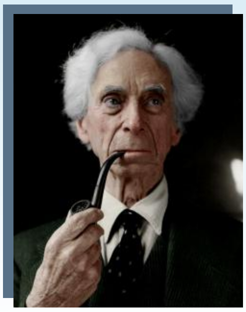
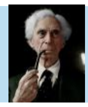


Set, Pattern & Sequence

Chapter 1

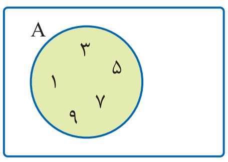


معرفی مجموعه‌های مهم

مجموعه را دسته‌ای از اشیای متمایز و خوش تعریف در نظر می‌گیرند. [خوش تعریف به معنی آن است که بدون تردید و به یقین بتوان گفت که شیء معینی در مجموعه هست یا نه].

- دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم تهران یک مجموعه محسوب می‌شود.
- دانش‌آموزان قدبلند تهران مجموعه نیست. چون قدبلند خوش تعریف نیست. [یعنی به یقین نمی‌توان گفت که از چه قدی به بالا (قدبلند) محسوب می‌شود، چون قد بلند یک چیز سلیقه‌ای است و معیار مشخص ندارد]

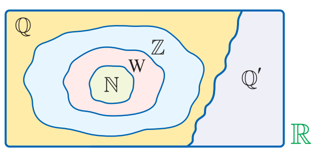
انواع نمایش مجموعه‌ها

نمایش با اعضا	نمایش با نماد ریاضی	نمایش هندسی
اعضای مجموعه را به صورت مرتب یا نامرتب درون یک جفت آکولاد نمایش می‌دهیم.	به جای نوشتن اعضاء، ویژگی مشترک بین آن‌ها را می‌نویسیم.	اعضای مجموعه را درون یک خم بسته در صفحه مانند مستطیل، دایره و... قرار می‌دهیم که به آن نمودار ون گفته می‌شود.
$A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$	$A=\{۲k-۱:k\in\mathbb{N},۱\le k\le ۵\}$	

ترتیب عضوها در مجموعه اهمیتی ندارد. یعنی جابه‌جایی عضوها، مجموعه را تغییر نمی‌دهند.
$\{۱,۲,۳\}=\{۳,۱,۲\}=\{۲,۱,۳\}$

عضوهای تکراری در مجموعه شمرده نمی‌شوند.
$\{۱,۱,۱,۲,۲,۲,۳,۳,۳,۳\}=\{۱,۲,۳\}$

مجموعه‌های مهم اعداد

اعداد گویا	$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq ۰\}$		$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$	اعداد طبیعی
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}'=\{x\mid x\notin\mathbb{Q}\}$		$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$	اعداد حسابی
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$	اعداد صحیح

مجموعهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهند و شامل همهٔ اعداد گویا و گنگ است، بنابراین روابط زیر برقرار است:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}' \qquad \mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}' \qquad \mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$$

برای یافتن تفاضل دو مجموعه، عضوهای مشترک را حذف کرده و فقط اعضایی که در مجموعهٔ اول باقی می‌مانند را انتخاب می‌کنیم.

Test **چه تعداد از رابطه‌های زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی درست است؟**

● $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ ● $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}'$ ● $(\mathbb{W}-\mathbb{N})\subseteq\mathbb{Q}$ ● $(\mathbb{R}-\mathbb{N})\subseteq\mathbb{Q}'$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

2 به بررسی موارد می‌پردازیم:

● اجتماع $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ برابر $\mathbb{R}$ است ✓

● می‌دانیم $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ است، پس $\mathbb{Z}$ نمی‌تواند زیر مجموعهٔ $\mathbb{Q}'$ باشد.×

● می‌دانیم $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$ که زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}$ است.✓

● می‌دانیم $\mathbb{R}-\mathbb{N}$ شامل همهٔ اعداد گویا و گنگ غیر طبیعی است، پس نمی‌تواند زیر مجموعهٔ $\mathbb{Q}'$ باشد.×

مجموعه، الگو و دنباله | انواع بازه | Set, Pattern & Sequence

بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ هستند که برای نمایش همهٔ اعداد حقیقی بین دو عدد، یا اعداد حقیقی بزرگتر یا کوچکتر از یک عدد، از آن‌ها استفاده می‌کنیم. انواع بازه‌ها عبارت‌اند از:

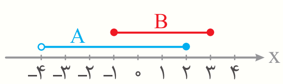
نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی	اعضا	نوع بازه	بازه
$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	a b	اعداد حقیقی بین a و b	باز	(a,b)
$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$	a b	اعداد حقیقی بین a و b و خود b	نیم‌باز	$(a,b]$
$\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$	a b	اعداد حقیقی بین a و b و خود a	نیم‌باز	$[a,b)$
$\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$	a b	اعداد حقیقی بین a و b و خود a و b	بسته	$[a,b]$
$\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$	a	اعداد حقیقی بزرگتر از a	باز	$(a,+\infty)$
$\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$	b	اعداد حقیقی کوچکتر مساوی با b	نیم‌باز	$(-\infty,b]$
$x\in\mathbb{R}$	۰	تمام اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$	باز	$(-\infty,+\infty)$

Test **اگر $A=(-۴,۲]$ و $B=[-۱,۳]$ باشد، حاصل $(A\cup B)\cap\mathbb{N}$ کدام است؟**

۱) $\{۰,۲\}$ ۲) $\{۲,۳\}$ ۳) $\{۰,۱,۲\}$ ۴) $\{۱,۲,۳\}$

4 با کمک نمایش هندسی بازه‌های A و B مجموعهٔ $A\cup B$ را تعیین می‌کنیم:

$A\cup B=(-۴,۳]$



اشتراک $(-۴,۳]$ و مجموعهٔ اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ به‌صورت $\{۱,۲,۳\}$ است.

مجموعه، الگو و دنباله | مجموعه‌های متناهی و نامتناهی | Set, Pattern & Sequence

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن با شمردن به دست آید، مجموعهٔ متناهی نام دارد؛ حتی اگر شمردن تعداد اعضای آن سخت و زمان‌گیر باشد. به بیان دیگر تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی، عددی حسابی است.

● مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج یک رقمی به صورت $\{۲,۴,۶,۸\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی است.

مجموعه‌ای که متناهی نباشد، یعنی تعداد اعضای آن حتی با صرف زمان خیلی زیاد و امکانات کافی هم قابل شمردن نباشد، مجموعهٔ نامتناهی نام دارد. در واقع تعداد اعضای مجموعهٔ نامتناهی، با یک عدد حسابی قابل بیان نیست و از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگتر است.

● مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۵، به صورت $\{۵,۱۰,۱۵,...\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی است.

مجموعه‌های اعداد حقیقی، گویا، گنگ، صحیح، طبیعی و حسابی همگی مجموعه‌های نامتناهی هستند.

به کمک جدول زیر متوجه می‌شویم که ترکیب مجموعه‌های متناهی و نامتناهی چه ویژگی دارد:

وضعیت / مجموعه	A متناهی و B نامتناهی	A و B نامتناهی	A و B متناهی
$A\cup B$	نامتناهی	نامتناهی	متناهی
$A\cap B$	متناهی	نامشخص	متناهی
$A-B$	متناهی	نامشخص	متناهی
$B-A$	نامتناهی	نامشخص	متناهی

Test **چه تعداد از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟**

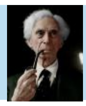
- **اعداد اول کوچکتر از ۱۰**
- **اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۵**
- **اعداد گویای موجود در بازهٔ $(۴,۵]$**
- **مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۰۰**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1 به بررسی موارد می‌پردازیم:

- این مجموعه به‌صورت $\{۲,۳,۵,۷\}$ است که متناهی است.×
- این مجموعه به‌صورت $\{۱۰,۱۵,...,۹۵\}$ است که متناهی است.×
- بیشمار عدد گویا در بازهٔ $(۴,۵]$ وجود دارد؛ پس نامتناهی است.✓
- این مجموعه به‌صورت $\{۱,۲,۴,۵,...,۱۰۰\}$ است که متناهی است.×

Lesson.2 | صفحه ۸ تا ۱۳ کتاب دهم | متمم یک مجموعه | درس دوم


Bertrand Russell

Set, Pattern & Sequence | مجموعه‌های تهی، مرجع، متمم | مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

$$\varnothing=\{x\,|\,x\neq x\}$$

مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یک مجموعهٔ تک‌عضوی است و با مجموعهٔ $\varnothing$ متفاوت است.

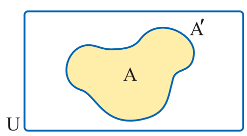
$$\{\varnothing\}=\{\{\}\}$$

هر مجموعه معمولاً به صورت $A=\{x:x\in U\,,\,x\ \text{شرطی دربارهٔ}\}$ معرفی می‌شود. به مجموعهٔ U که x ها از درون آن انتخاب می‌شوند، مجموعهٔ مرجع گفته می‌شود.

فرض کنید A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعهٔ A برابر با اعضایی از U است که متعلق به مجموعهٔ A نباشد. متمم A را با A' نشان می‌دهند.

$$A'=\{x\in U:x\notin A\}$$

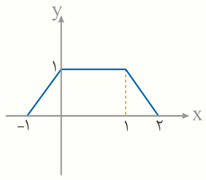
$A\cup A'=U$ | $A\cap A'=\varnothing$

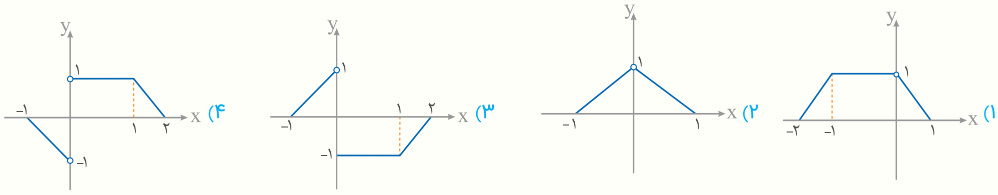


$U'=\varnothing$ | $\varnothing'=U$

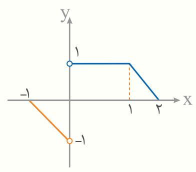
$$(A')'=A$$

Test نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ کدام است؟





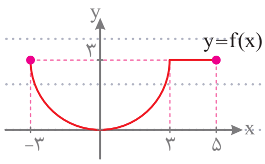
4 تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ در $x>0$ برابر $y=f(x)$ و در $x<0$ برابر $y=-f(x)$ است، بنابراین نمودار آن به صورت مقابل است:



تابع | تبدیل نمودارهای $f(x)$ و $f(ax+b)$ به یکدیگر | Functions & Their Graphs

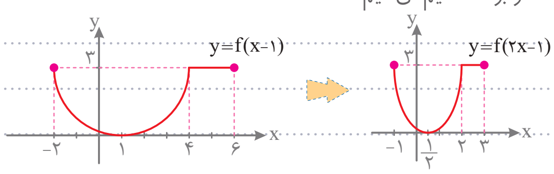
برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ با کمک نمودار تابع $y=f(x)$، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1. با توجه به علامت b، نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ b واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم.
2. طول تمام نقاط نمودار را بر a تقسیم می‌کنیم.



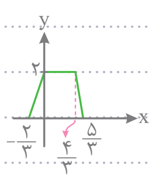
نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(2x-1)$ را رسم کنید.

ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:



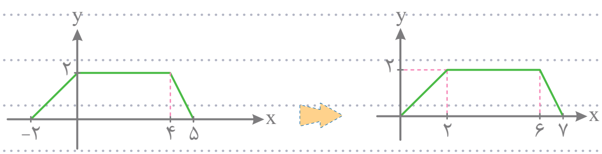
برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$ با کمک نمودار $y=f(ax+b)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1. طول تمام نقاط نمودار را در a ضرب می‌کنیم تا به نمودار تابع $y=f(x+b)$ برسیم.
2. اگر $b>0$ باشد، نمودار را به اندازهٔ b واحد به سمت راست و اگر $b<0$ باشد، نمودار را به اندازهٔ b واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

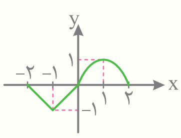


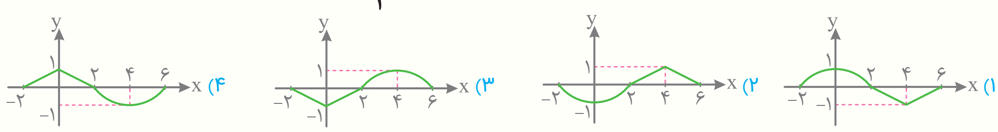
نمودار تابع $y=f(3x+2)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم کنید.

ابتدا طول تمام نقاط را در ۳ ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:

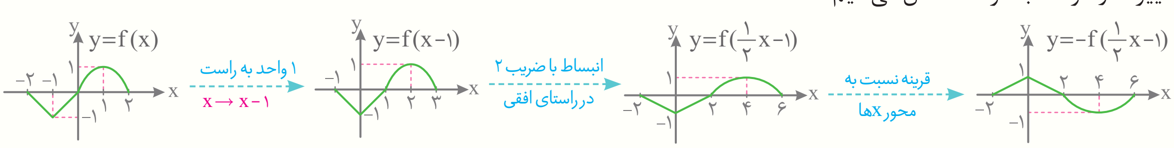


Test نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(\frac{1}{2}x-1)$ کدام است؟





4 تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:



هر تابع به‌صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \dots + a_۱ x + a_۰$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $a_n \neq ۰$ و همهٔ ضرایب عدد حقیقی هستند را یک **تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n** می‌نامند.

چند ویژگی	
۱ برای تابع $f(x)=۰$ درجه تعریف نمی‌شود.	۲ درجهٔ تابع ثابت $f(x)=c$ برابر صفر است.
۳ درجهٔ تابع خطی $f(x)=mx+b$ برابر ۱ است.	۴ درجهٔ تابع سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ برابر ۲ است.

دامنهٔ توابع چند جمله‌ای برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

Test **کدام‌یک از توابع زیر یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است؟**

۱) $y=\sqrt[۴]{۲}\,x+۱$ ۲) $y=x^۴+۲x^۵+۳$ ۳) $y=x^۴+\sqrt{۲}\,x+۱$ ۴) $y=x^۴+\sqrt{۲x}+۱$

3 به **بررسی گزینه‌ها** می‌پردازیم:

۱ درجهٔ این تابع برابر ۱ است.

۲ بزرگ‌ترین درجهٔ این تابع برابر ۵ است، پس این تابع از درجهٔ ۵ است.

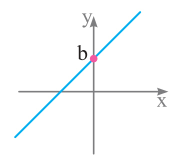
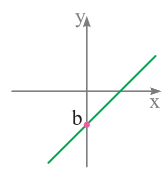
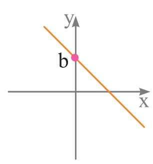
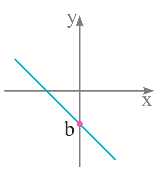
۳ بزرگ‌ترین درجهٔ این تابع برابر ۴ است، پس این تابع از درجهٔ ۴ است.

۴ در این تابع توان x در عبارت $\sqrt{۲x}$ عددی صحیح نیست؛ پس این تابع چندجمله‌ای نیست.

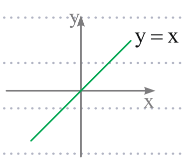
به هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ **تابع خطی** می‌گویند. می‌دانیم در این تابع a برابر شیب خط و b نشان‌دهندهٔ عرض از مبدأ است.

نمودار توابع خطی $y=ax+b$ با توجه به علامت a و b در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:

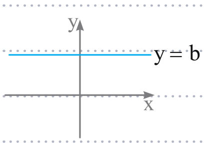
نمودار تابع $y=ax+b$ در حالت‌های مختلف

$a>۰, b>۰$	$a>۰, b<۰$	$a<۰, b>۰$	$a<۰, b<۰$
			

اگر $a=۱$ و $b=۰$ باشد آنگاه تابع خطی $y=ax+b$ به تابع $y=x$ تبدیل می‌شود. به این تابع، **تابع همانی** می‌گویند. توجه کنید خط $y=x$ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم دستگاه مختصات است.



اگر $a=۰$ باشد آنگاه تابع خطی $y=ax+b$ به تابع $y=b$ تبدیل می‌شود. به این تابع، **تابع ثابت** می‌گویند.



اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد و بدانیم $f(۳)+g(۳)=۵$ است، حاصل $f(۴)\times g(۵)$ را به دست آورید.

چون f تابعی همانی است، پس $f(۳)=۳$ است. بنابراین با توجه به صورت سؤال داریم: $f(۳)+g(۳)=۵ \Rightarrow ۳+g(۳)=۵ \Rightarrow g(۳)=۲$

حال چون تابع g ثابت است، پس به ازای تمام مقادیر برابر ۲ است. بنابراین: $f(۴)\times g(۵)=۴\times۲=۸$

پیدا کردن $f(a)$ با داشتن fog و g	اگر $g(x)=\frac{x}{x+1}$ و $(fog)(x)=1-x$ باشد، مقدار $f(\frac{3}{4})$ را به‌دست آورید.
1 ضابطهٔ تابع درونی یعنی $g(x)$ را برابر a قرار می‌دهیم و با حل این معادله مقدار x را به‌دست می‌آوریم.	$g(x)=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{x}{x+1}=\frac{3}{4}\Rightarrow 4x=3x+3\Rightarrow x=3$
2 مقدار x را در ضابطهٔ تابع مرکب fog جایگذاری می‌کنیم تا $f(a)$ به‌دست آید.	$f(g(3))=1-3=-2\xrightarrow{g(3)=\frac{3}{4}}f(\frac{3}{4})=-2$

Test اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=8x^2+6x+5$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج - ۹۵)

۱) $2x^2+3x+1$ ۲) $2x^2-2x+3$ ۳) $2x^2-x+4$ ۴) $2x^2+x+3$

3 با درنظرگرفتن $g(x)=t$ داریم:

$$2x+1=t\Rightarrow x=\frac{t-1}{2}\Rightarrow f(g(x))=f(2x+1)=8x^2+6x+5 \Rightarrow f(t)=8(\frac{t-1}{2})^2+6(\frac{t-1}{2})+5=8(\frac{t^2-2t+1}{4})+3(t-1)+5$$

با ساده کردن عبارت به‌دست آمده $f(t)=2t^2-t+4$ خواهد شد که با جایگذاری x به جای t، ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=2x^2-x+4$ خواهد بود.

در تابع مرکب $x=0$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$f(g(0))=8(0)^2+6(0)+5 \Rightarrow f(1)=5$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=1$ برابر ۵ می‌شود گزینهٔ ۳ است.

تابع — پیدا کردن ضابطهٔ تابع $f(\blacktriangle)$ با معلوم بودن ضابطهٔ $f(\bullet)$ — Functions & Their Graphs

در بعضی از سؤالات، ضابطهٔ تابع $f(\bullet)$ را داریم و از ما ضابطهٔ تابع $f(\blacktriangle)$ را می‌خواهند. [$\bullet$ و $\blacktriangle$ عبارت‌هایی برحسب یک متغیر مثلاً x هستند.] برای حل این سؤالات دو راه حل کلی وجود دارد:

1 **روش اول:** با تغییر متغیر مناسب ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم و سپس در این تابع به جای x عبارت $\blacktriangle$ را قرار می‌دهیم.

2 **روش دوم:** ابتدا بررسی می‌کنیم چه تغییری باید روی عبارت $\bullet$ انجام دهیم تا به عبارت $\blacktriangle$ تبدیل شود سپس همین تغییر را روی ضابطهٔ تابع $f(\bullet)$ نیز اعمال می‌کنیم.

فرض کنید $f(x-2)=x^2+5x+1$ و می‌خواهیم $f(3-x)$ را پیدا کنیم. برای این کار می‌توانیم به دو روش بالا به صورت زیر عمل کنیم:

روش اول:

$$x-2=t\Rightarrow x=t+2\Rightarrow f(t)=(t+2)^2+5(t+2)+1=t^2+4t+4+5t+10+1=t^2+9t+15$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2+9x+15\Rightarrow f(3-x)=(3-x)^2+9(3-x)+15=9-6x+x^2+27-9x+15$$

$$\Rightarrow f(3-x)=x^2-15x+51$$

روش دوم: ابتدا بررسی می‌کنیم که چه تغییری روی عبارت $x-2$ اعمال کنیم تا به عبارت $3-x$ برسیم. به عبارت دیگر باید ببینیم که به جای x چه عبارتی قرار دهیم تا تغییر مطلوب مسئله رخ دهد. فرض می‌کنیم که باید به جای x عبارت $\blacksquare$ را در $x-2$ بگذاریم تا عبارت $3-x$ حاصل شود:

$$\blacksquare-2=3-x\Rightarrow\blacksquare=5-x$$

پس کافیست که در ضابطهٔ تابع $f(x-2)=x^2+5x+1$ به جای همهٔ xها عبارت $5-x$ را قرار دهیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$f(x-2)=x^2+5x+1\xrightarrow{x\to 5-x}f(5-x-2)=(5-x)^2+5(5-x)+1$$

$$\Rightarrow f(3-x)=25-10x+x^2+25-5x+1=x^2-15x+51\Rightarrow f(3-x)=x^2-15x+51$$

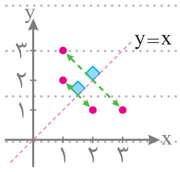
اگر ضابطهٔ $f(\bigcirc)$ را داشته باشیم، برای مشخص کردن ضابطهٔ $f(\bigcirc)$ از طریق عددگذاری، بهترین عدد از حل معادلهٔ $\bigcirc=\bigcirc$ به دست می‌آید.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌مرتب (a,b)، زوج‌مرتب (b,a) به‌دست می‌آید. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌مرتب‌های تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به‌دست می‌آید که آن را **وارون تابع f** می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

وارون تابع $f=\{(۶,۳),(۲,۵),(۳,۴)\}$ به‌صورت $f^{-1}=\{(۳,۶),(۵,۲),(۴,۳)\}$ است.

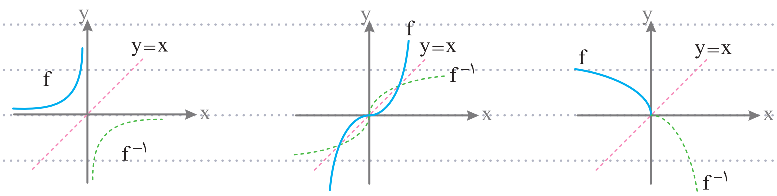
اگر تابع f و تابع f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، ملاحظه می‌شود که نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند.

تابع $f=\{(۲,۱),(۳,۱)\}$ را در نظر بگیرید، وارون این تابع به‌صورت $f^{-1}=\{(۱,۲),(۱,۳)\}$ است. حال f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، همان‌طور که می‌بینید هر نقطه از تابع f بعد از قرینه شدن نسبت به $y=x$ به نقطه‌ای از f^{-1} تبدیل می‌شود.



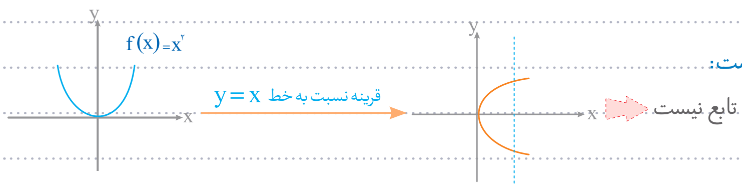
برای رسم نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f، باید نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

در هر یک از توابع زیر از روی نمودار f، نمودار f^{-1} رسم شده است:



وارون یک تابع ممکن است تابع نباشد.

