرض $B=A+I$ و $C=-I$ داریم $B^3+C^3=2A$ در نتیجه:

$$B-C=A+I-(-I)=A+I+I=A+2I$$

۶۴ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$(\text{فرض})\ BA=A \xrightarrow{A\times} ABA=A^2 \xrightarrow{AB=B\ (\text{فرض})} BA=A^2 \xrightarrow{BA=A} A^2=A$$

$$(\text{فرض})\ AB=B \xrightarrow{B\times} BAB=B^2 \xrightarrow{BA=A\ (\text{فرض})} AB=B^2 \xrightarrow{AB=B} B^2=B$$

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+BA+AB+B^2$$
$$=A+A+B+B=2(A+B)$$

$$(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=2(A+B)(A+B)$$
$$=2(A+B)^2=2\times 2(A+B)=4(A+B)$$

۶۵ — **۱** ۲ ۳ ۴

بنا به فرض $A^2=I-A$ داریم:

$$A^2(A+I)^2=(I-A)(A^2+2A+I)=(I-A)(I-A+2A+I)$$
$$=(I-A)(2I+A)=2I-A-A^2=2I-A-(I-A)=I$$

۶۶ — **۱** ۲ ۳ ۴

چون $A^2=\bar{O}$ پس $A^3=\bar{O}$ و می‌توان نوشت:

$$A(I-A)^3=A(I-3A+3A^2-A^3)=A(I-3A+\bar{O}-\bar{O})$$
$$=AI-3A^2=A-\bar{O}=A$$

۶۷ — ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2-(1+0)A+(1\times 0-(-2)\times 1)I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2=A-2I \Rightarrow A\times A^2=A\times(A-2I) \Rightarrow A^3=A^2-2A$$

$$\xrightarrow{A^2=A-2I} A^3=A-2I-2A \Rightarrow A^3=-A-2I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-2 \end{cases} \Rightarrow n^m=(-2)^{-1}=-\frac{1}{2}$$

۶۸ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2+B^2+AB+BA=A^2+AB+B^2+BA$$
$$=A(A+B)+B(B+A)$$
$$=A(A+B)+B(A+B)=(A+B)(A+B)=(A+B)^2$$
$$\xrightarrow{A+B=2AB} A^2+B^2+AB+BA=(2AB)^2=4(AB)^2$$

۶۹ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$M=(A+I)(B+I)=(A+I)B+(A+I)I=AB+IB+AI+I^2$$
$$=AB+B+A+I \xrightarrow{A+B+AB=\bar{O}\ (\text{فرض})} M=\bar{O}+I=I$$

۷۰ — **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^3+I=A^3+I^3=(A+I)(A^2-AI+I^2)$$
$$=(A+I)(A^2-A+I) \quad (1)$$

$$(\text{فرض})\ A^2-A-2I=\bar{O} \Rightarrow A^2-A=2I \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow A^3+I=(A+I)(2I+I)=3AI+3I^2=3A+3I$$

۷۱ — **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم:

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 6\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-(1+6)A+(6\times1-4\times1)I=\bar{O}\Rightarrow A^2=7A-2I$$

$$\Rightarrow A\times A^2=A\times(7A-2I)\Rightarrow A^3=7A^2-2A$$

با قرار دادن A^3 در عبارت داده‌شده داریم:

$$A^3-7A^2+2A+4I=7A^2-2A-7A^2+2A+4I=4I$$

۷۲ — ۱ ۲ **۳** ۴

بنابه فرض $A^2=A$ و $AB=I$ است. داریم:

$$A^3B^2=A(A^2B^2)\xrightarrow{A^2=A}A^3B^2=A(AB^2)$$

$$=A^2B^2=AB^2=(AB)B=IB=B$$

۷۳ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$\text{(فرض)}\ AB+BA=I\Rightarrow A\times(AB+BA)=A\times I$$

$$\Rightarrow A^2B+ABA=A$$

$$\text{(فرض)}\ AB+BA=I\Rightarrow(AB+BA)\times A=I\times A$$

$$\Rightarrow ABA+BA^2=A$$

از تفاضل دو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$A^2B-BA^2=A-A=\bar{O}$$

۷۴ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$\text{(فرض)}\ A^2+3A-I=0\Rightarrow A^2=-3A+I\xrightarrow[\text{از راست}]{\text{ضرب در } U=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$$

$$A^2U=(-3A+I)U=-3AU+U\xrightarrow{\text{ضرب در A از چپ}}A^3U$$

$$=A(-3AU+U)=-3A^2U+AU$$

$$\xrightarrow{A^2U=-3AU+U}A^3U=-3(-3AU+U)+AU$$

$$\Rightarrow A^3U=10AU-3U\xrightarrow{U=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},AU=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}A^3U=10\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\10\end{bmatrix}$$

