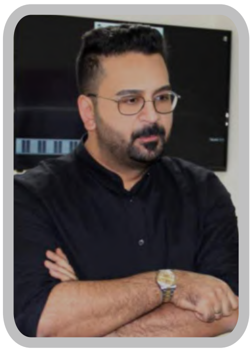
1000 نکته

Calculus

10 + 11 + 12

مبلغی که امروز بابت خرید این کتاب می‌پردازید ! در مقابل هزینه‌های که در آینده بابت نخواندن آن پرداخت خواهید کرد، بسیار ناچیز است ...



Arian.Heidarii

کارشناس ارشد علمی :

مهندس آریان حیدری

arianheidarioriginal

ویراستاران علمی

سرپرست تیم ویراستاران: مهندس توحید فرهودی

مهندس امیرحسام شکری .... A.H . Shokri
مهندس محمد حسین مختاری .... M.H . Mokhtari
مهندس محمد کلوئی .... M.Kaloei
مهندس امین خوانین‌زاده .... A.KHavanin Zadeh
مهندس امیر حق‌نظر .... A.Haghnazar
مهندس سید محمد رضا صفوی .... M.R.Safavi
مهندس محمد ارباب بهرامی .... M. Arbab bahrami
دکتر سعید عزیزی .... Dr.S.Azizi
مهندس محمد مهدی فدائی .... M.Mehdi Fadaee
مهندس پرویزیوسلیانی .... P.Usaliani

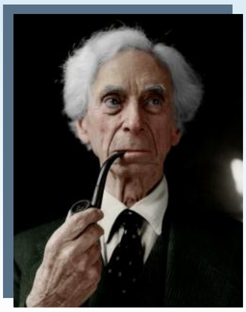
M.G.Lotfi

مولف همکار:

مهندس محمدجواد لطفی

کارشناسان علمی

مهندس میثم صمدی .... M. Samadi
مهندس امین سلسله .... A. Selseleh
مهندس محمد امین کریمی .... M. A. Karimi
مهندس سوگند روشنی .... S. Roshani
مهندس محمد عسکری .... M. Askari
مهندس سعید بنی‌هاشمی .... S. Banihashemi
مهندس بهروز گلزاری .... B. Golzari
مهندس سالار عموزاده .... S. Amoozadeh
مهندس میثم امین .... M. Amin

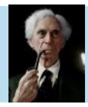


Bertrand Russell
1872-1970

Set, Pattern & Sequence

Chapter 1

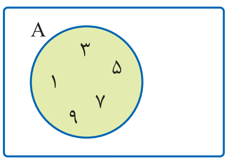
Lesson.1	صفحهٔ ۲ تا ۷ کتاب درسی	مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	درس اول



Bertrand Russell

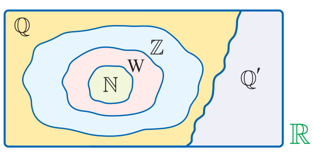
مجموعه را دسته‌ای از اشیای متمایز و خوش تعریف در نظر می‌گیرند. [خوش تعریف به معنی آن است که بدون تردید و به یقین بتوان گفت که شیء معینی در مجموعه هست یا نه.]

- دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم تهران یک مجموعه محسوب می‌شود.
- دانش‌آموزان قدبلند تهران مجموعه نیست، چون قدبلند خوش تعریف نیست. [یعنی به یقین نمی‌توان گفت که از چه قدی به بالا (قدبلند) محسوب می‌شود، چون قد بلند یک چیز سلیقه‌ای است و معیار مشخص ندارد.]

انواع نمایش مجموعه‌ها		
نمایش با اعضا	نمایش با نماد ریاضی	نمایش هندسی
اعضای مجموعه را به صورت مرتب یا نامرتب درون یک جفت آکولاد نمایش می‌دهیم.	به جای نوشتن اعضاء، ویژگی مشترک بین آن‌ها را می‌نویسیم.	اعضای مجموعه را درون یک خم بسته در صفحه مانند مستطیل، دایره و ... قرار می‌دهیم که به آن نمودار وِن گفته می‌شود.
$A=\{1,3,5,7,9\}$	$A=\{2k-1 : k\in\mathbb{N}, 1\le k\le 5\}$	

ترتیب عضوها در مجموعه اهمیتی ندارد. یعنی جابه‌جایی عضوها، مجموعه را تغییر نمی‌دهند. $\{1,2,3\}=\{3,1,2\}=\{2,1,3\}$

عضوهای تکراری در مجموعه شمرده نمی‌شوند. $\{1,1,1,2,2,2,3,3,3,3\}=\{1,2,3\}$

مجموعه‌های مهم اعداد				
اعداد گویا	$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\}$		$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$	اعداد طبیعی
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}'=\{x \mid x\notin\mathbb{Q}\}$		$\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\dots\}$	اعداد حسابی
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$	اعداد صحیح

مجموعهٔ اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهند و شامل همهٔ اعداد گویا و گنگ است، بنابراین روابط زیر برقرار است:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}' \qquad \mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}' \qquad \mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$$

برای یافتن تفاضل دو مجموعه، عضوهای مشترک را حذف کرده و فقط اعضایی که در مجموعهٔ اول باقی می‌مانند را انتخاب می‌کنیم.

Test چه تعداد از رابطه‌های زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی درست است؟

● $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ ● $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}'$ ● $(\mathbb{W}-\mathbb{N})\subseteq\mathbb{Q}$ ● $(\mathbb{R}-\mathbb{N})\subseteq\mathbb{Q}'$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

2 به بررسی موارد می‌پردازیم:

● اجتماع $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ برابر $\mathbb{R}$ است ✓

● می‌دانیم $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ است، پس $\mathbb{Z}$ نمی‌تواند زیر مجموعهٔ $\mathbb{Q}'$ باشد.×

● می‌دانیم $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0\}$ که زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}$ است.✓

● می‌دانیم $\mathbb{R}-\mathbb{N}$ شامل همهٔ اعداد گویا و گنگ غیر طبیعی است، پس نمی‌تواند زیر مجموعهٔ $\mathbb{Q}'$ باشد.×

مجموعه، الگو و دنباله | انواع بازه | Set, Pattern & Sequence

بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ هستند که برای نمایش همهٔ اعداد حقیقی بین دو عدد، یا اعداد حقیقی بزرگتر یا کوچکتر از یک عدد، از آن‌ها استفاده می‌کنیم. انواع بازه‌ها عبارت‌اند از:

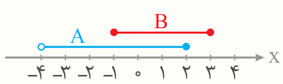
نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی	اعضا	نوع بازه	بازه
$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	a b	اعداد حقیقی بین a و b	باز	(a,b)
$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$	a b	اعدادحقیقی بین a و b و خود b	نیم‌باز	$(a,b]$
$\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$	a b	اعداد حقیقی بین a و b و خود a	نیم‌باز	$[a,b)$
$\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$	a b	اعداد حقیقی بین a و b و خود a و b	بسته	$[a,b]$
$\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$	a	اعداد حقیقی بزرگتر از a	باز	$(a,+\infty)$
$\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$	b	اعداد حقیقی کوچکتر مساوی با b	نیم‌باز	$(-\infty,b]$
$x\in\mathbb{R}$	۰	تمام اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$	باز	$(-\infty,+\infty)$

Test اگر $A=(-۴,۲]$ و $B=[-۱,۳]$ باشد، حاصل $(A\cup B)\cap\mathbb{N}$ کدام است؟

۱) $\{۰,۲\}$ ۲) $\{۲,۳\}$ ۳) $\{۰,۱,۲\}$ ۴) $\{۱,۲,۳\}$

4 با کمک نمایش هندسی بازه‌های A و B مجموعهٔ $A\cup B$ را تعیین می‌کنیم:

$A\cup B=(-۴,۳]$



اشتراک $(-۴,۳]$ و مجموعهٔ اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ به‌صورت $\{۱,۲,۳\}$ است.

مجموعه، الگو و دنباله | مجموعه‌های متناهی و نامتناهی | Set, Pattern & Sequence

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن با شمردن به دست آید، مجموعهٔ متناهی نام دارد؛ حتی اگر شمردن تعداد اعضای آن سخت و زمان‌گیر باشد. به بیان دیگر تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی، عددی حسابی است.

● مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج یک رقمی به صورت $\{۲,۴,۶,۸\}$ است که یک مجموعهٔ متناهی است.