می‌دانیم $f(x)=x^۲$ یک تابع است، اما وارون آن تابع نیست:



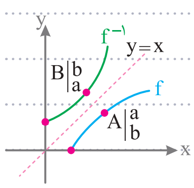
وارون تابع f در صورتی یک تابع است که f تابعی یک‌به‌یک باشد. در این حالت می‌گوییم تابع f **وارون‌پذیر** است.

Test **کدام‌یک از توابع زیر وارون‌پذیر است؟**

۱) $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$
۲) $g=\{(۲,۴),(۳,۱),(۴,۲)\}$
۳) $h=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۳)\}$
۴) $k=\{(۲,۲),(۳,۱),(۱,۲)\}$

2 در بین گزینه‌ها تابع g یک‌به‌یک است. چون تمام زوج‌مرتب‌ها مؤلفه‌های اول و دوم متفاوت دارند. بنابراین تنها تابع g وارون‌پذیر است.

با توجه به این‌که نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$، یعنی نیمساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند (متقارن‌اند). خواهیم داشت:



1 اگر نقطهٔ $A(a,b)$ روی نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطهٔ $B(b,a)$ روی نمودار تابع f^{-1} است و بر عکس، به عبارت دیگر:

$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

2 همواره دامنهٔ تابع f با بُرد تابع f^{-1} برابر است. همچنین بُرد تابع f نیز با دامنهٔ تابع f^{-1} برابر است.

$$D_f=R_{f^{-1}} \qquad R_f=D_{f^{-1}}$$

Test در کدام گزینه a بزرگ‌تر است؟

۱) $\log_a \frac{۱}{۳} = -۱$ ۲) $\log_{-۲} a = ۴$ ۳) $\log_a ۲ = \frac{۱}{۳}$ ۴) $\log_{۲۵} a = -\frac{۱}{۲}$

3 همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$\boxed{۱}\ \log_a \frac{۱}{۳} = -۱ \Rightarrow a^{-۱} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = ۳$

توجه کنید در گزینهٔ $\boxed{۲}$ چون مبنا برابر ۲- و منفی است، پس $\log_{-۲} a$ تعریف نشده است.

$\boxed{۴}\ \log_{۲۵} a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = (۲۵)^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow a = \frac{۱}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱}{۵}$

$\boxed{۳}\ \log_a ۲ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a^{\frac{۱}{۳}} = ۲ \xrightarrow{\text{به توان ۳}} a = ۲^۳ = ۸$

تابع نمایی و لگاریتمی — قانون [۱]: انتقال توان
Exponential Functions Logarithms

اگر عبارت جلوی لگاریتم و مبنای لگاریتم عبارت‌هایی توان‌دار باشند، با کمک قاعدهٔ انتقال توان می‌توانیم توان آن‌ها را به پشت لگاریتم منتقل کنیم:

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

$\boxed{1}$ اگر عبارت جلوی لگاریتم [یا مبنای لگاریتم] از ضرب دو یا چند عدد تشکیل شده باشد به‌طوری که فقط بعضی از آن‌ها توان‌دار باشند، نمی‌توانیم توان را به پشت لگاریتم منتقل کنیم.

- $\log(۳\times۵)^۲ = ۲\log(۳\times۵)$
- $\log(۳\times۵^۲) \neq ۲\log(۳\times۵)$

$\boxed{2}$ توان عبارت جلوی لگاریتم را نمی‌توان به عنوان توان برای خود لگاریتم در نظر گرفت.

- $(\log ۳)^۲ \neq \log ۳^۲$
- $(\log ۳)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\log ۳}$
- $\frac{۱}{۲}\log ۳ = \log ۳^{\frac{۱}{۲}} = \log\sqrt{۳}$

با توجه به تعریف لگاریتم، می‌توانیم دو قانون بدیهی زیر را نتیجه بگیریم:

دو قانون بدیهی

$\boxed{1}$ لگاریتم عدد یک در هر مبنایی برابر با صفر است. $\log_a ۱ = ۰$	$\boxed{2}$ لگاریتم هر عددی در پایهٔ خودش برابر با یک است. $\log_a a = ۱$

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامند و معمولاً در این حالت مبنای لگاریتم نوشته نمی‌شود، یعنی: $\log_{۱۰} a = \log a$

- $\log ۱۰۰۰ = \log_{۱۰} ۱۰۰۰ = ۳$
- $\log ۱۰ = \log_{۱۰} ۱۰ = ۱$

Test حاصل $\log_۳ ۹\sqrt{۲۷}$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

2 عبارت جلوی لگاریتم را به‌صورت توان‌دار می‌نویسیم و از قاعدهٔ انتقال توان استفاده می‌کنیم:

$$\log_۳ ۹\sqrt{۲۷} = \log_۳ ۳^۲ \times \sqrt{۳^۳} = \log_۳ ۳^۲ \times ۳^{\frac{۳}{۲}} = \log_۳ ۳^{\frac{۷}{۲}} = \frac{۷}{۲}\log_۳ ۳ = \frac{۷}{۲} \times ۱ = \frac{۷}{۲}$$

تابع نمایی و لگاریتمی — قانون [۲]: جمع و تفریق لگاریتم‌ها
Exponential Functions Logarithms

برای به‌دست آوردن مجموع یا تفاضل دو لگاریتم با مبنای یکسان، از قوانین زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c} \qquad \log_b a + \log_b c = \log_b ac$$

قانون جمع و تفریق لگاریتم‌ها برای بیش از دو لگاریتم نیز قابل تعمیم است.

ریزه کاری‌هایی در قاعده‌ی جمع و تفریق لگاریتم‌ها

1 ابتدا باید مبنای لگاریتم‌ها را یکسان کنیم.	$\log_{25}3600-\log_5 12=\log_{5^2}60^2-\log_5 12=\frac{2}{2}\log_5 60-\log_5 12=\log_5\frac{60}{12}=\log_5 5=1$
2 اگر لگاریتم‌ها دارای ضریب باشند، ابتدا با کمک قانون انتقال توان، ضریب را از بین می‌بریم.	$2\log_6 3+\log_6 4=\log_6 3^2+\log_6 4=\log_6 9+\log_6 4=\log_6 36=2$

می‌توانیم $\log 2$ و $\log 5$ را به صورت زیر به یکدیگر تبدیل کنیم:

$$\log 10=1\Rightarrow\log(2\times5)=1\Rightarrow\log 2+\log 5=1\Rightarrow\begin{cases}\log 2=1-\log 5\\ \log 5=1-\log 2\end{cases}$$

اگر بخواهیم مجموع یا تفاضل یک عدد و یک عبارت لگاریتمی را پیدا کنیم، می‌توانیم عدد را به شکل لگاریتمی با مبنای لگاریتم داده شده بنویسیم و سپس از قانون جمع و تفریق دو لگاریتم استفاده کنیم.

$2+\log_3 4=\log_3 9+\log_3 4=\log_3(9\times4)=\log_3 36$

$\frac{1}{2}+\log_5 3=\log_5\sqrt{5}+\log_5 3=\log_5 3\sqrt{5}$

Test اگر $\log 2=a$ و $\log 3=b$ باشد، آنگاه $\log\sqrt{12}$ کدام است؟

۱) $a+2b$ ۲) $a+\frac{b}{2}$ ۳) $2a+b$ ۴) $\frac{a}{2}+b$

2

$$\log\sqrt{12}=\log 12^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 12=\frac{1}{2}(\log 4+\log 3)=\frac{1}{2}(2\log 2+\log 3)=\frac{1}{2}(2a+b)=a+\frac{b}{2}$$

تابع نمایی و لگاریتمی — قانون [۳]: تغییر مبنا — Exponential Functions Logarithms

هر لگاریتم را می‌توان با کمک قانون تغییر مبنا به صورت تقسیم دو لگاریتم نوشت؛ به عبارتی اگر c یک عدد حقیقی دلخواه $(c>0, c\neq1)$ باشد، آنگاه می‌توان از c به عنوان پایهٔ لگاریتم استفاده کرد؛ بنابراین:

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$\frac{\log_2 9}{\log_2 6}=\log_6 9$

$\log_3 2=\frac{\log 2}{\log 3}$

اگر $\log_3 2=a$ باشد، مقدار $\log_6 2$ برحسب a به دست آورید.

$$\log_6 2=\frac{\log_3 2}{\log_3 6}=\frac{\log_3 2}{\log_3(3\times2)}=\frac{\log_3 2}{\log_3 3+\log_3 2}=\frac{\log_3 2}{1+\log_3 2}=\frac{a}{1+a}$$

نتایج و کاربردهای قانون تغییر مبنا

1 به‌طور کلی می‌توان گفت $\log_b a$ و $\log_a b$ معکوس یکدیگر هستند:

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

2 اگر دو (یا چند) لگاریتم در یکدیگر ضرب شوند، می‌توانیم عبارت جلوی لگاریتم‌ها را با یکدیگر یا مبناها را با یکدیگر جابه‌جا کنیم:

$$\log_{b_1}a_1\times\log_{b_2}a_2=\log_{b_1}a_2\times\log_{b_2}a_1$$

حاصل $\log_7 4\times\log_{16}7$ را به دست آورید.

$$\log_7 4\times\log_{16}7=\log_7 7\times\log_{16}4=1\times\log_{2^4}2^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Test اگر $\log_3 2 = \frac{5}{8}$ باشد، آنگاه $\log_{18} 8$ کدام است؟ (خارج - ۹۹)

۱) $\frac{15}{22}$ ۲) $\frac{5}{7}$ ۳) $\frac{8}{11}$ ۴) $\frac{3}{4}$

2 از قاعدهٔ تغییر مبنا استفاده می‌کنیم:

$$\log_{18} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 18} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3(3^2\times 2)} = \frac{3\log_3 2}{2\log_3 3+\log_3 2} = \frac{3\times\frac{5}{8}}{2+\frac{5}{8}} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}} = \frac{5}{7}$$

تابع نمایی و لگاریتمی — قانون [۴]: اعداد با توان لگاریتمی — Exponential Functions Logarithms

اگر یک عبارت لگاریتمی به عنوان توان یک عدد قرار بگیرد، می‌توانیم جای عدد و عبارت جلوی لگاریتم را با یکدیگر عوض کنیم:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$12^{\log_3 6} = 6^{\log_3 12}$ $2^{\log_5 3} = 3^{\log_5 2}$

با توجه به قانون بالا، می‌توان نتیجه گرفت:

$$a^{\log_a x} = x$$

$3^2 \times 3^{\log_3 5} = 9\times 5^{\log_3 3} = 9\times 5 = 45$ $10^{\log 5} = 5$

در سؤالاتی که خود لگاریتم‌ها دارای توان هستند، باید با کمک اتحادها حاصل عبارت را به‌دست آوریم. در این سؤالات معمولاً از اتحادهای مزدوج و مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$(\log_{15} 3)^2 + (\log_{15} 5)^2 + 2\log_{15} 3.\log_{15} 5 = (\log_{15} 3 + \log_{15} 5)^2 = (\log_{15} 15)^2 = 1$

Test حاصل عبارت $3^{\frac{1}{\log_5 3}} + 11^{\frac{1}{\log_5 11}}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۲۵

2 می‌دانیم $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ است، پس:

$$3^{\frac{1}{\log_5 3}} + 11^{\frac{1}{\log_5 11}} = 3^{\log_3 5} + 11^{\log_{11} 5} = 5^{\log_3 3} + 5^{\log_{11} 11} = 5+5 = 10$$

تابع نمایی و لگاریتمی — لگاریتم‌های شامل رادیکال — Exponential Functions Logarithms

اگر عبارت جلوی لگاریتم (یا مبنا) شامل رادیکال باشد، سه حالت عمده برای حل مسئله وجود دارد:

1 اگر عبارت جلوی لگاریتم یا مبنا، فقط از یک رادیکال تشکیل شده باشد، رادیکال را به‌صورت توان‌دار می‌نویسیم و با کمک قوانین لگاریتم، عبارت را ساده می‌کنیم. [که در بخش‌های قبلی بررسی شد.]

$\log_4 \sqrt[3]{2} = \log_{2^2} 2^{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{2}\log_2 2 = \frac{1}{6}$

2 اگر مجموع یا تفاضل دو لگاریتم خواسته شود به‌طوری که عبارت جلوی لگاریتم‌ها از مجموع (یا تفاضل) دو رادیکال یا یک عدد و یک رادیکال تشکیل شده باشد، از دو اتحاد مربع دوجمله‌ای و مزدوج استفاده می‌کنیم.

$2\log(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \log(7+2\sqrt{10}) = \log(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 + \log(7+2\sqrt{10})$

$= \log(7-2\sqrt{10}) + \log(7+2\sqrt{10}) = \log\overbrace{(7-2\sqrt{10})(7+2\sqrt{10})}^{49-40} = \log 9 = 2\log 3$

3 در بعضی از سوالاتی که عبارت جلوی لگاریتم و مبنا، از مجموع یا تفاضل دو رادیکال یا یک عدد و یک رادیکال تشکیل شده است، می‌توانیم عبارت جلوی لگاریتم یا مبنا را گویا کنیم.

$\log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}-1) = \log_{(\sqrt{2}+1)}\frac{1}{(\sqrt{2}+1)} = \log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}+1)^{-1} = -\log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}+1) = -1$

Test اگر $\log ۵ = k$ باشد، حاصل $\log(۳-\sqrt{۵})+\log(۳+\sqrt{۵})$ کدام است؟

۱) $۲-۲k$ ۲) $۱-k$ ۳) $۱+k$ ۴) $۲+۲k$

1

$$\log(۳-\sqrt{۵})+\log(۳+\sqrt{۵})=\log(۹-۵)=\log ۴=\log ۲^{۲}=۲\log ۲=۲(۱-\log ۵)=۲(۱-k)=۲-۲k$$

تابع نمایی و لگاریتمی — یافتن حدود لگاریتم

Exponential Functions — Logarithms

اگر بخواهیم مقدار تقریبی $\log_b a$ را محاسبه کنیم، یعنی بررسی کنیم که $\log_b a$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد، باید مشخص کنیم عدد a بین کدام دو توان متوالی از b قرار دارد.

برای این‌که ببینیم $\log_۲ ۱۰$، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد و به کدام‌یک نزدیک‌تر است، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$۲^{۳}<۱۰<۲^{۴} \xrightarrow{\text{log در مبنای ۲}} \log_۲ ۲^{۳}<\log_۲ ۱۰<\log_۲ ۲^{۴} \Rightarrow ۳<\log_۲ ۱۰<۴$$

چون ۱۰ به $۲^{۳}=۸$ نزدیک‌تر است تا به $۲^{۴}=۱۶$، پس $\log_۲ ۱۰$ هم به ۳ نزدیک‌تر است تا به ۴.

Test حاصل عبارت $[\log_{۰/۵} ۳/۵]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

4

می‌دانیم:

$$\log_{۰/۵} ۳/۵=\log_{\frac{۱}{۲}} ۳/۵=-\log_۲ ۳/۵$$

از آنجایی که $۲^{۱}<۳/۵<۲^{۲}$، داریم:

$$\log_۲ ۲^{۱}<\log_۲ ۳/۵<\log_۲ ۲^{۲}\Rightarrow ۱<\log_۲ ۳/۵<۲$$

پس $-\log_۲ ۳/۵$ بین دو عدد -۲ و -۱ قرار گرفته است. بنابراین:

$$[\log_{۰/۵} ۳/۵]=[-\log_۲ ۳/۵]=-۲$$

تابع نمایی و لگاریتمی — دامنهٔ توابع لگاریتمی

Exponential Functions — Logarithms

برای به‌دست آوردن دامنهٔ توابع لگاریتمی باید سه شرط زیر را بررسی کنیم و سپس از جواب‌ها اشتراک بگیریم:

- عبارت جلوی لگاریتم مثبت باشد.
- مبنای لگاریتم مثبت باشد.
- مبنای لگاریتم یک نباشد.

$$\log_{\bigcirc} \bigcirc \Rightarrow \begin{cases} \bigcirc>۰ \\ \bigcirc>۰ \\ \bigcirc\neq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} \text{دامنه به‌دست می‌آید}$$

دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{(x-۳)}(۶-x)$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} ۶-x>۰\Rightarrow x<۶ \\ x-۳>۰\Rightarrow x>۳ \\ x-۳\neq ۱\Rightarrow x\neq ۴ \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f=(۳,۶)-\{۴\}=(۳,۴)\cup(۴,۶)$$

در هنگام تعیین دامنه، نباید تابع را ساده کنیم.

دامنهٔ تابع $y=\log x^{۲}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۰\}$ است، در حالی که دامنهٔ تابع $g(x)=۲\log x$ به صورت $(۰,+\infty)$ است.

Test دامنهٔ تابع $f(x)=\log_x(۴-x^{۲})$ شامل چند عدد صحیح است؟

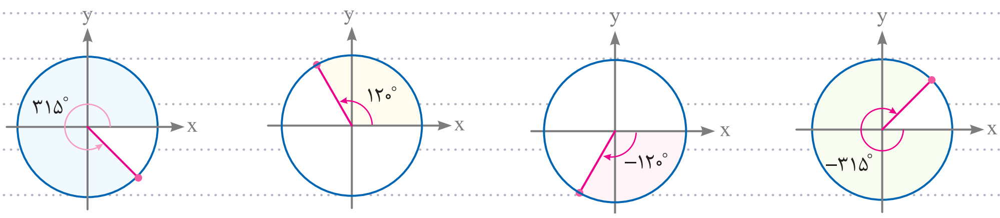
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

4

$$\boxed{1}\ ۴-x^{۲}>۰\Rightarrow x^{۲}<۴\Rightarrow |x|<۲\Rightarrow -۲<x<۲$$
$$\boxed{2}\ x>۰,\ x\neq ۱$$
$$\xrightarrow{\cap} D_f=(۰,۱)\cup(۱,۲)$$

بنابراین در دامنهٔ تابع f عدد صحیحی وجود ندارد.

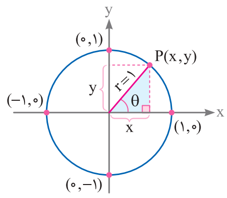
موقعیت زاویه‌های 315°، -315°، 120°، -120° را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید.



ویژگی نقطه‌های روی دایرهٔ مثلثاتی

1 با توجه به شکل مقابل طول هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی، برابر $\cos\theta$ و عرض آن برابر $\sin\theta$ است: $P(\cos\theta, \sin\theta)$

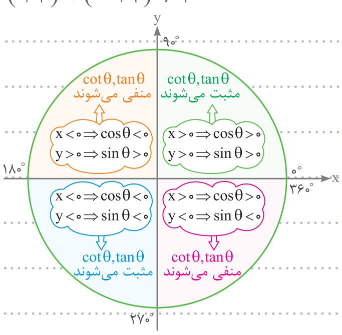
2 با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث رنگ شده برای هر نقطه $P(x, y)$ خواهیم داشت: $y^2+x^2=1 \Leftrightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$



برای این‌که مشخص کنیم نقطهٔ $P(x, y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد یا خیر، باید درستی رابطهٔ $x^2+y^2=1$ را بررسی کنیم.

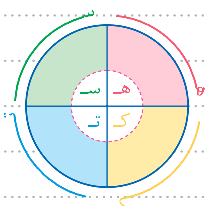
نقطهٔ $P(0/3, -0/4)$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار ندارد، زیرا: $(0/3)^2+(-0/4)^2\neq 1$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در ناحیه‌های مختلف را می‌توان مطابق شکل زیر مرتب و دسته‌بندی کرد:



به اختصار می‌توان علامت نسبت‌های مثبت هر ربع مثلثاتی را این‌گونه به خاطر سپرد [دقت کنید که هر جا تانژانت مثبت است، کتانژانت هم مثبت است.]:

همه در ربع اول مثبت
سینوس در ربع دوم مثبت
تانژانت (و کتانژانت) در ربع سوم مثبت
کسینوس در ربع چهارم مثبت



هستک

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، مقادیر سینوس و کسینوس هر زاویهٔ دلخواه، همواره در بازهٔ $[-1,1]$ قرار دارد.

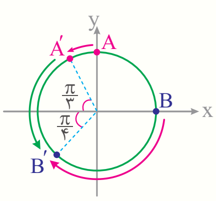
محدودهٔ عبارت $A=2+3\sin x$ را تعیین کنید.

می‌دانیم $\sin x$ در بازهٔ $[-1,1]$ قرار دارد، پس: $-1\leq \sin x\leq 1 \Rightarrow -3\leq 3\sin x\leq 3 \Rightarrow -1\leq 2+3\sin x\leq 5 \Rightarrow -1\leq A\leq 5$

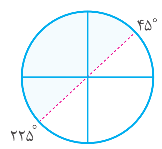
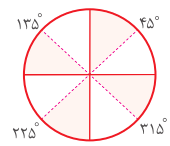
Test **نقطهٔ $A(0,1)$ را روی دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ در جهت مثبت مثلثاتی حرکت می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسد. سپس نقطهٔ $B(1,0)$ را نیز روی همین دایرهٔ مثلثاتی به اندازهٔ $\frac{3\pi}{4}$ در خلاف جهت مثلثاتی حرکت می‌دهیم تا به نقطهٔ B' برسد برای رسیدن از نقطهٔ A' به نقطهٔ B' باید روی دایرهٔ مثلثاتی چقدر حرکت کنیم؟**

۱) $\frac{5\pi}{6}$ در خلاف جهت مثلثاتی
۲) $\frac{5\pi}{6}$ در جهت مثبت مثلثاتی
۳) $\frac{7\pi}{12}$ در خلاف جهت مثلثاتی
۴) $\frac{7\pi}{12}$ در جهت مثبت مثلثاتی

4 مطابق دایرهٔ مثلثاتی مقابل برای رسیدن از نقطهٔ A' به نقطهٔ B' باید به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$ در جهت مثبت مثلثاتی حرکت می‌کنیم.



برای مقایسهٔ $\sin\alpha$ با $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$ با $\cot\alpha$ از دایره‌های مثلثاتی زیر کمک می‌گیریم. اگر انتهای کمان α در ناحیه‌های رنگ شده باشد، آنگاه:

مقایسهٔ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$	مقایسهٔ $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$
 $\sin\alpha>\cos\alpha$	 $\tan\alpha>\cot\alpha$

چون زاویهٔ ۱۵۰° در ناحیه‌های رنگی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، پس $\sin ۱۵۰^\circ>\cos ۱۵۰^\circ$ ، $\tan ۱۵۰^\circ>\cot ۱۵۰^\circ$ است.

اگر بخواهیم $\sin\alpha$ را با $\tan\alpha$ یا $\cot\alpha$ مقایسه کنیم یا بخواهیم $\cos\alpha$ را با $\tan\alpha$ یا $\cot\alpha$ مقایسه کنیم، می‌توانیم به جای $\tan\alpha$ بنویسیم $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و به جای $\cot\alpha$ بنویسیم $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

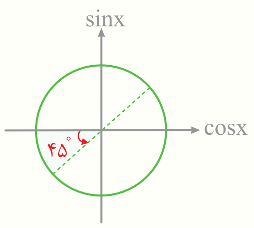
درستی نامساوی $\sin ۴۰^\circ<\tan ۴۰^\circ$ را بررسی کنید.

به جای $\tan ۴۰^\circ$ می‌نویسیم $\frac{\sin ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}$ و داریم:

$$\sin ۴۰^\circ<\tan ۴۰^\circ \Rightarrow \cancel{\sin ۴۰^\circ}<\frac{\cancel{\sin ۴۰^\circ}}{\cos ۴۰^\circ}\Rightarrow \cos ۴۰^\circ<۱$$

می‌دانیم سینوس و کسینوس هر زاویهٔ دلخواه، در بازهٔ $[-۱,۱]$ قرار دارد، پس نامساوی $\cos ۴۰^\circ<۱$ درست است. بنابراین $\sin ۴۰^\circ<\tan ۴۰^\circ$ نیز درست است.

Test در شکل مقابل اگر زاویهٔ θ در ناحیهٔ هاشور خورده باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $\cot\theta<\tan\theta$

۲) $\tan\theta.\sin\theta>۰$

۳) $\cos\theta-\sin\theta<۰$

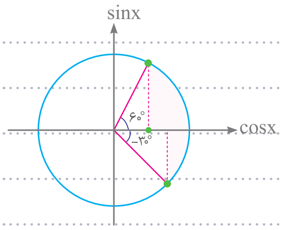
۴) $\sin\theta.\cos\theta<۰$

3 چون $۱۸۰^\circ<\theta<۲۲۵^\circ$ است، پس $\cos\theta<\sin\theta$ بوده و می‌توان نتیجه گرفت: $\cos\theta-\sin\theta<۰$

در برخی سؤالات حدود زاویه داده می‌شود و از ما حدود یکی از نسبت‌های مثلثاتی مربوط به آن زاویه را می‌خواهند. در این سؤالات باید ابتدا محدودهٔ زاویه را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنیم و سپس محدودهٔ نسبت مثلثاتی خواسته شده را به‌دست آوریم.

اگر $-۳۰^\circ\le x\le ۶۰^\circ$ و $\cos x=m+۱$ باشد، مقادیر m را به‌دست آورید.

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل $\frac{۱}{۲}\le\cos x\le ۱$ است، پس $m+۱$ نیز در بازهٔ $[\frac{۱}{۲},۱]$ قرار دارد، بنابراین:

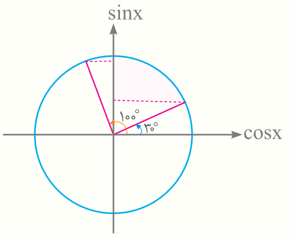


$$\frac{۱}{۲}\le m+۱\le ۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le m\le ۰$$

Test اگر $15^\circ < x < 50^\circ$ ، $\sin 2x = \frac{m-1}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(-\frac{1}{2}, 1]$ ۲) $(2, 3]$ ۳) $(0, 2]$ ۴) $(-1, 3]$

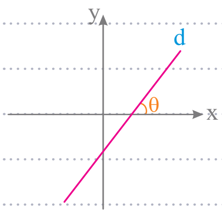
2 چون $15^\circ < x < 50^\circ$ است، پس $30^\circ < 2x < 100^\circ$ است. با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل $\sin 2x$ در بازهٔ $(\frac{1}{2}, 1]$ قرار دارد، بنابراین:



$$\frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3$$

مثلثات | رابطهٔ شیب خط و تانژانت | Trigonometric Functions

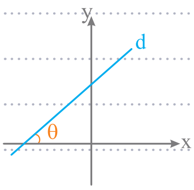
تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد، برابر شیب خط است:



$m_d = \tan\theta$

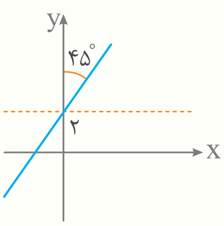
نمودار خط d به معادلهٔ $3y - 2x = 6$ به صورت مقابل است، حاصل $\tan\theta + \cot\theta$ کدام است؟

می‌دانیم که $\tan\theta$ برابر با شیب خط d است، پس با به‌دست آوردن شیب خط d داریم:



$$3y - 2x = 6 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan\theta + \cot\theta = \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4+9}{6} = \frac{13}{6}$$

Test با توجه به شکل مقابل، معادلهٔ خط d کدام است؟



۱) $2y = x + 2$

۲) $y = -x + 2$

۳) $y = x + 2$

۴) $2y = -x + 2$

3 خط d با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ 45° می‌سازد پس شیب آن برابر است با: $m = \tan\theta = 1$

در ضمن عرض از مبدأ خط برابر ۲ است، پس معادلهٔ آن به صورت $y = x + 2$ است.

مثلثات | اتحادهای مثلثاتی | Trigonometric Functions

هر تساوی مثلثاتی که به ازای هر مقدار دلخواه α (در صورت قابلِ تعریف بودن) برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نام دارد.

تساوی $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ یک اتحاد مثلثاتی است، چون به ازای هر زاویهٔ دلخواه که به جای x قرار دهیم، دو طرف تساوی برابر می‌شوند.

مجموع مربعات سینوس و کسینوس هر زاویهٔ دلخواه برابر ۱ است:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

باقی ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ برابر با $f(a)$ است.

اگر مقسوم علیه برابر $x-a$ باشد، باقی‌مانده باید عددی ثابت باشد. بنابراین اتحاد تقسیم به صورت مقابل است: $f(x)=(x-a)q(x)+r$

و چون این اتحاد به ازای جمیع مقادیر x برقرار است، با قرار دادن ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی $x=a$ در این اتحاد داریم:

$$f(a)=(\underbrace{a-a}_{0})q(a)+r\Rightarrow \boxed{f(a)=r}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت x^4-3x^3+x+9 بر $x-2$ برابر است با:

$$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow r=f(2)=2^4-3\times 2^3+2+9=16-24+2+9=3$$

به طور مشابه، باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر با $f(-\frac{b}{a})$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^3+x^2+ax$ بر $2x-1$ چهار واحد بیشتر از باقی ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $2x+3$ است. مقدار a را به دست آورید.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $2x-1$ برابر $f(\frac{1}{2})$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $2x+3$ برابر $f(-\frac{3}{2})$ است. پس داریم:

$$f(\frac{1}{2})=4+f(-\frac{3}{2})\Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{a}{2}=4+\frac{-27}{8}+\frac{9}{4}-\frac{3a}{2}\Rightarrow 2a=\frac{10}{4}\Rightarrow a=\frac{5}{4}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-4$ برابر ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x^2)$ بر $x-2$ کدام است؟

باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-4$ برابر ۵ یا $f(4)=5$ است. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x^2)$ بر $x-2$ برابر است با: $f(2^2)=f(4)=5$

Test **فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$، به‌ترتیب ۳ و ۱ باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$ کدام است؟** (تجربی خارج - ۹۹)

۱) ۷ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -1

۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-4$ و $x+2$ به ترتیب ۳ و ۱ است، پس: $p(4)=3,\ p(-2)=1$

حال باقی ماندهٔ تقسیم $p(x^2)+4p(-x)$ بر $x-2$ برابر است با: $p(2^2)+4p(-2)=p(4)+4p(-2)=3+4(1)=7$

اگر مقسوم برمقسوم علیه بخش‌پذیر باشد، بر تک‌تک عوامل مقسوم علیه نیز بخش‌پذیر است.

اگر عبارت $x^4+ax^3+bx^2-2x-3$ بر x^2-2x-3 بخش‌پذیر باشد، مقادیر a و b را بیابید.

می‌دانیم تجزیهٔ عبارت x^2-2x-3 به صورت $(x+1)(x-3)$ است. از طرفی چون عبارت $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-2x-3$ بر x^2-2x-3 بخش‌پذیر است، پس بر هر یک از عبارت‌های $(x+1)$ و $(x-3)$ نیز بخش‌پذیر است. بنابراین داریم:

$$f(-1)=0\Rightarrow (-1)^4+a(-1)^3+b(-1)^2-2(-1)-3=0\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow a=b$$

$$f(3)=0\Rightarrow (3)^4+a(3)^3+b(3)^2-2(3)-3=0\Rightarrow 27a+9b=-72\Rightarrow \begin{cases}a=b\\3a+b=-8\end{cases}\Rightarrow a=-2,b=-2$$

به ازای هر عدد طبیعی n، چند جمله‌ای x^n-a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است:

$$\boxed{x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+...+a^{n-2}x+a^{n-1})}$$

چند جمله‌ای x^8-1 بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

Test اگر $\frac{۱}{۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

۲ صورت کسر به ازای $x=۲$ برابر صفر می‌شود. اما از آن‌جایی که حاصل حد برابر عدد $\frac{۱}{۲}$ است، پس کسر دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. بنابراین $x=۲$ ریشهٔ مخرج کسر نیز است: $a(۲)+b=0$ $\boxed{۱}$

از طرفی پس از رفع ابهام، حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ می شود، پس:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}\overset{Hop}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to ۲}\frac{۱-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a}=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{a}=\frac{۱}{۴a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

با جایگذاری a در $\boxed{۱}$ داریم:

$$۲(\frac{۱}{۲})+b=0\Rightarrow b=-۱$$

حد و پیوستگی — مثلثاتی $\frac{0}{0}$ — Limits & Continuity

برای رفع ابهام کسرهای $\frac{0}{0}$ که در صورت و مخرج آن‌ها عبارت مثلثاتی وجود دارد، باید عامل صفر شونده در صورت و مخرج را به کمک اتحادهای جبری یا مثلثاتی، تجزیه یا فاکتورگیری از بین ببریم.

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos^۳x-\sin^۳x}{\cos x-\sin x}$ با جایگذاری $x=\frac{\pi}{۴}$ در صورت و مخرج به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}\overbrace{(\cos^۲x+\sin x\cos x+\sin^۲x)}^{۱+\sin x\cos x}}{\cancel{\cos x-\sin x}}=۱+\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴}=۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

اگر در صورت یا مخرج یک کسر، $\tan x$ وجود داشته باشد، به‌جای آن $\frac{\sin x}{\cos x}$ می‌نویسیم.

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin x+\cos x}{۱+\tan x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin x+\cos x}{۱+\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\cos x=\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

برای محاسبهٔ حدهای مثلثاتی، وقتی کمان آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند، می‌توانیم از هم‌ارزی مثلثاتی استفاده کنیم:

هم‌ارزی‌های مثلثاتی وقتی $u\to 0$		
$\tan u\sim u$	$\cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲}$	$\sin u\sim u$
$\tan^n u\sim u^n$	$\cos^n u\sim ۱-n\frac{u^۲}{۲}$	$\sin^n u\sim u^n$

حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{۲-۲\cos ۲x}}{\tan x}$ را به‌دست آورید.

چون $x\to 0^-$ می‌توانیم از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{۲-۲\cos ۲x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{۲-۲(۱-\frac{۴x^۲}{۲})}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{۴x^۲}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{۲\overset{-}{|x|}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-۲x}{x}=-۲$$

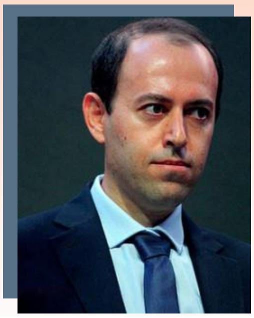
اگر پس از استفاده از هم‌ارزی‌ها، همهٔ عبارت‌های موجود در صورت یا مخرج کسر با هم ساده شوند، حاصل حد قابل اطمینان نیست. برای حل این مسائل باید از فاکتورگیری، اتحادها و گویا کردن استفاده کنیم و سپس حاصل حد را محاسبه کنیم.

Test حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) ۲π

۲ وقتی $x\to ۱^+$، مقدار $[x]$ برابر ۱ است، پس:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-\cos^۲\pi x}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱-\cos\pi x)(۱+\cos\pi x)}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}(۱-\cos\pi x)=۱-\cos\pi=۱-(-۱)=۲$$

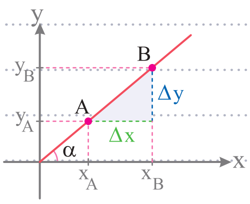


Differentiation

Chapter 9

Differentiation — مشتق: شیب خط و خط مماس بر نمودار

شیب خط برابر با نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی است و به‌صورت زیر به دست می‌آید:



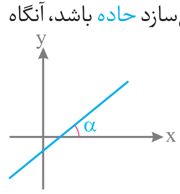
$$\text{شیب} = m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۶,۱۱)$ و $B(۸,-۳)$ برابر است با:

$$m = \frac{-۳-۱۱}{۸-۶} = \frac{-۱۴}{۲} = -۷$$

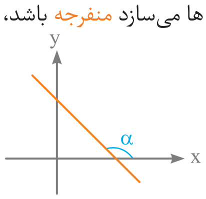
علامت شیب خط

1. اگر زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد حاده باشد، آنگاه شیب خط مثبت است. [و برعکس]



$۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$
$m > ۰$

2. اگر زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد منفرجه باشد، آنگاه شیب خط منفی است. [و برعکس]



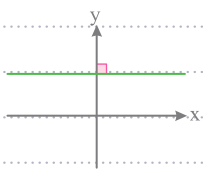
$۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$
$m < ۰$

خط $y = ۲x - ۱$ با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ حاده می‌سازد، زیرا شیب آن برابر $m = ۲$ است.

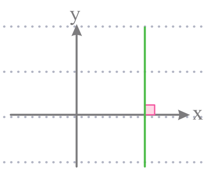
خط $۲۰x + ۵y = ۶$ با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ منفرجه می‌سازد زیرا:

$$۲۰x + ۵y = ۶ \Rightarrow m = -\frac{۲۰}{۵} = -۴$$

اگر خط موازی محور x ها باشد، آنگاه شیب آن برابر صفر و اگر خط موازی محور y ها باشد، آنگاه شیب آن تعریف نمی‌شود.



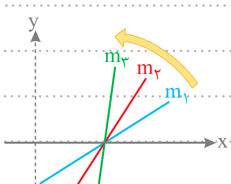
$m = ۰$



m تعریف نشده است

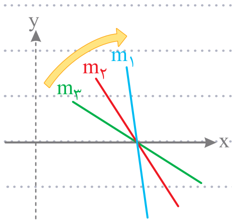
برای مقایسهٔ شیب خط‌ها به دو حالت زیر توجه کنید:

1. اگر شیب خط مثبت باشد، هرچه زاویهٔ حادهٔ خط با جهت مثبت محور x ها بیشتر باشد، شیب خط بزرگ‌تر می‌شود.



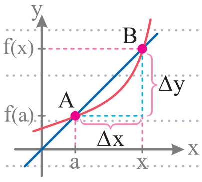
$m_۳ > m_۲ > m_۱$

2. اگر شیب خط منفی باشد، هرچه زاویهٔ منفرجهٔ خط با جهت مثبت محور x ها کمتر باشد، خط‌ها به خط عمودی نزدیک‌تر شده، شیب‌ها کوچک‌تر می‌شوند. [اندازهٔ شیب‌ها بزرگ‌تر می‌شود]



$m_۳ > m_۲ > m_۱$

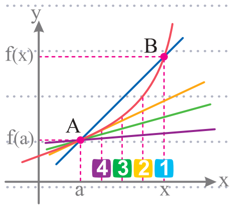
خطی را که از دو نقطهٔ متمایز، روی یک منحنی می‌گذرد، خط قاطع می‌نامند.



در شکل مقابل، خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B، یک خط قاطع برای نمودار تابع f است و شیب آن برابر است با:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

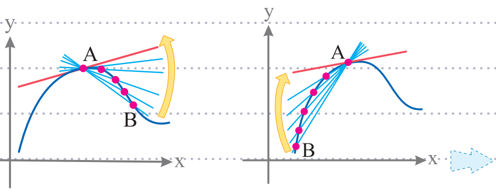
در شکل مقابل اگر نقطهٔ B را روی نمودار تابع f، به نقطهٔ A نزدیک و نزدیک‌تر کنیم، طول نقطهٔ B یعنی x به‌ترتیب از روی نقاط 1، 2، 3، 4 و... عبور کرده و به a نزدیک می‌شود. بنابراین می‌توان گفت: نقاط A و B تقریباً بر هم منطبق خواهند شد. پس وقتی نقطهٔ B به قدر کافی به نقطهٔ A نزدیک شود، شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B برابر است با:



$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

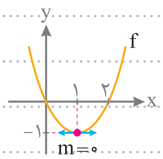
این خط را خط مماس در نقطهٔ A می‌نامند.

اگر نقطهٔ B به قدر کافی به A نزدیک شود، شیب خطوط قاطع AB به شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A به طول a نزدیک می‌شود.



$$m_{\text{مماس}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای به‌دست آوردن شیب خط مماس بر منحنی $f(x)=x^2-2x$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ از تعریف شیب خط مماس استفاده می‌کنیم:

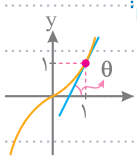


$$m_{\text{مماس}}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2x)-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

با جایگذاری $x=1$ به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، بنابراین آن را رفع ابهام می‌کنیم:

$$m_{\text{مماس}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)=1-1=0$$

برای به‌دست آوردن شیب خط مماس بر منحنی $f(x)=x^3$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ از تعریف شیب خط مماس استفاده می‌کنیم:

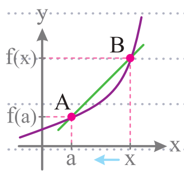


$$m_{\text{مماس}}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

با جایگذاری $x=1$ به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، بنابراین آن را رفع ابهام می‌کنیم:

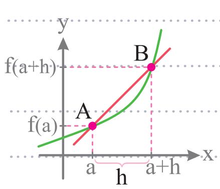
$$m_{\text{مماس}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

دو نقطهٔ A و B مطابق شکل روی نمودار تابع f قرار دارند. می‌دانیم اگر نقطهٔ B را به قدر کافی به A نزدیک کنیم، شیب خط قاطع AB برابر با شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ A می‌شود و مقدار آن برابر با $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است. مقدار این حد را [اگر موجود و متناهی باشد] مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند:

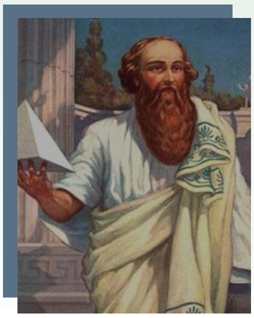


$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

اگر $x-a$ را برابر h درنظر بگیریم، آنگاه $x=a+h$ خواهد بود. در این صورت وقتی x به سمت a میل کند، مقدار h به سمت صفر میل می‌کند و تعریف مشتق تابع f در نقطهٔ a به‌صورت زیر در می‌آید:



$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Applications Of Derivatives

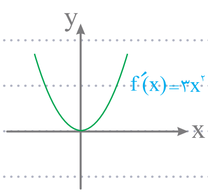
Chapter 10

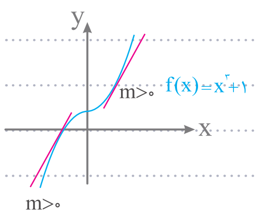
کاربرد مشتق — ارتباط یکنوایی با مشتق

برای بررسی یکنوایی تابع مشتق‌پذیر f در بازهٔ (a,b)، مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم.

1. اگر $f'(x)>0$ باشد، آنگاه شیب خط مماس بر f مثبت و در نتیجه تابع f اکیداً صعودی است.
2. اگر $f'(x)<0$ باشد، آنگاه شیب خط مماس بر f منفی و در نتیجه تابع f اکیداً نزولی است.
3. اگر در برخی نقاط، $f'(x)=0$ باشد، شیب خط مماس بر نمودار f موازی محور xها است.

نمودار تابع $f(x)=x^3+1$ و مشتق آن به صورت مقابل است:





اگر ضابطهٔ تابع مشتق‌پذیر f موجود باشد، برای بررسی وضعیت صعودی یا نزولی بودن آن در بازهٔ (a,b) باید مشتق تابع را به‌دست آوریم؛ سپس جدول تعیین علامت را برای تابع f' رسم کنیم. در بازه‌هایی که $f'(x)$ مثبت باشد، تابع f اکیداً صعودی و در بازه‌هایی که $f'(x)$ منفی باشد، تابع f اکیداً نزولی است.

تابع $f(x)=x^3-6x^2+4$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مشخص کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

باید جدول تعیین علامت f' را رسم کنیم:

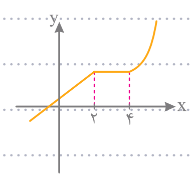
$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗

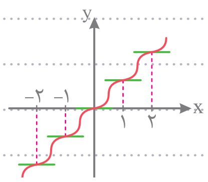
با توجه به جدول تعیین علامت مشتق، تابع در هریک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(4,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(0,4)$ اکیداً نزولی است.

اگر در یک بازه، $f'(x)\geq 0$، در صورتی‌که مشتق تابع f در یک یا چند نقطه از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f در این بازه اکیداً صعودی و اگر مشتق تابع f در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f صعودی است. به همین ترتیب اگر در یک بازه، $f'(x)\leq 0$، در صورتی‌که مشتق تابع f در یک یا چند نقطه برابر با صفر باشد، تابع f اکیداً نزولی و اگر مشتق تابع f در قسمتی از این بازه برابر با صفر باشد، تابع f نزولی است.

در نمودار توابع زیر، مشتق تابع بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

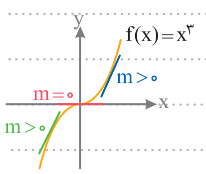


از آن‌جایی که $f'(x)$ در بازهٔ $(2,4)$ برابر صفر است، پس تابع f صعودی است.



چون $f'(x)$ فقط در نقاط صحیح برابر صفر است، پس تابع f اکیداً صعودی است.

تابع $f(x)=x^3$ تابعی اکیداً صعودی است. چون مشتق آن در نقطهٔ $x=0$ برابر صفر و در بقیهٔ نقاط مثبت است.



Test تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ در بازهٔ $(-1,1)$ چه وضعی دارد؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

1 برای بررسی وضعیت یکنوایی تابع، ابتدا باید از آن مشتق بگیریم:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(1)(x^2+1)-(2x)(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

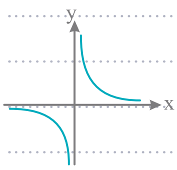
سپس باید جدول تعیین علامت f' را رسم کنیم، از آن‌جایی‌که ریشه‌های $\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0$ برابر $x=1$ و $x=-1$ هستند، داریم:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	○	$+$	○	$-$	
f		↘ نزولی		↗ صعودی		↘ نزولی	

پس این تابع در بازهٔ $(-1,1)$ اکیداً صعودی است.

کاربرد مشتق — یکنوایی توابع درجه سوم و توابع کسری — Applications Of Derivatives

تابع کسری f، در بازه‌ای که شامل ریشهٔ مخرج کسر است، غیر یکنوا است.



مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ برابر $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ است. از آن‌جا که $x=0$ ریشهٔ مخرج می‌باشد، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست، ولی مشتق این تابع در بقیهٔ نقاط دامنه یعنی $\mathbb{R}-\{0\}$، موجود و همواره مقداری منفی است.

مشتق تابع درجه سوم f، یک تابع درجهٔ دوم به‌صورت زیر است:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

1) اگر بخواهیم تابع $f(x)$ نزولی باشد، باید $f'(x)\le 0$ باشد، یعنی در تابع $f'(x)$ باید $a<0$ و $\Delta_{f'}\le 0$ باشد.

تابع $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-12x$ همواره نزولی است، زیرا:

$$f'(x)=-x^2+4x-12\Rightarrow\begin{cases}\text{ضریب } x^2=-1<0\\ \Delta=(4)^2-4(-1)(-12)=-32\le 0\end{cases}$$

2) اگر بخواهیم تابع $f(x)$ صعودی باشد، باید $f'(x)\ge 0$ باشد. یعنی در تابع $f'(x)$ باید $a>0$ و $\Delta_{f'}\le 0$ باشد.

تابع $f(x)=x^3-3x^2+4x$ همواره صعودی است، زیرا:

$$f'(x)=3x^2-6x+4\Rightarrow\begin{cases}\text{ضریب } x^2=3>0\\ \Delta=(-6)^2-4(3)(4)=-12\le 0\end{cases}$$

Test تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx^3+2x^2+\frac{m}{3}x-1$ همواره صعودی است. حدود m کدام است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $(-\infty,-2]$ ۳) $[-2,0)$ ۴) $[2,+\infty)$

4 ابتدا از تابع f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=3mx^2+4x+\frac{m}{3}$$

برای این‌که تابع f همواره صعودی باشد، باید مشتق آن بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، بنابراین در تابع $f'(x)$ باید $a>0$ و $\Delta\le 0$ باشد:

1) $a>0\Rightarrow 3m>0\Rightarrow m>0$

2) $\Delta=\underbrace{4^2-4(3m)(\frac{m}{3})}_{16-4m^2}\le 0\Rightarrow m^2\ge 4\Rightarrow\begin{cases}m\ge 2\\ m\le -2\end{cases}$

از اشتراک جواب‌ها، مجموعه مقادیر قابل قبول برای m به صورت $[2,+\infty)$ است.

Martin Hairer
1975

Count Without Counting

Chapter 11

برای این‌که بتوانیم بدون شمارش بشماریم، مثلاً برای این‌که بدانیم چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد یا مسائلی از این قبیل را حل و فصل کنیم، از اصولی استفاده می‌کنیم که به آن‌ها اصول شمارش گفته می‌شود. مهم‌ترین این اصول عبارت‌اند از: اصل ضرب، اصل جمع و ... که به تدریج به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به‌طوری‌که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای هرکدام از این روش‌ها، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، تعداد راه‌های انجام کار موردنظر برابر با $m \times n$ است. [این اصل برای انجام چندین عمل نیز قابل تعمیم است.]

این روش شمارش را در ریاضیات اصل ضرب می‌نامند. در واقع زمانی از اصل ضرب در محاسبه استفاده می‌کنیم که با دو عمل متوالی که کامل‌کنندهٔ هم هستند مواجه شویم؛ یعنی دو عمل که هیچ‌کدام باعث نفی دیگری نشود و بتوانند توأم با هم انجام شوند.

اصل ضرب در زبان فارسی، معادل کلمهٔ «و» است؛ یعنی عمل اول «و» عمل دوم توأم با هم انجام می‌شوند؛ مثل «رفت و برگشت» یا «شلوار و پیراهن» و...

تعداد راه‌های پوشیدن ۳ شلوار و ۴ پیراهن کدام است؟

پوشیدن شلوار باعث نفی پوشیدن پیراهن نیست و کامل‌کنندهٔ آن است. بنابراین تعداد راه‌ها طبق اصل ضرب برابر است با: $۳ \times ۴ = ۱۲$

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، تعداد روش‌هایی که این کار قابل انجام است برابر با $m + n$ است. [این اصل برای چندین عمل نیز قابل تعمیم است.]

این روش شمارش را در ریاضیات اصل جمع می‌گویند. در واقع زمانی از اصل جمع در محاسبه استفاده می‌کنیم که با دو عمل موازی که نفی‌کنندهٔ یکدیگر هستند مواجه شویم؛ یعنی دو عملی که انجام یکی باعث لغو دیگری شود و توأم باهم نتوانند انجام شوند.

اصل جمع در زبان فارسی معادل کلمهٔ «یا» است؛ یعنی عمل اول انجام می‌شود «یا» عمل دوم؛ به عنوان مثال مسافرت با قطار یا هواپیما بین دو شهر مختلف.

تعداد راه‌های بستن ۳ کروات و ۲ پاپیون کدام است؟

یک شخص نمی‌تواند هم پاپیون ببندد و هم کروات، یعنی بستن یکی باعث نفی دیگری است. پس تعداد راه‌ها طبق اصل جمع برابر است با: $۳ + ۲ = ۵$

Test **در کارخانهٔ بنز، نوعی اتومبیل در ۴ مدل، ۸ رنگ ۳ حجم موتور مختلف ۲ دندهٔ اتوماتیک و غیراتوماتیک در ۳ تیپ بنزینی و گازوئیلی و برقی تولید می‌شود، در این کارخانه چند نوع اتومبیل دنده اتومات و غیر برقی تولید می‌شود؟**

۱) ۱۹۲ ۲) ۱۸۰ ۳) ۹۶ ۴) ۵۷۶

3 منظور از اتومبیل غیربرقی، بنزینی یا گازوئیلی است. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد انواع اتومبیل برابر است با:

مدل رنگ حجم موتور

$۴ \times ۸ \times ۳ \times ۱ \times ۲ = ۱۹۲$

اتومات غیربرقی

در مسائلی که صحبت از پرتاب سکه و تاس به میان می‌آید، باید توجه داشته باشیم که هر سکه برای ظاهر شدن ۲ حالت دارد یعنی {پشت، رو} = S و هر تاس نیز ۶ حالت برای ظاهر شدن دارد یعنی {۱،۲،۳،۴،۵،۶} = S. حال اگر چند سکه و تاس را با هم پرتاب کنیم، با دو حالت مواجه می‌شویم:

۱ اگر هیچ محدودیتی نداشته باشند، تعداد حالات آن‌ها در هم ضرب می‌شود.

- تعداد حالات ۱ تاس و ۲ سکه = ۶×۲×۲=۲۴
- تعداد حالات پرتاب ۴ سکه = ۲×۲×۲×۲=۱۶
- تعداد حالات پرتاب ۲ تاس و ۳ سکه = ۶×۶×۲×۲×۲=۲۸۸
- تعداد حالات پرتاب ۲ تاس = ۶×۶=۳۶

۲ اگر بعضی تاس‌ها یا سکه‌ها دارای شرط یا محدودیت باشند، باید آن شرط یا محدودیت را در نظر بگیریم و سپس از اصل ضرب استفاده کنیم.

تعداد حالات پرتاب یک تاس قرمز و یک تاس سبز به طوری که تاس سبز مضرب ۳ بیاید، کدام است؟

$\underset{\{۳,۶\}}{۲} \times \underset{\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}}{۶} = ۱۲$

مسائل مربوط به تعداد حالات فرزندان خانواده نیز همانند پرتاب سکه است چون جنسیت هر فرزند دارای ۲ حالت است.

در یک خانواده با ۵ فرزند اگر بدانیم فرزند وسط دختر است، تعداد حالت‌های ممکن برای جنسیت فرزندان این خانواده کدام است؟

n = ۲×۲×۱×۲×۲ = ۱۶

در بعضی از مسائل شمارش، تعداد جملات حاصل ضرب دو یا چند عبارت چندجمله‌ای را از ما می‌خواهند. در این موارد تعداد کل جملات، در صورتی که پارامترهای به‌کار رفته در دو عبارت متمایز از هم باشند، برابر است با حاصل ضرب تعداد جملات آن عبارت‌ها.

$(a+b+c)(d+e)$ ⇐ تعداد جملات = ۳×۲=۶

در مواردی که دو عبارت حداقل دارای ۲ یک جمله‌ای متشابه باشند، امکان دارد تعداد کل جمله‌ها بعد از ساده‌کردن، کمتر از حاصل‌ضرب تعداد جملات دو عبارت باشد.

$(x+۲)(x+y+۵) = x^۲ + xy + \underbrace{۵x + ۲x}_{۷x} + ۲y + ۱۰ = x^۲ + xy + ۷x + ۲y + ۱۰$

بسط عبارت $(a+b+c+d)(x-۲y+z)$ را در نظر بگیرید:

- این بسط دارای چند جمله است؟ ۴×۳=۱۲
- تعداد جملاتی از بسط که فاقد a هستند کدام است؟ ۳×۳=۹
- تعداد جملاتی از بسط که شامل a یا b هستند کدام است؟ ۴×۳−۲×۳=۶

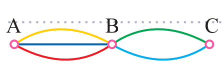
Test **یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم. تعداد حالات مختلف بر زمین نشستن آن‌ها که پرتاب اول و سوم زوج و پرتاب دوم بزرگ‌تر از ۲ بیاید، کدام است؟**

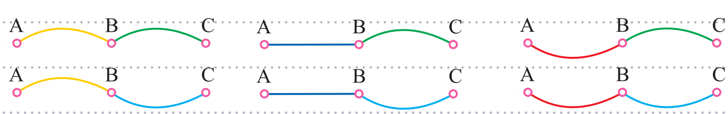
۱) ۲۷ ۲) ۷۲ ۳) ۳۶ ۴) ۱۰۸

3 پرتاب اول و سوم هر کدام ۳ حالت و پرتاب دوم ۴ حالت دارد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با: ۳×۴×۳=۳۶

در مسائل مربوط به مسیر (مدار)، راه‌هایی که با هم موازی هستند، تعدادشان باهم جمع می‌شود و راه‌هایی که با هم متوالی هستند، تعدادشان در هم ضرب می‌شود.

با توجه به شکل مقابل مسیرهای موجود از A به C عبارتند از:



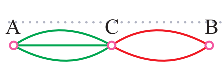


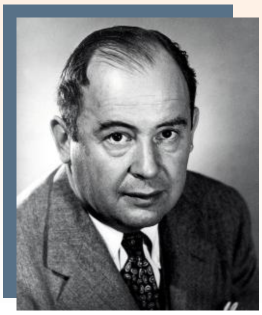
تعداد مسیرها = (۱+۱+۱)×(۱+۱) = ۳×۲ = ۶

چند تیپ مهم از مسائل رفت و برگشت در مسیر:

۱ اگر هیچ شرطی برای عبور از مسیرها وجود نداشت، تعداد حالت‌های رفت و برگشت در هم ضرب می‌شود. [چون رفتن باعث نفی برگشتن نیست.]

در شکل مقابل، به (۳×۲)×(۲×۳) طریق می‌توان از A به B رفت و برگشت.





Probability

Chapter 12

به پدیده‌ای که قبل از رخداد نتیجه‌اش معلوم نباشد، ولی مجموعهٔ نتایج ممکن آن مشخص باشد، آزمایش تصادفی می‌گوییم.

پرتاب تاس، پرتاب سکه، انتخاب مهره از جعبه، تولد فرزندان و ... همگی آزمایش‌های تصادفی هستند.

به مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، فضای نمونهٔ آن آزمایش تصادفی می‌گویند و آن را با S نشان می‌دهند.

اگر یک وجه تاسی سفید و روی وجوه دیگر آن، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ حک شده باشد، چون فضای نمونه، مجموعهٔ همهٔ نتایج ممکن است و «سفید آمدن» نیز یکی از این نتایج است، بنابراین فضای نمونه به‌صورت $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,\text{سفید}\}$ می‌باشد که دارای ۶ عضو است.

چند فضای نمونهٔ مشهور:

1 فضای نمونهٔ پرتاب n سکه، دارای $\underbrace{۲\times۲\times\dots\times۲}_{n}=۲^n$ عضو است [فضای نمونهٔ تولد n فرزند نیز به‌همین صورت است.]

فضای نمونهٔ پرتاب سه سکه را بنویسید:

$S=\{(ر,ر,ر),(پ,ر,ر),(ر,پ,ر),(ر,ر,پ),(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(پ,پ,پ)\}$

2 فضای نمونهٔ پرتاب n تاس، دارای $\underbrace{۶\times۶\times\dots\times۶}_{n}=۶^n$ عضو است.

فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس را بنویسید:

$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),\dots,(۶,۱),(۶,۲),\dots,(۶,۶)\}$

فضای نمونه‌ای پرتاب n تاس و m سکه دارای $۶^n\times۲^m$ عضو است.

3 در جعبه‌ای که مهره‌های رنگی در آن وجود داشته باشد، چه مهره‌ها متمایز باشند و چه مشابه، برای حل مسئله‌های احتمال باید آن‌ها را متمایز فرض کنیم و بر این اساس تعداد عضوهای فضای نمونه را به‌دست آوریم.

اگر در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز مشابه و ۲ مهرهٔ آبی مشابه وجود داشته باشد یک مهره به تصادف از ظرف خارج کنیم، فضای نمونه دارای ۵ عضو است.

$S=\{R_۱,R_۲,R_۳,B_۱,B_۲\}$

Test در خانواده‌ای با ۲ فرزند اگر فرزندها دو قلو باشند، فضای نمونهٔ جنسیت فرزندان دارای .... عضو است.

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۱

2 دوقلو بودن فرزندان در جنسیت آن‌ها تأثیری ندارد. از طرفی جنسیت هر فرزند دو حالت دارد؛ بنابراین فضای نمونهٔ جنسیت فرزندان این خانواده $۲^۲=۴$ عضو دارد.

هر زیرمجموعه از فضای نمونه را یک **پیشامد** و هر یک از اعضای یک پیشامد را **برآمد** می‌نامند. پیشامدها را معمولاً با $A, B, C, \dots$ نشان می‌دهند.

در پرتاب یک تاس، پیشامد مضرب ۳ آمدن به‌صورت $A=\{۳,۶\}$ و در پرتاب سه سکه، پیشامد «دقیقاً دو بار رو آمدن» مجموعه‌ای ۳ عضوی به‌صورت $A=\{$(ر، ر، پ)، (ر، پ، ر)، (پ، ر، ر)$\}$ است.

در هر فضای نمونه مانند S، خود S پیشامد **قطعی** و $\varnothing$ را پیشامد **غیرممکن** می‌نامند.

اگر فضای نمونه دارای n عضو باشد برای آن می‌توان 2^n پیشامد در نظر گرفت، چون هر عضو از فضای نمونه می‌تواند در پیشامد حضور داشته باشد یا نه.

(To be OR not to be...)

هنگامی می‌گوییم یک پیشامد رخ داده است که نتیجهٔ آزمایش، یکی از عضوهای آن پیشامد باشد [یعنی بعد از انجام آزمایش، یکی از اعضای آن پیشامد دیده شود].

وقتی گفته می‌شود در پرتاب یک تاس پیشامد زوج بودن رُخ داده است، یعنی بعد از پرتاب تاس یا ۲ آمده یا ۴ آمده یا ۶ آمده است.

هرگز امکان ندارد دو برآمد مختلف از یک فضای نمونه با هم دیده شوند. امّا امکان رخ دادن دو پیشامد مختلف با هم وجود دارد.

امکان ندارد در پرتاب یک تاس برآمد ۲ و برآمد ۴ با هم رخ دهند، اما ممکن است پیشامد زوج آمدن و پیشامد عدد اول آمدن با هم رخ دهند و آن هم زمانی است که ۲ بیاید.

Test **یک تاس را پرتاب کردیم و ۳ ظاهر شده است، در این صورت کدام‌یک از پیشامدهای زیر رُخ نداده است؟**

۱) پیشامد عدد اول آمدن
۲) پیشامد فرد آمدن
۳) پیشامد نابیشتر از ۲ آمدن
۴) پیشامد مضرب ۳ آمدن

3 هر پیشامدی که ۳ عضو آن باشد رُخ داده است، بنابراین به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

① $A=\{۲,۳,۵\}$ ② $B=\{۱,۳,۵\}$ ③ $C=\{۱,۲\}$ ④ $D=\{۳,۶\}$

در مسائل مربوط به پیشامدها در **پرتاب چند سکه** معمولاً با سه تیپ مسئله ممکن است مواجه شویم:

1 در پرتاب چند سکه [یا تولد چند فرزند در یک خانواده] اگر وضعیت بعضی از پرتاب‌ها [جنسیت بعضی از فرزندان] را معلوم کنند، تعداد حالات آن‌ها را برابر ۱ در نظر می‌گیریم و سایر پرتاب‌ها [سایر فرزندان] همچنان ۲ حالت خواهند داشت، سپس طبق اصل ضرب تعداد عضوهای پیشامد را پیدا می‌کنیم.

در خانواده‌ای با ۵ فرزند، پیشامد A که در آن «فرزند بزرگتر، پسر و فرزند کوچکتر، دختر باشد»، چند عضو دارد؟

فرزند بزرگ و فرزند کوچک هر کدام یک حالت دارند و بقیه فرزندان هر کدام دو حالت دارند؛ بنابراین تعداد اعضای این پیشامد برابر است با:

$n(A)=۱\times۲\times۲\times۲\times۱=۸$

2 در پرتاب چند سکه [تولد چند فرزند] اگر صحبت از تعداد «رو»ها و «پشت»ها [تعداد پسرها و دخترها] به میان آمده بود، از «انتخاب» استفاده می‌کنیم.

در یک خانوادهٔ چهار فرزندی هر یک از پیشامدهای زیر چند عضو دارد؟

- پیشامد دقیقاً سه فرزند پسر $n(A)=\binom{۴}{۳}=۴$
- پیشامد دقیقاً یک فرزند دختر $n(B)=\binom{۴}{۱}=۴$
- پیشامد حداقل سه فرزند پسر $n(C)=\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}=۵$
- پیشامد حداکثر دو فرزند دختر $n(D)=\binom{۴}{۰}+\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}=۱۱$

Basic Geometry

Chapter 14

هندسه‌ پایه — مکان هندسی — Basic Geometry

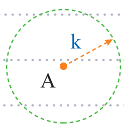
در این درس با انواع ترسیم‌های هندسی سروکار داریم و منظور از ترسیم‌های هندسی رسم سه دستهٔ مهم از اشکال هندسه است:

1. اشکالی مانند پاره‌خط، نیم‌خط و خط راست
2. اشکالی مانند دایره یا کمانی از یک دایره
3. اشکالی مانند مثلث، چهارضلعی و... که با ترکیبی از دو ترسیم قبلی حاصل می‌شوند.

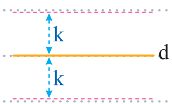
برای رسم این اشکال از دو وسیلهٔ مهم به نام خط‌کش و پرگار استفاده می‌شود که خط‌کش فقط برای ترسیم خط راست مورد استفاده قرار می‌گیرد [نه برای اندازه‌گیری] و پرگار وسیله‌ای است که با آن می‌توان دایره یا کمانی از دایره را رسم کرد و دهانهٔ آن به اندازهٔ دلخواه باز می‌شود.

بسیاری از اشکالی که رسم می‌کنیم مجموعهٔ نقاطی هستند که ویژگی مشترکی دارند، این مجموعهٔ نقاط را مکان هندسی می‌نامیم. [گاهی به آن، مکان نقاط نیز گفته می‌شود]. از طرفی مهم‌ترین اشکال هندسی نقطه، خط و صفحه هستند، بنابراین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه و یک خط به فاصلهٔ ثابتی هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد:

1. مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از نقطهٔ A قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع k است.



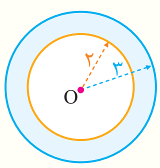
2. مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ k واحد از خط d قرار دارند، دو خط به موازات خط d و به فاصلهٔ k واحد از آن هستند.



Test **همهٔ نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت O در این صفحه بیشتر از ۲ و کمتر از ۳ واحد است، تشکیل یک شکل هندسی می‌دهند. مساحت این شکل چقدر است؟**

۱) 5π ۲) 9π ۳) 4π ۴) 7π

1 نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از O بیشتر از ۲ واحد باشد، بیرون دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ واحد هستند، همچنین نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از O کمتر از ۳ واحد باشد، داخل دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ واحد قرار می‌گیرند. پس شکل هندسی مورد نظر ناحیهٔ بین دو دایره (قسمت رنگی) است و مساحت آن برابر است با:

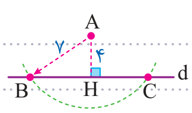


مساحت ناحیهٔ رنگی = مساحت دایرهٔ بزرگ ـ مساحت دایرهٔ کوچک $=\pi(3)^2-\pi(2)^2=9\pi-4\pi=5\pi$

هندسه‌ پایه — اشتراک یک مکان هندسی و یک شکل هندسی — Basic Geometry

در برخی از سؤالات هندسه از ما می‌پرسند «چند نقطه روی یک شکل وجود دارد که دارای ویژگی به‌خصوصی باشد» در این موارد ابتدا مکان هندسی نقاطی که آن ویژگی به‌خصوص دارند را پیدا می‌کنیم و سپس به بررسی تعداد نقاط تقاطع آن مکان هندسی و شکل گفته شده می‌پردازیم.

نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ واحد از خط d واقع است. چند نقطه روی خط d به فاصلهٔ ۷ واحد از نقطهٔ A وجود دارد؟



نقاطی که به فاصلهٔ ۷ واحد از نقطهٔ A قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۷ قرار دارند و چون $7>4$ است، پس این دایره [به عنوان یک مکان هندسی] خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند و همین نقاط، جواب‌های مورد نظر هستند.

Alain Connes
1947

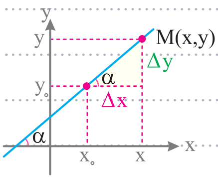
Analytic Geometry

Chapter 15

اگر در یک دستگاه مختصات، یک شکل هندسی مانند خط، دایره، بیضی و ... قرار داشته باشد می‌توانیم بین مختصات تمام نقاط این شکل‌ها، رابطه‌ای ریاضی پیدا کنیم. به این رابطهٔ جبری، **معادلهٔ شکل هندسی** می‌گویند.

برای به‌دست آوردن معادلهٔ یک شکل هندسی کافیست که نقطه‌ای مانند $M(x,y)$ به عنوان نمایندهٔ همهٔ نقاط آن شکل در نظر بگیریم و رابطهٔ بین y ، x را براساس ویژگی‌های آن شکل پیدا کنیم.

اگر خط d از نقطهٔ $A(x_{\circ},y_{\circ})$ بگذرد و با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ α بسازد آنگاه با توجه به شکل می‌توانیم شیب خط d را به صورت زیر به‌دست آوریم:



$$m=\tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_{\circ}}{x-x_{\circ}}$$

بنابراین معادلهٔ خط d به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})}$$

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۱,۲)$ با شیب $\frac{-۳}{۵}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y-۲=\frac{-۳}{۵}(x-۱)\Rightarrow ۵y-۱۰=-۳x+۳\Rightarrow ۳x+۵y-۱۳=\circ$$

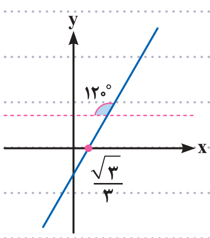
اگر معادلهٔ خط d را مرتب کنیم آنگاه به معادله‌ای به شکل زیر خواهیم رسید:

$$\boxed{ax+by+c=\circ}$$

اگر معادلهٔ d به‌صورت $۷x+۱۲y=۴$ باشد شیب این خط کدام است؟

$$۷x+۱۲y=۴\Rightarrow ۱۲y=-۷x+۴\Rightarrow y=-\frac{۷}{۱۲}x+\frac{۴}{۱۲}$$

با توجه به شکل زیر زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد برابر با ۶۰° است. در ضمن این خط از نقطهٔ $(\frac{\sqrt{۳}}{۳},\circ)$ می‌گذرد. پس معادلهٔ این خط به صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$m=\tan ۶۰^{\circ}=\sqrt{۳}\Rightarrow y-\circ=\sqrt{۳}(x-\frac{\sqrt{۳}}{۳})\Rightarrow y=\sqrt{۳}x-۱$$

برای پیدا کردن محل برخورد یک خط با محورهای مختصات به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ اگر خط d محور x ها را در نقطهٔ A قطع کند برای یافتن مختصات نقطهٔ A کافیست که در معادلهٔ خط، y را مساوی صفر قرار دهیم.