

مسلمی که امروز بابت خرید این کتاب می پردازید! در مقابل هزینه های که در
آیند بابت نخواندن آن پرداخت خواهید کرد، بسیار ناچیز است...



1000 نکته

[Geometry]

10 + 11 + 12

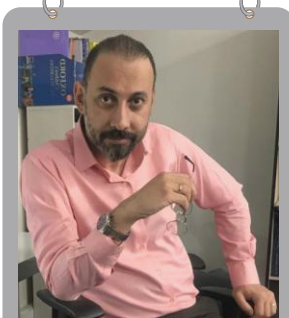
این نسل از کتاب های ریاضی میکرو که با وسواس خاصی تهیه شده، ترکیبی است از ۳ کتاب با ۳ استراتژی مختلف:

کتاب اول: نکته های واجب و ضروری

کتاب دوم: نکته های ویژه تسلط و تثبیت و مرور

کتاب سوم: نکته های IQ و چالشی ویژه دانش آموزان مدارس برتر

مقدمه مؤلف



A. Monsef Shokri

به جای نوشتن مقدمه طول و دراز و تشکر از فک و فامیل و ایل و تبار خودمان و دست اندرکاران کتاب بهتر است توضیحاتی کوتاه و مهم درباره ساخت و بافت این کتاب ارائه کنم :

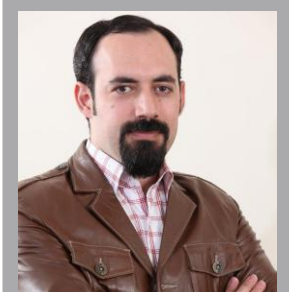
این کتاب دارای سه تیپ نکته است

نکته های سبز این نکته ها که با 🍏 مشخص شده است برای همه دانش آموزان واجب و ضروری است.

نکته های زرد این نکته ها که با 🍌 مشخص شده است ویژه تسلط بر ریزه کاری ها و نکات فرعی است.

نکته های بنفش این نکته ها که با 🍇 مشخص شده است ویژه دانش آموزان مدارس برتر و همچنین دانش آموزانی است که به دنبال نکته های چالشی و سطح بالاتر از کنکور سراسری هستند.

ویژگی های خاص این کتاب نسبت به سایر کتاب های موجود در بازار:



M. Hosseyni Fard

1 طراحی و معماری داخلی بسیار زیبا جذاب و مورد پسند دانش آموزان و معلمان و مشاوران

2 استفاده مناسب و حرفه ای از رنگ در ساختار درسنامه که فرآیند یادگیری را بسیار ساده تر، جذاب تر و سریع تر می کند.

3 تیپ بندی بسیاری از مباحث برای سهولت در یادگیری

4 تطابق کامل و کامل و نقطه به نقطه با کتاب بانک تست هندسه جامع میکرو [نسل جدید]

5 بررسی کامل تمام تمرینات و متن کتاب درسی و همچنین اشکال، نمودارها و کلید واژه ها

6 بررسی تست ها کنکور چند دهه اخیر به خصوص نظام جدید آموزش و استخراج نکات کلیدی مطرح شده در آن ها.

7 بررسی کامل کتاب راهنمای معلم و استخراج نکات کلیدی آن.

8 آموزش راه ها و شیوه های میان بُر در حل تست که بسیاری از کتاب های کمک آموزشی از بیان آن ها [به دلایل متعدد] پرهیز می کنند.

9 user friendly بودن کتاب برای دانش آموزان با هر سطحی از معلومات.

10 کتاب یک ویژگی دیگر هم دارد که ربطی به ۹ ویژگی اول ندارد و در گوشه ای از کتاب پنهان است و امکان کشف آن تا قبل از ۱۵ اسفند ۱۴۰۰ وجود

ندارد و حداکثر ۸ نفر ممکن است این راز را کشف کنند، اگر شما یکی از این ۸ نفر هستید در اینستاگرام این ویژگی را در دایرکت برای من بفرستید و ۸ جلد

از کتاب های دور دنیا در نیم ساعت ویژه کنکور ۱۴۰۱ را هدیه بگیرید.

علی منصف شکری - سجاد عظمتی

 alimonsef_shokri

نظرات خود را درباره ویژگی دهم با ما در اینستاگرام در میان بگذارید.

Bertrand Russell
1872-1970



M[atrix]_{m×n} CHAPTER 1

Lesson . 1

صفحه ۱۰ تا ۲۱ کتاب درسی

ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

درس اول



M[atrix]_{m×n}

تعریف ماتریس و مفاهیم اولیه آن



هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و تعدادی ستون، یک **ماتریس** نامیده می شود. هر عدد حقیقی واقع در این ماتریس، یک **درایه** یا **عنصر** نامیده می شود. ماتریس ها را معمولاً با حروف بزرگ مانند **A**، **B**، **C** و ... نشان می دهند.

ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون	ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون	ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون
$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ سطر اول C	$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ سطر دوم B	$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & 7 \end{bmatrix}$ ستون سوم A درایه

اگر ماتریسی مانند **A** دارای **m** سطر و **n** ستون باشد، به صورت $A_{m \times n}$ یا $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ نوشته می شود. **A** را ماتریسی از مرتبه $m \times n$ (یا به طور خلاصه **m** در **n**) می گویند.

ماتریس ۱ در ۳: $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$ → ماتریس ۲ در ۳: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ → سطر ۲، ستون ۳: a_{23}

هر درایه ماتریس را با دو اندیس نشان می دهیم. اندیس اول شماره سطر و اندیس دوم شماره ستون را نشان می دهد، یعنی a_{ij} درایه سطر **i** ام و ستون **j** ام است.

درایه سطر اول و ستون سوم: a_{13} درایه سطر اول و ستون دوم: a_{12} درایه سطر دوم و ستون دوم: a_{22}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

Test تعداد درایه های کدام ماتریس از بقیه بیشتر است؟

- ۱) $[a_{ij}]_{3 \times 4}$ ۲) $[a_{ij}]_{2 \times 6}$ ۳) $[a_{ij}]_{6 \times 2}$ ۴) هر سه گزینه برابر است.

۴) تعداد درایه ها در یک ماتریس $m \times n$ برابر با $m \times n$ است، بنابراین همه ماتریس های داده شده در گزینه ها ۱۲ درایه دارند.

M[atrix]_{m×n}

بیان درایه ها بر حسب **i** و **j**



در بعضی از ماتریس ها، درایه ها را به طور مستقیم معرفی نمی کنند و آن ها را بر حسب تابعی از اندیس های سمت چپ و سمت راست درایه بیان می کنند. در این موارد ممکن است تابع چندضابطه ای نیز باشد که برای پیدا کردن درایه ها باید به شرط های گفته شده دقت کنید.

در ماتریس $A = [a_{ij}]_{p \times q}$ اگر i از 1 تا p و j از 1 تا q داشته باشیم، آنگاه مجموع درایه های ماتریس **A** کدام است؟

۲۰ جمع درایه ها $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$



♣ در ماتریس $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ اگر به ازای هر $2 \leq i \leq 3$ و هر $1 \leq j \leq 3$ داشته باشیم: $b_{ij} = i + j$. آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

➡ جمع درایه‌ها = ۲۱

♣ در ماتریس $C = [c_{ij}]_{3 \times 3}$ اگر $c_{ij} = \begin{cases} i \times j & ; i \geq j \\ 7 & ; i < j \end{cases}$ آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس C کدام است؟

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 7 & 7 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 7 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

➡ جمع درایه‌ها = ۱۴

Test در ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ اگر $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 2j & ; i \neq j \\ i + j & ; i = j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم A کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1^2 - 2 \times 2 \\ 2+2 & 2^2 - 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

➡ جمع درایه‌های ستون دوم = $-3 + 2 = -1$

Matrix

معرفی ماتریس مربعی



🍏 اگر در ماتریس A ، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک **ماتریس مربعی** از مرتبه n (یا $n \times n$) می‌نامیم.