مجموعه‌ای که متناهی نباشد، یعنی تعداد اعضای آن حتی با صرف زمان خیلی زیاد و امکانات کافی هم قابل شمردن نباشد، مجموعهٔ نامتناهی نام دارد. در واقع تعداد اعضای مجموعهٔ نامتناهی، با یک عدد حسابی قابل بیان نیست و از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگتر است.

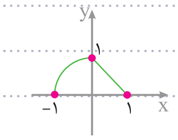
● مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۵، به صورت $\{۵,۱۰,۱۵,...\}$ است که یک مجموعهٔ نامتناهی است.

تابع — تبدیل نمودار توابع
Functions & Their Graphs

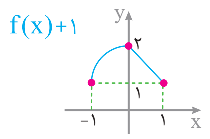
اگر نمودار تابع $y=f(x)$ موجود باشد، برای انتقال افقی و عمودی آن به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

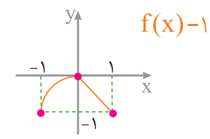
انتقال نمودار $y=f(x)$

نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است.

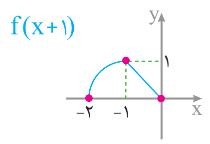


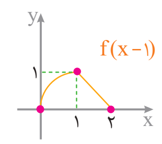
1) $y=f(x)+k$: نمودار $y=f(x)$ را k واحد در راستای محور y ها انتقال می‌دهیم.
اگر $k>0$ باشد منحنی به سمت بالا و اگر $k<0$ باشد منحنی به سمت پایین می‌رود.



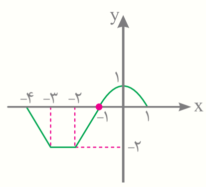


2) $y=f(x+k)$: نمودار $y=f(x)$ را k واحد در راستای محور x ها انتقال می‌دهیم.
اگر $k>0$ باشد منحنی به سمت چپ و اگر $k<0$ باشد، منحنی به سمت راست می‌رود.



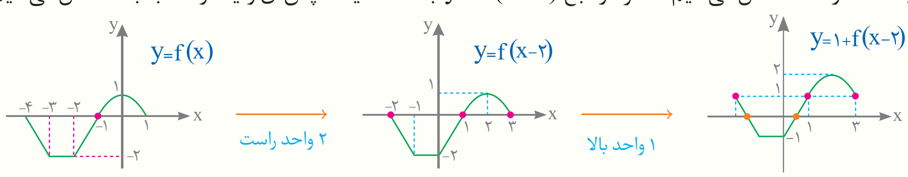


Test نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=1+f(x-2)$ محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

2 نمودار تابع $y=f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x-2)$ به دست آید، سپس آن را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y=1+f(x-2)$ برسیم:



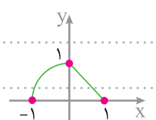
با توجه به شکل واضح است نمودار تابع $y=1+f(x-2)$ و محور x ها در ۲ نقطه متقاطع‌اند.

تابع — انبساط و انقباض نمودار تابع
Functions & Their Graphs

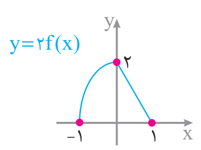
اگر نمودار $y=f(x)$ موجود باشد، برای انبساط و انقباض آن به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

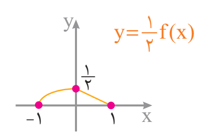
انبساط و انقباض نمودار $y=f(x)$

نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است.

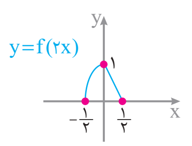


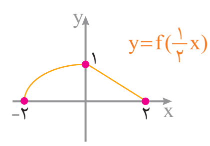
1) $y=kf(x)$: عرض تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم.
اگر $k>1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منبسط (در امتداد محور y بازتر) می‌شود و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منقبض (در امتداد محور y، فشرده‌تر) می‌شود.



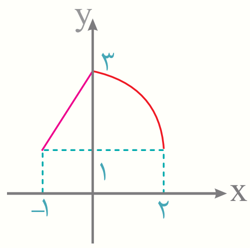


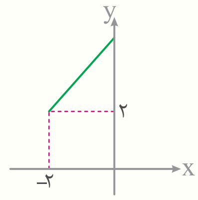
2) $y=f(kx)$: طول تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر می‌کنیم.
اگر $k>1$ باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.

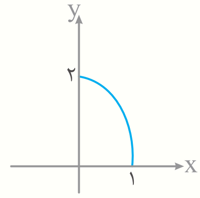


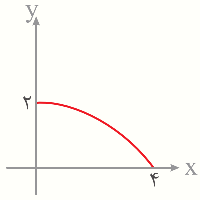


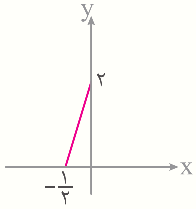
Test نمودار تابع $y=1+f(2x)$ به صورت مقابل است. قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ کدام است؟



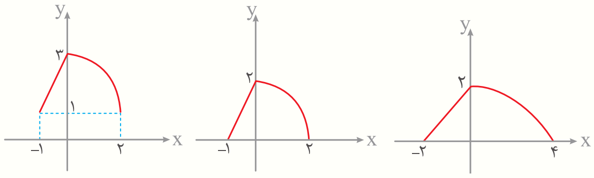
۱) 

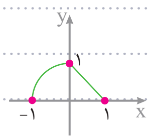
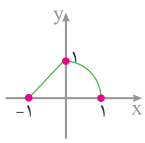
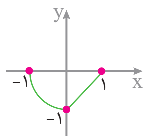
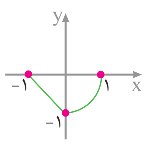
۲) 

۳) 

۴) 

3 ابتدا نمودار تابع $y=1+f(2x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا به نمودار $y=f(2x)$ برسیم و سپس طول تمام نقاط را دو برابر می‌کنیم (x را به $\frac{x}{2}$ تبدیل می‌کنیم) تا نمودار $y=f(x)$ به‌دست آید:

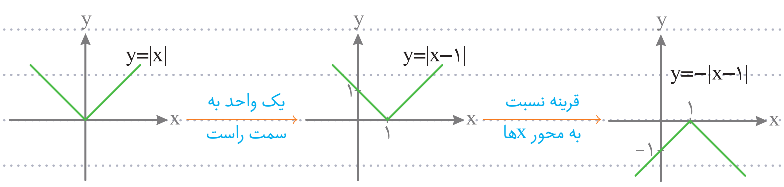


قرینهٔ نمودارها	نمودار تابع به صورت $y=f(x)$ مقابل است. 
1 $f(-x)$ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.	
2 $-f(x)$ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.	
3 $-f(-x)$ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.	

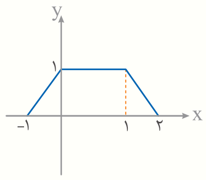
برای رسم نمودار $y=kf(x)$ اگر $k<0$ باشد، ابتدا نمودار $kf(x)$ را با فرض مثبت بودن k رسم و سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

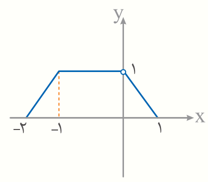
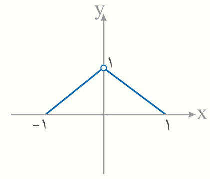
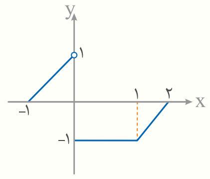
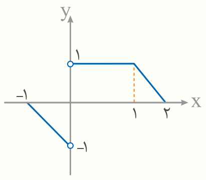
اگر $k<0$ باشد، ابتدا نمودار $f(kx)$ را با فرض مثبت بودن k رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

برای رسم نمودار تابع $y=-|x-1|$، ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|x-1|$ به‌وجود آید. سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

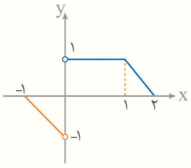


Test نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ کدام است؟



۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

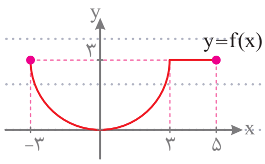
4 تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ در $x>0$ برابر $y=f(x)$ و در $x<0$ برابر $y=-f(x)$ است، بنابراین نمودار آن به صورت مقابل است:



تابع — تبدیل نمودارهای $f(x)$ و $f(ax+b)$ به یکدیگر — *Functions & Their Graphs*

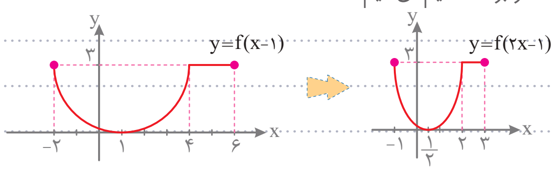
برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ با کمک نمودار تابع $y=f(x)$، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1. با توجه به علامت b، نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ b واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم.
2. طول تمام نقاط نمودار را بر a تقسیم می‌کنیم.



