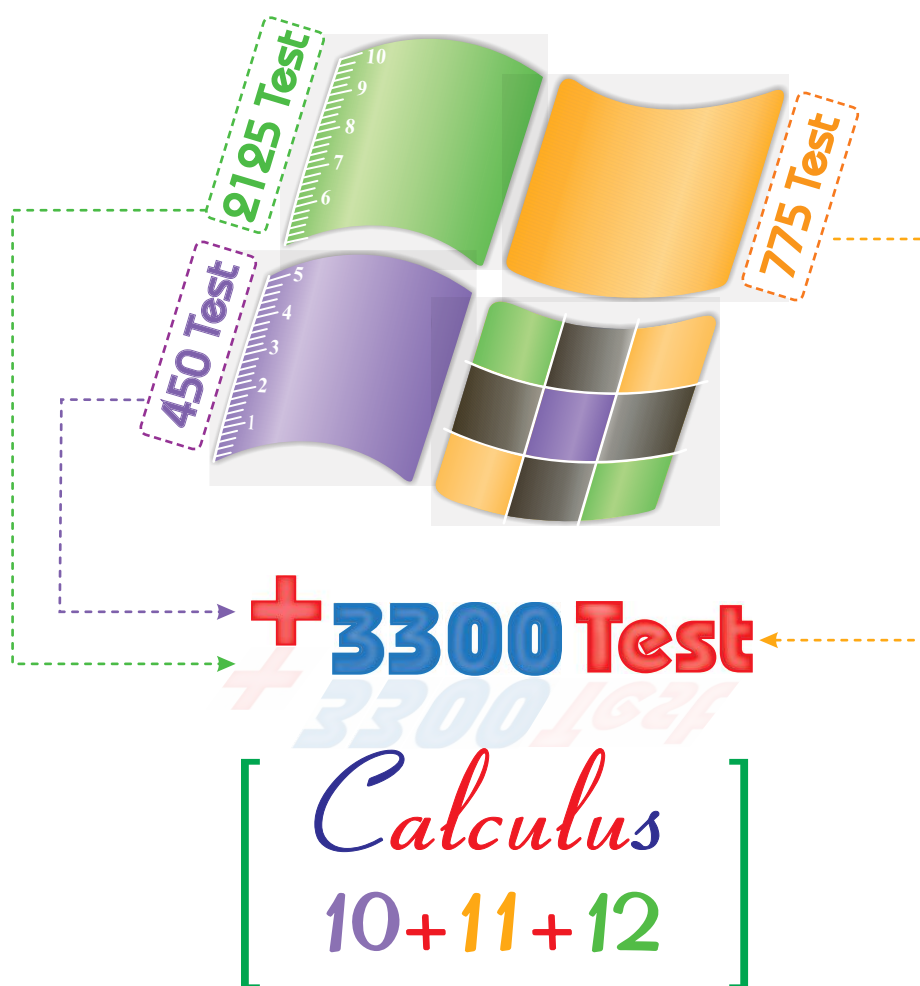


مسلمی که امروز بابت خرید این کتاب می پردازید! در مقابل هزینه های که در
آیند بابت نخواندن آن پرداخت خواهید کرد، بسیار ناچیز است...



این نسل از کتاب های ریاضی میکرو که با وسواس خاصی تهیه شده، ترکیبی است از ۳ کتاب با ۳ استراتژی مختلف:

کتاب اول: تست های واجب و ضروری

کتاب دوم: تست های ویژه تسلط و تثبیت و مرور

کتاب سوم: تست های IQ و چالشی ویژه دانش آموزان مدارس برتر

مقدمه مؤلف

به جای نوشتن مقدمه طول و دراز و تشکر از فک و فامیل و ایل و تبار خودمان و دست اندرکاران کتاب بهتر است توضیحاتی کوتاه و مهم درباره ساخت و بافت این کتاب ارائه کنم:

این کتاب دارای سه دسته تست است

تست های سبز این تست ها که شماره آن ها با رنگ سبز مشخص شده است برای همه دانش آموزان واجب و ضروری است.

تست های زرد این تست ها که شماره آن ها با رنگ زرد مشخص شده است برای دانش آموزانی است که به دنبال کتاب دوم هستند.

تست های بنفش این تست ها که شماره آن ها با رنگ بنفش مشخص شده است برای دانش آموزان مدارس برتر و همچنین دانش آموزانی است که به دنبال تست های چالشی و سطح بالاتر از کنکور سراسری هستند.

II ویژگی های خاص این کتاب نست به سایر کتاب های موجود در بازار:

1 طراحی و معماری داخلی بسیار زیبا جذاب و مورد پسند دانش آموزان و معلمان و مشاوران

2 طرح تست از مفاهیم و لایه های پنهان کتاب درسی

3 پالایش، ویرایش، نوسازی و بهسازی تمامی تست های کنکورهای دهه ۹۰ و بازآفرینی آن ها در قالب و چهارچوب نظام جدید

4 بررسی کامل تمام تمرینات مطرح شده در کتاب راهنمای معلم که یکی از منابع اصلی تست در کنکور سراسری است.

5 طرح تست های ترکیبی از مفاهیم، اشکال و تمرینات کتاب درسی

6 بافت پوششی و چند لایه تست های کتاب که با حل آن ها می توان از زوایای مختلف یک مطلب را یاد گرفت و مرور کرد.

7 پاسخنامه فوق تشریحی و تمام رنگی کتاب که بر اساس خط های رنگی بیمارستانی طراحی شده است و رنگ های انتخاب شده می تواند راهنمای شما در

رسیدن به مقصد باشد. مثلاً به عنوان نمونه تمام جواب های آخر با رنگ سبز مشخص شده است یا در ابتدای بعضی از پاسخ ها فرمول یا جمله ای به رنگ صورتی

دیده می شود که بیان گر نکته مربوط به آن سؤال است یا در تست هایی که نیاز به بررسی گزینه ها دارد گزینه friendly user (کاربر پسند) می کند.

8 بودن کتاب برای معلمان و مدرسین کنکور به لحاظ نوع چیدمان تست ها و پرهیز از تألیف تست های تیز و خارج از چارچوب نظام جدید و

کتاب درسی و گفتن حاکم بر کنکور سراسری.

9 بودن کتاب برای هر سطحی از دانش آموز با هر میزان از معلومات [پیرامان ساره به دشوار تست ها در هر بخش همچنین نوع پاسخ نامه نویسی منظم به هر درک فهم

و درک آن و سرور آوردن از جواب های نوشته شده را آسان می کند بفهمی، در ایام کرونا که دسترسی به معلمان بسیار سخت تر و دشوار تر است و دانش آموزان با اشکالات زیادی در درک و

فهم تست ها مواجه اند]

10 کتاب یک ویژگی دیگر هم دارد که ربطی به ۹ ویژگی اول ندارد و در گوشه ای از کتاب پنهان است و امکان کشف آن تا قبل از ۱۵ اسفند ۱۴۰۰ وجود

ندارد و حداکثر ۸ نفر ممکن است این راز را کشف کنند، اگر شما یکی از این ۸ نفر هستید در اینستاگرام این ویژگی را در دایرکت برای من بفرستید و ۸ جلد

از کتاب های دور دنیا در نیم ساعت ویژه کنکور ۱۴۰۱ را هدیه بگیرید.

alimonsef_shokri



A. Monsef. Shokri

sajad.azemati



S. Azemati



علی منصف شکری - بنیاد عظمتی



alimonsef_shokri

نظرات خود را درباره ویژگی دهم با ما در اینستاگرام در میان بگذارید.



A. Heidari

[توضیحی درباره تست های بنفش (IQ)]

تست های بنفش [این تست ها در ۱۱ فصل اول در پایان هر فصل و در فصل دوازدهم به دلیل کوچک بودن مباحث در لایه لای تست ها گنجانده شده است] تست های چالشی محسوب می شوند ،

اما چالش به چه معناست ؟!