۷۵ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B\xrightarrow{AB=\lambda BA\ \text{(فرض)}}$$

$$(AB)^2=A(\frac{AB}{\lambda})B\Rightarrow(AB)^2=\frac{1}{\lambda}(A^2B)B=\frac{1}{\lambda}A^2B^2$$

$$\Rightarrow(AB)^2-A^2B^2=\frac{1}{\lambda}A^2B^2-A^2B^2$$

$$\Rightarrow(AB)^2-A^2B^2=(\frac{1}{\lambda}-1)A^2B^2=\frac{1-\lambda}{\lambda}A^2B^2$$

۷۶ — **۱** ۲ ۳ ۴

$$(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)$$

$$=(A+I)B-(A+I)I-(B-I)A-(B-I)I$$

$$=AB+IB-AI-I^2-BA+IA-BI+I^2$$

$$=AB+B-A-I-BA+A-B+I=AB-BA$$

اما بنابه فرض، $AB-BA=2I$ است؛ پس نتیجه می‌شود:

$$(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)=2I$$

۷۷ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=2A$$

$$A^3=A^2\times A=2A\times A=2A^2$$

$$\Rightarrow A^3=2(2A)=4A\ ,\ A^4=A^3\times A=4A\times A$$

$$=4A^2=4(2A)=8A\ ,\ A^5=A^4\times A=8A\times A$$

$$=8A^2=8(2A)=16A$$

پس جمع درایه‌های A^5 برابر $16(1+1+1+1)=64$ است.

۷۸ — **۱** ۲ ۳ ۴

نکته: اگر $A^2=\lambda A$ باشد، آن‌گاه $A^k=\lambda^{k-1}A$ است. (k عدد طبیعی است)

$$A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}&\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4}&\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=A$$

$$A^3=A^2\times A=A\times A=A^2=A\xrightarrow{\text{به طور استقرایی}}A^n=A$$

پس $A^{100}=A$ می‌باشد.

۷۹ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$A^4=A^3\times A=(-I)\times A=-A\ ,\ A^5=A^4\times A=(-A)\times A=-A^2$$

$$A^6=A^5\times A=(-A^2)\times A=-A^3=-(-I)=I$$

پس کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $A^n=I$ است، $n=6$ می‌باشد.

۸۰ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$A-A^2=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&2\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=2I$$

$$B=\frac{1}{2^{8-n}}(A-A^2)^n=\frac{1}{2^{8-n}}(2I)^n=\frac{2^n}{2^{8-n}}I^n=\frac{2^n}{2^{8-n}}I$$

برای این‌که ماتریس B برابر I باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{2^n}{2^{8-n}}=1\Rightarrow2^n=2^{8-n}\Rightarrow n=8-n\Rightarrow2n=8\Rightarrow n=4$$

۸۱ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^3&3a^2\\0&a^3\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}a^3&3a^2\\0&a^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^4&4a^3\\0&a^4\end{bmatrix}$$

و به طور استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^n=\begin{bmatrix} a^n & 4a^{n-1} \\ 0 & a^n\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}} a^n+a^n=2a^n$$

۸۲ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&16\\0&49\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^2$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم $=16=\frac{7^2-1}{3}$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&16\\0&49\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&114\\0&\bigcirc\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^3$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم $=114=\frac{7^3-1}{3}$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$B=A^{50}=\begin{bmatrix}1&b_{12}\\0&\bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow b_{12}=\frac{7^{50}-1}{3}$$

۸۳ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$A^3=A^2\times A=-I\times A=-A\ ,\ A^4=A^2\times A^2=(-I)^2=I$$

$$A^5=A^4\times A=I\times A=A\ ,\ A^6=A^5\times A=A\times A=A^2=-I$$

بنابراین به طور استقرایی نتیجه می‌شود توان‌های A با دوره تناوب ۴ تکرار می‌شود:

$$(A+A^2+A^3+A^4)+(A^5+A^6+A^7+A^8)+\cdots$$
$$+(A^{2017}+A^{2018}+A^{2019}+A^{2020})+A^{2021}+A^{2022}$$
$$=\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar O}+\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar O}+\cdots+\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar O}$$
$$+A+(-I)=A-I$$

۸۴ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\ ,\ A^3=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^{2010}=(A^3)^{670}=I^{670}=I$$

۸۵ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

$$M^2=M\times M=\begin{bmatrix}2\cos^2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & 2\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\cos^2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & 2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^2=\begin{bmatrix}4\cos^4\theta+\sin^2 2\theta & 2\cos^2\theta\sin2\theta+2\sin^2\theta\sin2\theta\\ 2\cos^2\theta\sin2\theta+2\sin^2\theta\sin2\theta & \sin^2 2\theta+4\sin^4\theta\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\begin{bmatrix}4\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) & 2\sin2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\ 2\sin2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) & 4\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}2\cos^2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & 2\sin^2\theta\end{bmatrix}=2M$$

$$M^3=M^2\times M=(2M)M=2M^2=2(2M)=4M$$

۸۶ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}, A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$$