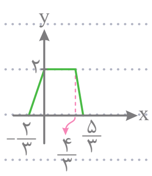
نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(2x-1)$ را رسم کنید.

ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:



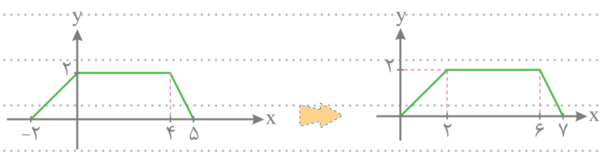
برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$ با کمک نمودار $y=f(ax+b)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1. طول تمام نقاط نمودار را در a ضرب می‌کنیم تا به نمودار تابع $y=f(x+b)$ برسیم.
2. اگر $b>0$ باشد، نمودار را به اندازهٔ b واحد به سمت راست و اگر $b<0$ باشد، نمودار را به اندازهٔ b واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

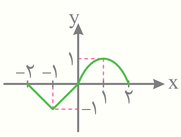


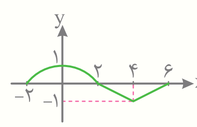
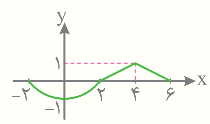
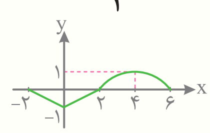
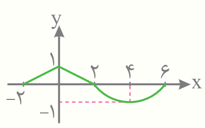
نمودار تابع $y=f(3x+2)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم کنید.

ابتدا طول تمام نقاط را در ۳ ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:

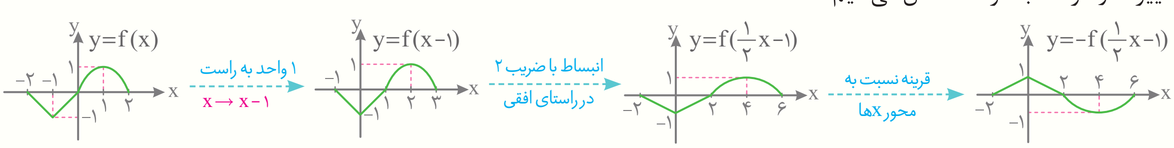


Test نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=-f(\frac{1}{2}x-1)$ کدام است؟



۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

4 تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:



هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی و $a_n\neq 0$ و همهٔ ضرایب عدد حقیقی هستند را یک **تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n** می‌نامند.

چند ویژگی	
① برای تابع $f(x)=0$ درجه تعریف نمی‌شود.	② درجهٔ تابع ثابت $f(x)=c$ برابر صفر است.
③ درجهٔ تابع خطی $f(x)=mx+b$ برابر ۱ است.	④ درجهٔ تابع سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ برابر ۲ است.

دامنهٔ توابع چند جمله‌ای برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

Test **کدام‌یک از توابع زیر یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است؟**

۱) $y=\sqrt[4]{2}\,x+1$ ۲) $y=x^4+2x^5+3$ ۳) $y=x^4+\sqrt{2}\,x+1$ ۴) $y=x^4+\sqrt{2x}+1$

3 به **بررسی گزینه‌ها** می‌پردازیم:

① درجهٔ این تابع برابر ۱ است.

② بزرگ‌ترین درجهٔ این تابع برابر ۵ است، پس این تابع از درجهٔ ۵ است.

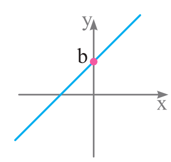
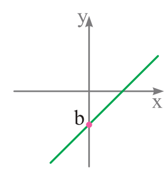
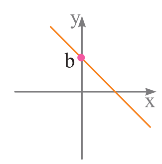
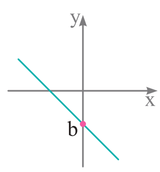
③ بزرگ‌ترین درجهٔ این تابع برابر ۴ است، پس این تابع از درجهٔ ۴ است.

④ در این تابع توان x در عبارت $\sqrt{2x}$ عددی صحیح نیست؛ پس این تابع چندجمله‌ای نیست.

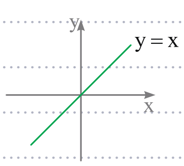
به هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ **تابع خطی** می‌گویند. می‌دانیم در این تابع a برابر شیب خط و b نشان‌دهندهٔ عرض از مبدأ است.

نمودار توابع خطی $y=ax+b$ با توجه به علامت a و b در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:

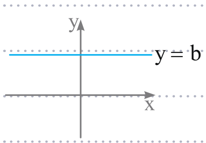
نمودار تابع $y=ax+b$ در حالت‌های مختلف

$a>0, b>0$	$a>0, b<0$	$a<0, b>0$	$a<0, b<0$
			

اگر $a=1$ و $b=0$ باشد آنگاه تابع خطی $y=ax+b$ به تابع $y=x$ تبدیل می‌شود. به این تابع، **تابع همانی** می‌گویند.
توجه کنید خط $y=x$ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم دستگاه مختصات است.



اگر $a=0$ باشد آنگاه تابع خطی $y=ax+b$ به تابع $y=b$ تبدیل می‌شود. به این تابع، **تابع ثابت** می‌گویند.



اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد و بدانیم $f(3)+g(3)=5$ است، حاصل $f(4)\times g(5)$ را به دست آورید.

چون f تابعی همانی است، پس $f(3)=3$ است. بنابراین با توجه به صورت سؤال داریم: $f(3)+g(3)=5\Rightarrow 3+g(3)=5\Rightarrow g(3)=2$

حال چون تابع g ثابت است، پس به ازای تمام مقادیر برابر ۲ است. بنابراین: $f(4)\times g(5)=4\times 2=8$

Test اگر $\frac{۱}{۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۱

2 صورت کسر به ازای $x=۲$ برابر صفر می‌شود. اما از آن‌جایی که حاصل حد برابر عدد $\frac{۱}{۲}$ است، پس کسر دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است. بنابراین $x=۲$ ریشهٔ مخرج کسر نیز است:

$a(۲)+b=۰$ 1

از طرفی پس از رفع ابهام، حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ می شود، پس:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}\overset{Hop}{\underset{\frac{۰}{۰}}{=}}\lim_{x\to ۲}\frac{۱-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a}=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{a}=\frac{۱}{۴a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

با جایگذاری a در 1 داریم:

$$۲(\frac{۱}{۲})+b=۰\Rightarrow b=-۱$$

حد و پیوستگی — مثلثاتی $\frac{۰}{۰}$ — Limits & Continuity

برای رفع ابهام کسرهای $\frac{۰}{۰}$ که در صورت و مخرج آن‌ها عبارت مثلثاتی وجود دارد، باید عامل صفر شونده در صورت و مخرج را به کمک اتحادهای جبری یا مثلثاتی، تجزیه یا فاکتورگیری از بین ببریم.

برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos^۳x-\sin^۳x}{\cos x-\sin x}$ با جایگذاری $x=\frac{\pi}{۴}$ در صورت و مخرج به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}\overbrace{(\cos^۲x+\sin x\cos x+\sin^۲x)}^{۱+\sin x\cos x}}{\cancel{\cos x-\sin x}}=۱+\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴}=۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

اگر در صورت یا مخرج یک کسر، $\tan x$ وجود داشته باشد، به‌جای آن $\frac{\sin x}{\cos x}$ می‌نویسیم.

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin x+\cos x}{۱+\tan x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin x+\cos x}{۱+\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin x+\cos x}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\cos x=\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

برای محاسبهٔ حدهای مثلثاتی، وقتی کمان آن‌ها به سمت صفر میل می‌کند، می‌توانیم از هم‌ارزی مثلثاتی استفاده کنیم:

هم‌ارزی‌های مثلثاتی وقتی $u\to ۰$

$\sin u\sim u$	$\cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲}$	$\tan u\sim u$
$\sin^n u\sim u^n$	$\cos^n u\sim ۱-n\frac{u^۲}{۲}$	$\tan^n u\sim u^n$

حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲-۲\cos ۲x}}{\tan x}$ را به‌دست آورید.