این چالش ها را ما در ۵ قالب متفاوت می توانیم دسته بندی کنیم :

1 ترکیبی مفهومی

برخی از تست های بنفش به صورت ترکیبی از مباحث مختلف هستند [البته ممکن است لزوماً بسیار دشوار هم نباشند] اما به دلیل بافت و ساخت کنکورهای جدید احتمال طرح آن ها در کنکور بسیار بالاست و سهم عمده ای در کنکورهای قرن جدید خواهند داشت .

2 مطالب غیر رسمی

بعضی از تست های بنفش به گونه ای هستند که در حل آن ها نیاز به مطالبی داریم که به طور رسمی در کتاب های نیامده است اما ممکن است طراح سازمان سنجش آن را جزء اهداف کتاب درسی ارزیابی کند [هر چند که ممکن است مولفان کتاب درسی اعلام کنند این موضوع جزء اهداف کتاب درسی نیست اما رئیس سازمان سنجش می تواند اعلام کند که اهداف شما برای ما هیچ اهمیتی و ارزشی ندارد!!!] به عنوان مثال تابع sgn و زوج و فرد و ...

3 گریزی به نظام قدیم

بعضی از تست های بنفش نیز گریزی به نظام قدیم دارند که با توجه به نوع سوالات ۱۴۰۰ بد نیست نیم نگاهی به این مطالب [که می توان آن ها را به نوعی مرتبط با نظام جدید نیز دانست] داشته باشیم .

4 محاسبات پیچیده

در عین حال برخی از تست ها بنفش به شدت سخت و ایده دار و دشوار هستند [بسیاری از این تست ها تریسه و بازسازی تست های آزمون های معتبر جهانی و بین المللی است که برای اولین بار در ایران منتشر می شود] .

5 دشوار و سخت

[۵] برخی از تست های بنفش نیز در عین این که ظاهر پیچیده ای ندارند ، محاسبات به شدت سختی دارند [همانطور که در ۱۳۹۹ و به خصوص ۱۴۰۰ با این تیپ تست ها بیشتر مواجه شدیم و ظاهراً کنکور به این سمت بیشتر گرایش پیدا کرده است]

آریان حدیری

 arianheidarioriginal



نظرات خود را درباره کیفیت کتاب با ما در اینستاگرام در میان بگذارید.

Collaboration With

همکاران
تألیف

M.J. Lotfi مهندس محمد جواد لطفی
M.Samadi مهندس میثم صمدی
M.H. Mokhtari مهندس محمد حسین مختاری

بازبینی نهایی و کارشناسی محتوی | مهندس توحید فرمودی

Scientific Expert

کارشناسان
علمی

M. Askari مهندس محمد عسکری
A. Abdi Poor مهندس علی عبدی پور
A. Safavi مهندس اصلاان صفوی
S. Bani Hashemi مهندس سعید بنی هاشمی
A. Dezhbadaran مهندس امینه دژبادران
P. Tehranian مهندس پویان طهرانیان
B. Golzari مهندس بهروز گلزاری
S. Azizi مهندس سعید عزیزی

سرپرست تیم ویراستاران | مهندس امین سلسد

A. Khvanin zadeh مهندس امین خوانین زاده
A. H.Shokri مهندس امیرحسام شکری
M. Kalooei مهندس محمد کلویی
A. Kazemi Bagha مهندس علیرضا کاظمی بقاء
A. Hagh Nazar مهندس امیر حق نظر
F. Manoochehri مهندس فاروق منوچهری
B. Hadadian مهندس بهروز حدادیان
S. Motavalli مهندس سپهر متولی

Editorial Board

ویراستاران
علمی

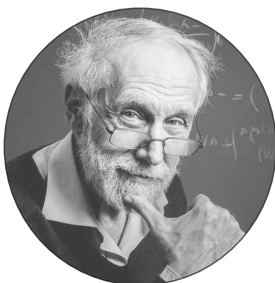
تشکر ویژه از اساتید محترم

محمدرضا حسینی فرد، محمد صحت کار، سوگند روشنی، امید شیری نژاد، پیام نوری، سالار عموزاده، میثم امین، محمد ارباب بهرامی، خشایار خاکی، جواد اسحاقی، مهدی جندقی، پیمان امیری، مهرداد ارمند، رضا اخلاقی، امین تدارک، مسعود غزالی، شروین سیاح نیا، حسین صفایی خواه، رضا چراغی، جواد چراغی، اسماء آرین، نوید خوانین زاده، علیرضا فضائلی، امیر مرادیان



Message



Tweet 

Alain Connes



@Alain 1947



کسی که اندیشیدن را آغاز کرده، بخشی از جهان را به مخاطره افکنده است. [جان دیوئی]

 who has *started to think*, he has done part of the world under the risk

درس اول: مجموعه جملات دنباله ها

درس دوم: مثلثات

درس سوم: حد و پیوستگی و مجانب

درس چهارم: مشتق

درس پنجم: کاربرد مشتق

درس ششم: مباحث تکمیلی

|| View Tweet activity

 91,337

 5,847

 10,130,950,908



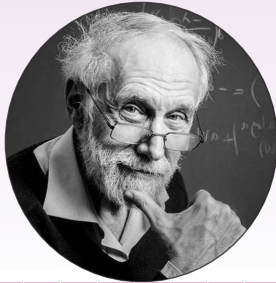
Calculus EXTRA

Chapter 12

اضافات حسابان

Add another Tweet





Calculus EXTRA

Chapter 12

Lesson . 1

صفحه ۲ تا ۶ کتاب حسابان ۱

مجموع جملات دنباله‌ها

درس اول



Alain Connes

Calculus EXTRA

مجموع جملات دنباله‌های حسابی



2934. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۱۲- و قدرنسبت برابر ۵ است. مجموع ۱۴ جمله اول این دنباله کدام است؟

(۱) ۲۱۲ (۲) ۲۵۴ (۳) ۲۸۷ (۴) ۲۹۴

2935. در یک دنباله حسابی، جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{3}$ کمتر است. مجموع ۱۰ جمله اول آن کدام است؟

(۱) $\frac{22}{5}$ (۲) ۲۵ (۳) $\frac{27}{5}$ (۴) ۳۰

2936. مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی ۲۶- و نسبت جمله پانزدهم به جمله ششم برابر ۶ است. جمله یازدهم دنباله کدام است؟

(۱) $-\frac{13}{6}$ (۲) $-\frac{14}{8}$ (۳) $-\frac{15}{6}$ (۴) $-\frac{16}{8}$

2937. در یک دنباله حسابی مجموع ۱۲ جمله اول آن ۱۳۸ و جمله ششم آن ۱۰ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

(۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴) -۲

2938. در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله برابر صفر است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

2939. در یک دنباله حسابی، اگر یک واحد به قدر نسبت اضافه کنیم، به مجموع ده جمله اول چند واحد اضافه می‌شود؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۴۵ (۴) ۵۰

2940. اگر از جمله اول یک دنباله حسابی دو واحد کم کنیم و قدرنسبت آن را یک واحد افزایش دهیم، مجموع ۸ جمله اول دنباله چه تغییری می‌کند؟

(۱) ۱۲ واحد افزایش می‌یابد. (۲) ۷ واحد افزایش می‌یابد.

(۳) ۱۲ واحد کاهش می‌یابد. (۴) ۷ واحد کاهش می‌یابد.