$i+j=n+1 \Rightarrow$ روی قطر فرعی a_{ij}	$i=j \Rightarrow$ روی قطر اصلی a_{ij}
$C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$	$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0/2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

🍏 اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه براساس رابطه بین i و j می‌توان موقعیت درایه را نسبت به قطر اصلی تشخیص داد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

➡ [بالای قطر اصلی]: $i < j$

➡ [پایین قطر اصلی]: $i > j$

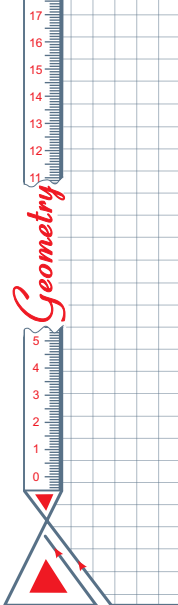
➡ [روی قطر اصلی]: $i = j$

Test در ماتریس $A = [2i + j]_{3 \times 3}$ اگر i شماره سطرو j شماره ستون باشد، مجموع درایه‌های زیر قطر اصلی کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

➡ لازم نیست همه درایه‌های A را پیدا کنید یافتن درایه‌های زیر قطر اصلی کافیست (در ضمن $a_{ij} = 2i + j$):

$$A = \begin{bmatrix} \text{green} & \text{blue} & \text{red} \\ a_{21} & \text{orange} & \text{blue} \\ a_{31} & a_{32} & \text{pink} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 11 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌های زیر قطر اصلی} = 7 + 10 + 13 = 30$$



گاهی اوقات یک ماتریس از ماتریس های کوچکتر [زیر ماتریس] تشکیل شده است. که چندین بار در کنکور مورد سؤال قرار گرفته است. نمونه ای از این ماتریس ها به صورت زیر است:

$$M_r = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad M_r = [A \ B] \quad M_r = \begin{bmatrix} a & b & c \\ A & d & e \end{bmatrix} \quad M_r = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

در چنین مواردی یا موارد مشابه آن ها باید، درایه های هر زیر ماتریس را مطابق نظمی که در ماتریس اصلی قرار گرفته، در آن قرار دهیم. مخصوصاً اگر زیر ماتریس ها بر حسب تابعی از ۱ و ۲ داده شوند، ابتدا باید هر زیر ماتریس را تشکیل دهیم و سپس آن را در ماتریس اصلی قرار دهیم.

❖ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس C را بنویسید. جمع درایه های قطر اصلی C کدام است؟

❑ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ➡ جمع درایه های قطر اصلی $= 2 + 0 + 3 = 5$

❖ در مثال فوق، اگر ماتریس C را به صورت $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & D \\ 1 \end{bmatrix}$ نشان دهیم، مجموع درایه های قطر فرعی ماتریس D کدام است؟

❑ با توجه به ماتریس C، خواهیم داشت: $D = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ➡ جمع درایه های قطر فرعی $= 2 + 7 = 9$

❖ اگر $A = [i + j]_{3 \times 3}$, $B = [i \times j]_{3 \times 3}$ و i شماره سطر و j شماره ستون باشد، ماتریس C را بنویسید.

❑ ابتدا باید ماتریس های A و B را تشکیل دهیم و سپس زیر هم بنویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 1+2 & 1+2 & 1+3 \\ 1+3 & 1+2 & 1+3 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 2 & 1 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

🍏 بعضی ها ممکن است ماتریس C را به صورت $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ 1+3 & 1+2 & 1+3 \end{bmatrix}$ تشکیل دهند که کاملاً اشتباه است. و اشتباه آن در درایه های سطر دوم است.

Test اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشد و ماتریس C را به صورت $C = \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$ نشان دهیم، مجموع درایه های قطر اصلی E کدام است؟

❑ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ جمع درایه های قطر اصلی $= 3$

❖ اگر در یک ماتریس مربعی درایه های زیر قطر اصلی صفر باشد، ماتریس را **بالا مثلثی** و اگر درایه های بالای قطر اصلی صفر باشد، ماتریس را **پایین مثلثی** می نامند.

❖ $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ➡ بالا مثلثی

❖ $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ➡ پایین مثلثی

❖ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & a+1 & a+b \\ a & 3 & b-1 \\ b & a & 4 \end{bmatrix}$ پایین مثلثی باشد.



باید درایه‌های بالایی، قطر اصلی، صفر باشد، بنابراین: $\begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=0$ بنابراین درایه سطر اول و ستون سوم یعنی $a+b$ خود به خود صفر می‌شود و نیازی به صفر گذاشتن آن نیست.

اگر در یک ماتریس مربعی تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشند، این ماتریس را **ماتریس قطری** می‌نامند.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

درایه‌های قطر اصلی در ماتریس‌های **قطری** می‌تواند صفر هم باشد.

اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-1 & b+2 \\ a+1 & b-1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

برای این که یک ماتریس قطری باشد باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد: $\begin{cases} b+2=0 \Rightarrow b=-2 \\ a+1=0 \Rightarrow a=-1 \end{cases}$

اگر در یک ماتریس مربعی درایه‌های زیر قطر فرعی یا بالایی قطر فرعی صفر باشد، ماتریس را **شبه مثلثی** می‌نامند و اگر تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر فرعی صفر شود، ماتریس را **شبه قطری** می‌نامند.

به ازای کدام مقدار a و b ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-2 & a+1 \\ b+2 & b+1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس شبه قطری است؟

باید درایه‌های خارج از قطر فرعی صفر باشد، بنابراین: $\begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ b+1=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$

اگر در یک ماتریس قطری تمام درایه‌های قطر اصلی با هم برابر باشند، آن ماتریس را یک **ماتریس اسکالر** می‌نامند.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{1 \times 1}$

اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & a-2 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد و درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند: $\begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a=b \Rightarrow b=2 \end{cases}$

اگر در یک ماتریس اسکالر تمام درایه‌های قطر اصلی برابر باشند، آن را **ماتریس واحد (ماتریس همانی)** می‌نامند و با I نشان می‌دهند.

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{1 \times 1}$

اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-1 & c+1 \\ d-2 & b-2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس واحد باشد، مقادیر a, b, c, d را به دست آورید.

باید درایه‌های خارج از قطر اصلی صفر باشد و درایه‌های روی قطر اصلی برابر با ۱ باشد: $\begin{cases} a-1=1 \Rightarrow a=2 \\ b-2=1 \Rightarrow b=3 \\ c+1=0 \Rightarrow c=-1 \\ d-2=0 \Rightarrow d=2 \end{cases}$

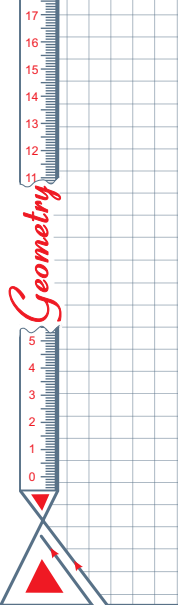
اگر ماتریسی فقط دارای یک سطر باشد، آن را **ماتریس سطری** می‌نامند.