چون $x\to ۰^-$ می‌توانیم از هم‌ارزی‌های مثلثاتی استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲-۲\cos ۲x}}{\tan x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲-۲(۱-\frac{۴x^۲}{۲})}}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۴x^۲}}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲\overset{-}{|x|}}{x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-۲x}{x}=-۲$$

اگر پس از استفاده از هم‌ارزی‌ها، همهٔ عبارت‌های موجود در صورت یا مخرج کسر با هم ساده شوند، حاصل حد قابل اطمینان نیست. برای حل این مسائل باید از فاکتورگیری، اتحادها و گویا کردن استفاده کنیم و سپس حاصل حد را محاسبه کنیم.

Test حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) ۲π

2 وقتی $x\to ۱^+$، مقدار $[x]$ برابر ۱ است، پس:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x]+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-\cos^۲\pi x}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱-\cos\pi x)(۱+\cos\pi x)}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}(۱-\cos\pi x)=۱-\cos\pi=۱-(-۱)=۲$$

اگر در روابط مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ به جای β زاویه ۲α قرار دهیم، آنگاه نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۳α به دست می‌آیند.

$$\cos۳\alpha=۴\cos^{۳}\alpha-۳\cos\alpha \qquad \sin۳\alpha=۳\sin\alpha-۴\sin^{۳}\alpha$$

اگر $\cos\alpha=\frac{۳}{۴}$ باشد، آنگاه مقدار $\cos۳\alpha$ کدام است؟

می‌دانیم $\cos۳\alpha=۴\cos^{۳}\alpha-۳\cos\alpha$ است، پس:

$$\cos۳\alpha=۴(\frac{۳}{۴})^{۳}-۳(\frac{۳}{۴})=\frac{۲۷}{۱۶}-\frac{۳۶}{۱۶}=-\frac{۹}{۱۶}$$

Test **اگر $\sin\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و انتهای کمان θ در ربع اول باشد، حاصل $\frac{\cos۳\theta}{\cos۴\theta}$ چقدر است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۷}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۶}}{۷}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$

1 ابتدا مقادیر $\cos\theta$ و $\cos۲\theta$ را به‌دست می‌آوریم. از آنجایی که θ در ربع اول قرار دارد، پس $\cos\theta>۰$ است:

$$\cos^{۲}\theta=۱-\sin^{۲}\theta=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\cos۲\theta=۲\cos^{۲}\theta-۱=۲\times\frac{۲}{۳}-۱=\frac{۱}{۳}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\cos۳\theta}{\cos۴\theta}=\frac{۴\cos^{۳}\theta-۳\cos\theta}{۲\cos^{۲}۲\theta-۱}=\frac{۴(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}})^{۳}-۳(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}})}{۲(\frac{۱}{۳})^{۲}-۱}=\frac{\frac{۸\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}}-\sqrt{۶}}{-\frac{۷}{۹}}=\frac{\frac{۸\sqrt{۶}-۹\sqrt{۶}}{۹}}{-\frac{۷}{۹}}=\frac{\sqrt{۶}}{۷}$$

اضافات حسابان | معادلات مثلثاتی شامل کمان‌های $\alpha\pm\beta$ | Calculus Extra

برای حل بعضی از معادلات مثلثاتی، لازم است از روابط $\sin(\alpha\pm\beta)$ و $\cos(\alpha\pm\beta)$ استفاده کنیم.

جواب‌های معادلهٔ $\cos۳x\cos x+\sin۳x\sin x=\sin x$ را در بازهٔ $[۰,\pi]$ به دست آورید.

با استفاده از بسط $\cos(\alpha-\beta)$ سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\overbrace{\cos۳x\cos x+\sin۳x\sin x}^{\cos(۳x-x)}=\sin x\Rightarrow\cos۲x=\sin x$$

حالا با استفاده از تساوی $\sin x=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$ معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت $\cos۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$ بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{x\in[۰,\pi]}x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi-(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{x\in[۰,\pi]}\text{جواب ندارد.}\end{cases}$$

در حل معادلات مثلثاتی که شامل $\sin x\pm\cos x$ هستند، باید از روابط مثلثاتی زیر استفاده کنیم:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴}) \qquad \sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sqrt{۲}\sin x\cos x=\sin x+\cos x$ کدام است؟

می‌دانیم $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}+x)$ است، پس:

$$۲\sqrt{۲}\sin x\cos x=\sin x+\cos x\Rightarrow\sqrt{۲}\sin۲x=\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}+x)\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+(\frac{\pi}{۴}+x)\\ ۲x=۲k\pi+\pi-(\frac{\pi}{۴}+x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\ x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

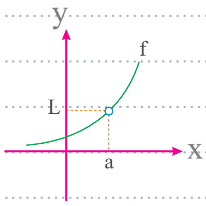
چون جواب $x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$ کامل‌تر بوده و تمام جواب‌های $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$ را نیز شامل می‌شود. پس جواب کلی به‌صورت $x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$ است.

توجه کنید اگر طرفین معادله را به توان ۲ برسانید، ممکن است جواب اضافی ایجاد شود!

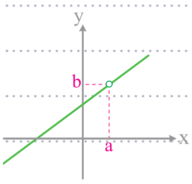
در بعضی سؤالات، نمودار تابع کسری f داده می‌شود که در نقطهٔ $x=a$ دارای حفره [نقطهٔ توخالی] است.

در این سوالات باید به دو مورد زیر توجه کرد:

1. $x=a$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر تابع f است.
2. حاصل حد تابع f وقتی $x\to a$ برابر L است.



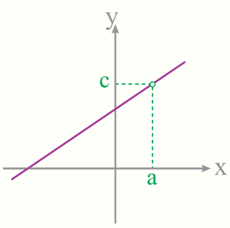
نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ به صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟



چون $x=2$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر تابع f است، پس $a=2$ است. از طرفی با توجه به نمودار:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4 \Rightarrow b=4 \Rightarrow a+b=2+4=6$$

Test نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+b}$ است. مقدار $a-b+c$ کدام است؟



۱) ۴

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۶

4 با توجه به شکل صورت سؤال، نمودار تابع f در سمت راست محور x ها دارای حفره است، پس $x=a$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر است.

از آن‌جایی که ریشه‌های صورت کسر $x=1$ و $x=-3$ هستند، پس $a=1$ بوده و مخرج کسر را نیز صفر می‌کند: $1+b=0 \Rightarrow b=-1$

از طرفی داریم:

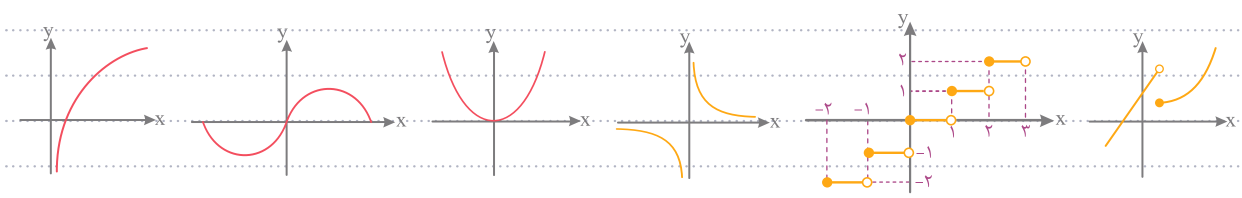
$$c=\lim_{x\to 1} f(x) \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x^2+2x-3}^{(x-1)(x+3)}}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+3)=4$$

پس $a-b+c=1-(-1)+4=6$ است.

Lesson.3 | صفحهٔ ۱۴۵ تا ۱۵۱ حسابان ۱ | پیوستگی | درس سوم

John Forbes Nash

اگر بتوان نمودار تابعی را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد، می‌گوییم آن نمودار مربوط به تابعی پیوسته است. در غیر این صورت، تابع را ناپیوسته می‌گوییم.



پیوسته | ناپیوسته

تابع f را در نقطهٔ $x=a$ از دامنه‌اش پیوسته می‌گوییم، هرگاه حد این تابع در $x=a$ موجود و برابر $f(a)$ باشد؛ به عبارت دیگر:

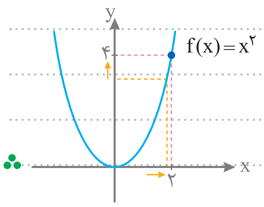
$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

اضافات حسابان — تفاوت $\lim_{x\to a}[f(x)]$ و $[\lim_{x\to a} f(x)]$ — Calculus Extra

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ، در این‌صورت $[\lim_{x\to a} f(x)]=[L]$ است.