2941. مجموع ۲۰ عدد طبیعی متوالی با شروع از عدد ۱ چند برابر مجموع ۱۰ عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱ است؟

(۱) $\frac{1}{56}$ (۲) $\frac{2}{1}$ (۳) $\frac{2}{23}$ (۴) $\frac{2}{4}$

2942. در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۳۴ (۴) ۳۸

(داخل -۹۰)

2943. در یک دنباله حسابی، جمله n ام به صورت $a_n = \frac{3}{4}n - 5$ است. مجموع جملات دهم تا بیستم چقدر است؟

(۱) $\frac{187}{5}$ (۲) $\frac{192}{5}$ (۳) $\frac{276}{5}$ (۴) $\frac{210}{5}$

2944. در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع ۵ جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟ (خارج - ۹۱)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۴

2945. حداقل چند جمله اول از دنباله حسابی $... -72, -77, -82$ را جمع کنیم تا حاصل مثبت شود؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

2946. در دنباله حسابی $... 11, 8, 5$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

2947. در بیست جمله اول دنباله حسابی، مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

2948. اگر $... \frac{5}{2}, y, x, 1$ جملات ابتدایی یک دنباله حسابی متناهی با بیست جمله باشند، مجموع جملات شماره‌های زوج کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۵۸ (۳) ۶۰ (۴) ۶۴

2949. مجموع جملات دنباله اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

- (۱) ۸۱۶ (۲) ۸۵۲ (۳) ۸۶۷ (۴) ۸۸۴

2950. مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله، مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) ۱۸

2951. مجموع n جمله اول در یک دنباله حسابی به صورت $S_n = n^2 - 5n$ است. جمله هفتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴) ۱۵

2952. در یک دنباله حسابی با جمله عمومی $t_n = an + 1$ ، مجموع n جمله اول آن به صورت $S_n = 3n^2 + bn$ است. مجموع ۵ جمله اول کدام است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۸۰ (۳) ۱۱۰ (۴) ۹۵

2953. یک دنباله حسابی دارای پانزده جمله است. اگر مجموع سه جمله وسط برابر ۹ باشد، مجموع پانزده جمله چقدر است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۶ (۳) ۴۵ (۴) ۶۰

2954. در یک دنباله حسابی اگر $S_{15} = S_{11}$ باشد، مجموع ۲۶ جمله اول آن کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۵ (۳) ۲۶ (۴) صفر

2955. در یک دنباله حسابی $S_{10} - S_7 = 5$ است. مجموع جملات ششم تا دوازدهم کدام است؟

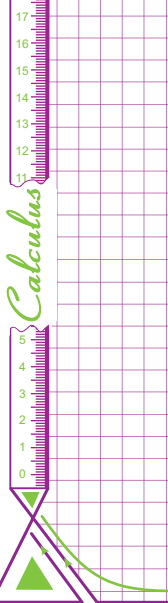
- (۱) $\frac{25}{3}$ (۲) ۱۰ (۳) $\frac{35}{3}$ (۴) ۱۲

2956. در یک دنباله حسابی رابطه $S_n = 2n + S_{n-1} + 1$ برقرار است. مجموع ۱۰ جمله اول کدام است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۸۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۰۰

2957. در دنباله‌های حسابی $... 11, 16, 1$ و $... 15, 11, 7$ مجموع جملات مشترک دو رقمی کدام است؟

- (۱) ۲۸۰ (۲) ۲۵۵ (۳) ۲۴۶ (۴) ۲۳۲



2958. در یک دنباله حسابی متناهی، مجموع سه جمله اول برابر ۱۰ و مجموع سه جمله آخر برابر ۵۶ است. مجموع جملات این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۹۸ (۲) ۱۳۲ (۳) ۱۵۰ (۴) ۷۵

2959. بین دو عدد ۲ و $7 + 9\sqrt{2}$ شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. مجموع این ۸ عدد کدام است؟

- (۱) $30(2 + \sqrt{2})$ (۲) $48\sqrt{2}$ (۳) $30(1 + \sqrt{2})$ (۴) $36(1 + \sqrt{2})$

2960. بین دو عدد ۸ و ۹۵، بیست و هشت عدد را طوری قرار می‌دهیم که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند. مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حاصل کدام است؟

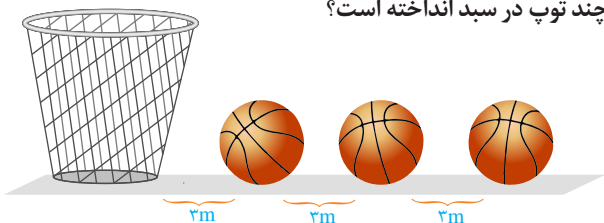
- (۱) ۸۱۰ (۲) ۷۸۰ (۳) ۷۶۰ (۴) ۷۳۰

2961. با توجه به دنباله حسابی، مجموع $\frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{17 \times 20}$ کدام است؟

(خارج - ۹۸)

- (۱) $0/15$ (۲) $0/18$ (۳) $0/24$ (۴) $0/25$

2962. در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله ی توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است. دونه باید از کنار سبد شروع کرده، توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی برود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونه در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد، مجموعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

Calculus EXTRA

مجموع جملات دنباله‌های هندسی

2963. در دنباله هندسی غیر نزولی $\dots, \frac{1}{p}, x, 2$ مجموع شش جمله اول کدام است؟

- (۱) $\frac{41}{32}$ (۲) $\frac{21}{16}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{23}{16}$

2964. در دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ مجموع چهارده جمله اول چند برابر مجموع هفت جمله اول است؟

- (۱) ۶۵ (۲) ۶۳ (۳) ۱۲۷ (۴) ۱۲۹

2965. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول ۱۵۳ می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

- (۱) $\frac{81}{16}$ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۶

2966. در یک دنباله هندسی، مجموع هشت جمله اول، ده برابر مجموع چهار جمله اول است. جمله a_9 چند برابر جمله a_1 است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸۱ (۳) ۱۰ (۴) ۱۰۰

2967. مجموع n جمله اول از یک دنباله هندسی به صورت $S_n = \frac{5(3^n - 2)}{2}$ است. در این دنباله جمله پنجم کدام است؟

- (۱) ۲۵۵ (۲) ۴۰۵ (۳) ۳۲۰ (۴) ۲۸۰

2968. به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2, 2x, 4, x^2$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع ۷ جمله اول این دنباله کدام است؟ (داخل - ۹۳)

- (۱) $\frac{117}{16}$ (۲) $\frac{125}{16}$ (۳) $\frac{63}{4}$ (۴) $\frac{127}{8}$

2969. بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی دهند. مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

- (۱) ۴۸۲ (۲) ۴۸۴ (۳) ۴۸۶ (۴) ۴۸۸ (خارج - ۹۱)

2970. در یک دنباله هندسی با جمله عمومی t_n اگر $t_5 - t_1 = 20$ و $S_4 = 10$ باشد، قدر نسبت این دنباله چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $1 + \sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{2}$

2971. حداقل چند جمله اول دنباله هندسی $1, 3, 9, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل بیش تر از ۵۰۰ شود؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

2972. مقدار $\frac{1}{3^{256}} \times \frac{1}{3^{16}} \times \frac{1}{3^8} \times \frac{1}{3^4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{255}{3^{256}}$ (۲) $\frac{63}{3^{256}}$ (۳) $\frac{127}{3^{512}}$ (۴) $\frac{127}{3^{256}}$

2973. در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جمله اول کدام است؟

- (۱) $10/8$ (۲) $11/2$ (۳) $12/6$ (۴) $13/4$

2974. تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات ۳ برابر جملات با شماره فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟ (داخل - ۹۴)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

2975. در یک دنباله هندسی با تعداد جملات زوج، مجموع تمام جملات ۵ برابر مجموع جملات، شماره فرد است. جمله پنجم چند برابر جمله سوم است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۶

2976. حاصل $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^9)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $32(1 + \sqrt{2})$ (۲) $16(\sqrt{2} - 1)$ (۳) $31(1 + \sqrt{2})$ (۴) $15(\sqrt{2} - 1)$

2977. از معادله $\frac{x}{8} + 2x + 4x + \dots = 126$ مقدار x کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

2978. حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟ (داخل - ۹۳)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

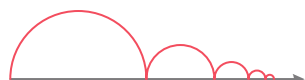
2979. اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله هندسی با جملات مثبت باشند به طوری که $a + b + c = 12$ و $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

2980. در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول ۴ واحد بیشتر از مجموع سه جمله اول و مجموع نه جمله اول ۳۲ واحد بیشتر از مجموع شش جمله اول است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2 + \sqrt{2}$

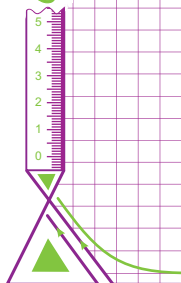
2981. تویی بر روی نیم دایره‌های بالای یک محور با شعاع اولیه ۳۲ واحد حرکت می‌کند. هر بار که به محور برخورد می‌کند، ۵۰ درصد از اندازه شعاع آن کاسته می‌شود. اندازه شعاع این نیم دایره‌های متوالی، دنباله‌ای از اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند. مجموع ۵ جمله اول این دنباله کدام است؟



- (۱) ۶۰ (۲) ۶۱ (۳) ۶۲ (۴) ۶۳



Alain Connes



2982. حاصل $\frac{\sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(داخل - ۹۶)

2983. حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

2984. اگر انتهای کمان x در ربع اول و $\frac{1}{3} = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$ باشد، حاصل $\sin(\frac{3\pi}{4} - 2x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{7}{9}$ (۳) $-\frac{2}{9}$ (۴) $-\frac{7}{9}$

(خارج - ۹۷)

2985. از رابطه $\sin \Delta x \cos 3x - \cos \Delta x \sin 3x = \frac{2}{3}$ مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{4}{9}$

2986. اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ باشد، حاصل $(\sin \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \beta + \cos \alpha)^2$ کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $1 - \sqrt{3}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۴) $2 - \sqrt{3}$

2987. حاصل $\frac{\cos 5^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\sin 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\Delta \sin 15^\circ$ (۲) $4 \sin 2^\circ$ (۳) $\sqrt{2} \cos 5^\circ$ (۴) $\sqrt{3} \cos 15^\circ$

2988. اگر $\tan x = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل $\frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x}$ کدام است؟

- (۱) $0/45$ (۲) $0/6$ (۳) $0/75$ (۴) $0/9$

2989. حاصل $\sin 10^\circ \sin 55^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ$ کدام است؟

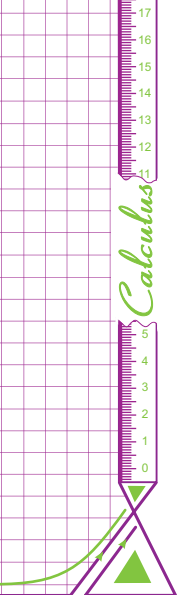
- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$ (۴) $\frac{4-\sqrt{3}}{3}$

2990. ساده شده عبارت $\frac{\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}$ کدام است؟

- (۱) $-\tan \alpha$ (۲) $\cot \alpha$ (۳) $-\tan \beta$ (۴) $\cot \beta$

2991. اگر $\alpha = \frac{\pi}{6} + \beta$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



(ریاضی داخل - ۹۹)

(ریاضی خارج - ۹۹)

(خارج - ۹۶)

(داخل - ۹۳)

(داخل - ۹۷)

2992. اگر $\tan \alpha = \frac{7}{3}$ و $\tan \beta = \frac{1}{6}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ کدام است؟

(۴) $\frac{2}{9}$

(۳) $\frac{2}{5}$

(۲) $\frac{2}{1}$

(۱) $\frac{1}{65}$

2993. اگر $\tan x = \sqrt{2}$ و انتهای کمان x در ربع سوم باشد، مقدار $\cos(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(x - \frac{\pi}{6})$ کدام است؟

(۴) $-\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۲) $-\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{2}$

2994. اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۲) $-\frac{3}{5}$

(۱) $-\frac{4}{5}$

2995. اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۲) $-\frac{3}{5}$

(۱) $-\frac{4}{5}$

2996. اگر α زاویه‌ای حاده و $\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$

(۳) $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$

(۲) $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$

(۱) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{6}$

2997. اگر $\alpha + \beta = 135^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) $-\frac{4}{3}$

2998. اگر $\frac{5}{4} = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$ باشد، آنگاه حاصل $\cos(2x - 2y)$ کدام است؟

(۴) $-\frac{2}{5}$

(۳) $-\frac{3}{11}$

(۲) $-\frac{5}{8}$

(۱) $-\frac{7}{8}$

2999. اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $-\frac{1}{3}$

(۱) $-\frac{2}{3}$

3000. اگر $\frac{2}{3} = \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3})$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

(۴) $\frac{2}{9}$

(۳) $\frac{1}{9}$

(۲) $-\frac{1}{9}$

(۱) $-\frac{2}{9}$

3001. اگر $\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 2$ باشد، $\tan x$ کدام است؟

(۴) 3

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) -3

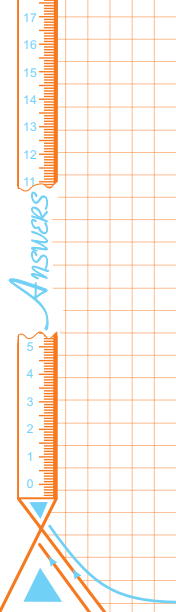
3002. اگر $\sin \theta = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ربع اول باشد، حاصل $\sin(\frac{\pi}{4} + 2\theta) + \cos(\frac{3\pi}{4} - 2\theta)$ کدام است؟

(۴) $\frac{20\sqrt{2} + 1}{50}$

(۳) $\frac{31\sqrt{2} - 48}{50}$

(۲) $\frac{8 - 2\sqrt{3}}{50}$

(۱) $\frac{3 - 25\sqrt{2}}{50}$



2933 فاصله $O_1(a, a)$ از خط d_1 و d_2 برابر است، پس:

$$\frac{|6a+4a-7|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|6a+4a-6a|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Rightarrow |10a-7| = |4a|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10a-7=4a \Rightarrow 6a=7 \Rightarrow a=\frac{7}{6} \\ 10a-7=-4a \Rightarrow 14a=7 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

به ازای $a=\frac{7}{6}$ خط‌های d_1 و d_2 بر هم منطبق می‌شوند که خلاف فرض مسئله است. پس $O_1(1, \frac{1}{2})$ مرکز دایره است و فاصله آن از خط d_1 برابر

$$R = \frac{|3+2-7|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{2}{5} \quad \text{است با:}$$

از طرفی مطابق شکل صورت سوال طول اضلاع مستطیل ABCD برابر $2R$ و $4R$ است، پس محیط آن برابر است با:

$$12R = 12 \times \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$$

Calculus EXTRA

C

2934 می‌دانیم در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول از رابطه

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \quad \text{به دست می‌آید، بنابراین:}$$

$$S_{14} = \frac{14}{2}[2(-12) + (14-1)5] = 7[-24 + 65] = 7 \times 41 = 287$$

2935 با توجه به آن‌که جمله پنجم برابر 3 و قدر نسبت برابر $-\frac{1}{4}$ است، جمله اول را بدست می‌آوریم:

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 3 = a_1 + 4(-\frac{1}{4}) \Rightarrow a_1 = 5$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 5 + (10-1)(-\frac{1}{4})] = \frac{27}{5}$$

2936

$$1) S_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + 9d] = -26 \Rightarrow 10a_1 + 45d = -26$$

$$2) \frac{a_{15}}{a_6} = 6 \Rightarrow a_1 + 14d = 6(a_1 + 5d) \Rightarrow 5a_1 + 16d = 0$$

با حل معادلات به دست آمده از 1 و 2 مقادیر $a_1 = 6/4$ و $d = -2$ به

$$a_{11} = a_1 + 10d = 6/4 + (-20) = -13/2 \quad \text{دست می‌آید:}$$

2937 روابط داده شده را باز می‌کنیم:

$$1) S_{12} = 138 \Rightarrow \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 138 \Rightarrow 2a_1 + 11d = 23$$

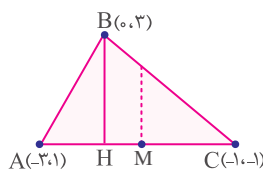
$$2) a_6 = 10 \Rightarrow a_1 + 5d = 10$$

از روابط 1 و 2 مقدار $a_1 = -5$ به دست می‌آید.

2930 برای نوشتن معادله ارتفاع

BH ابتدا شیب خط AC را به دست

می‌آوریم:



$$m_{AC} = \frac{1-(-1)}{-3-(-1)} = -1 \Rightarrow m_{BH} = 1$$

$$BH \text{ معادله: } y-3=1 \times (x-0) \Rightarrow x-y+3=0$$

حال نقطه وسط ضلع AC را به دست می‌آوریم و معادله عمود منصف آن را

$$M = \left(\frac{(-3)+(-1)}{2}, \frac{1+(-1)}{2} \right) = (-2, 0) \quad \text{می‌نویسیم:}$$

$$\Rightarrow AC \text{ معادله عمود منصف: } y-0=1 \times (x+2) \Rightarrow x-y+2=0$$

بنابراین فاصله ارتفاع BH و عمود منصف AC برابر است با:

$$\frac{|3-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2931 چون شیب خط‌های $3x+2y=a$ و $2x-3y=2$ عکس و

قرینه یکدیگر است، پس دو ضلع داده شده مجاور هستند. از طرفی رأس $A(4, -1)$ روی این خط $2x-3y=2$ قرار ندارد و اگر مختصات آن را در خط $3x+2y=a$ قرار دهیم آنگاه $a=10$ می‌شود که خلاف فرض مسئله است.

پس:

$$AH_1 = \frac{|2(4)+2(-1)-a|}{\sqrt{4+4}} = \frac{|10-a|}{\sqrt{13}}$$

$$AH_2 = \frac{|2(4)-3(-1)-2|}{\sqrt{4+4}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$\xrightarrow{AH_1=AH_2} \frac{|10-a|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}} \Rightarrow |10-a|=9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10-a=9 \Rightarrow a=1 \\ 10-a=-9 \Rightarrow a=19 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر قابل قبول برای a برابر است با:

$$1+19=20$$

2932 می‌دانیم در مثلث ABC نقطه تلاقی میانه‌ها

از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$O = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \right)$$

حال چون محل هم‌رسی میانه‌ها $(1, 1)$ است، پس:

$$\frac{2+3+x_C}{3} = 1 \Rightarrow x_C = -2 \Rightarrow C(-2, -3)$$

$$\frac{0+6+y_C}{3} = 1 \Rightarrow y_C = -3$$

حال مختصات نقطه وسط ضلع BC را به دست می‌آوریم و شیب عمود

$$M = \left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{6+(-3)}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$m_{BC} = \frac{-3-6}{-2-3} = \frac{9}{5}$$

بنابراین شیب عمود منصف BC برابر $-\frac{5}{9}$ بوده و معادله آن برابر است با:

$$y-\frac{3}{2} = -\frac{5}{9}(x-\frac{1}{2}) \xrightarrow{\times 9} 9y+5x=16$$

2938 ابتدا رابطه داده شده را باز می‌کنیم:

$$a_v = \frac{1}{2} a_r \Rightarrow 2a_v = a_r \Rightarrow 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = -10d$$

حال S_n را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = 0 \xrightarrow{a_1 = -10d} \frac{n}{2} [2(-10d) + (n-1)d] = 0$$

$$-20d + (n-1)d = 0 \Rightarrow (n-1)d = 20d \Rightarrow n = 21$$

2939 قدر نسبت دنباله d در نظر می‌گیریم و داریم:

$$S_{\text{new}} - S_{\text{old}} = \frac{1}{2} [2a_1 + 9(d+1)] - \frac{1}{2} [2a_1 + 9d]$$

$$= 5(2a_1 + 9d + 9) - 5(2a_1 + 9d) = 5 \times 9 = 45$$

2940 قبل از انجام تغییرات S_n را محاسبه می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = 8a + 28d$$

سپس به جای a ، مقدار $a - 2$ و به جای d مقدار $d + 1$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$S'_n = \frac{n}{2} [2(a-2) + (n-1)(d+1)] = 8a + 28d + 12$$

با مقایسه مجموع‌های به دست آمده واضح است که بعد از انجام تغییرات، به مجموع ۸ جمله اول، ۱۲ واحد اضافه شده است.

2941 مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n از رابطه $\frac{n(n+1)}{2}$ و مجموع

اعداد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱ از رابطه $\frac{n^2}{2}$ به دست می‌آید. پس مجموع ۲۰ عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱ برابر $\frac{20(20+1)}{2} = 210$ و مجموع ۱۰ عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از ۱ برابر $\frac{10^2}{2} = 50$ است. در این صورت، نسبت آن‌ها برابر است با:

$$\frac{210}{50} = \frac{21}{5}$$

2942 باتوجه به صورت سؤال داریم:

$$S_{2r} = 3S_r \Rightarrow \frac{2r}{2} (2a_1 + 19d) = 3 \times \frac{r}{2} (2a_1 + 11d)$$

$$20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow -18d = 16a_1 \Rightarrow d = -\frac{4}{9}a_1$$

از طرفی جمله سوم برابر ۶ است، پس:

$$a_r = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \Rightarrow -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \Rightarrow d = 4$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(4) = 34$$

2943 باتوجه به جمله عمومی، جمله دهم برابر $10 = \frac{3}{2} \times 10 - 5$ است.

و جمله بیستم برابر $25 = \frac{3}{2} \times 20 - 5$ است. از آن جایی که تعداد جملات دهم تا بیستم برابر ۱۱ است، خواهیم داشت:

$$S = \frac{11}{2} (a_{10} + a_{20}) = \frac{11}{2} (10 + 25) = \frac{11}{2} \times 35 = 192 \frac{1}{2}$$

مجموع n جمله متوالی در یک دنباله حسابی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2} (\text{جمله آخر} + \text{جمله اول})$$

2944 باتوجه به صورت سؤال داریم:

$$(a_1 + a_r + a_r + a_r + a_r) = \frac{1}{3} (a_1 + a_r + a_r + a_r + a_r)$$

$$3 \times a_r = a_1 \Rightarrow 3(a_1 + 2d) = a_1 + 2d \Rightarrow 2a_1 = d$$

$$\frac{a_r}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = 3$$

اگر n فرد باشد مجموع n جمله متوالی در یک دنباله حسابی برابر است با:

$$S_n = n \times \text{وسط}$$

2945 جمله اول دنباله برابر ۸۲- و قدرنسبت آن برابر ۵ است. برای

این که ببینیم حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل مثبت شود، باید S_n را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم، پس خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{n}{2} [2(-82) + (n-1)5] > 0 \Rightarrow \frac{n}{2} (-164 + 5n - 5) > 0$$

$$-169 + 5n > 0 \Rightarrow 5n > 169 \Rightarrow n > 33 \frac{8}{5}$$

پس کوچکترین مقدار n برابر با ۳۴ است.

2946 می‌خواهیم $S_n > 493$ شود، پس:

$$\frac{n}{2} [2 \times 5 + (n-1) \times 3] > 493 \Rightarrow \frac{3n^2 + 7n}{2} > 493$$

$$\Rightarrow 3n^2 + 7n - 986 > 0 \Rightarrow (n-17)(3n+58) > 0$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n > 17 \Rightarrow n = 18$$

2947 جملات شماره فرد را از شماره زوج کم کنیم تا قدرنسبت به دست

آید:

$$1) a_1 + a_3 + \dots + a_{15} = 150 \quad 2) a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135$$

$$1) 2) \Rightarrow \frac{(a_1 - a_1) + (a_3 - a_3) + \dots + (a_{19} - a_{19})}{d} = 150 - 135 \Rightarrow d = \frac{15}{4}$$

حال جملات را باهم جمع کنیم تا مجموع جملات a_1 تا a_{19} به دست آید:

$$(a_1 + a_3) + (a_5 + a_7) + \dots + (a_{17} + a_{19}) = 135 + 150 = 285$$

$$\Rightarrow S_{19} = \frac{19}{2} (2a_1 + 19 \times \frac{15}{4}) = 285 \Rightarrow 20a_1 + 285 = 285 \Rightarrow a_1 = 0$$

2948 جمله چهارم دنباله حسابی داده شده برابر $\frac{5}{2}$ است، پس:

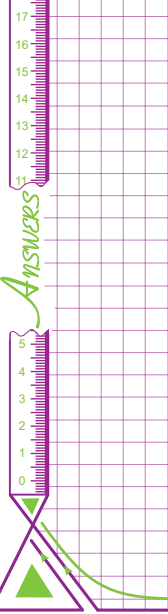
$$1 + 3d = \frac{5}{2} \Rightarrow 3d = \frac{3}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

بنابراین جملات این دنباله به صورت $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ بوده و جملات با

شماره زوج به صورت $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$ است. بنابراین مجموع آن‌ها

برابر است با:

$$S_{10} = \frac{10}{2} (a_1 + a_{10}) = 5 (\frac{3}{2} + \frac{21}{2}) = 60$$



2949 دنباله مورد نظر به صورت $3, 9, 15, \dots, 99$ است که یک دنباله

حسابی با جمله اول 3 و قدر نسبت 6 می باشد. برای مشخص کردن تعداد جملات

دنباله داریم: $a_n = 3 + (n-1) \cdot 6 = 99 \Rightarrow n-1 = 16 \Rightarrow n = 17$

بنابراین مجموع جملات این دنباله برابر است با:

$$S_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) = \frac{17}{2}(3 + 99) = 17 \times 51 = 867$$

2950 با استفاده از رابطه $S_n = \frac{n(n-1)}{6}$ خواهیم داشت:

$$a_v + a_\lambda + \dots + a_{18} = S_{18} - S_6 = \frac{18(18-1)}{6} - \frac{6(6-1)}{6} = 9 - (-9) = 18$$

2951 می دانیم $a_n = S_n - S_{n-1}$ است، پس:

$$a_v = S_v - S_6 = (7^2 - 5 \times 7) - (6^2 - 5 \times 6) = (49 - 35) - (36 - 30) = 8$$

2952 می دانیم $S_1 = t_1$ و $S_7 = t_1 + t_7$ است، پس:

$$① \quad 2(1)^2 + b(1) = a + 1 \Rightarrow a - b = 2$$

$$② \quad 2(2)^2 + b(2) = (a+1) + (2a+1) \Rightarrow 3a - 2b = 10$$

از حل دو معادله بالا نتیجه می گیریم $a = 6$ و $b = 4$ است، پس:

$$S_n = 3n^2 + 4n \Rightarrow S_5 = 3(5)^2 + 4(5) = 95$$

2953 چون دنباله دارای 15 جمله است، جمله هشتم جمله وسط

دنباله می باشد، پس: $a_v + a_\lambda + a_9 = 9 \Rightarrow 3a_9 = 9 \Rightarrow a_9 = 3$

$$S_{15} = 15 \times (\text{جمله وسط}) = 15 \times 3 = 45$$

2954 با توجه به رابطه $S_{15} = S_{11}$ داریم:

$$S_{15} - S_{11} = 0 \Rightarrow a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{قاعده اندیس ها}} a_1 + a_{26} + a_1 + a_{26} = 0 \Rightarrow a_1 + a_{26} = 0$$

$$\Rightarrow S_{26} = \frac{26}{2}(a_1 + a_{26}) = 0$$

$$S_{10} - S_7 = 5 \Rightarrow a_{10} + a_9 + a_8 = 3a_9 = 5 \Rightarrow a_9 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow a_6 + a_v + \dots + a_{12} = \frac{v}{2}(a_6 + a_{12}) = 7a_9 = 7 \times \frac{5}{3} = \frac{35}{3}$$

2956 رابطه داده شده را به صورت $S_n - S_{n-1} = 2n - 1$ مرتب می کنیم.

از طرفی می دانیم در هر دنباله ای رابطه $S_n - S_{n-1} = a_n$ برقرار است، پس:

$$a_n = 2n - 1$$

حال برای پیدا کردن مجموع 10 جمله اول این دنباله حسابی داریم:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(1 + 19) = 100$$

2957 اولین جمله مشترک دو دنباله داده شده برابر 11 و قدر نسبت

آن ها برابر 4 و 5 است. پس قدر نسبت دنباله جمله های مشترک برابر

ک.م.م دو عدد 4 و 5 یعنی 20 است، بنابراین جمله عمومی دنباله

جمله های مشترک برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 11 + (n-1) \times 20 = 20n - 9$$

با جایگذاری $n = 5$ بزرگ ترین جمله دو رقمی به دست می آید، پس

مجموع جملات مشترک دو رقمی برابر است با:

$$S_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = \frac{5}{2}(11 + 91) = 255$$

2958 با توجه به قانون اندیس ها، می دانیم:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

حال خواهیم داشت:

$$\underbrace{a_1 + a_3 + a_5}_{10} + \underbrace{a_{n-2} + a_{n-4} + a_{n-6}}_{56} = 66 \Rightarrow 3(a_1 + a_n) = 66$$

$$\Rightarrow a_1 + a_n = 22 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 11n$$

با توجه به این که n عددی طبیعی است، پاسخ باید مضرب صحیحی از

عدد 11 باشد، در میان گزینه ها فقط 132 مناسب است.

2959 با قرار دادن شش عدد بین دو عدد 2 و $7 + 9\sqrt{2}$ ، نتیجه

می گیریم $t_1 = 2$ و $t_8 = 7 + 9\sqrt{2}$ است، پس:

$$S_8 = \frac{8}{2}(t_1 + t_8) = 4(2 + 7 + 9\sqrt{2}) = 36(1 + \sqrt{2})$$

2960 وقتی بین دو عدد 8 و 95 بیست و هشت واسطه حسابی قرار

می دهیم، جمله اول برابر 8 و جمله سی ام برابر 95 است:

$$8, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{28 \text{ تا}}, 95 \Rightarrow t_{30} = t_1 + 29d \Rightarrow 95 = 8 + 29d$$

$$\Rightarrow 29d = 87 \Rightarrow d = 3$$

حال مجموع 30 جمله اول را به دست می آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}[2 \times 8 + 19 \times 3] = 735$$

2961 با توجه به این که اختلاف اعداد در مخرج هر کسر برابر 3 واحد

است، ابتدا هریک از کسرها را به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}), \frac{1}{5 \times 8} = \frac{1}{3}(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}), \dots, \frac{1}{17 \times 20} = \frac{1}{3}(\frac{1}{17} - \frac{1}{20})$$

بنابراین مجموع همه این کسرها برابر است با:

$$\frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}) + \dots + \frac{1}{3}(\frac{1}{17} - \frac{1}{20})$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{17} - \frac{1}{20})$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{20}) = \frac{1}{3}(\frac{10-1}{20}) = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0.15$$

2968 a, b, c اگر سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه

حاصل ضرب جمله‌های اول و سوم برابر مربع جمله وسط است. یعنی:

$$b^2 = ac$$

چون $x^2 - 2, 2x, x^2 + 4$ جملات متوالی دنباله هندسی اند، پس:

$$(2x)^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 4) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8$$

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

چون دنباله نزولی است، پس $x = 2$ قابل قبول است و دنباله به صورت $8, 4, 2, \dots$

است. بنابراین مجموع 7 جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_7 = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^7)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8(1 - \frac{1}{128})}{\frac{1}{2}} = 16(\frac{127}{128}) = \frac{127}{8}$$