به‌طور کلی ماتریس‌هایی که تعداد ستون‌های آن‌ها بیشتر از تعداد سطرها باشد **ماتریس افقی** نامیده می‌شوند. **ماتریس سطری** یک حالت خاص از ماتریس‌های افقی محسوب می‌شود.

اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{(n-p) \times n}$ و $a_{ij} = i^2 - j^2$ یک ماتریس سطری باشد، مجموع درایه‌های A را پیدا کنید.

باید ماتریس A دارای یک سطر باشد، بنابراین:

$n=2 \Rightarrow n=3 \Rightarrow A = [a_{ij}]_{1 \times 3} = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] = [1^2 - 2 \times 1 \quad 1^2 - 2 \times 2 \quad 1^2 - 2 \times 3] = [-1 \quad -3 \quad -5]$ مجموع درایه‌های A $= -9$.



🍏 اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد، آن را **ماتریس ستونی** می نامند. به طور کلی، ماتریس هایی که تعداد سطرهاي آن ها بیشتر از تعداد ستون هاي آن ها است، **ماتریس قائم** نامیده می شوند. ماتریس ستونی یک حالت خاص از ماتریس های قائم محسوب می شود.

$$A = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad C = [9]_{1 \times 1}$$

... اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times (n-j)}$ و $a_{ij} = 2i + 3j$ یک ماتریس ستونی باشد، مجموع درایه های A را پیدا کنید.

... باید ماتریس دارای یک ستون باشد، بنابراین:

$$n-1=1 \Rightarrow n=2 \Rightarrow A = [a_{ij}]_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 1 \\ 2 \times 2 + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه های } A \text{ برابر ۱۲ است.}$$

🍏 ماتریسی که همه درایه های آن صفر باشد را **ماتریس صفر** می نامند و با $\vec{0}$ نشان می دهند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

... اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-1 & b^2-1 \\ b+1 & a^2-1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس صفر باشد، $a+b$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} a-1=0 \\ a^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=1 \quad \begin{cases} b+1=0 \\ b^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow b=-1 \quad \Rightarrow a+b=0$$

... باید تمام درایه های ماتریس برابر صفر باشد:

Test اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a-1 & a-2 \\ b+3 & b-2 \end{bmatrix}$ قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

- ۱) ۱- ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۵

1 برای این که A یک ماتریس قطری باشد، باید تمام درایه های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} a-2=0 \\ b+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1$$



ماتریس متقارن و یا **متقارن** [ویژه استعداد های درخشان]

🍏 ماتریس هایی به شکل مقابل که درایه های طرفین قطر اصلی آن ها با هم برابر است را **ماتریس های متقارن** می نامند. هر چند که نام این ماتریس به طور مستقیم در کتاب درسی نیامده است، اما می توان آن ها را به صورت $A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{bmatrix}$ تعریف کرد. بدون این که اشاره مستقیم به نام این ماتریس شود.

🍏 ماتریس هایی به شکل مقابل که درایه های قطر اصلی آن ها صفر و درایه های طرفین قطر اصلی آن ها قرینه است را **ماتریس های پاد متقارن** می نامند. هر چند که نام این ماتریس به طور مستقیم در کتاب درسی نیامده است، اما می توان آن ها را $A = \begin{bmatrix} 0 & -x & y \\ x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{bmatrix}$ به صورت $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ تعریف کرد. بدون این که اشاره مستقیم به نام این ماتریس شود.

Test در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & x-1 \\ 5 & 3+x \end{bmatrix}$ اگر i شماره سطر و j شماره ستون باشد و به ازای هر $1 \leq i, j \leq 2$ رابطه $a_{ji} = a_{ij}$ برقرار باشد، x کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) ۴
۳) -۶ ۴) -۴

1 $a_{ji} = a_{ij}$ درایه های طرفین قطر اصلی هستند، بنابراین باید:

$$a_{12} = a_{21} \Rightarrow x-1=5 \Rightarrow x=6$$



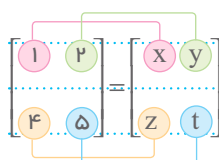
M[atrix]_{m×n}

تساوی دو ماتریس



دو ماتریس هم‌مرتبه $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m \times n}$ را **مساوی** می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}]$$



$$\Rightarrow x=1, y=2, z=4, t=5$$

اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ برابر باشند، آنگاه داریم:

Test اگر دو ماتریس $A=[i+m \ j]$ و $B=\begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ برابر باشند، $m+x$ کدام است؟

۴ (۲)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

ابتدا ماتریس A را با درایه‌ها مشخص می‌کنیم، سپس درایه‌های نظیر در دو ماتریس را برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1+m & 1+2m \\ 2+m & 2+2m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 & 3 \\ 3 & x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+2m=3 \Rightarrow m=1 \\ 2+2m=x \Rightarrow x=4 \end{cases} \Rightarrow m+x=5$$

M[atrix]_{m×n}

جمع و تفریق دو ماتریس



برای محاسبه **جمع** یا **تفریق** دو ماتریس، کافی است درایه‌های نظیر در دو ماتریس را با هم جمع یا تفریق کنیم:

$$A=[a_{ij}]_{m \times n}, B=[b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

فقط دو ماتریس هم‌مرتبه را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق کرد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 2+4 & 1+2 \\ 3+6 & 5+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Test اگر $A=[i+j]_{2 \times 2}$ و $B=[2i-j]_{2 \times 2}$ باشد، در ماتریس $A+B$ مجموع درایه‌های سطرها کدام است؟

۶ (۲)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

راه کوتاه‌ترین است که به جای تشکیل A و B ماتریس $A+B=[(i+j)+(2i-j)]=[3i]=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ را تشکیل دهیم.

M[atrix]_{m×n}

ضرب عدد در ماتریس



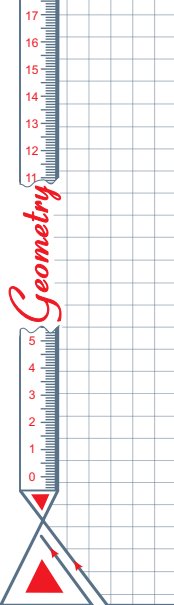
برای ضرب یک عدد در یک ماتریس، کفایت آن عدد را در تمام درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم:

$$A=[a_{ij}]_{m \times n}, r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

در حالت خاصی که عدد -1 را در ماتریس A ضرب کنیم، ماتریس $-A$ به دست می‌آید که آن را **قرینه ماتریس** A می‌نامند و همواره داریم:

$$A+(-A)=\bar{0}$$



Test اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ به طوری که $b_{ij} = i^2 + j^2$ حاصل $2A - B + I$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \text{ (4)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \text{ (3)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \text{ (2)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \text{ (1)}$$

۱ ابتدا ماتریس B را با درایه ها مشخص می کنیم:

$$B = \begin{bmatrix} 1^2+1^2 & 1^2+2^2 \\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A - B + I = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$



اعمال روی ماتریس ها



اگر A, B, C ماتریس هایی $m \times n$ (هم مرتبه) و r و s اعداد حقیقی باشند، آنگاه خواص زیر همواره برقرار است:

ماتریس صفر عضو بی اثر جمع در ماتریس ها است.	جمع ماتریس ها شرکت پذیر است.	جمع ماتریس ها خاصیت جابه جایی دارد.
$A + \vec{0} = \vec{0} + A = A$	$A + (B + C) = (A + B) + C$	$A + B = B + A$
توزیع پذیری ماتریس روی جمع اعداد	توزیع پذیری عدد روی جمع ماتریس ها	وجود عضو قرینه
$(r \pm s)A = rA \pm sA$	$r(A \pm B) = rA \pm rB$	$A + (-A) = (-A) + A = \vec{0}$
قابلیت ضرب عدد در طرفین تساوی ماتریسی	قابلیت حذف عدد غیر صفر از طرفین تساوی	جابه جایی عدد و ماتریس
$A = B \Rightarrow rA = rB$	$rA = rB \xrightarrow{r \neq 0} A = B$	$(r)(A) = (A)(r)$

Test اگر A, B, C سه ماتریس هم مرتبه باشند، کدام درست است؟

$$A + (B + C) = (A + B) + C \text{ (2)} \quad A - (B - C) = (A - B) - C \text{ (1)}$$

$$A + (B - C) = (A - B) + C \text{ (4)} \quad A - (B + C) = (A - B) + C \text{ (3)}$$

۲ تنها گزینه ۲ درست است که معرف خاصیت شرکت پذیری جمع در ماتریس هاست. [تفاضل ماتریس ها شرکت پذیر نیست!]



ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی



اگر $A = [a_{ij}]_{1 \times m}$ یک ماتریس سطری و $B = [b_{ij}]_{m \times 1}$ یک ماتریس ستونی به صورت های زیر باشند، آنگاه ضرب دو ماتریس A و B یعنی $A \times B$ یک عدد حقیقی است که به صورت زیر به دست می آید:

$$AB = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = (2 \times 3) + (4 \times 7) + (0 \times 5) = 6 + 28 + 0 = 34$$

Euclid
Mid-4 century BC

CHAPTER 2

Lesson . 1

صفحه ۳۴ تا ۳۹ کتاب درسی

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

درس اول

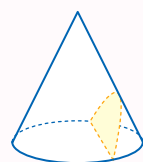


مقاطع مخروطی

دو خط d و Δ را که در نقطه A مانند شکل متقاطع (غیر عمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط Δ ثابت باشد و خط d را حول خط Δ دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را **رویه مخروطی** [سطح مخروطی] می‌نامیم. در این حالت خط Δ را **محور**، خط d را **مولد** و نقطه A را **رأس** سطح مخروطی می‌نامیم. فصل مشترک یک صفحه و سطح مخروطی، **مقطع مخروطی** نامیده می‌شود و انواع مختلفی دارد که عبارت‌اند از **دایره**، **بیضی**، **سه‌می** و **هذلولی** که البته در حالت‌های خاص ممکن است **نقطه**، **یک خط** یا **دو خط متقاطع** باشند. نوع مقطع ایجاد شده بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و Δ دارد که در جدول زیر این حالات بررسی شده است:

هذلولی	سه‌می	بیضی	دایره
صفحه P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و هر دو نیمه سطح مخروطی را قطع می‌کند.	صفحه P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.	صفحه P بر محور Δ عمود نبوده و غیر موازی با مولد d است.	صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.
حالات خاص			
در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کرده و هر دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک دو خط متقاطع خواهد بود.	در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط یک خط خواهد بود.	در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطه رأس خواهد بود.	در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطه رأس خواهد بود.

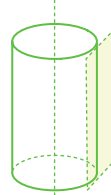
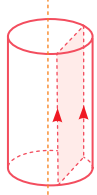
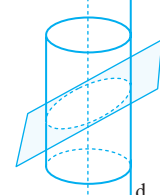
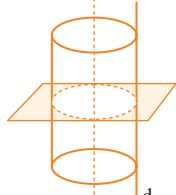
اگر دو صفحه موازی یک رویه مخروطی را قطع کنند، سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سه‌می، دو هذلولی، می‌تواند **سه‌می**، **و خط** یا **دایره** و **نقطه** یا **بیضی** و **نقطه** یا **هذلولی** و **دو خط متقاطع** نیز باشد.



Test مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، یک سه‌می است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی کدام وضع را دارد؟

- ۱) موازی یک مولد ۲) موازی محور ۳) عمود بر یک مولد ۴) گذرا از نقطه تلاقی محور و مولد
- اگر صفحه موازی با مولد مخروط، رویه مخروطی را قطع کند، سه‌می به وجود می‌آید.

هرگاه دو خط d و Δ موازی باشند و فاصله آن‌ها برابر r باشد، از دوران d حول Δ سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال اگر یک صفحه مانند P سطح استوانه‌ای را قطع کند، سطح مقطع پدید آمده مقطع استوانه‌ای نامیده می‌شود که به یکی از چهار حالت زیر است:

یک خط	دو خط موازی	بیضی	دایره
صفحه P موازی Δ و به فاصله r از Δ	صفحه P موازی Δ و به فاصله کمتر از r از Δ	صفحه P غیر عمود و غیر موازی با Δ	صفحه P عمود بر Δ
			

اگر یک کره به مرکز O و شعاع R داشته باشیم، سطح مقطع صفحه P با سطح این کره همواره و در تمام حالات یک دایره است.

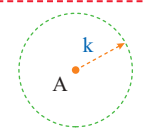
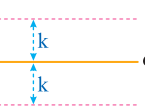
اگر از تقاطع صفحه P و یک سطح استوانه‌ای یک بیضی ایجاد شده باشد، وضعیت صفحه نسبت به محور سطح استوانه‌ای چیست؟
 صفحه باید غیر موازی با محور سطح استوانه‌ای و همچنین غیر عمود بر آن باشد، چون در صورت عمود شدن سطح مقطع به صورت دایره‌ای خواهد بود. در صورت موازی شدن با محور سطح استوانه‌ای به صورت دو خط موازی یا یک خط خواهد بود.

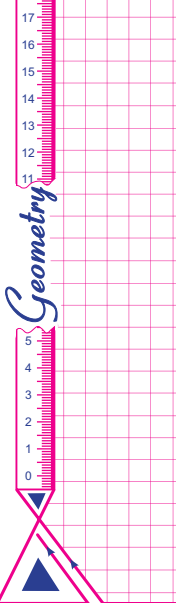
Test اگر d_1 و d_2 دو خط موازی باشند، از دوران d_1 حول خط d_2 یک سطح ایجاد می‌شود، از برخورد صفحه P با این سطح یک بیضی حاصل شده است وضعیت صفحه P نسبت به خطوط d_1 و d_2 کدام است؟

- (۱) موازی d_1 (۲) عمود بر d_2 (۳) غیر موازی d_1 (۴) غیر موازی با d_1 و غیر عمود بر d_2

۴ صفحه P با هر دو خط d_1 و d_2 غیر موازی و غیر عمود است بنابراین می‌توان گفت **غیر موازی با d_1 و غیر عمود بر d_2** است دقت کنید که گزینه **۳** گزینه کاملی نیست چون غیر موازی بودن کافی نیست و حتماً باید صفحه غیر عمود بر d_1 و d_2 نیز باشد.

بسیاری از اشکالی که رسم می‌کنیم مجموعه نقاطی هستند که ویژگی مشترکی دارند، این مجموعه نقاط را **مکان هندسی** می‌نامیم. گاهی به آن **مکان نقطه** نیز گفته می‌شود. از طرفی مهم‌ترین اشکال هندسی **نقطه**، **خط** و **صفحه** هستند، بنابراین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به فاصله ثابتی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد:

	(۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله k واحد از نقطه A قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است.
	(۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله k واحد از خط d قرار دارند، دو خط به موازات خط d و به فاصله k واحد از آن هستند.



Test همه نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه ثابت O در این صفحه بیشتر از ۲ و کمتر از ۳ واحد است، تشکیل یک شکل هندسی می‌دهند.