$\lim_{x\to ۵} f(x)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow [\lim_{x\to ۵} f(x)]=[\frac{۳}{۲}]=۱$

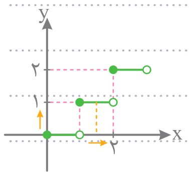
$\lim_{x\to ۵} f(x)=۳ \Rightarrow [\lim_{x\to ۵} f(x)]=[۳]=۳$



$\lim_{x\to ۲^-} x^۲=۴ \Rightarrow [\lim_{x\to ۲^-} x^۲]=[۴]=۴$

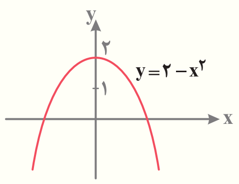
نمودار تابع $y=[f(x)]$ با نمودار تابع $y=f(x)$ متفاوت است. پس برای یافتن حد تابع $[f(x)]$ در نقطهٔ $x=a$ حتماً باید به رفتار تابع $y=[f(x)]$ در اطراف این نقطه توجه کنیم که مناسب‌ترین راه، رسم نمودار $y=[f(x)]$ است.

می‌خواهیم حاصل $\lim_{x\to ۲^-}[x]$ را به‌دست آوریم. باید نمودار تابع $[x]$ را در اطراف $x=۲$ رسم و بررسی کنیم.



$\lim_{x\to ۲^-}[x]=۱$

Test نمودار تابع $f(x)=۲-x^۲$ به‌صورت زیر است. حاصل $\lim_{x\to ۰}[f(x)]+[\lim_{x\to ۰} f(x)]$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

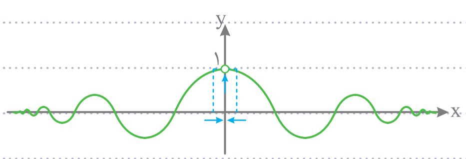
۳) ۳

۴) ۴

۳ با توجه به نمودار، $\lim_{x\to ۰} f(x)=۲$ ؛ پس $[\lim_{x\to ۰} f(x)]=[۲]=۲$ است. از طرفی وقتی $x\to ۰$ ، آن‌گاه f با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود؛ یعنی $\lim_{x\to ۰}[f(x)]=[۲^-]=۱$. بنابراین مجموع این دو حد برابر ۳ است.

اضافات حسابان — حدهای جبری - مثلثاتی — Calculus Extra

نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ به‌صورت مقابل است:



با توجه به این نمودار دو نتیجهٔ مهم زیر به دست می‌آید:

۱) با توجه به نمودار، واضح است که $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$.

۲) وقتی $x\to ۰$ ، نمودار تابع $\frac{\sin x}{x}$ با مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود.

$\lim_{x\to ۰}[\frac{\sin x}{x}]=[۱^-]=۰$

به طور کلی وقتی $u\to 0$ خواهیم داشت:

$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan u}=1$	$\lim_{u\to 0}\frac{\tan u}{u}=1$	$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$	$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$

برای محاسبهٔ حدهای کسری که در آن‌ها هر دو تابع مثلثاتی و جبری وجود دارد، اگر کمان نسبت‌های مثلثاتی به سمت صفر میل کند، می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

هم‌ارزی‌های مثلثاتی با شرط $u\to 0$		
$\cos^n u\sim 1-n\frac{u^2}{2}$	$\tan^n u\sim u^n$	$\sin^n u\sim u^n$

حاصل $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\tan 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$ کدام است؟

چون $x\to 0^+$ می‌توانیم از هم‌ارزی استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\tan 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-3x}{\sqrt{\frac{(2x)^2}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{\sqrt{2x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{\sqrt{2}\,|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{\sqrt{2}\,x}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

اگر پس از استفاده از هم‌ارزی‌های مثلثاتی فوق، همهٔ عبارت‌های موجود در صورت یا مخرج کسر با هم ساده شوند، می‌توانیم از هم‌ارزی‌های قوی زیر استفاده کنیم:

هم‌ارزی‌های قوی‌تر مثلثاتی وقتی $u\to 0$		
$\tan u-\sin u\sim\frac{u^3}{2}$	$\tan u\sim u+\frac{u^3}{3}$	$\sin u\sim u-\frac{u^3}{6}$

حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ کدام است؟

به‌جای $\tan x$ می‌نویسیم $\frac{\sin x}{\cos x}$ و داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

Test حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟ (ریاضی خارج - ۹۹)

۱) -2 ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) 2

1 می‌دانیم اگر $u\to 0$ هم‌ارزی $1-\cos u\sim\frac{u^2}{2}$ برقرار است، پس:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{\underbrace{1-\cos x}_{\frac{x^2}{2}}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{|x|}_{-x}}$$

حال با جایگذاری $x=0$ در کسر حاصل، به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}}-\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=-2$$

برای رفع ابهام کسرهای $\frac{۰}{۰}$، که در صورت یا مخرج آن‌ها عبارت مثلثاتی وجود دارد، در صورتی که زاویه بر حسب π باشد یا x به سمت زوایایی بر حسب π میل کند، می‌توانیم از تغییر متغیر کمک بگیریم.

بهترین روش استفاده از تغییر متغیر، این است که وقتی $x \to a$، آن را به‌صورت $(x-a) \to ۰$ بنویسیم و فرض کنیم $x-a=t$ است. حال با قرار دادن $t+a$ به‌جای x در تابع، کسر را بر حسب t نوشته و حاصل حد را وقتی $t \to ۰$ به‌دست می‌آوریم.

حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$ کدام است؟

با جایگذاری $x=\pi$ در صورت و مخرج کسر داریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\frac{\sin\pi}{\pi-\pi}=\frac{۰}{۰}$$

حال $x\to\pi$ را به‌صورت $x-\pi\to ۰$ می‌نویسیم و فرض می‌کنیم $x-\pi=t$، $\pi+t$ را در عبارت به‌جای x قرار داده و حاصل حد را وقتی $t\to ۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(\pi+t)}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin t}{t}=-\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}=-۱$$

Test حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{\cos\frac{\pi}{۲}x}{|x-۱|}$ کدام است؟

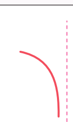
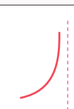
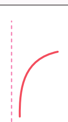
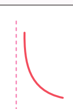
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $-\frac{\pi}{۲}$

3 با جایگذاری $x=۱$ به $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$، فرض می‌کنیم $x-۱=t$ (یعنی $x=۱+t$)، بنابراین $x\to ۱^-$ را به‌صورت $t\to ۰^-$ می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{\cos\frac{\pi}{۲}x}{|x-۱|}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{\cos\frac{\pi}{۲}(۱+t)}{|t|}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}t)}{|t|}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{-\sin\frac{\pi}{۲}t}{-t}=\frac{\pi}{۲}\lim_{t\to ۰^-}\frac{\sin\frac{\pi}{۲}t}{\frac{\pi}{۲}t}=\frac{\pi}{۲}\times ۱=\frac{\pi}{۲}$$

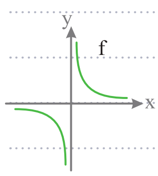
خط $x=a$ را مجانب قائم تابع f می‌گوییم، هرگاه حاصل حد راست یا چپ تابع f در $x=a$ نامتناهی شود.

در نمودار تابع f، اگر با میل کردن x به سمت a، حداقل یکی از شاخه‌های منحنی به سمت بی‌نهایت بروند، خط $x=a$ مجانب قائم تابع f خواهد بود:

$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$
 $x=a$	 $x=a$	 $x=a$	 $x=a$

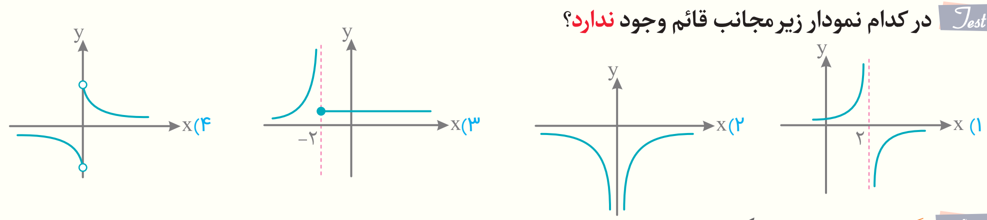
به زبان ساده، مجانب قائم خطی است عمودی که نمودار تابع در بی‌نهایت، بسیار به آن نزدیک می‌شود.

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$، واضح است که $\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=+\infty$، بنابراین خط $x=۰$ مجانب قائم تابع f است.