و به طور استقرایی نتیجه می‌شود $A^8=\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}$

$$B^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}, B^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

و مجدداً به طریق استقرایی نتیجه می‌شود $B^9=\begin{bmatrix}1&9\\0&1\end{bmatrix}$، پس می‌توان نوشت:

$$A^8\times B^9=\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&9\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9\\8&73\end{bmatrix}$$

۸۷ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

$$A^2-A+I=\bar O\Rightarrow A^2=A-I\Rightarrow AA^2=A(A-I)$$
$$\Rightarrow A^3=A^2-AI=A^2-A$$

با قرار دادن $A^2=A-I$ در تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$A^3=(A-I)-A=-I$$
$$A^{30}=(A^3)^{10}=(-I)^{10}=(-1)^{10}I^{10}=I$$

۸۸ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

نکته: اگر $C^k=\bar O$ باشد، آن‌گاه $C^n=\bar O\ (n\ge k)$

$$C=(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B$$
$$=A^2+BA-AB-B^2$$

بنابه فرض $A^2=B^2=I$، $AB=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$ می‌باشد. پس داریم:

$$C=(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}$$

$$C^2=C\times C=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\bar O\Rightarrow C^{1401}=\bar O$$

۸۹ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

بنابه فرض $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ می‌باشد. داریم:

نکته: اگر $(A\times B)\times C=[d_{ij}]$ آن‌گاه:

$d_{ij}=$ (سطر iام A) (ماتریس B) (ستون jام C)

A^3 درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول = (سطر سوم A)(ماتریس A)(ستون اول A)

$$=[1\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

A^3 درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول $=[1\ 0\ 0]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=1\times1+0\times0+0\times1=1$

۹۰ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

$$A+I=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$$

$(A+I)^6=(A+I)^2(A+I)^2(A+I)^2$

درایهٔ سطر اول و ستون اول $a=(A+I)^6$

$=((A+I)^2\ \text{سطر اول})((A+I)^2\ \text{ماتریس})((A+I)^2\ \text{ستون اول})$

$$=\begin{bmatrix}5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$$

$$a=\begin{bmatrix}41&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=41\times5+4\times40=205+160=365$$

درایهٔ سطر اول و ستون دوم $b=(A+I)^6$

$=((A+I)^2\ \text{سطر اول})((A+I)^2\ \text{ماتریس})((A+I)^2\ \text{ستون اول})$

$$=\begin{bmatrix}5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}41&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=4\times41+5\times40=164+200=364$$

بنابراین $a-b=365-364=1$ می‌باشد.

۹۱   **۱** ۲ ۳ ۴

نکته:

$$(I+A)^n=\binom{n}{0}I+\binom{n}{1}A+\binom{n}{2}A^2+\cdots+\binom{n}{n}A^n$$

نتیجه: اگر $A^n=O\ (n\ge 2)$ آن‌گاه: $(I+A)^n=I+nA$

بنابه فرض، $A^2=O$ است. پس می‌توان نوشت:

$$(I-A)^4(I+A)^5=(I-4A)(I+5A)$$

$$=I^2+5A-4A-20A^2=I+A-20A^2=I+A$$

۹۲   ۱ ۲ **۳** ۴

$$(I+A)^4=\binom{4}{0}I+\binom{4}{1}A+\binom{4}{2}A^2+\binom{4}{3}A^3+\binom{4}{4}A^4$$

$$\Rightarrow (I+A)^4=I+4A+6A^2+4A^3+A^4$$

(فرض) $A^2=A\Rightarrow A^3=A^2=A\Rightarrow A^4=A^2=A$

نکته: اگر ماتریس A چنان باشد که $A^2=A$، آن‌گاه: $A^n=A\ (n\ge 2)$

$$(I+A)^4=I+4A+6A+4A+A=I+15A$$

۹۳   ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3&-2\sqrt3\\2\sqrt3&-3+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&-2\sqrt3\\2\sqrt3&-2\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-2&-2\sqrt3\\2\sqrt3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0\\0&8\end{bmatrix}=8I$$

$$A^{40}=(A^3)^{13}A=(8I)^{13}A=2^{39}I^{13}A=2^{39}IA$$

$$=2^{39}A=\begin{bmatrix}-2^{39}&2^{39}\sqrt3\\-2^{39}\sqrt3&-2^{39}\end{bmatrix}$$

۹۴   ۱ **۲** ۳ ۴

$$(\text{فرض})\ AB=A\xrightarrow{\times A}ABA=A^2\xrightarrow{BA=B\ (\text{فرض})}AB=A^2$$

$$\Rightarrow A=A^2$$

در نتیجه $A^n=A\ (n\ge 2)$ و می‌توان نوشت:

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{1401}=\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{\text{۱۴۰۱ مرتبه}}=1401A$$

۹۵   ۱ **۲** ۳ ۴

$$C=AB=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^2=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^2=-C\Rightarrow C^3=C^2\times C=-C\times C=-C^2=C$$

$$\Rightarrow C^4=C^3\times C=C^2=-C$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $C^n=(-1)^{n-1}C$ و در ادامه داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$C^n+A^2=(-1)^{n-1}\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)^n&(-1)^n\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)^n+1&(-1)^n\\0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس C^n+A^2 برابر است با $2+2(-1)^n$.

۹۶   **۱** ۲ ۳ ۴

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&\frac12&-1\\0&0&\frac14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b-d&c-e+f\\0&\frac12 d&\frac12 e-f\\0&0&\frac14 f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow a=1,d=2,f=4$$

$$\Rightarrow b-d=0\Rightarrow b=d=2,\ \frac12 e-f=0\Rightarrow e=2\times4=8$$

$$c-e+f=0\Rightarrow c-8+4=0\Rightarrow c=4$$

بنابراین $B=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&8\\0&0&4\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس B برابر است با:

$$4+4+2+2+8+1=21$$

۹۷   ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix},\quad A^3=A^2\times A$$

$$=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&26\\0&27\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}1&26\\0&27\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&80\\0&81\end{bmatrix}$$

بنابراین به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} ۱ & \bigcirc \\ ۰ & ۳^n \end{bmatrix}$. بنا به فرض مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۲۴۴ است. داریم:

$$۳^n + ۱ = ۲۴۴ \Rightarrow ۳^n = ۲۴۳ = ۳^۵ \Rightarrow n = ۵$$

۹۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳ = A^۲ \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۴ = A^۳ \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -n & ۱ \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های A^n برابر $۲ - n$ است.

۹۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$A^۳ = A^۲ \times A = (۲A - I) \times A = ۲A^۲ - A$$
$$= ۲(۲A - I) - A = ۳A - ۲I$$
$$A^۴ = A^۳ \times A = (۳A - ۲I)A = ۳A^۲ - ۲A$$
$$= ۳(۲A - I) - ۲A = ۴A - ۳I$$
$$A^۵ = A^۴ \times A = (۴A - ۳I)A = ۴A^۲ - ۳A$$
$$= ۴(۲A - I) - ۳A = ۵A - ۴I$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^{۱۰} = ۱۰A - ۹I$ لذا $a = ۱۰$ و $b = -۹$ و $(a, b) = (۱۰, -۹)$.

۱۰۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳ = \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۶ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۴ = \begin{bmatrix} ۱ & -۶ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۸ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} ۱ & -۲n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و در ادامه داریم:

$$B = A + A^۲ + A^۳ + \cdots + A^n$$
$$= \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۶ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} ۱ & -۲n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} n & -۲ - ۴ - ۶ - \cdots - ۲n \\ ۰ & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & -n(n+۱) \\ ۰ & n \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} ۲n - n^۲ - n = n - n^۲$$

۱۰۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^۳ = A^۲A = IA = A$$
$$A^۴ = A^۲A^۲ = I \times I = I$$
$$A^۵ = A^۴A = IA = A$$

بنابراین به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^n = \begin{cases} A & \text{فرد } n \\ I & \text{زوج } n \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A + A^۲ + A^۳ + \cdots + A^{۲۰۰} = A + I + A + I + \cdots + I$$
$$= ۱۰۰A + ۱۰۰I = \begin{bmatrix} ۰ & ۱۰۰ \\ ۱۰۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱۰۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰۰ & ۱۰۰ \\ ۱۰۰ & ۱۰۰ \end{bmatrix}$$

۱۰۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & \sqrt[۵]{۲} & ۰ \\ \sqrt[۵]{۸} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt[۵]{۴} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & \sqrt[۵]{۲} & ۰ \\ \sqrt[۵]{۸} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt[۵]{۴} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt[۵]{۱۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt[۵]{۱۶} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt[۵]{۱۶} \end{bmatrix} = \sqrt[۵]{۱۶}\, I$$
$$A^{۱۰} = (A^۲)^۵ = (\sqrt[۵]{۱۶}\, I)^۵ = ۱۶I^۵ = ۱۶I$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی $A^{۱۰}$ برابر $۱۶ + ۱۶ + ۱۶ = ۴۸$ است.

۱۰۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^n = \begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۳ = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲۷ \end{bmatrix}$$

$$A^۳ - ۲A^۲ + ۵I = \begin{bmatrix} ۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۸ \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها برابر ۲۱ است.

۱۰۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱^۲ & ۱۵ & ۳۹ \\ ۰ & ۲^۲ & ۳۵ \\ ۰ & ۰ & ۳^۲ \end{bmatrix}$$

$$A^۳ = A^۲A = \begin{bmatrix} ۱^۲ & ۱۵ & ۳۹ \\ ۰ & ۲^۲ & ۳۵ \\ ۰ & ۰ & ۳^۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱^۳ & \bigcirc & \bigcirc \\ ۰ & ۲^۳ & \bigcirc \\ ۰ & ۰ & ۳^۳ \end{bmatrix}$$

پس ملاحظه می‌کنیم برای محاسبهٔ درایه‌های قطرهای اصلی نیازی به محاسبهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی نیست و داریم:

$$A^۴ = \begin{bmatrix} ۱^۴ & \bigcirc & \bigcirc \\ ۰ & ۲^۴ & \bigcirc \\ ۰ & ۰ & ۳^۴ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{مجموع درایه‌های}} ۱^۴ + ۲^۴ + ۳^۴ = ۱ + ۱۶ + ۸۱ = ۹۸$$

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^n=\begin{bmatrix} a^n & \bigcirc & \bigcirc \\ 0 & b^n & \bigcirc \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$

۱۰۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 \text{ سطر اول} = (A^2 \text{ سطر اول}) \times A^2$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۰۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9-6 & -9+9-4 & 12-12+4 \\ 6-6 & -6+9-4 & 8-12+4 \\ -2 & 3-1 & -4+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^4=A^2A^2=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 9-8 & -12+4+8 & 12-12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6+6 & 8-2-6 & -8+9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

۱۰۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$A^3 \text{ سطر اول}=(A \text{ سطر اول})\times A\times A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \end{bmatrix}$$

۱۰۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A^3 \text{ درایه سطر اول ماتریس}=(A\text{سطر اول})\times A\times A$$

$$\Rightarrow A^3 \text{ درایه سطر اول ماتریس}=\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۰۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^{11}=\begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 2^{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{10} & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$$

(مجموع درایه‌های A^{11}) − (مجموع درایه‌های قطر اصلی)

$$=(4\times 2^{10}+1)-(2\times 2^{10}+1)=2\times 2^{10}=2^{11}$$

۱۱۰ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=A$$

بنابراین $A^{2k+1}=A$ (k عدد طبیعی) و داریم:

$$A^{42}+A^{55}=A^{41}\times A+A^{2\times 27+1}=A\times A+A=A^2+A$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۱۱ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$A^{100}=(A^3)^{33}\times A=I^{33}\times A=I\times A=A$$

۱۱۲ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$a_{ij}=|i-j|+j-i\Rightarrow A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow A^k=\bar{O}\,(k\geq 3)$$

$$B=A+A^2+A^3+\cdots+A^{1401}=A+A^2+\bar{O}+\cdots+\bar{O}$$

$$=A+A^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} 8+2+2=12$$

۱۱۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2\\6&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&2\\6&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}=6I$$

$$A^{40}=(A^3)^{13}A=(6I)^{13}A=6^{13}I^{13}A=6^{13}IA=6^{13}A$$

$$\frac{1}{36^6}A^{40}=\frac{6^{13}}{36^6}A=\frac{6^{13}}{6^{12}}A=6A=\begin{bmatrix}0&6&0\\0&0&12\\18&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=36$

۱۱۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-4&4\\-2&2&-2\\2&-2&2\end{bmatrix}=2A^2$$

$$A^4=A^3\times A=2A^2\times A=2A^3=2\times 2A^2=4A^2$$

$$A^5=A^4\times A=4A^2\times A=4A^3=4\times 2A^2=8A^2$$

$\vdots$

$$A^n=2^{n-2}A^2\ (n\geq 3)\Rightarrow A^{100}=2^{98}A^2=2^kA^2\Rightarrow k=98$$

۱۱۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$A^{n+1}=\begin{bmatrix}2^n&0&2^n\\0&1&0\\2^n&0&2^n\end{bmatrix}(n\geq 1)$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}4\times 2^n+1=2^{n+2}+1$$

۱۱۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1+2&2&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1+2+3&3&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1+2+3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\1+2+3+4&4&1\end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^{49}=\begin{bmatrix}1&0&0\\49&1&0\\1+2+3+\dots+49&49&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=1+2+3+\dots+49=\frac{49(49+1)}{2}=49\times 25=1225$$

۱۱۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$A^4=A^3A=(-I)A=-A\ ,\ A^5=A^4A=-A^2\ ,$$

$$A^6=A^5A=(-A^2)A=-A^3=I$$

بنابراین:

$$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=A+A^2+A^3-A-A^2-A^3=O$$

و به طور تناوبی نتیجه می‌شود:

$$A^7+A^8+A^9+A^{10}+A^{11}+A^{12}$$
$$=A^{13}+A^{14}+A^{15}+A^{16}+A^{17}+A^{18}$$
$$=A^{19}+A^{20}+A^{21}+A^{22}+A^{23}+A^{24}=O$$
$$2I+A+A^2+\dots+A^{24}+A^{25}=2I+O+A^{25}$$
$$=2I+(A^3)^8A=2I+(-I)^8A=2I-A$$
$$=2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{جمع درایه‌ها}}2+1-1+1=3$$

۱۱۸ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{bmatrix}$$

$$A^2+2A=\begin{bmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&0&16\\6&-2&12\\-4&0&-10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^2+2A)^{10}=(-I)^{10}=I^{10}=I$$

۱۱۹ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{bmatrix}$$

$$A^2-2A=\begin{bmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10&-8&4\\4&-2&2\\-8&8&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^2-2A+2I)^6=(-I+2I)^6=I^6=I$$

۱۲۰ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^3+3I)^4=(-I+3I)^4=(2I)^4=16I^4=16I$$

۱۲۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$A-kI=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{bmatrix}$$

$$(A-kI)^2=\begin{bmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}k^2-1&2k-2&4k-4\\2k-2&k^2-1&4k-4\\2-2k&2-2k&k^2-6k+5\end{bmatrix}$$

به ازای $k=1$ داریم $(A-I)^2=\bar{O}$، پس کم‌ترین مقدار $n+k$ برابر $2+1=3$ است.

۱۲۲ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$4A^2=3A\Rightarrow A^2=\frac{3}{4}A\Rightarrow A^2\times A=\frac{3}{4}A\times A\Rightarrow A^3=\frac{3}{4}A^2$$

$$=\frac{3}{4}(\frac{3}{4}A)=\frac{9}{16}A\,,\ A^4=A^3A=(\frac{9}{16}A)A$$

$$=\frac{9}{16}A^2=\frac{9}{16}(\frac{3}{4}A)=\frac{27}{64}A$$

۱۲۳ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$A^2=A\Rightarrow 4A^2=4A\Rightarrow 4A^2-4A+I=I\Rightarrow(2A-I)^2=I$$

$$\Rightarrow 2^2(A-\frac{I}{2})^2=I\Rightarrow(A-\frac{I}{2})^2=\frac{I}{4}$$

$$\Rightarrow(A-\frac{I}{2})^6=(\frac{I}{4})^3=\frac{I^3}{64}=\frac{1}{64}I$$

۱۲۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$2I-A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$(2I-A)^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

$$(2I-A)^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$(2I-A)^{100}=\begin{bmatrix}1&0&0\\200&1&0\\100&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}303$$

۱۲۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$ABC=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$(ABC)^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$(ABC)^3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار n برابر ۳ است.

۱۲۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نکته: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ برابر $|A|=ad-bc$ است.

$$\begin{vmatrix}a&-b\\2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&b\\6&-5\end{vmatrix}=32\Rightarrow 3a+2b-(-5a-6b)=32$$

$$\Rightarrow 8b+8a=32\Rightarrow a+b=4\,,\ \begin{vmatrix}4a&b\\-4&1\end{vmatrix}=4a+4b$$

$$=4(a+b)=4\times4=16$$

۱۲۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه $|AB|=|A||B|$.

$$A=\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=3\times1-1\times1=2$$

$$B=\begin{bmatrix}4&2\\0&3\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=4\times3-0\times2=12$$

$$\frac{|A^2+AB|}{|B^2+BA|}=\frac{|A(A+B)|}{|B(B+A)|}=\frac{|A||A+B|}{|B||B+A|}$$

$$=\frac{|A|}{|B|}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

۱۲۸ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^3=A^2A=IA=A$$

$$A^4=(A^2)^2=I^2=I\,,\ A^5=A^4A=IA=A,\cdots,A^{2n-1}=A$$

$$B=A+A^3+A^5+\cdots+A^{2n-1}=\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{n\ \text{مرتبه}}=nA$$

$$\Rightarrow|B|=|nA|=n^2|A|=n^2\begin{vmatrix}2&3\\-1&-2\end{vmatrix}=n^2(-4+3)=-n^2$$

۱۲۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A+۲B=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix},\ ۲A-B=\begin{bmatrix} ۵ & -۱۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$(A+۲B)+۲(۲A-B)=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱۰ & -۲۲ \\ -۱۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱۵ & -۲۵ \\ -۱۰ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow ۵A=\begin{bmatrix} ۱۵ & -۲۵ \\ -۱۰ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=۳-۱۰=-۷$$

$$B=۲A-\begin{bmatrix} ۵ & -۱۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & -۱۰ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۵ & -۱۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=-۲-۱=-۳\ ,\ |A|+|B|=-۷-۳=-۱۰$$

۱۳۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\ ,\ |A|=۳\Rightarrow ad-bc=۳$$

$$A+I=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+۱ & b \\ c & d+۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+I|=(a+۱)(d+۱)-bc$$

$$A-I=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-۱ & b \\ c & d-۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A-I|=(a-۱)(d-۱)-bc$$

$$|A+I|+|A-I|=ad+a+d+۱-bc+ad-a-d+۱-bc$$

$$=۲(ad-bc)+۲\Rightarrow |A+I|+|A-I|=۲\times ۳+۲=۸$$

۱۳۱ ۱ ۲ **۳** ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^۲+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^۲ \end{bmatrix}$$

(فرض) $|A|=\Delta\Rightarrow ad-bc=\Delta\Rightarrow ad=bc+\Delta$ (۱)

(فرض) $(a^۲+bc)+(bc+d^۲)=T\Rightarrow a^۲+d^۲+۲bc=T$

$\Rightarrow a^۲+d^۲=T-۲bc$ (۲)

A مربع مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $=(a+d)^۲=a^۲+d^۲+۲ad$

با قرار دادن (۱) و (۲) در تساوی فوق داریم:

$$=T-۲bc+۲(bc+\Delta)=T+۲\Delta$$

۱۳۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$a_{ij}=\begin{cases} ۲i-j & i<j \\ i & i\geq j \end{cases}\Rightarrow A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۲$$

$$b_{ij}=\begin{cases} i+۲j & i\leq j \\ ۲+j & i>j \end{cases}\Rightarrow B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}\Rightarrow |B|=۱۸-۱۵=۳$$

$$AX=B\Rightarrow |AX|=|B|\Rightarrow |A||X|=|B|\Rightarrow |X|=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}=[(-۱)^i-j]_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ & -۴ \\ ۰ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$B=[b_{ij}]_{۳\times ۲}=[(-۱)^j+i]_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ & -۴ \\ ۰ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱۱ & -۲۹ \\ -۵ & -۱۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A\times B|=(-۱۱)(-۱۱)-(-۵)(-۲۹)=۱۲۱-۱۴۵=-۲۴$$

۱۳۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-I$$

$$A^۳=A^۲A=(-I)A=-A$$

$$A^۴=(A^۲)^۲=(-I)^۲=I\ ,\ A^۵=A^۴A=IA=A\ ,$$

$$A+A^۲+A^۳+A^۴=A-I-A+I=\bar{O}$$

توان‌های A با تناوب ۴ تکرار می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$B=(\underbrace{A+A^۲+A^۳+A^۴}_{\bar{O}})+(\underbrace{A^۵+A^۶+A^۷+A^۸}_{\bar{O}})+\cdots$$

$$+(\underbrace{A^{۲۰۱۷}+A^{۲۰۱۸}+A^{۲۰۱۹}+A^{۲۰۲۰}}_{\bar{O}})+A^{۲۰۲۱}+A^{۲۰۲۲}=A-I$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=(-۱)(-۱)-(-۱)(۱)=۱+۱=۲$$

۱۳۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{-۴}{۱}=۴\ ,\ \alpha\beta=\frac{۱}{۱}=۱$$

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix}=\alpha(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(\alpha+\beta)^۲=۴^۲=۱۶$$

۱۳۶ ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: اگر A یک ماتریس ۲×۲ باشد آن‌گاه $|KA|=K^۲|A|$ (K عدد حقیقی)

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & -a \\ a & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -a \\ a & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a^۲ & ۰ \\ ۰ & -a^۲ \end{bmatrix}=-a^۲I$$

$$A^{۴n}=(A^۲)^{۲n}=(-a^۲I)^{۲n}=a^{۴n}I^{۲n}=a^{۴n}I$$

$$A^{۴n+۱}=A^{۴n}\times A=a^{۴n}I\times A=a^{۴n}A$$

$$A^{۴n}+A^{۴n+۱}=a^{۴n}I+a^{۴n}A=a^{۴n}(I+A)=a^{۴n}$$

$$\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & -a \\ a & ۰ \end{bmatrix}\right)=a^{۴n}\begin{bmatrix} ۱ & -a \\ a & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A^{۴n}+A^{۴n+۱}|=a^{۸n}\begin{vmatrix} ۱ & -a \\ a & ۱ \end{vmatrix}=a^{۸n}(۱+a^۲)$$

بنا به فرض دترمینان فوق برابر $a^{n+۳۵}+a^{n+۳۷}$ می‌باشد در نتیجه داریم:

$$a^{۸n}(۱+a^۲)=a^{n+۳۵}(۱+a^۲)\Rightarrow a^{۸n}=a^{n+۳۵}\Rightarrow ۸n=n+۳۵$$

$$\Rightarrow ۷n=۳۵\Rightarrow n=۵$$

۱۳۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}=-A$$

نکته: به طور کلی اگر $A^۲=\lambda A$ آن‌گاه $A^n=\lambda^{n-۱}A$.

$$A^{۲۰۲۲}=(-۱)^{۲۰۲۱}A=-A$$

بنابه فرض $B=A+I$ در نتیجه:

$$A^{۲۰۲۲}+B=-A+A+I=I\Rightarrow |A^{۲۰۲۲}+B|=|I|=۱$$

۱۳۸
۱ ۲ **۳** ۴

$$2A=\begin{bmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{bmatrix}\Rightarrow |2A|=\begin{vmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2^2|A|=|A|^2+4\Rightarrow |A|^2-4|A|+4=0$$

$$\Rightarrow (|A|-2)^2=0\Rightarrow |A|=2\Rightarrow ||A|A|=|A|^2|A|=2^2\times 2=8$$

۱۳۹
۱ ۲ ۳ ۴

$$2A+3I=\begin{bmatrix}9 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}9 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2-(3+0)A+(3\times 0-2(-1))I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2-3A+2I=0\Rightarrow A^2-3A=-2I$$

$$|A^2-3A|=|-2I|=(-2)^2=4$$

۱۴۰
۱ ۲ ۳ ۴

$$C=A\times B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ a & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & a\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 3a\\ 3a & a^2+5\end{bmatrix}$$

$$|C|=14(a^2+5)-3a\times 3a=14a^2-9a^2+70=5a^2+70$$

پس به ازای هر a حقیقی، $|C|$ همواره مثبت است.

۱۴۱
۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|AB|=|BA|=|A||B|$

$$A\times B=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 7 & 10\end{bmatrix}\Rightarrow |A\times B|=7\times 10-7\times 8=70-56=14$$

چون دترمینان ماتریس $B\times A$ با دترمینان ماتریس $A\times B$ برابر است،
پس از بین گزینه‌ها تنها ماتریس $\begin{bmatrix}15 & 2\\ 8 & 2\end{bmatrix}$ برابر $B\times A$ می‌تواند باشد.

۱۴۲
۱ ۲ ۳ **۴**

$$AC=\begin{bmatrix}1 & a & 3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ a & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+10 & a+2\\ a+2 & 3\end{bmatrix}$$

(فرض) $ACB=52I\Rightarrow |ACB|=52^2\Rightarrow |AC||B|=52^2$

$$\Rightarrow ((3a^2+30)-(a+2)^2)\times 104=52^2$$

$$\Rightarrow 3a^2+30-a^2-4a-4=26$$

$\Rightarrow 2a^2-4a=0\Rightarrow a=0$ یا $a=2\xrightarrow{\text{مجموع}}2$

۱۴۳
۱ **۲** ۳ ۴

یادآوری: اگر $a>0$ و مخالف ۱ باشد ($a\neq 1$) آن‌گاه برای هر x و y مثبت داریم:

الف) $\log_a x+\log_a^y=\log_a^{xy}$

ب) $\log_a^x-\log_a^y=\log_a^{\frac{x}{y}}$

$$A=\begin{bmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(\log 5)^2-(\log 2)^2$$

$$=(\log 5-\log 2)(\log 5+\log 2)$$

$$\Rightarrow |A|=\log\frac{5}{2}\times\log 10=\log 2.5\times 1=\log 2.5$$

۱۴۴
۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{vmatrix}10000^{\log x} & 100^{\log x}\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-4\Rightarrow 10000^{\log x}-4\times 100^{\log x}=-4$$

$$\Rightarrow (100^2)^{\log x}-4\times 100^{\log x}+4=0$$

$$\Rightarrow (100^{\log x})^2-4\times 100^{\log x}+4=0$$

$$\xrightarrow{100^{\log x}=t}t^2-4t+4=0\Rightarrow (t-2)^2=0$$

$$\Rightarrow t=2\Rightarrow 100^{\log x}=2\Rightarrow \log 100^{\log x}=\log 2$$

$$\Rightarrow \log x\times\log 10^2=\log 2\Rightarrow \log x=\frac{1}{2}\log 2=\log\sqrt{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}$$

۱۴۵
۱ ۲ **۳** ۴

نکته: ۱- اگر A یک ماتریس ۲×۲ یا ۳×۳ باشد، آن‌گاه $|A^n|=|A|^n$ (n عدد طبیعی است)
۲- اگر A یک ماتریس ۲×۲ و k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA|=k^2|A|$
۳- اگر A یک ماتریس ۳×۳ و k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA|=k^3|A|$

$$\left|\frac{1}{2}A^3\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^2|A^3|=\frac{1}{4}|A|^3=\frac{1}{4}\times 2^3=\frac{8}{4}=2$$

۱۴۶
۱ ۲ ۳ **۴**

با توجه نکته تست قبل (شماره ۳) داریم:

$$||A|A|=|A|^3|A|=|A|^4=4^4=256$$

۱۴۷
۱ **۲** ۳ ۴

$$\begin{vmatrix}\tan\theta & \frac{1}{\cos\theta}\\ \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta} & \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\end{vmatrix}$$

$$=\tan\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)-\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$=\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\tan\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)=\tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}$$

با استفاده از اتحاد $\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{vmatrix}\tan\theta & \frac{1}{\cos\theta}\\ \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta} & \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\end{vmatrix}=\tan^2\theta-(1+\tan^2\theta)=-1$$

۱۴۸
۱ **۲** ۳ ۴

$$|A|^2-5|A|+6=0\Rightarrow (|A|-2)(|A|-3)=0$$

$\Rightarrow |A|=2$ یا $|A|=3$

چون درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی هستند، پس درایه‌های A به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=3\times 1-1\times 1=3-1=2$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=4-1=3$$

پس کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌ها برابر ۶ = ۱+۱+۲+۲ (۳+۱+۱+۱=۶) است.