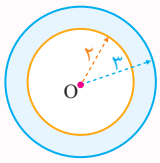
مساحت این شکل چقدر است؟

۷ π (۴)

۴ π (۳)

۹ π (۲)

۵ π (۱)



۱ نقاطی که فاصله آن‌ها از O، بیشتر از ۲ واحد باشد بیرون دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ واحد هستند، همچنین نقاطی که فاصله آن‌ها از O کمتر از ۳ واحد باشد، داخل دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ واحد قرار می‌گیرند. پس شکل هندسی مورد نظر ناحیه بین دو دایره (قسمت رنگی) است و مساحت آن برابر است با:

$\pi(3)^2 - \pi(2)^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi$ مساحت ناحیه رنگی = مساحت دایره کوچک - مساحت دایره بزرگ



اشتراک یک مکان هندسی و یک شکل هندسی

در برخی از سوالات هندسه از ما می‌پرسند: «چند نقطه روی یک شکل وجود دارد که دارای ویژگی به خصوصی باشد». در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی به خصوص دارند را پیدا می‌کنیم و سپس به بررسی تعداد نقاط تقاطع آن مکان هندسی و شکل گفته شده می‌پردازیم. ... نقطه A به فاصله ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصله ۷ واحد از نقطه A وجود دارد؟ ... نقاطی که به فاصله ۷ واحد از نقطه A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۷ قرار دارند و چون $7 > 4$ است، پس این دایره به عنوان یک مکان هندسی خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و همین نقاط، جواب‌های مورد نظر هستند.

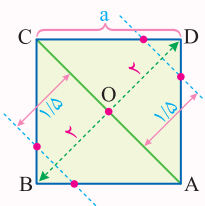
Test در مربع ABCD به ضلع $2\sqrt{2}$ چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله آن‌ها از قطر AC برابر $1/5$ واحد باشد؟

بیشمار (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

هیچ (۱)



۳ نقاطی که به فاصله $1/5$ واحد از قطر AC قرار دارند، روی دو خط به موازات AC و به فاصله $1/5$ واحد از آن واقع اند.

حال باید بررسی کنیم که آیا این دو خط نقطه تقاطعی با اضلاع مربع دارند یا نه؟ این نقاط در صورت وجود جواب‌های تست هستند:

$a = 2\sqrt{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{2} = \sqrt{2} \times (2\sqrt{2}) = 4 \Rightarrow OB = OD = 2$

چون $OD < 1/5$ ، پس این دو خط، اضلاع مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

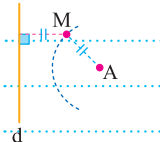


مکان‌های هم فاصله از دو چیز

یکی از مهم‌ترین مکان‌های هندسی در صفحه، مکان هندسی نقاط هم فاصله از دو چیز است که مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

	۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند، عمود منصف پاره خط AB است.
	۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، خطی موازی آن دو خط و بین آن‌هاست.
	۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نیمسازهای آن دو خط متقاطع است [این نیمسازها همواره برهم عمودند].

۴ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A و خط d به یک فاصله هستند، یک سهمی است که نقطه A کانون آن و خط d هادی آن است [در ادامه فصل در این باره بیشتر صحبت خواهیم کرد].



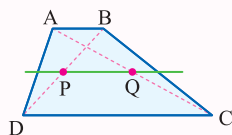
Test چند نقطه روی قطرهای دوزنقه ABCD وجود دارد که فاصله آن از دو قاعده یکسان باشد؟

(۴) بیشمار

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) نامشخص



۲ نقطه‌ای که به فاصله یکسان از دو قاعده دوزنقه قرار دارند، روی خطی موازی دو قاعده هستند که فاصله آن از هر کدام از قاعده‌ها نصف ارتفاع دوزنقه است. این خط قطعاً قطرهای دوزنقه را در دو نقطه P و Q قطع می‌کند. [این خط را خط میانگین دوزنقه می‌نامند].



اشتراک دو مکان هندسی

در بعضی سؤال‌ها از ما می‌پرسند «چند نقطه وجود دارد که هم **این ویژگی** را داشته باشد و هم **آن ویژگی** را». در این موارد ابتدا مکان هندسی نقطه‌ای که **این ویژگی** و نیز مکان هندسی نقطه‌ای که **آن ویژگی** را دارند پیدا می‌کنیم، سپس به بررسی تعداد نقاط **اشتراک** (تقاطع) این دو مکان هندسی می‌پردازیم. ...
نقطه A به فاصله ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله ۳ واحد از نقطه A و به فاصله ۲ واحد از خط d باشد؟
 نقطه‌ای که به فاصله ۳ واحد از نقطه A قرار دارند، روی دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز A واقع‌اند. [این ویژگی] همچنین نقطه‌ای که به فاصله ۲ واحد از خط d قرار دارند، روی دو خط به موازات d و به فاصله ۲ واحد از آن قرار دارند. [آن ویژگی] حال باید تعداد نقاط **اشتراک** این دو مکان هندسی را بررسی کنیم. همان طور که در شکل مشخص است این دو مکان هندسی همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند، بنابراین ۲ نقطه با شرایط گفته شده وجود دارد.

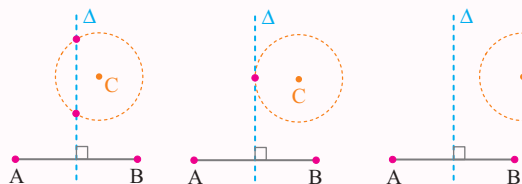
Test نقاط A, B, C در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه وجود دارد که از A و B یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد؟

(۲) حداکثر ۲ نقطه

(۱) حداکثر یک نقطه

(۴) هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.

(۳) دقیقاً ۲ نقطه



۲ مکان هندسی نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف AB است. مکان هندسی نقطه‌ای که از C به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع ۳ است. نقاط تلاقی عمود منصف AB با این دایره، جواب این مسئله است. باتوجه به شکل‌های مقابل مسئله دو جواب یا یک جواب یا بدون جواب است. پس **حداکثر ۲ نقطه** وجود دارد. (عمود منصف پاره خط AB است.)



اشتراک دو مکان هندسی مشهور

یکی از مشهورترین حالتی که مربوط به تقاطع دو مکان هندسی است، حالتی است که پرسیده می‌شود «چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله k_1 از نقطه A و به فاصله k_2 از نقطه B باشد»، در این حالت باید وضعیت دایره به مرکز A و به شعاع k_1 و دایره به مرکز B و به شعاع k_2 را بررسی کنیم که سه حالت عمده رخ می‌دهد:

۱ اگر این دو دایره متقاطع باشند، دو نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقاط M_1 و M_2]	۲ اگر این دو دایره مماس باشند، فقط یک نقطه با شرایط فوق وجود دارد. [نقطه M_1]	۳ اگر این دو دایره همدیگر را قطع نکنند، هیچ نقطه‌ای با شرایط فوق وجود ندارد.

Test اگر برای تبدیل دو خط d و d' به یکدیگر، دقیقاً دو خط بازتاب وجود داشته باشد وضعیت d و d' نسبت به هم کدام است؟

- (۱) موازی (۲) عمود (۳) متقاطع (۴) چنین چیزی امکان پذیر نیست.

۳ اگر دو خط متقاطع باشند، هر کدام از نیمسازهای زاویه‌های بین آن‌ها می‌تواند خط بازتاب باشد؛ پس دو محور بازتاب مختلف برای تبدیل آن‌ها وجود دارد.



مقایسه تبدیل‌ها



در جدول زیر تمام ویژگی‌های مربوط به تبدیل‌های چهارگانه، برای مقایسه بهتر آمده است:

تبدیل	ویژگی‌ها	اندازهٔ پاره خط	شیبِ خط	جهتِ شکل	اندازهٔ زاویه	شکل و تصویر	نقطهٔ ثابت
بازتاب	ثابت می‌ماند	ممکن است تغییر کند	تغییر می‌کند	ثابت می‌ماند	همنهشت‌اند	تمام نقاط خط بازتاب	
انتقال	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	همنهشت‌اند	ندارد	
دوران ۱۸۰°	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	همنهشت‌اند	مرکز دوران	
دوران $۰^\circ < \theta < ۱۸۰^\circ$	ثابت می‌ماند	تغییر می‌کند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	همنهشت‌اند	مرکز دوران	
تجانس	k برابر می‌شود	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	ثابت می‌ماند	متشابه‌اند	مرکز تجانس	

Test کدام ویژگی در تجانس و انتقال وجود دارد ولی در دوران و بازتاب لزوماً وجود ندارد؟

- (۱) شیب خط ثابت می‌ماند. (۲) جهت شکل حفظ می‌شود. (۳) اندازه زاویه حفظ می‌شود. (۴) اندازه پاره خط ثابت می‌ماند. **۱** در تجانس و انتقال شیب خط ثابت می‌ماند ولی در دوران و بازتاب، شیب خط لزوماً حفظ نمی‌شود.

Lesson . 2

صفحه ۵۷ تا ۶۰ کتاب یادهم

کاربرد تبدیل‌ها

درس دوم



مسئله هرون [تیب اول]

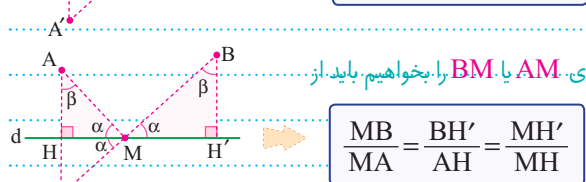


دو نقطه A و B در یک طرف خط d مفروض‌اند، اگر نقطه M روی خط d بلغزد برای پیدا کردن کم‌ترین

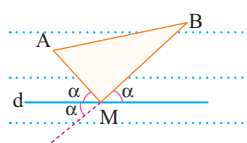
طول خط شکسته AMB کافیست بازتاب نقطه A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا کنیم و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در M قطع کند، در این صورت:

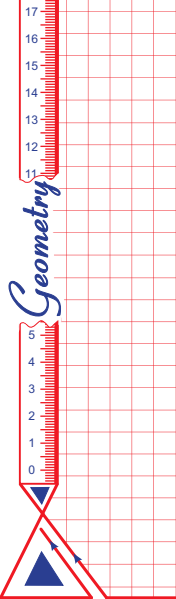


این مسئله به مسئله هرون مشهور است، در این تیپ از مسائل اگر طول پاره خط‌های AM یا BM را بخواهیم باید از تشابه دو مثلث AHM و BMH' استفاده کنیم.

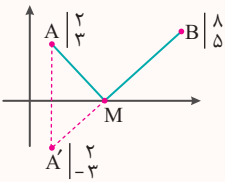
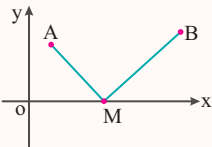


در این حالت خط d نیمساز خارجی رأس M از مثلث ABM است و در ضمن زاویه‌های ساخته شده در طرفین نقطه M نیز با هم برابرند.





Test نقاط $A|_3$ و $B|_5$ مفروض‌اند، نقطه M روی محور x ها می‌لغزد، کم‌ترین اندازه خط شکسته AMB کدام است؟



ف کافیت بازتاب نقطه A نسبت به محور x ها یعنی A' را پیدا کنیم و اندازه $A'B$ را به دست آوریم:

$$|A'B| = \sqrt{(5-2)^2 + (8-(-3))^2} = 10$$

بازتاب یک نقطه نسبت به چهار خط مشهور صفحه

- تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به محور x ها نقطه $A'(a, -b)$ است.
- تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به محور y ها نقطه $A'(-a, b)$ است.
- تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=x$ [نیمسار ربع اول و سوم] نقطه $A'(b, a)$ است.
- تصویر نقطه $A(a, b)$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ [نیمسار ربع دوم و چهارم] نقطه $A'(-b, -a)$ است.



کاربرد مسئله هرون [تیب دوم]

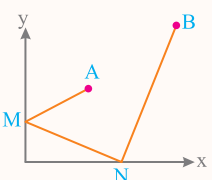
دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض‌اند، اگر نقطه M روی خط d_1 و نقطه N روی خط d_2 بلغزد، برای پیدا کردن کم‌ترین طول خط شکسته $AMNB$ کافیت قرینه A را نسبت به d_1 پیدا کرده و A_1 بنامیم، حال اگر قرینه A_1 را نسبت به خط d_2 پیدا کرده و A_2 بنامیم، A_2B برابر با کم‌ترین طول خط شکسته $AMNB$ است.

$$\text{Min}(AMNB) = |A_2B|$$

یک راه دیگر برای حل این مسئله این است که بازتاب A نسبت به d_1 و بازتاب B نسبت به d_2 یعنی نقاط A' و B' را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا این دو خط را در M و N قطع کنند. در این صورت خط شکسته $AMNB$ کوتاه‌ترین طول را دارد و اندازه آن با $|A'B'|$ برابر است.

در هر یک از دو روش فوق وقتی $AMNB$ کوتاه‌ترین طول را دارد زاویه‌های طرفین M و زاویه‌های طرفین N باید با هم برابر باشد و برعکس [هرگاه این زاویه‌ها با هم برابر باشد، این کوتاه‌ترین طول است. در ضمن در این حالت زاویه دو خط d_1 و d_2 برابر با میانگین زوایای داخلی خط شکسته $AMNB$ است یعنی $x = \frac{y+z}{2}$]

قضیه فوق را برای بیش از دو خط d_1 و d_2 نیز می‌توان تعمیم داد.



Test نقاط $A|_3$ و $B|_9$ در صفحه محورهای مختصات مفروض‌اند، دو نقطه M و N همواره روی دو محور می‌لغزند.

(داخل - ۹۸)

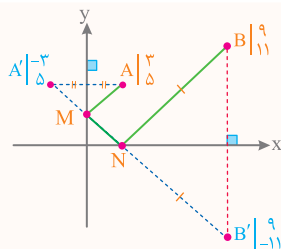
کم‌ترین اندازه خط شکسته $AMNB$ کدام است؟

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

۲۱ (۴)

۲۰ (۳)



۳ اگر نقطه A را نسبت به محور y و نقطه B را نسبت به محور x قرینه کنیم و نقاط A' و B' را به هم وصل کنیم تا محور xها و yها را در N و M قطع کند، در این صورت خط شکسته AMNB کمترین اندازه را خواهد داشت چون برابر A'B' است.

$$\text{Min } |AMNB| = |A'B'| = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$



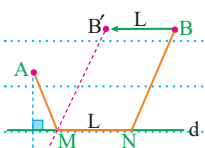
کاربرد مسئله هرون [تیب سوم]



نقاط A و B در یک طرف خط d مفروض اند، نقاط M و N روی خط d به فاصله L از هم قرار دارند، برای پیدا کردن کوتاهترین طول خط شکسته AMNB به صورت زیر عمل می کنیم:



۱ بازتاب نقطه A نسبت به خط d یعنی A' را پیدا می کنیم.

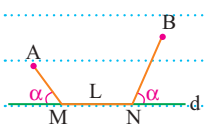


۲ نقطه B را به اندازه بردار L به سمت A انتقال می دهیم تا نقطه B' به دست آید.



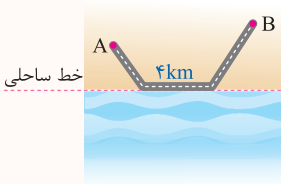
۳ از A' به B' وصل می کنیم تا خط d را در M قطع کند با معلوم شدن M به اندازه L به سمت راست می رویم و به نقطه N می رسم در این صورت حداقل طول خط شکسته AMNB برابر است با:

$$\text{Min}(AMNB) = |A'B'| + L$$



در این حالت زاویه M و زاویه N باید با هم برابر باشند.

Test در شکل زیر قرار است جاده ای از A به B احداث شود به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده باید در کنار ساحل باشد. برای پیدا کردن موقعیت محدوده جاده ساحلی به طوری که کل جاده کوتاهترین طول ممکن را داشته باشد، کدام



تبدیل به کار می رود؟

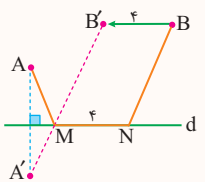
۱ بازتاب و دوران

۲ بازتاب و انتقال

۳ انتقال و تجانس

۴ دوران و تجانس

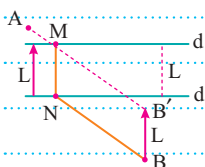
۲ باید نقطه B را به اندازه ۴ واحد به سمت A انتقال دهیم همچنین بازتاب A نسبت به خط ساحلی را پیدا کرده و از A' به B' وصل کنیم تا نقطه M به دست آید اگر به اندازه ۴ واحد از M به سمت راست حرکت کنیم به N می رسم و از N به B وصل می کنیم، مسیر AMNB کوتاهترین مسیر است.



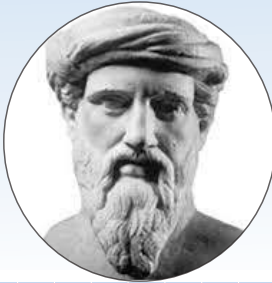
کاربرد مسئله هرون [تیب چهارم]



دو خط d₁ و d₂ به فاصله L از هم قرار دارند، اگر نقاط A و B در طرفین d₁ و d₂ قرار گرفته باشند و پاره خط MN عمود بر هر دو خط d₁ و d₂ باشد، برای پیدا کردن کمترین طول خط شکسته AMNB کافیست B را به اندازه L به موازات بردار L انتقال دهیم و از A' به B' وصل کنیم تا خط d₁ را در M قطع کند، حال اگر از M عمودی بر d₂ رسم کنیم تا آن را در N قطع کند، در این صورت AMNB کوتاهترین مسیر ممکن است و اندازه آن برابر است با:



$$\text{Min}(AMNB) = |A'B'| + L$$

Pythagoras
570 - 495 bc

Relations

Logituzinal

CHAPTER 3

Lesson . 1

صفحه ۶۶ تا ۶۷ کتاب یازدهم

قضیه سینوس ها

درس اول



Logituzinal Relations

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه



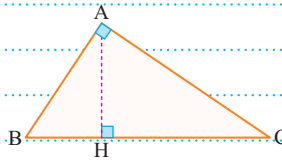
منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه پاره خط و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در هندسه دهم، علاوه بر رابطه فیثاغورس، $a^2 = b^2 + c^2$ روابط طولی زیر را در مثلث قائم الزاویه دیدیم:

$$AH^2 = BH \times HC$$

$$AB^2 = BC \times BH$$

$$AH \times BC = AB \times AC$$

$$AC^2 = BC \times CH$$



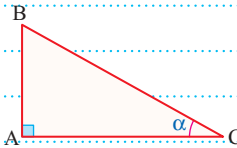
در مثلث قائم الزاویه ABC مطابق شکل نسبت‌های مثلثاتی زاویه α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{BC}$$

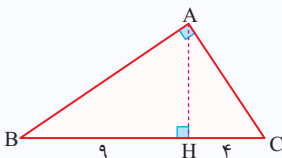
$$\cot \alpha = \frac{AC}{AB}$$



در جدول زیر نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که معمولاً به آن‌ها نیاز داریم را می‌بینید:

زاویه	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
سینوس	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
کسینوس	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
تانژانت	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Test در مثلث قائم الزاویه شکل زیر، ارتفاع نظیر وتر است. مساحت مثلث ABC چقدر است؟



۲۸ (۱)

۳۹ (۲)

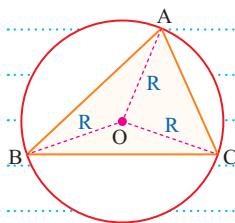
۳۶ (۳)

۲۶ (۴)

۲ ابتدا طول AH را به دست می‌آوریم و سپس به سراغ مساحت می‌رویم:

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow AH^2 = 9 \times 4 \Rightarrow AH^2 = 36 \Rightarrow AH = 6 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{6 \times 13}{2} = 39$$

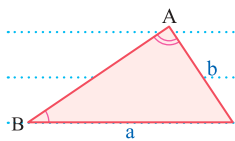
در هر مثلث، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن مقداری ثابت است. و این مقدار ثابت با قطر دایره محیطی مثلث برابر است. [این رابطه به قضیه سینوس ها مشهور است.]



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

یکی از نتایج قضیه سینوس ها این است که در هر مثلث نسبت اضلاع با نسبت سینوس زاویه مقابل به آن ها برابر است.

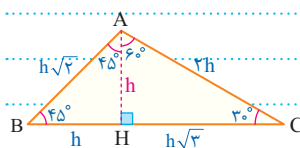
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$



نشان دهید، اگر در مثلثی دو ضلع برابر نباشند، ضلعی بزرگتر است که زاویه روبه رو به آن بزرگتر باشد و برعکس.

$$a > b \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\sin B} > 1 \Leftrightarrow \sin A > \sin B \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{B}$$

اگر یکی از زاویه های مثلثی، 75° یا 105° باشد، برای محاسبه اندازه ضلع روبه رو به آن از قضیه سینوس ها استفاده نمی کنیم. در این شرایط بهتر است که ارتفاع نظیر آن ضلع را رسم کنیم و سپس با استفاده از نسبت های مثلثاتی زوایای 45° و 60° یا 45° و 30° اندازه ارتفاع و ضلع ها را به دست آوریم.



در شکل مقابل زاویه $\hat{A} = 105^\circ$ ، با رسم ارتفاع AH به دو زاویه 45° و 60° تقسیم شده و اندازه اضلاع بر حسب اندازه ارتفاع h به دست آمده است:

اگر رابطه ای هم درجه بین اندازه اضلاع مثلث برقرار باشد، می توان به جای اندازه هر ضلع در رابطه سینوس زاویه مقابل به آن ضلع را جایگذاری کرد و برعکس.

در مثلث قائم الزاویه که رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ را داریم، رابطه $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ نیز برقرار است.

طبق نامساوی مثلثی در هر مثلث $a < b + c$ بنابراین در همه مثلث ها رابطه $\sin A < \sin B + \sin C$ برقرار است.

اگر رابطه ای بر حسب سینوس ها و کسینوس های زوایای مثلث داشته باشیم، ابتدا باید به کمک رابطه $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ تمام کسینوس ها را به سینوس تبدیل کنیم، سپس به جای سینوس هر زاویه، اندازه ضلع مقابلش را جایگذاری کنیم.

Test در مثلث ABC با $\hat{C} = 60^\circ$ ، $\hat{B} = 75^\circ$ ، $BC = 2$ طول ضلع AB چقدر است؟

۳ (۴)

 $2\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۱)

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$$

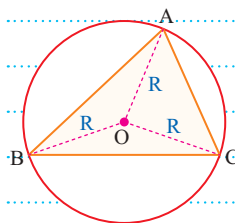
ابتدا اندازه زاویه $\hat{A}$ را به دست می آوریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ} \Rightarrow c = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}$$

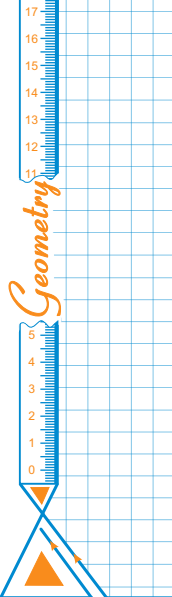
حال طبق قضیه سینوس ها، ضلع $c = AB$ را به دست می آوریم:

برای محاسبه شعاع دایره محیطی در هر مثلث، دواروش عمده وجود دارد:

اگر اندازه یک ضلع و زاویه روبه رو به آن معلوم باشد، با توجه به قضیه سینوس ها از رابطه زیر استفاده می کنیم:



$$R = \frac{a}{2 \sin A}$$



۲. اگر اندازه اضلاع معلوم باشد، ابتدا مساحت مثلث را به دست می آوریم و سپس از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$R = \frac{abc}{4S}$$

🍏 در مثلث قائم الزاویه، شعاع دایره محیطی نصف وتر است و در مثلث متساوی الاضلاع، شعاع دایره محیطی به اندازه $\frac{2}{3}$ ارتفاع است.

🍏 در مثلث ABC، اگر شعاع دایره محیطی R ، شعاع های دایره های محاطی داخلی و خارجی باشند، رابطه زیر برقرار است:

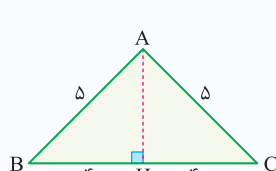
$$r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

🍏 اگر شعاع سه دایره از دایره محاطی داخلی و خارجی معلوم باشد، به کمک رابطه زیر می توان چهارمین شعاع را به دست آورد:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

🍏 بنابراین با داشتن سه شعاع از دایره های محاطی، در دو مرحله می توان شعاع دایره محیطی را محاسبه کرد.

Test در مثلثی با اضلاع ۵، ۵، ۸ شعاع دایره محیطی کدام است؟



$$\frac{25}{6} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\frac{25}{8} \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

🍏 در مثلث متساوی الساقین ABC، ابتدا ارتفاع را رسم می کنیم و

به کمک رابطه فیثاغورس اندازه ارتفاع را به دست می آوریم:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \times 5 \times 8}{4 \times 12} = \frac{25}{6}$$

با معلوم بودن اندازه ارتفاع، مساحت مثلث قابل محاسبه است:

حال با در دست داشتن مساحت مثلث، می توانیم اندازه شعاع دایره محیطی را به دست آوریم:

Lesson . 2

صفحه ۴۶ تا ۶۹ کتاب یازدهم

قضیه کسینوس ها

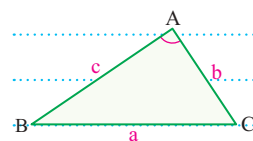
درس دوم



Logitudinal Relations

قضیه کسینوس ها و نتایج آن

🍏 در هر مثلث، طبق قضیه کسینوس ها، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب آن ها در کسینوس زاویه بین آن ها. [به کمک قضیه کسینوس ها می توان به معلوم بودن دو ضلع و زاویه بین آن ها، طول ضلع سوم را به دست آورد].



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

🍏 اگر اندازه سه ضلع از مثلثی معلوم باشد، کسینوس هر زاویه مثلث با توجه به قضیه کسینوس ها، به صورت زیر به دست می آید:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

🍏 اضلاع مثلثی با اعداد ۵، ۷، ۸ متناسب اند، کسینوس زاویه متوسط در این مثلث کدام است؟

$$\cos \alpha = \frac{(\Delta k)^2 + (\Delta k)^2 - (\gamma k)^2}{2 \times (\Delta k) \times (\Delta k)} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{25 + 64 - 49}{2 \times 5 \times 8} = \frac{40}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$$

🍏 در مسائلی که یک رابطه بین مربعات سه ضلع از مثلث برقرار باشد، رابطه داده شده را با قضیه کسینوس ها مقایسه می کنیم تا بتوانیم کسینوس یکی از زوایای مثلث را بیابیم.



• اگر در مثلثی، رابطه $b^2 = a^2 + c^2 + \sqrt{2}ac$ برقرار باشد، زاویه B چقدر است؟
 می دانیم در هر مثلث، رابطه $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ برقرار است. بنابراین $\cos B = \frac{\sqrt{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$
 $a^2 + c^2 + \sqrt{2}ac = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$

تشخیص نوع زاویه ها در مثلث

$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$	$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$	$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$
بدیهی است اگر در مثلثی به دنبال یافتن زاویه منفرجه هستیم، فقط باید مربع بزرگ ترین ضلع را با مجموع مربعات دو ضلع دیگر مقایسه کنیم و نیازی نیست رابطه های بالا را برای اضلاع متوسط و کوچک بررسی کنیم؛ زیرا اگر بزرگ ترین زاویه یک مثلث منفرجه نباشد [یعنی تاده یا قائمه باشد] قطعاً دو زاویه دیگر نیز حاده هستند.		

Test در مثلث ABC با اضلاع $\sqrt{5}$ ، 3 ، $2\sqrt{2}$ اندازه کوچک ترین زاویه مثلث چقدر است؟

۴۵° (۲)

۳۰° (۱)

$\cos^{-1}(\frac{3}{5})$ (۴)

$\cos^{-1}(\frac{2}{3})$ (۳)

۲ می دانیم کوچک ترین زاویه مثلث، روبه رو به کوچک ترین ضلع است و در بین اعداد داده شده $a = \sqrt{5}$ کوچک ترین ضلع مثلث است، پس داریم:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{12}{12\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$

Logitudinal Relations

رابطه طول میان

اگر نقطه M وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد، رابطه زیر بین اندازه اضلاع مثلث و اندازه میانه AM برقرار است: [به این رابطه، قضیه میانه ها می گویند].

$$2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$$

در هر مثلث، میانه بزرگ تر به وسط ضلع کوچک تر وصل شده است، یعنی هر چه ضلع بزرگ تر باشد، میانه نظیر آن کوچک تر است و برعکس.
 اگر یکی از میانه های مثلث را به اندازه خودش امتداد داده و به دور رأس مجاور وصل کنیم، یک متوازی الاضلاع به دست می آید و رابطه طول میانه به رابطه $\frac{BD}{2} + \frac{AC}{2} = AB^2 + BC^2$ تبدیل می شود، با ساده کردن این رابطه به رابطه زیر می رسیم که نشان می دهد در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات قطر ها با مجموع مربعات همه اضلاع برابر است:

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$$

در هر مثلث مجموع مربعات میانه ها با $\frac{3}{4}$ مجموع مربعات اضلاع برابر است، یعنی اگر میانه های مثلث ABC را m_a, m_b, m_c نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

• در مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع a, b, c که a وتر آن است، داریم:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}a^2$$