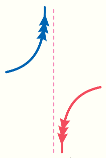


نمودار یک تابع می‌تواند هر کدام از مجانب‌های قائم خود را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

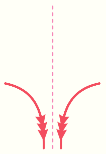
Test در کدام نمودار زیر مجانب قائم وجود **ندارد**؟



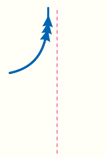
4 گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:


x=۲

۱ وقتی x از سمت چپ و راست به ۲ نزدیک می‌شود، شاخه‌های منحنی به سمت $+\infty$ و $-\infty$ می‌روند، پس $x=۲$ مجانب قائم تابع است.


x=۰

۲ وقتی x از سمت چپ و راست به صفر نزدیک می‌شود، شاخه‌های منحنی به سمت $-\infty$ می‌روند، پس $x=۰$ مجانب قائم تابع است.


x=-۲

۳ وقتی x از سمت چپ به ۲- نزدیک می‌شود، شاخهٔ منحنی به سمت $+\infty$ می‌رود؛ یعنی $x=-۲$ مجانب قائم تابع است.

۴ با توجه به نمودار، برد تابع محدود می‌باشد، بنابراین تابع نمی‌تواند مجانب قائم داشته باشد.

اضافات حسابان — تعیین مجانب قائم توابع کسری (I) — Calculus Extra

برای تعیین مجانب قائم در توابع کسری، باید ریشه‌های مخرج را به‌دست آوریم. اگر $x=a$ ریشهٔ مخرج تابع کسری f باشد، آنگاه خط $x=a$ به شرطی مجانب قائم است که:

۱ حداقل یکی از همسایگی‌های راست یا چپ $x=a$ در دامنهٔ تعریف تابع باشد. بنابراین باید ابتدا دامنهٔ تابع را تعیین کنیم.

۲ حاصل حد تابع وقتی $x \to a$ بی‌نهایت شود.

می‌خواهیم مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{x}{x-۲}$ را تعیین کنیم. از آن‌جایی که $x=۲$ ریشهٔ مخرج است و دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{۲\}$ می‌باشد، پس تابع در همسایگی نقطهٔ $x=۲$ تعریف شده است. حال حد تابع را وقتی $x \to ۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x}{x-۲}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$$

خط $x=۲$ مجانب قائم تابع است

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x}{x-۲}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$$

می‌خواهیم مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+۲}$ را پیدا کنیم. ریشهٔ مخرج $x=-۲$ است، اما از آن‌جایی که دامنهٔ این تابع برابر $[۰,+\infty)$ است، هیچ همسایگی از ریشهٔ مخرج در دامنهٔ تابع نیست، در نتیجه خط $x=-۲$ مجانب قائم تابع f نیست.

Test کدام تابع زیر دو مجانب قائم دارد؟

۱) $f(x)=\frac{x}{x-۱}$　　۲) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$　　۳) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^۲-۱}$　　۴) $f(x)=\frac{|x|}{x^۲-۱}$

4 برای بررسی مجانب قائم، حد تابع را در ریشه‌های مخرج محاسبه می‌کنیم:

۱ $x=۱$ ریشهٔ مخرج است. با توجه به این‌که دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{۱\}$ می‌باشد، پس تابع در همسایگی نقطهٔ $x=۱$ تعریف شده است، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x}{x-۱}=\infty$$ خط $x=۱$ مجانب قائم است.

[۲] در این تابع نیز $x=1$ ریشهٔ مخرج کسر است، از طرفی دامنهٔ تابع به‌صورت $(1,+\infty)$ است. بنابراین فقط می‌توانیم حد تابع را وقتی $x\to 1^+$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{0^+}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$ ⇦ خط $x=1$ مجانب قائم است.

[۳] ریشه‌های مخرج کسر $x=1$ و $x=-1$ هستند. از طرفی دامنهٔ تابع به‌صورت $[0,+\infty)-\{1\}$ است. با توجه به این‌که تابع در همسایگی چپ و راست $x=-1$ تعریف نشده، نمی‌توان حد تابع را در $x=-1$ بررسی کرد. بنابراین شرط وجود مجانب قائم را فقط در $x=1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty$$ ⇦ خط $x=1$ مجانب قائم است.

[۴] ریشه‌های مخرج $x=1$ و $x=-1$ هستند و تابع در همسایگی چپ و راست هر دو نقطه تعریف شده است، پس شرط مجانب قائم را در این دو نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x|}{x^2-1}=\dfrac{1}{0}=\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|-1|}{x^2-1}=\dfrac{1}{0}=\infty\end{cases}$$ ⇦ خط‌های $x=1$ و $x=-1$ هر دو مجانب قائم هستند.

اضافات حسابان | تعیین مجانب قائم توابع کسری (II) | Calculus Extra

هنگام تعیین مجانب قائم تابع کسری f، اگر $x=a$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر باشد، در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ایجاد می‌شود. در این صورت باید تابع را تا حد امکان ساده کنیم. سپس با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

[1] اگر پس از ساده کردن کسر $x=a$ ریشهٔ مخرج کسر باشد، آنگاه خط $x=a$ مجانب قائم تابع است.

مجانب قائم تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{(x-1)^2}$ را تعیین کنید.

از آن‌جایی که $x=1$ ریشهٔ مخرج کسر بوده و دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{1\}$ است، پس تابع در همسایگی نقطهٔ $x=1$ تعریف شده است. حال حد تابع را وقتی $x\to 1$ به‌دست می‌آوریم. چون به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برخوردیم، عامل $(x-1)$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم و آن را به‌صورت $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ می‌نویسیم. حال حد تابع را وقتی $x\to 1$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$$ ⇦ خط $x=1$ مجانب قائم تابع است.

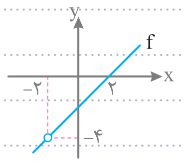
[2] اگر پس از ساده کردن، $x=a$ ریشهٔ مخرج کسر نباشد، آنگاه نمودار تابع f در $x=a$ توخالی خواهد بود.

مجانب قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ را تعیین کنید.

از آن‌جایی که $x=-2$ ریشهٔ مخرج کسر بوده و دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}-\{-2\}$ است. پس تابع در همسایگی $x=-2$ تعریف شده است، اما هنگام محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برمی‌خوریم، عامل $(x+2)$ را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=x-2,\ x\neq -2$$

واضح است حد تابع f وقتی $x\to -2$ برابر -4 است. پس خط $x=-2$ مجانب قائم تابع f نیست و باعث ایجاد نقطهٔ توخالی در نمودار آن می‌شود:



Test توابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ را در نظر بگیرید. کدام تابع در $x=1$ مجانب قائم دارد؟

۱) فقط f　　۲) فقط g　　۳) هر دو　　۴) هیچ‌کدام

1 در هر دو تابع، $x=۱$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است، پس ابتدا هر دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x-۱}{x^۲-۲x+۱}=\frac{x-۱}{(x-۱)^۲}=\frac{۱}{x-۱}$$ خط $x=۱$ مجانب قائم است.

$$g(x)=\frac{x-۱}{x^۲-۳x+۲}=\frac{x-۱}{(x-۱)(x-۲)}=\frac{۱}{x-۲}$$ خط $x=۲$ مجانب قائم است.

در تابع $g(x)$ خط $x=۱$ نقطهٔ تو خالی خواهد بود.

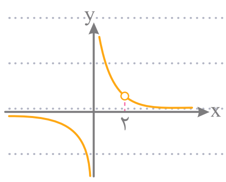
اضافات حسابان — تعیین مقدار پارامتر در سؤالات مجانب قائم — Calculus Extra

در توابع کسری، اگر نمودار تابع f را داشته باشیم، برای مشخص کردن مقادیر پارامترهای ضابطهٔ f ، باید به دو مورد زیر توجه کنیم:

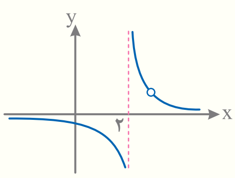
1. طول مجانب قائم تابع f ، ریشهٔ مخرج کسر است.
2. طول نقطهٔ توخالی، ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر است.