2969 وقتی بین دو عدد 4 و 324، سه واسطه هندسی قرار می‌دهیم،

جمله اول برابر 4 و جمله پنجم برابر 324 است: $4, \circ, \circ, \circ, 324$

$$q^4 = \frac{t_5}{t_1} \Rightarrow q^4 = \frac{324}{4} = 81 \Rightarrow q = \pm 3$$

از آن جایی که این 5 عدد مثبت هستند، پس $q = 3$ قابل قبول است و

مجموع آن‌ها برابر است با:

$$S_5 = \frac{t_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{4(1 - 3^5)}{1 - 3} = \frac{4(1 - 243)}{-2} = -2 \times (-242) = 484$$

2970 با توجه به اطلاعات صورت سوال داریم:

$$1) t_5 - t_1 = 20 \Rightarrow t_1 q^4 - t_1 = 20 \Rightarrow t_1(q^4 - 1) = 20$$

$$2) S_4 = \frac{t_1(1 - q^4)}{1 - q} = 10 \xrightarrow{1) \rightarrow \frac{-20}{1 - q}} 1 = q \Rightarrow q = 3$$

2971 باید S_n را بزرگ‌تر از 500 قرار دهیم. چون $t_1 = 1$ و $q = 3$ است:

$$\frac{(1)(1 - 3^n)}{1 - 3} > 500 \Rightarrow \frac{1 - 3^n}{-2} > 500 \Rightarrow 1 - 3^n < -1000 \Rightarrow 1001 < 3^n$$

با جایگذاری هر یک از گزینه‌ها در رابطه $1001 < 3^n$ ، حداقل n عدد 7 است:

$$3^n > 1001 \Rightarrow 3^7 > 1001 \Rightarrow 2187 > 1001$$

2972 t_n توان‌های عبارت داده شده، تشکیل یک دنباله هندسی با جمله

اول $\frac{1}{4}$ و قدرنسبت $\frac{1}{4}$ داده‌اند. حال باید مشخص کنیم $\frac{1}{256}$ چندمین

جمله این دنباله است:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{256} \xrightarrow{t_n = t_1 q^{n-1}} \frac{1}{256} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 7$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \times \dots \times \frac{1}{256} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{256}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(1 - (\frac{1}{4})^7)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{(1 - \frac{1}{128})}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \times \frac{(127)}{128} = \frac{127}{384}$$

2962 دوده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید

مسافت $3 + 3 = 6$ متر را طی کند، برای توپ دوم نیز باید 12 متر و برای

توپ سوم 18 متر و طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این

مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول 6 و قدرنسبت 6 می‌دهد.

بنابراین برای به دست آوردن تعداد توپ‌ها داریم:

$$S_n = 918 = \frac{n}{2} (12 + (n-1) \times 6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \xrightarrow{17 \times 18 = 306} n = 17$$

2963 ابتدا مقدار قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = \frac{2}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2}$$

چون دنباله غیر نزولی است پس $q = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است، بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_6 = \frac{2(1 - (-\frac{1}{2})^6)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{64}) \Rightarrow S_6 = \frac{21}{16}$$

2964 می‌دانیم $\frac{S_{7n}}{S_n} = 1 + q^n$ است و مقدار $q = 2$ است، پس:

$$\frac{S_{14}}{S_7} = 1 + q^7 = 1 + (2)^7 = 1 + 128 = 129$$

2965 می‌دانیم $\frac{S_{7n}}{S_n} = 1 + q^n$ است. پس:

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{153}{136} \Rightarrow 1 + q^3 = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_5} = \frac{1}{q_4} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = 16$$

2966 می‌دانیم $\frac{S_{7n}}{S_n} = 1 + q^n$ است. پس:

$$\frac{S_8}{S_4} = 10 \Rightarrow 1 + q^4 = 10 \Rightarrow q^4 = 9 \Rightarrow \frac{a_8}{a_4} = \frac{a_1 q^8}{a_1} = (q^4)^2 = 9^2 = 81$$

2967 می‌دانیم در هر دنباله همواره تساوی $a_n = S_n - S_{n-1}$ برقرار

است، پس:

$$a_5 = S_5 - S_4 = \frac{5(3^5 - 2)}{2} - \frac{5(3^4 - 2)}{2} = \frac{5 \times 241}{2} - \frac{5 \times 79}{2} = 405$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ t_2 + t_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_1 q^2 = 1 \\ t_1 q + t_1 q^2 = 2 \Rightarrow q(t_1 + t_1 q^2) = 2 \Rightarrow q = 2 \end{cases}$$

با جایگذاری $q = 2$ در معادله $t_1 + t_1 q^2 = 1$ داریم:

$$t_1 + t_1(2)^2 = 1 \Rightarrow 5t_1 = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{t_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{1}{5} \times \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$$

2974 باتوجه به صورت سؤال داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots} + \frac{a_4 + a_5 + a_6 + \dots}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{qa + aq^2 + aq^3 + \dots}{a + aq^2 + aq^4 + \dots} = \frac{q(a + aq^2 + aq^4 + \dots)}{a + aq^2 + aq^4 + \dots} = 2 \Rightarrow q = 2$$

چون تعداد جملات زوج است، فرض کنیم این دنباله دو جمله دارد:

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} = 3 \Rightarrow a_1 + a_2 = 3a_1 \Rightarrow a_2 = 2a_1 \Rightarrow a_1 q = 2a_1 \Rightarrow q = 2$$

2975 تعداد جملات دنباله را n و قدر نسبت آن را q در نظر می‌گیریم.

در این صورت تعداد جملات شماره فرد $\frac{n}{2}$ و قدر نسبت q^2 خواهد بود.

حال با توجه به صورت سوال داریم:

$$S_n = 5S_{\frac{n}{2}} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 5 \times \frac{a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^2}{1-q} = 5 \Rightarrow 1+q = 5 \Rightarrow q = 4$$

$$\Rightarrow \frac{t_5}{t_3} = \frac{t_1 q^4}{t_1 q^2} = q^2 = 4^2 = 16$$

2976 عبارت داده شده، مجموع ۱۰ جمله از یک دنباله هندسی با

جمله اول ۱ و قدر نسبت x است:

$$A = 1 + x + x^2 + \dots + x^9 = \frac{1 \times (1-x^{10})}{1-x} = \frac{1-(\sqrt{2})^{10}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-32}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-31}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 31(1+\sqrt{2})$$

2977 در طرف اول معادله، مجموع جملات یک دنباله هندسی با جمله اول $4x$ و قدر نسبت $\frac{1}{2}$ داریم. بنابراین باید ابتدا تعداد جملات را مشخص کنیم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow \frac{x}{\lambda} = (4x) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{32} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow n = 6$$

$$\Rightarrow 4x + 2x + \dots + \frac{x}{\lambda} = 4x \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^6}{1 - \frac{1}{2}} = 4x \times \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63x}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{63x}{8} = 126 \Rightarrow x = 16$$

2978 صورت و مخرج کسر را به کمک فرمول مجموع جملات دنباله هندسی، ساده می‌کنیم:

$$1 + t + t^2 + \dots + t^9 + t^{10} + t^{11} \xrightarrow[q=1]{q=t} S_{12} = 0 \left(\frac{1-t^{12}}{1-t} \right)$$

$$1 + t^3 + t^6 + t^9 \xrightarrow[q=1]{q=t^3} S'_6 = 0 \left(\frac{1-(t^3)^6}{1-t^3} \right)$$

با تقسیم رابطه 1 بر 2 خواهیم داشت:

$$\frac{S_{12}}{S'_6} = \frac{1-t^{12}}{1-t^3} \Rightarrow \frac{S_{12}}{S'_6} = \frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)} = 1+t+t^2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

حال با جایگذاری $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ داریم:

$$\text{حاصل} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 2$$

2979

$$1 + a + b + c = 12 \Rightarrow a + aq + aq^2 = 12 \Rightarrow a(1+q+q^2) = 12$$

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + \frac{1}{aq^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{q^2 + q + 1}{aq^2} = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\times a} \frac{a(1+q+q^2)}{aq^2} = \frac{a}{3} \xrightarrow{1} \frac{12}{aq^2} = \frac{a}{3} \Rightarrow a^2 q^2 = 36$$

$$\Rightarrow aq = \pm 6 \xrightarrow{b>0} b = 6$$

2980

$$1 + S_6 - S_7 = 4 \Rightarrow a_7 + a_8 + a_9 = 4 \Rightarrow a_1 q^6(1+q+q^2) = 4$$

$$1 + S_9 - S_{10} = 32 \Rightarrow a_{10} + a_{11} + a_{12} = 32 \Rightarrow a_1 q^9(1+q+q^2) = 32$$

$$\frac{2}{1} \Rightarrow \frac{aq^6(1+q+q^2)}{aq^9(1+q+q^2)} = \frac{32}{4} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

2981 از آن جایی که بعد از هر برخورد ۵۰ درصد از اندازه شعاع کاسته

می‌شود، پس اندازه شعاع هر بار در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌شود، بنابراین جمله اول این دنباله برابر ۳۲ و قدرنسبت آن برابر $\frac{1}{2}$ است، پس:

$$S = 32 \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 32 \left(\frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} \right) = 62$$

2982 از روابط بسط مجموعه استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ} = \frac{\sin(40^\circ + 20^\circ)}{\cos(40^\circ + 20^\circ)} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

روابط $\sin(\alpha \pm \beta)$ و $\cos(\alpha \pm \beta)$ به صورت زیر است.

$$\textcircled{1} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\textcircled{2} \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

2983 ابتدا مخارج مشترک می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ - 15^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}$$

روابط $\cos \alpha \pm \sin \alpha$ به صورت زیر است:

$$\textcircled{1} \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\textcircled{2} \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = -\cos 2x = -(\cos 2x - 1) = -\left(2 \times \frac{1}{9} - 1\right) = \frac{7}{9}$$

$$\textcircled{1} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin \Delta x \cos 3x - \cos \Delta x \sin 3x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin(\Delta x - 3x) = \sin 2x = \frac{2}{3}$$

حال برای محاسبه $\cos 4x$ از رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \beta)^2}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \beta} + \frac{(\sin \beta + \cos \alpha)^2}{\sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + 2 \sin \beta \cos \alpha}$$

$$= 1 + 1 + 2 \sin(\alpha + \beta) = 2 + 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$$

2987 مخارج مشترک می‌گیریم و داریم:

$$\frac{\cos 5^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ \cos 5^\circ + \sin 5^\circ \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin(15^\circ + 5^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 4 \sin 20^\circ$$

2988 مخارج مشترک می‌گیریم و داریم:

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x} = \frac{\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x}{\sin x \cos x} = 2 \cot 2x$$

$$2 \cot 2x = \cot x - \tan x = \frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cot x = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan x = 4$$

2989 زاویه‌های 10° و 80° و همچنین زاویه‌های 55° و 35° متمم‌اند:

$$\sin 10^\circ \sin 55^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ = \cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ$$

$$= \cos(80^\circ - 35^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2990 در عبارت $\frac{\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}$ صورت و مخارج را با هم می‌کنیم:

$$\frac{(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) - (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)}{(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}$$

$$= \frac{-2 \sin \beta \cos \alpha}{2 \cos \alpha \cos \beta} = -\tan \beta$$

2991 در عبارت $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta}$ با جایگذاری روابط مثلثاتی $\alpha + \beta$ داریم:

$$\text{حاصل} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \alpha)} = \tan(\beta - \alpha)$$

از طرفی $\alpha = \frac{\pi}{6} + \beta$ است، پس $\beta - \alpha = -\frac{\pi}{6}$ است:

$$\tan(\beta - \alpha) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2992 ابتدا صورت کسرها باز کرده و سپس کسرها تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} = \tan \alpha + \tan \beta = \left[\frac{7}{3} + \frac{1}{6}\right] = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

2993 ابتدا $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ را ساده می‌کنیم:

$$\left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) + \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \sqrt{3} \sin x$$

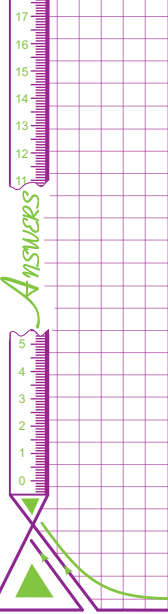
از طرفی $\tan x = \sqrt{2}$ است، پس $\cot x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ است و داریم:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\sqrt{3} \sin x = \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{2}$$



2994 ابتدا $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ را ساده می‌کنیم:

$$\cos(3\pi - \frac{\pi}{4} + \alpha) = -\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = -[\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha]$$

حال با توجه به این‌که $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ است، $\cos \alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (\frac{\sqrt{2}}{10})^2 = 1 - \frac{2}{100} = \frac{98}{100}$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ ربع دوم}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{98}}{10} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow -\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = -[\frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{7\sqrt{2}}{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{10}] = \frac{3}{5}$$

2995 ابتدا $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ را ساده می‌کنیم:

$$\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha) = \sin(3\pi + \frac{\pi}{4} + \alpha) = -\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$$

$$\Rightarrow -\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -[\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4}] = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

حال با توجه به این‌که α در ربع اول و $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ است، با کمک مثلث

مقابل داریم: $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1+\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

2996 می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \cos \alpha = \frac{1}{3}$ است. در ضمن چون α زاویه ای حاده است، پس $\sin \alpha$ مثبت است:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$$

$$\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

$$= \frac{\overbrace{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}^{\cos(\alpha+\beta)} \overbrace{(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}^{\cos(\alpha-\beta)}}{\underbrace{(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)}_{\sin(\alpha-\beta)} \underbrace{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}_{\sin(\alpha+\beta)}}$$

$$= \cot(\alpha + \beta) \cot(\alpha - \beta) = \cot 135^\circ \times \frac{1}{\tan(\alpha - \beta)} = -1 \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

2998

$$(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$$

$$\cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y$$

$$= 1 + 1 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos(x - y) = \frac{1}{4}$$

حال با استفاده از رابطه $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ داریم:

$$\cos(2x - 2y) = 2\cos^2(x - y) - 1 = 2(\frac{1}{4})^2 - 1 = -\frac{7}{8}$$

2999 ابتدا عبارت $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ را ساده می‌کنیم:

$$(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha) - (\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha)$$

$$= 2\sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha$$

حال از آن جایی که $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ است خواهیم داشت:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9}$$

$$\xrightarrow{\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sqrt{2} \sin \alpha = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{6}}{3}) = -\frac{2}{3}$$

3000

$$\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}) + (\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2\cos x \cos \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\cos x \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}$$

بنابراین مقدار $\cos 2x$ برابر است با:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2(\frac{1}{3})^2 - 1 = 2 \times \frac{1}{9} - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$$

3001

$$\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = 2$$

$$\Rightarrow 2\sin x + 2\cos x = \sin x - \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x = -2\cos x \Rightarrow \tan x = -2$$

3002 ابتدا مقادیر $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \\ \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2(\frac{4}{5})^2 - 1 = \frac{7}{25} \end{cases}$$

حال حاصل عبارت $\sin(\frac{\pi}{4} + 2\theta) + \cos(\frac{3\pi}{4} - 2\theta)$ را به دست می‌آوریم:

$$(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2\theta + \sin 2\theta \cos \frac{\pi}{4}) - (\sin 2\theta \cos \frac{3\pi}{4} + \cos 2\theta \sin \frac{3\pi}{4})$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{7}{25} + \frac{24}{25} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{24}{25} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7}{25} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{31\sqrt{2} - 48}{50}$$