در تابع $f(x)=\dfrac{x-۲}{x(x-۲)}$ به‌ازای هر $x\neq ۲$ داریم: $f(x)=\dfrac{x-۲}{x(x-۲)}=\dfrac{۱}{x}$

بنابراین $x=۲$ نقطه‌ای توخالی روی نمودار تابع f است و خط $x=۰$ مجانب قائم آن است. [به نمودار تابع f توجه کنید:]



Test نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-۳}{x^۲+ax+b}$ به‌صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۲-

۳) ۱ ۴) ۱-

3 با توجه به نمودار تابع، خط $x=۲$ مجانب قائم تابع f است؛ پس $x=۲$ ریشهٔ مخرج کسر است:

$x=۲ \Rightarrow ۲^۲+a(۲)+b=۰ \Rightarrow ۲a+b=-۴$ (1)

از طرفی در نمودار، نقطهٔ توخالی وجود دارد، پس ریشهٔ صورت یعنی $x=۳$ ، ریشهٔ مخرج نیز هست:

$x=۳ \Rightarrow ۳^۲+a(۳)+b=۰ \Rightarrow ۳a+b=-۹$ (2)

حال با حل دستگاه زیر مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

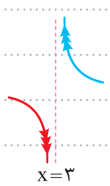
$$\begin{cases}۲a+b=-۴\\ ۳a+b=-۹\end{cases}\Rightarrow a=-۵,b=۶ \Rightarrow a+b=۱$$

اضافات حسابان — نمودار تابع در اطراف مجانب قائم — Calculus Extra

برای رسم نمودار تابع f در اطراف مجانب قائم $x=a$ باید حد تابع f را وقتی $x\to a^+$ و $x\to a^-$ محاسبه کنیم تا نامتناهی بودن حد تابع و همچنین علامت ∞ ($+\infty$ یا $-\infty$) را در اطراف a مشخص کنیم.

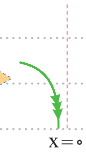
می‌خواهیم نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x-۳}$ را در اطراف مجانب قائم $x=۳$ رسم کنیم. بدین منظور، باید حد تابع f را وقتی $x\to ۳^+$ و $x\to ۳^-$ مشخص کنیم:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to ۳^+}\frac{۲x}{x-۳}&=\frac{۶}{۰^+}=+\infty\\ \lim_{x\to ۳^-}\frac{۲x}{x-۳}&=\frac{۶}{۰^-}=-\infty\end{aligned}\right\}$$

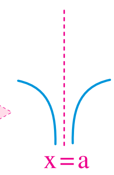
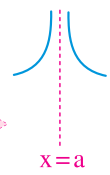


می‌خواهیم نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x-|x|}$ را در اطراف مجانب قائم آن رسم کنیم. از آن جایی که مخرج کسر به‌ازای $x=0$ و اعداد حقیقی مثبت، صفر می‌شود، پس دامنهٔ تابع $(-\infty,0)$ است. با توجه به دامنهٔ تابع، باید وجود مجانب قائم را فقط در $x=0$ بررسی کنیم. برای این منظور حد چپ تابع را در $x=0$ محاسبه می‌کنیم:

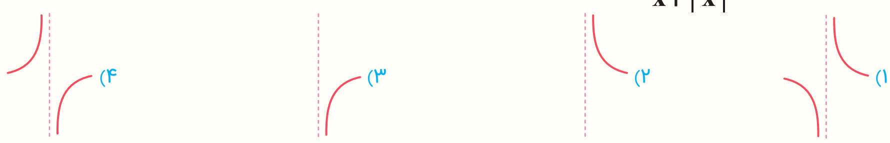
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{2x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ ⟸ $x=0$ مجانب قائم تابع f است. ⟸



اگر خط $x=a$ مجانب قائم تابع f باشد و حد راست و چپ تابع f در $x=a$ هم علامت باشند، آنگاه نمودار تابع f در اطراف خط مجانب قائم $x=a$ به صورت زیر خواهد بود [تابع f در $x=a$ انفصال مضاعف دارد]:

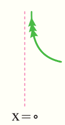
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ 	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ 

Test نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x+|x|}$ در اطراف مجانب قائم $x=0$ چگونه است؟



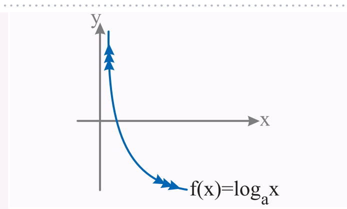
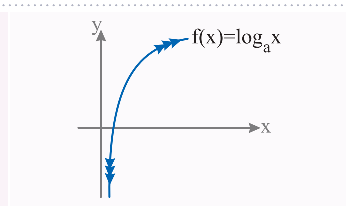
2 دامنهٔ تابع به‌صورت $(0,+\infty)$ است، چون به‌ازای $x=0$ مقادیر منفی، مخرج تابع برابر صفر است. بنابراین برای بررسی رفتار تابع f در اطراف مجانب قائم، فقط می‌توانیم حد راست تابع را در نقطهٔ $x=0$ به‌دست آوریم:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ ⟸



اضافات حسابان — مجانب قائم توابع لگاریتمی — Calculus Extra

به نمودار تابع لگاریتمی $y=f(x)=\log_a x$ دقت کنید:

$0<a<1$	$a>1$
	
$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x=-\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x=+\infty$

با توجه به نمودار این توابع، می‌توان گفت که خط $x=0$ مجانب قائم تابع $f(x)=\log_a x$ است.

با توجه به این‌که لگاریتم برای مقادیر منفی تعریف نشده است نمی‌توان حد آن را وقتی $x\to 0^-$ محاسبه کرد.

خط $x=a$، مجانب قائم هر دو تابع $f(x)=\log(x-a)$ و $g(x)=\log\frac{1}{x-a}$ است.

Test توابع $f(x)=\log(x-2)$ و $g(x)=\log\frac{1}{x-2}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از این توابع مجانب قائم دارند؟

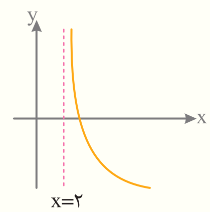
۱) فقط f ۲) فقط g ۳) هر دو ۴) هیچ کدام

3 در هر دو تابع f و g، خط $x=2$ مجانب قائم محسوب می‌شود، چون حاصل حد هر دو تابع وقتی $x\to 2^+$، برابر ∞ می‌شود:

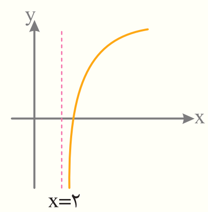
- $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\log\frac{1}{x-2}=\log\frac{1}{0^+}=\log(+\infty)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\log(x-2)=\log 0^+=-\infty$

به نمودار این دو تابع نیز توجه کنید:

$g(x)=\log\frac{1}{x-2}=\log(x-2)^{-1}=-\log(x-2)$



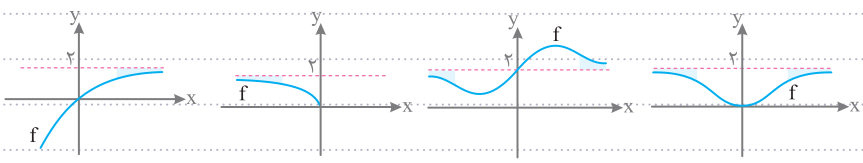
$f(x)=\log(x-2)$



اضافات حسابان | آشنایی با مجانب افقی | Calculus Extra

خط $y=L$ را مجانب افقی $y=f(x)$ می‌نامیم، هرگاه حداقل یکی از دو شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ برقرار باشد.

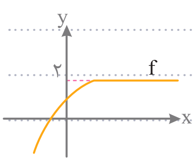
در نمودارهای زیر، خط $y=2$ مجانب افقی تابع f است.



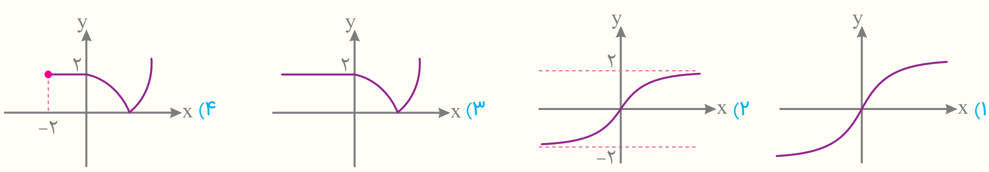
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ | $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

هر تابع خطی موازی محور xها، مجانب افقی خودش می‌باشد.

در نمودار مقابل، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$، بنابراین خط $y=2$ مجانب افقی تابع f می‌باشد.



Test کدام تابع فقط یک مجانب افقی دارد؟



3 بررسی گزینه‌ها:

۱) وقتی $x\to\infty$، مقادیر تابع به هیچ عدد حقیقی نزدیک نمی‌شوند، پس این تابع مجانب افقی ندارد.

۲) وقتی $x\to+\infty$، مقادیر تابع به سمت ۲ و وقتی $x\to-\infty$، مقادیر تابع به سمت ۲- میل می‌کند، پس خط‌های $y=2$ و $y=-2$ مجانب‌های افقی تابع هستند.

۳) وقتی $x\to-\infty$، مقدار حد تابع برابر ۲ است و وقتی $x\to+\infty$، مقادیر تابع به سمت $+\infty$ می‌روند، پس تنها مجانب افقی این تابع خط $y=2$ است.

۴) در این گزینه x نمی‌تواند به سمت $-\infty$ میل کند، چون دامنهٔ تابع به‌صورت $[-2,+\infty)$ است. از طرفی وقتی $x\to+\infty$، مقادیر تابع به سمت $+\infty$ می‌روند، پس این تابع مجانب افقی ندارد.

برای یافتن مجانب افقی تابع f، باید حاصل حد تابع f را در $+\infty$ یا $-\infty$ به‌دست آوریم.

مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{4x+3}{x-5}$ خط $y=4$ است؛ چون:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x}=4$$

مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{x+3}{x^2-1}$ خط $y=0$ است؛ چون:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

در تابع گویای $y=\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج بیشتر باشد، حد تابع وقتی $x\to\infty$، عددی حقیقی نیست. بنابراین در این حالت تابع مجانب افقی ندارد.

تابع $f(x)=\frac{x^3}{x^2+3}$ مجانب افقی ندارد؛ چون:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

اگر دامنهٔ تابع f محدود به دو عدد حقیقی باشد، تابع مجانب افقی ندارد؛ چون x نمی‌تواند به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{3-|x|}$ به‌صورت $D_f=[-3,3]$ است که از هر دو طرف محدود است، پس x نمی‌تواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، بنابراین تابع f مجانب افقی ندارد.

هنگام یافتن مجانب افقی توابع شامل قدر مطلق، باید حد تابع را هم برای $x\to+\infty$ و هم برای $x\to-\infty$ به‌دست آوریم.

می‌خواهیم مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{|x|+2}{x-3}$ را به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|+2}{x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1\end{cases}$$

بنابراین خط‌های $y=1$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی تابع f هستند.

Test **در کدام تابع خط $y=2$ مجانب افقی است؟**

۱) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ۲) $f(x)=\frac{2x^2}{x-1}$ ۳) $f(x)=\frac{2x^2}{x^3+1}$ ۴) $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+x}$

4 برای بررسی مجانب افقی، باید حد تابع را در $+\infty$ یا $-\infty$ بررسی کنیم:

۱) دامنهٔ این تابع به‌صورت $[-1,1]$ محدود است، پس x نمی‌تواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.

۲) چون درجهٔ صورت از مخرج بیشتر است، تابع مجانب افقی ندارد:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}2x=\pm\infty$$

۳) مجانب افقی این تابع، خط $y=0$ است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^3+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{\pm\infty}=0$$

۴) مجانب افقی این تابع خط $y=2$ است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

گاهی اوقات تابعی با چند پارامتر را به همراه مجانب آن به ما می‌دهند و مقادیر پارامترها را می‌خواهند. در حل این سوال‌ها کافی است معادلهٔ مجانب را بر حسب پارامترها به‌دست آورده و برابر با معادلهٔ مجانب داده شده در سوال قرار دهیم.

فرض کنید خط $y=2$ معادلهٔ مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{ax+4}{3x-5}$ باشد. مقدار پارامتر a را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax+4}{3x-5}=2 \Rightarrow \frac{a}{3}=2 \Rightarrow a=6$$

Test خط $y=\frac{3}{2}$، مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{ax^3}{(a-1)x^3+16}$ است. معادلهٔ مجانب قائم این تابع کدام است؟

۱) $x=2$ ۲) $x=-2$ ۳) $x=4$ ۴) $x=-4$

2 خط $y=\frac{3}{2}$ مجانب افقی تابع f است، پس حد تابع وقتی $x\to\infty$، برابر $\frac{3}{2}$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3}{(a-1)x^3+16}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3}{(a-1)x^3}=\frac{a}{a-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=3$$

درنتیجه تابع f به‌صورت $f(x)=\frac{3x^3}{2x^3+16}$ است. حال برای به‌دست آوردن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم:

$$2x^3+16=0\Rightarrow x^3=-8\Rightarrow x=-2$$

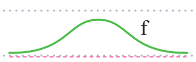
تابع در همسایگی نقطهٔ $x=-2$ تعریف شده است، حد تابع را وقتی $x\to -2$ محاسبه می‌کنیم:

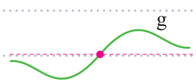
$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{3x^2}{2x^3+16}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{3x^2}{2(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{12}{2(0^+)(12)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{3x^2}{2x^3+16}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{3x^2}{2(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{12}{2(0^-)(12)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

بنابراین خط $x=-2$ مجانب قائم تابع f است.

نمودار یک تابع ممکن است مجانب‌های افقی خود را قطع کند.





تابع f مجانب خود را قطع نکرده — تابع g مجانب خود را قطع کرده

اگر خط $y=L$ مجانب افقی تابع f باشد، برای یافتن نقطهٔ برخورد تابع f با خط $y=L$ باید معادلهٔ $f(x)=L$ را حل کنیم.

می‌خواهیم ببینیم تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+3x}$ مجانب افقی خود را قطع می‌کند یا نه. از آن‌جایی که معادلهٔ مجانب افقی این تابع خط $y=1$ است، بنابراین معادله $f(x)=1$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=1\Rightarrow\frac{x^2+1}{x^2+3x}=1\Rightarrow x^2+1=x^2+3x\Rightarrow 1=3x\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

پس تابع f، مجانب افقی خود را در نقطه‌ای به طول $x=\frac{1}{3}$ قطع می‌کند.

Test **نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{(x-1)^2}$ مجانب افقی خود را در نقطهٔ A قطع می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط مجانب قائم کدام است؟**

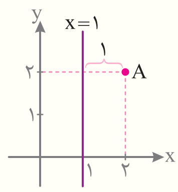
۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\dfrac{3}{2}$ ۴) 2

2 برای پیدا کردن مجانب افقی، باید حد تابع را در ∞ به‌دست آوریم. پس با انتخاب جمله‌های پر توان داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$ خط $y=2$، مجانب افقی تابع است.

حال برای پیداکردن نقطهٔ A که محل تلاقی تابع f و خط $y=2$ می‌باشد، معادلهٔ $f(x)=2$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}=2\Rightarrow 2x^2-3x=2(x-1)^2\Rightarrow \cancel{2x^2}-3x=\cancel{2x^2}-4x+2\Rightarrow x=2$$



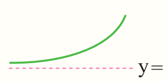
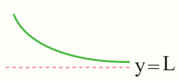
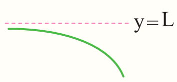
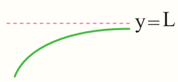
پس مختصات نقطهٔ A به‌صورت $(2,2)$ است. از آن‌جایی‌که $x=1$ ریشهٔ مخرج کسر است و صورت کسر را نیز صفر نمی‌کند، خط $x=1$ مجانب قائم تابع f است.

با توجه به نمودار، واضح است فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $x=1$ برابر ۱ است.

اضافات حسابان — رفتار تابع در اطراف مجانب افقی — Calculus Extra

فرض کنید خط $y=L$ مجانب افقی تابع f باشد؛ یعنی $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ یا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$.

بنابراین $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-L)=0$ یا $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-L)=0$. باتوجه‌به مقادیر $f(x)-L$ در $+\infty$ یا $-\infty$، رفتار تابع f در اطراف خط $y=L$ به صورت زیر است:

۱ اگر $f(x)-L$ در $+\infty$ یا $-\infty$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود، آنگاه نمودار تابع f بالای خط $y=L$ قرار می‌گیرد.	 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$	 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$
۲ اگر $f(x)-L$ در $+\infty$ یا $-\infty$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود، آنگاه نمودار تابع f پایین خط $y=L$ قرار می‌گیرد.	 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$	 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$

می‌خواهیم رفتار تابع $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ را در اطراف مجانب افقی خود، یعنی $y=1$ بررسی کنیم. با به‌دست آوردن $f(x)-L$ خواهیم داشت:

$$f(x)-L=\frac{x}{x-1}-1=\frac{x-x+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$$

عبارت $\dfrac{1}{x-1}$ به‌ازای مقادیر مثبت بسیار بزرگ x، مثبت و به‌ازای مقادیر منفی بسیار کوچک x، منفی است، بنابراین رفتار تابع در اطراف خط مجانب افقی $y=1$ به صورت مقابل است: