راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

گام اول — فیلم آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر قسمت QR-Codeهای صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر قسمت مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

گام دوم — درسنامه آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام اول) تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. نگاه کتاب در این قسمت، کاملاً تستی بوده، بنابراین از ارائهٔ اثبات‌هایی که در این‌گونه آزمون‌ها کاربرد ندارد، پرهیز کرده‌ایم و اثبات‌های مهم که در امتحانات مدرسه مطرح می‌شوند، در پرسش‌های تشریحی پوشش داده شده‌اند.
۴. نکات و روش‌های کنکوری در خلال درس‌نامه آورده شده است و با مثال و تست‌های آموزشی متنوع به دانش‌آموز کمک می‌کنیم تا به مطالب تسلط یابد.

گام سوم — پرسش‌های تشریحی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام اول و دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

گام چهارم — پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام اول تا سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

FILM

درسنامه آموزشی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پرسش‌های تشریحی

فصل ۱

قسمت دوم

استدلال

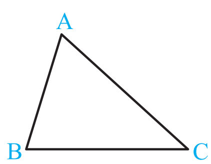
استدلال

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی براساس مجموعهٔ محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گویند.

مثلاً اگر با مشاهدهٔ تعدادی چهارضلعی مانند مربع، مستطیل، ذوزنقه، متوازی‌الاضلاع نتیجه‌گیری کنیم که مجموع اندازهٔ زوایای هر چهارضلعی محدب 360° است، یک استدلال استقرایی انجام داده‌ایم.

استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری کلی براساس مفاهیمی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی نامیده می‌شود.

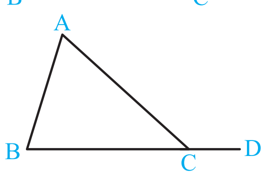
مجموع اندازهٔ زوایای داخلی هر مثلث



مجموع اندازهٔ زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

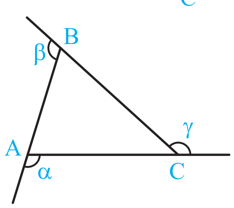
زاویهٔ خارجی مثلث



اگر یک ضلع مثلث را امتداد دهیم، زاویه‌ای بیرون مثلث ایجاد می‌شود که زاویهٔ خارجی نامیده می‌شود. اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر مجموع اندازهٔ زوایای داخلی غیرمجاور آن می‌باشد.

$$A\hat{C}D=\hat{A}+\hat{B}$$

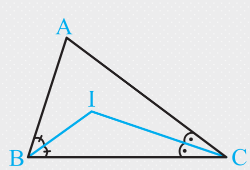
مجموع اندازه‌های زوایای خارجی هر مثلث



مجموع اندازه‌های زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° است.

$$\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$$

مثال: ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ حاصل از برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی مثلث برابر 90° به علاوهٔ نصف اندازهٔ زاویهٔ سوم است.

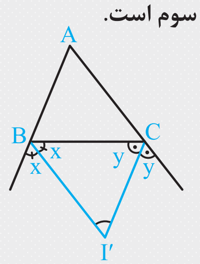


پاسخ: نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای داخلی B و C را I می‌نامیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $B\hat{I}C=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\ \overset{\Delta}{BIC}:\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+B\hat{I}C=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\hat{B}+\hat{C}=180^\circ-\hat{A}\\ \hat{B}+\hat{C}+2B\hat{I}C=360^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow 180^\circ-\hat{A}+2B\hat{I}C=360^\circ\Rightarrow 2B\hat{I}C=180^\circ+\hat{A}\Rightarrow B\hat{I}C=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$$

مثال: ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ حاصل از برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی یک مثلث برابر 90° منهای نصف اندازهٔ زاویهٔ سوم است.



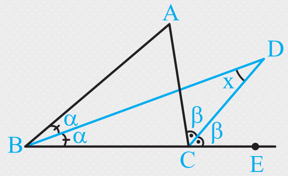
پاسخ: نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای خارجی B و C را I′ می‌نامیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $B\hat{I'}C=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$. داریم:

$$2x=180^\circ-\hat{B}\Rightarrow x=90^\circ-\frac{\hat{B}}{2}\quad,\quad 2y=180^\circ-\hat{C}\Rightarrow y=90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}$$

$$x+y+B\hat{I'}C=180^\circ\Rightarrow 90-\frac{\hat{B}}{2}+90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}+B\hat{I'}C=180^\circ\Rightarrow B\hat{I'}C=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2}=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$

مثال: **ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ حاصل از برخورد نیمساز یک زاویه داخلی و نیمساز زاویهٔ خارجی دیگر برابر نصف اندازهٔ زاویهٔ سوم است.**

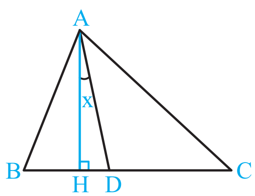
پاسخ: نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویهٔ B و نیمساز زاویهٔ خارجی C را D می‌نامیم، می‌خواهیم ثابت کنیم $\hat{D}=\frac{\hat{A}}{۲}$



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BCD} \text{ زاویهٔ خارجی } D\hat{C}E \Rightarrow \beta = x+\alpha \\ \overset{\Delta}{ABC} \text{ زاویهٔ خارجی } A\hat{C}E \Rightarrow ۲\beta = ۲\alpha+\hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow ۲(x+\alpha)=۲\alpha+\hat{A}$$

$$\Rightarrow ۲x+۲\alpha=۲\alpha+\hat{A} \Rightarrow ۲x=\hat{A} \Rightarrow x=\frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{D}=\frac{\hat{A}}{۲}$$

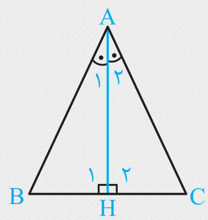
زاویهٔ بین نیمساز و ارتفاع یک مثلث



در هر مثلث زاویهٔ بین نیمساز و ارتفاع رسم شده از یک رأس مثلث برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر مثلث.

$$x=\frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$$

مثال: **ثابت کنید اگر در یک مثلث، نیمساز یک زاویه ارتفاع هم باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.**



پاسخ: فرض مسئله روی شکل آورده شده است. می‌خواهیم ثابت کنیم $AB=AC$. داریم:

$$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \text{ ، } AH=AH \text{ ، } \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ \xrightarrow{(\text{زض})} \overset{\Delta}{ABH} \cong \overset{\Delta}{ACH} \Rightarrow AB=AC$$

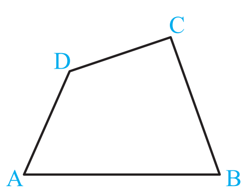
تست: **در مثلث ABC، $\hat{B}>\hat{A}>\hat{C}$، اگر اندازهٔ زاویهٔ بین نیمساز و ارتفاع رأس A برابر ۹° و اندازهٔ زاویهٔ بین نیمساز و ارتفاع رأس B برابر $۴/۵^\circ$ باشد، زاویهٔ C چند درجه است؟**

۱) ۴۸ ۲) ۵۱ ۳) ۴۵ ۴) ۵۶

پاسخ: $\frac{\hat{A}-\hat{C}}{۲}=۴/۵^\circ \Rightarrow \hat{A}-\hat{C}=۹^\circ \Rightarrow \hat{A}=\hat{C}+۹^\circ$ ، $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}=۹^\circ \Rightarrow \hat{B}-\hat{C}=۱۸^\circ \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}+۱۸^\circ$

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}+۹^\circ+\hat{C}+۱۸^\circ+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\hat{C}=۱۸۰^\circ-۲۷^\circ \Rightarrow \hat{C}=۶۰^\circ-۹^\circ=۵۱^\circ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

مجموع اندازه‌های زوایای یک چهارضلعی محدب

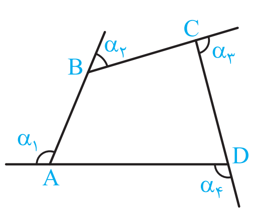


در هر چهارضلعی محدب مجموع اندازهٔ زوایای داخلی برابر ۳۶۰° است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$$

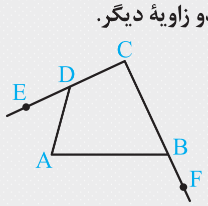
مجموع اندازه‌های زوایای خارجی یک چهارضلعی محدب

در هر چهارضلعی محدب مجموع اندازهٔ زوایای خارجی برابر ۳۶۰° است.



$$\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳+\alpha_۴=۳۶۰^\circ$$

مثال: **ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب، مجموع اندازه‌های زوایای مقابل داخلی برابر است با مجموع اندازهٔ زوایای خارجی دو زاویهٔ دیگر.**

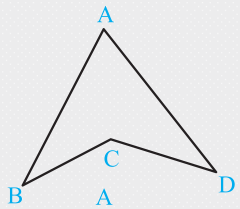


پاسخ: در چهارضلعی روبه‌رو می‌خواهیم ثابت کنیم $\hat{A}+\hat{C}=A\hat{D}E+A\hat{B}F$. داریم:

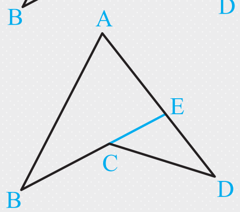
$$\hat{A}+A\hat{D}C+\hat{C}+A\hat{B}C=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۱۸۰^\circ-A\hat{D}E+\hat{C}+۱۸۰^\circ-A\hat{B}F=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=A\hat{D}E+A\hat{B}F$$

مثال: در چهارضلعی مقابل ثابت کنید $B\hat{C}D = \hat{A}+\hat{B}+\hat{D}$

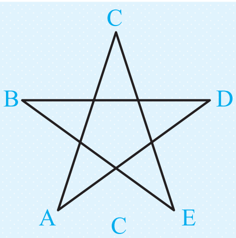


پاسخ: ضلع BC را امتداد می‌دهیم تا ضلع AD را در E قطع کند. داریم:

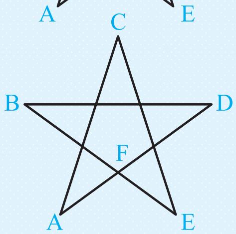


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{CDE} \text{ زاویهٔ خارجی } B\hat{C}D \Rightarrow B\hat{C}D = C\hat{E}D + \hat{D} \\ \overset{\Delta}{ABE} \text{ زاویهٔ خارجی } C\hat{E}D \Rightarrow C\hat{E}D = \hat{A}+\hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{C}D = \hat{A}+\hat{B}+\hat{D}$$

تست: در شکل مقابل، مجموع اندازه‌های زوایای A، B، C، D و E کدام است؟



۱) ۱۸۰°
۲) ۲۷۰°
۳) کم‌تر از ۱۸۰°
۴) بین ۱۸۰° و ۲۷۰°



پاسخ: در چهارضلعی ACEF داریم $A\hat{F}E = \hat{A}+\hat{C}+\hat{E}$ (*) (مثال قبل). همچنین $B\hat{F}D$ و $A\hat{F}E$ متقابل به رأس‌اند، پس $B\hat{F}D = A\hat{F}E$ و در مثلث BFD داریم:

$$\hat{B}+\hat{D}+B\hat{F}D = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{D}+A\hat{F}E = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{(*)} \hat{B}+\hat{D}+\hat{A}+\hat{C}+\hat{E} = ۱۸۰^\circ$$

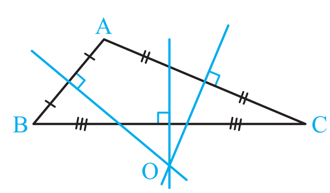
بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

برخی از نقاط همرسی در مثلث

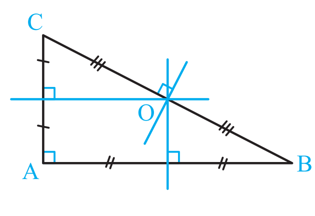
۱- عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرسند.

نکته نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، از سه رأس مثلث به یک فاصله است. $(OA = OB = OC)$

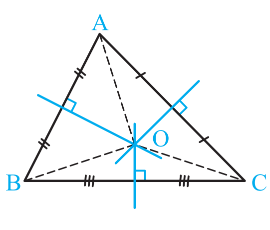
نکته در مثلث حاده‌الزوایا، قائم‌الزاویه، منفرجه‌الزاویه به‌ترتیب نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها، داخل، رو و خارج مثلث قرار می‌گیرد.



مثلث منفرجه‌الزاویه

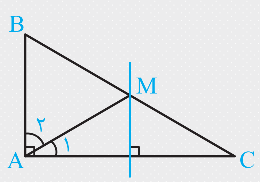


مثلث قائم‌الزاویه



مثلث حاده‌الزوایا

مثال: ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها وسط وتر قرار دارد.

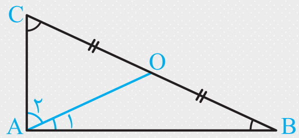


پاسخ: عمودمنصف ضلع AC را رسم می‌کنیم، فرض کنیم M نقطهٔ تلاقی آن با وتر BC باشد، M را به A وصل می‌کنیم. می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است پس $MA = MC$ و می‌توان نوشت:

$$MA = MC \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C} \xrightarrow{\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ} \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ - \hat{C}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم $\hat{B}+\hat{C} = ۹۰^\circ$ یا $\hat{B} = ۹۰^\circ - \hat{C}$ و با توجه به تساوی فوق نتیجه می‌شود $\hat{B} = \hat{A}_۲$، پس $BM = MA$ و این یعنی نقطهٔ M روی عمودمنصف ضلع AB قرار دارد و $BM = MA = MC$ پس عمودمنصف BC نیز از M می‌گذرد، لذا عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، در نقطهٔ وسط وتر (در نقطهٔ M) همرسند.

مثال: **ثابت کنید اگر نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلثی روی ضلع مثلث قرار گیرد، مثلث قائم‌الزاویه است.**



پاسخ: فرض کنید در شکل روبه‌رو O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{A}=۹۰^\circ$. داریم:

$$O \text{ روی عمودمنصف } AB \Rightarrow OA=OB \Rightarrow \widehat{A}_۱=\widehat{B}$$

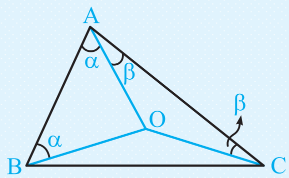
$$O \text{ روی عمودمنصف } AC \Rightarrow OA=OC \Rightarrow \widehat{A}_۲=\widehat{C}$$

اما در مثلث ABC جمع زوایا برابر ۱۸۰° است، پس:

$$\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲+\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲(\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲)=۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲=۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{A}=۹۰^\circ$$

تست: **در یک مثلث حاده‌الزوایا $\widehat{A}=۸۴^\circ$ و O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها می‌باشد. اندازهٔ زاویهٔ $B\widehat{O}C$ کدام است؟**

۱) ۱۶۲° ۲) ۱۶۸° ۳) ۱۵۰° ۴) ۱۳۵°



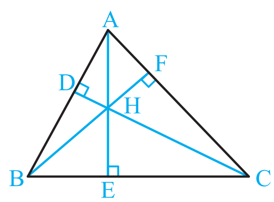
پاسخ: نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث حاده‌الزوایا (O) داخل آن قرار می‌گیرد. چون $OA=OB=OC$، پس مثلث‌های AOB و AOC متساوی‌الساقین‌اند، پس زوایای آن‌ها مطابق شکل می‌شود و در چهارضلعی $ABOC$ داریم:

$$B\widehat{O}C=A\widehat{B}O+\widehat{A}+A\widehat{C}O=\alpha+\alpha+\beta+\beta=۲(\alpha+\beta)=۲\widehat{A} \Rightarrow B\widehat{O}C=۲\times ۸۴^\circ=۱۶۸^\circ$$

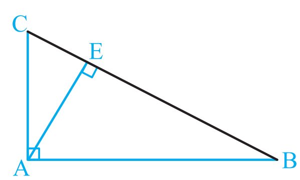
بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۲- ارتفاع‌های هر مثلث همرسند.

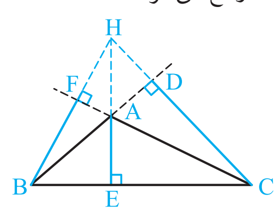
نکته در مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها رأس زاویهٔ قائمه است و در مثلث منفرجه‌الزاویه این نقطه خارج مثلث قرار می‌گیرد و در مثلث حاده‌الزوایا داخل مثلث واقع می‌شود.



مثلث حاده‌الزوایا

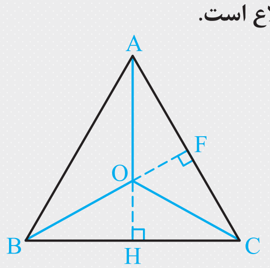


مثلث قائم‌الزاویه



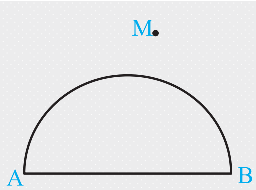
مثلث منفرجه‌الزاویه

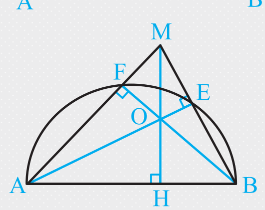
مثال: **ثابت کنید اگر در مثلثی نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها بر هم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع است.**



پاسخ: فرض کنیم O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها و ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. چون O نقطهٔ همرسی ارتفاع‌هاست پس امتداد OA بر ضلع BC عمود می‌شود و O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها می‌باشد لذا $OB=OC$ پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH و OCH به حالت وتر یک ضلع همنهشت‌اند در نتیجه $BH=CH$. حال می‌توان گفت دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند پس $AB=AC$. با استدلال مشابه نتیجه می‌شود $AB=BC$ لذا $AB=AC=BC$ و این یعنی مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

مثال: **در شکل روبه‌رو با داشتن یک خط‌کش غیر مدرج می‌خواهیم از نقطهٔ M عمودی بر قطر نیم‌دایرهٔ داده شده (AB) رسم کنیم، طریقهٔ ترسیم را با ذکر دلیل شرح دهید.**

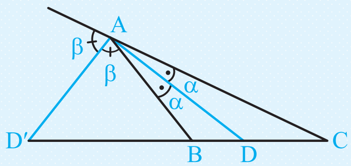




پاسخ: M را به A و B وصل می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی MA و MB را با نیم‌دایره به‌ترتیب F و E می‌نامیم. زوایای AFB و AEB روبه‌رو به قطرند، پس قائمه‌اند، یعنی در مثلث AMB، پاره‌خط‌های AE و BF ارتفاع می‌باشند، محل تلاقی آن‌ها یعنی نقطهٔ O نقطهٔ همرسی ارتفاع‌هاست، پس امتداد MO بر AB عمود است.

تست: در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A و AD' نیمساز زاویهٔ خارجی A است. نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ADD' چگونه است؟

۱) داخل مثلث ABC ۲) روی مثلث ABC ۳) بیرون مثلث ABC ۴) وضعیت مشخصی ندارد.

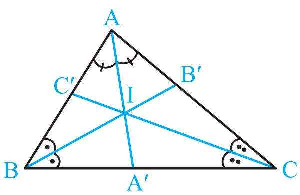


پاسخ: مطابق شکل در مثلث ABC، نیمساز داخلی زاویهٔ A و نیمساز زاویهٔ خارجی آن رسم شده‌اند. داریم:

$$۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۹۰^\circ \Rightarrow D'\widehat{A}D = ۹۰^\circ$$

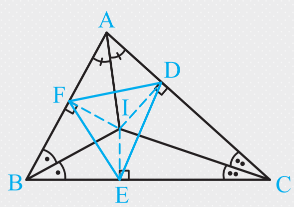
و این یعنی مثلث ADD' قائم‌الزاویه است پس نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های آن همان رأس زاویهٔ قائمه یعنی نقطهٔ A است پس نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ADD' روی مثلث ABC قرار دارد. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

۳- نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرسند.



نکته نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همواره داخل آن قرار دارد و از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

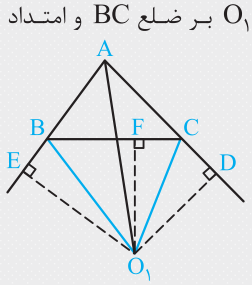
مثال: اگر I نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای مثلث ABC باشد و نقاط F، E و D پای عمودهایی باشند که از I بر اضلاع مثلث ABC وارد می‌شوند، ثابت کنید I نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF است.



پاسخ: می‌دانیم I نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای هر مثلث از اضلاع آن به یک فاصله است یعنی در شکل مقابل داریم $IE = IF = ID$. پس نقطهٔ I از رأس‌های مثلث DEF به یک فاصله است، لذا I نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF است.

مثال: ثابت کنید نیمساز هر زاویهٔ داخلی مثلث با نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی دیگر همرس‌اند.

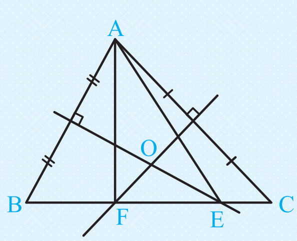
پاسخ: نیمسازهای زوایای خارجی B و C در مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را O_1 می‌نامیم. از O_1 بر ضلع BC و امتداد ضلع‌های AC و AB عمود رسم می‌کنیم. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} O_1 \text{ روی نیمساز } B\widehat{C}D \Rightarrow O_1D = O_1F \\ O_1 \text{ روی نیمساز } C\widehat{B}E \Rightarrow O_1F = O_1E \end{array}\right\} \Rightarrow O_1E = O_1D$$

یعنی نقطهٔ O_1 از دو ضلع زاویهٔ $\widehat{A}$ به یک فاصله است، پس O_1 روی نیمساز زاویهٔ $\widehat{A}$ قرار دارد و این یعنی نیمسازهای زوایای خارجی B و C و نیمساز زاویهٔ داخلی A در نقطهٔ O_1 همرسند.

تست: مثلث حاده‌الزوایای ABC را در نظر می‌گیریم. عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC ضلع BC را به‌ترتیب در E و F قطع می‌کنند، کدام گزاره درست است؟



۱) نقطهٔ همرسی نیمسازهای دو مثلث ABC و AEF بر هم منطبق‌اند.

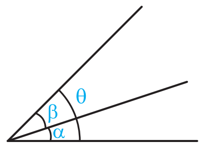
۲) نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث ABC، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث AEF است.

۳) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث AEF است.

۴) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC، نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث AEF است.

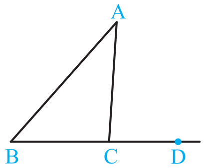
پاسخ: بنا به فرض نقطهٔ O، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC است. همچنین F روی عمودمنصف AC است پس $AF = CF$. در هر مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف قاعده نیمساز زاویهٔ رأس هم می‌باشد، لذا عمودمنصف ضلع AC نیمساز زاویهٔ $A\widehat{F}C$ است. با استدلال مشابه در مثلث متساوی‌الساقین AEB عمودمنصف ضلع AB نیمساز زاویهٔ AEB است. پس O نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث AEF است. بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

نامساوی‌ها در مثلث



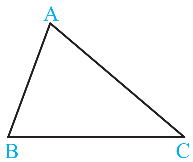
۱) در شکل مقابل همواره داریم:

$$\theta > \beta \;,\; \theta > \alpha$$



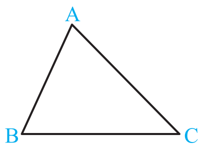
۲) هر زاویهٔ خارجی در مثلث از زاویهٔ داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است. یعنی در شکل مقابل داریم:

$$A\hat{C}D > \hat{B} \quad , \quad A\hat{C}D > \hat{A}$$



۳) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

$$AB < AC \Rightarrow \hat{C} < \hat{B}$$



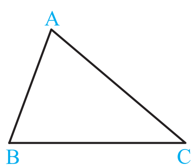
۴) در هر مثلث مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازهٔ ضلع سوم بزرگ‌تر است.

$$\begin{cases} AB + AC > BC \\ AB + BC > AC \\ AC + BC > AB \end{cases}$$

۵) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

قضیه و عکس قضیه

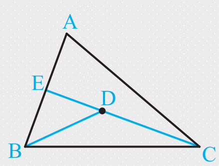
برخی نتایج مهم و کلی که با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، **قضیه** نامیده می‌شوند و اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن‌چه حاصل می‌شود **عکس قضیه** گفته می‌شود. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.



عکس قضیهٔ شماره (۳): اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

$$\hat{C} < \hat{B} \Rightarrow AB < AC$$

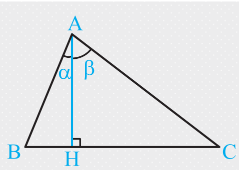
مثال: ثابت کنید اگر نقطه‌ای داخل مثلث باشد، زاویه‌ای که رأس آن، این نقطه بوده و اضلاعش از دو سر یک ضلع مثلث بگذرد، از زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع بزرگ‌تر است.



پاسخ: فرض کنیم D نقطه‌ای داخل مثلث ABC باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم $B\hat{D}C > \hat{A}$. به همین جهت CD را امتداد می‌دهیم تا AB را در E قطع کند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{BED زاویهٔ خارجی مثلث } B\hat{D}C \Rightarrow B\hat{D}C > B\hat{E}D \\ \text{AEC زاویهٔ خارجی مثلث } B\hat{E}D \Rightarrow B\hat{E}D > \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{D}C > \hat{A}$$

مثال: ثابت کنید ارتفاع مثلث با ضلع بزرگ‌تر زاویهٔ بزرگ‌تر می‌سازد.

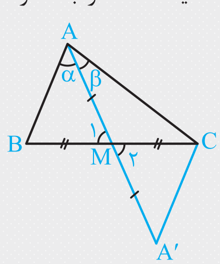


پاسخ: با فرض $AC > AB$ می‌خواهیم ثابت کنیم $\beta > \alpha$. داریم:

$$AB < AC \Rightarrow \hat{C} < \hat{B} \Rightarrow -\hat{C} > -\hat{B} \Rightarrow 90^\circ - \hat{C} > 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \beta > \alpha$$

مثال: ثابت کنید میانهٔ مثلث با ضلع کوچک‌تر، زاویهٔ بزرگ‌تری می‌سازد.

پاسخ: در مثلث ABC میانهٔ AM رسم شده است. با فرض $AC > AB$ می‌خواهیم ثابت کنیم $\alpha > \beta$، به همین‌جهت میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} BM = CM \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ AM = A'M \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌ز‌ض})} \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{A'CM} \Rightarrow \begin{cases} A'C = AB \\ \hat{A'} = \alpha \end{cases}$$

بنا به فرض $AC > AB$، پس نتیجه می‌شود $AC > A'C$. داریم:

$$\overset{\Delta}{A'AC} : A'C < AC \Rightarrow A'\hat{A}C < \hat{A'} \Rightarrow \beta < \alpha$$

مثال: ثابت کنید طول هر ضلع مثلث از نصف محیط آن کم‌تر است.

پاسخ : در یک مثلث دلخواه با طول اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

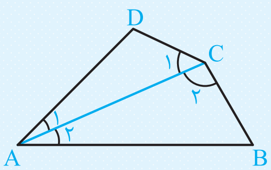
نامساوی مثلث: $a < b + c \xrightarrow{+a \text{ طرفین}} 2a < a + b + c \Rightarrow a < \dfrac{a+b+c}{2}$

پس ضلع به طول a از نصف محیط مثلث کم‌تر است و به طریق مشابه نتیجه می‌شود b و c هم از نصف محیط کم‌تر هستند.

تست: در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، CD کوچک‌ترین ضلع و AB بزرگ‌ترین ضلع است. کدام نامساوی همواره درست است؟

۱) $\hat{A} > \hat{B}$ ۲) $\hat{B} > \hat{C}$ ۳) $\hat{C} > \hat{D}$ ۴) $\hat{A} < \hat{C}$

پاسخ : بنا به فرض AB بزرگ‌ترین ضلع و CD کوچک‌ترین ضلع است. قطر AC را رسم می‌کنیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} : AB > BC \Rightarrow \hat{C}_2 > \hat{A}_2 \\ \overset{\Delta}{ACD} : AD > CD \Rightarrow \hat{C}_1 > \hat{A}_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{C} > \hat{A}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) درست است.

گزاره: جمله‌ای است خبری که درست یا نادرست می‌باشد، اگر چه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد.

گزارهٔ ساده: گزاره‌ای که تنها یک خبر را اعلام کند به آن گزارهٔ ساده گفته می‌شود. مثلاً گزارهٔ «فردا هوا برفی است.» یک گزارهٔ ساده است.

گزارهٔ مرکب: به گزاره‌ای که بیش از یک خبر را اعلام کند، گزارهٔ مرکب گفته می‌شود، مثلاً گزارهٔ «۲ عددی زوج و درخت سبز است.»، یک گزارهٔ مرکب است.

تست: چند تا از گزاره‌های زیر مرکب است؟

«بعضی از اعداد اول زوج‌اند.» ـ «هیچ عددی از خودش کوچک‌تر نیست.» ـ «۵ فرد است یا اول است.» ـ «اگر $a = b$ ، آن‌گاه $a \le b$ »

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ : گزارهٔ «۵ فرد است یا اول است.» گزارهٔ مرکب است، هم‌چنین گزارهٔ «اگر $a = b$ آن‌گاه $a \le b$ » گزارهٔ مرکب است، پس گزینهٔ (۲) درست است.

نقیض یک گزاره: اگر p یک گزاره باشد، گزارهٔ «چنین نیست که p » را نقیض گزارهٔ p می‌گوییم. مثلاً نقیض «۵ فرد است.» می‌شود «چنین نیست که ۵ فرد است.» و در زبان عادی می‌شود «۵ فرد نیست.».

نقیض گزاره‌هایی که با «**هر**» شروع می‌شوند، با «**وجود دارد**» شروع می‌شود و جمله منفی می‌شود. مثلاً نقیض گزارهٔ «هر مثلثی متساوی‌الاضلاع است.» می‌شود «وجود دارد مثلثی که متساوی‌الاضلاع نیست.» نقیض گزاره‌هایی که با «**وجود دارد**» شروع می‌شوند، با «**هر**» شروع می‌شود و جمله منفی می‌شود. مثلاً نقیض گزارهٔ «دو زاویهٔ متقابل به رأس وجود دارد که مکمل‌اند.» می‌شود «هر دو زاویهٔ متقابل به رأس، مکمل نیستند.»

تست: نقیض گزارهٔ «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° است.» کدام است؟

۱) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.
۲) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° نیست.
۳) مجموع زوایای داخلی هر مثلث از 180° بیش‌تر است.
۴) مجموع زوایای داخلی هر مثلث از 180° کم‌تر است.

پاسخ : «چنین نیست که مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° است.» و معادل آن این است که بگوییم «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° نیست.»، پس گزینهٔ (۲) درست است.

نکته گزاره‌هایی که با کلمهٔ «هیچ» بیان می‌شوند را می‌توان با «هر» هم بیان کرد. مثلاً «هیچ مثلث متساوی‌الساقین نیست.» بدین‌معنی است که «هر مثلثی متساوی‌الساقین نیست.»

تست: نقیض گزارهٔ «هیچ مثلثی دو زاویهٔ قائمه ندارد.» کدام است؟

۱) مثلثی وجود دارد که دو زاویهٔ قائمه دارد.
۲) مثلثی وجود دارد که بیش از دو زاویهٔ قائمه دارد.
۳) مثلثی وجود دارد که کم‌تر از دو زاویهٔ قائمه دارد.
۴) مثلثی وجود دارد که دو زاویهٔ قائمه ندارد.

پاسخ : «چنین نیست که هیچ مثلثی دو زاویهٔ قائمه ندارد.» معادل آن، این است که بگوییم «وجود دارد مثلثی که دو زاویهٔ قائمه دارد.»

پس گزینهٔ (۱) درست است.

تست: نقیض گزارهٔ «هر مثلث حداقل یک زاویهٔ کوچک‌تر از 60° دارد.» کدام است؟

۱) مثلثی وجود دارد که زاویهٔ کوچک‌تر از 60° ندارد.
۲) مثلثی وجود دارد که دقیقاً یک زاویهٔ 60° دارد.
۳) مثلثی وجود داد که یک زاویهٔ بزرگ‌تر از 60° دارد.
۴) مثلثی وجود دارد که حداکثر یک زاویهٔ بزرگ‌تر از 60° دارد.

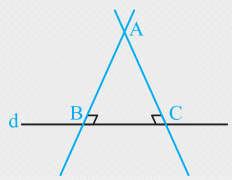
پاسخ : «چنین نیست که هر مثلث حداقل یک زاویهٔ کوچک‌تر از 60° دارد.» معادل آن، این است که «مثلثی وجود دارد که زاویهٔ کوچک‌تر از 60° ندارد.»
پس گزینهٔ (۱) درست است.

گزارهٔ شرطی: گزاره‌ای که به‌صورت «اگر ... آن‌گاه ...» بیان شود، گزارهٔ شرطی نامیده می‌شود. مثلاً گزارهٔ «اگر دو ضلع مثلثی برابر باشند، آن‌گاه زوایای مقابل آن‌ها برابر هستند.» یک گزارهٔ شرطی می‌باشد.

برهان غیرمستقیم (برهان خلف)

در این روش، برای اثبات یک گزاره؛
آ) فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد (فرض خلف).
ب) به کمک روش‌های درست ریاضی، گزاره‌ای را نتیجه می‌گیریم که با مفروضات مسئله یا یک قضیه یا یک مفهوم درست در تناقض باشد.
پ) با توجه به قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم نقیض حکم نادرست است، در نتیجه حکم درست است.

مثال: ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط، فقط یک عمود می‌توان بر آن رسم کرد.



پاسخ : فرض کنیم از نقطهٔ مفروض A بیش از یک عمود بر خط d رسم شود، مثلاً دو خط بر d عمود شود (فرض خلف)، در این‌صورت مجموع زوایای مثلث ABC (مطابق شکل) بیش از 180° می‌شود که تناقض است، پس فرض خلف غلط و حکم درست می‌باشد.

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی یا یک حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. مثلاً حکم کلی «هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» با مثال نقض لوزی رد می‌شود.

تست: کدام گزاره با مثال نقض رد می‌شود؟

۱) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.
۲) هر مربع یک مستطیل است.
۳) قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.
۴) نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای هر مثلث داخل آن است.

پاسخ : در مثلث قائم‌الزاویه دو تا از ارتفاع‌ها همان اضلاع زاویهٔ قائمه هستند، پس از ضلع‌ها کوچک‌تر نیستند.
پس گزینهٔ (۱) درست می‌باشد.

گزارهٔ دوشرطی: اگر گزارهٔ شرطی و عکس آن را با کلمهٔ «و» ترکیب کنیم، گزارهٔ دوشرطی ایجاد می‌شود، یعنی «اگر p آن‌گاه q» و «اگر q آن‌گاه p» گزارهٔ دوشرطی نامیده می‌شود که به‌صورت خلاصه «p اگر و تنها اگر q» نوشته می‌شود و آن را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهند.

مثال: قضیهٔ فیثاغورس را به‌صورت دوشرطی بنویسید.

پاسخ : مثلثی قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع آن برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن باشد.

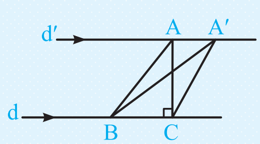
تست: کدام گزاره را می‌توان به‌صورت دوشرطی نوشت؟

۱) در هر مستطیل قطرها برابرند.
۲) در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.
۳) هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.
۴) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت برابر دارند.

پاسخ : اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند و عکس آن نیز درست است، یعنی اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، پس می‌توان آن را به‌صورت دوشرطی نوشت «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهای آن یکدیگر را نصف کنند.». بنابراین گزینهٔ (۲) درست است. عکس سایر گزینه‌ها درست نیستند.

عکس گزینهٔ (۱): اگر در یک چهارضلعی قطرها برابر باشند، آن چهارضلعی مستطیل است. ⇐ مثال نقض: در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین قطرها برابرند، اما مستطیل نیست.

عکس گزینهٔ (۳): هر متوازی‌الاضلاع یک لوزی است. ⇐ مثال نقض: متوازی‌الاضلاع به اضلاع ۳ و ۵ نمی‌تواند لوزی باشد.

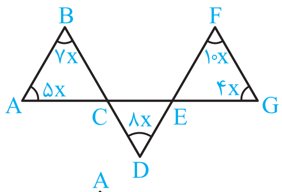


عکس گزینهٔ (۴): اگر دو مثلث هم‌مساحت باشند، آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشت هستند. ⇐ مثال نقض: دو مثلث ABC و $A'BC$ مطابق شکل، دارای قاعدهٔ مشترک BC هستند و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC در آن‌ها برابر با فاصلهٔ دو خط موازی d و d' است، پس مساحت آن‌ها برابر است، اما هم‌نهشت نیستند. (شکل روبه‌رو)

قسمت دوم: استدلال

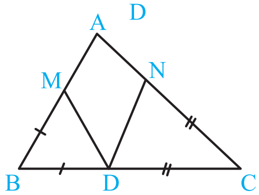
مجموع زوایا در مثلث و چندضلعی‌ها

۴۳. با توجه به شکل، اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



۱) ۵۰ ۲) ۴۰
۳) ۶۰ ۴) ۳۰

۴۴. در شکل مقابل $\widehat{A} = 58^\circ$، $BM = BD$ و $CN = CD$. زاویهٔ MDN چند درجه است؟ (سراسری ریاضی - ۹۱)



۱) ۵۸ ۲) ۵۹
۳) ۶۱ ۴) ۶۲

۴۵. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، اندازهٔ زاویهٔ بین دو نیمساز زوایای A و B برابر 110° است. اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۰

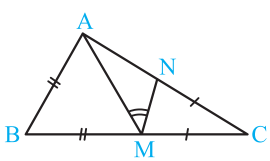
۴۶. در مثلث ABC، زاویهٔ $\widehat{A} = 108^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازهٔ $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم، کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث ADE چند درجه است؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۵۴

۴۷. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، قاعدهٔ BC را از هر دو طرف به اندازهٔ ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی آن است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۸. در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند و $\widehat{M} = 43^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ BAC چند درجه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)



۱) ۹۳
۲) ۹۴
۳) ۹۶
۴) ۹۷

۴۹. در مثلث متساوی الساقین $ABC\,(AB = AC)$، در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویهٔ داخلی C را در D قطع می‌کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد، AD برابر کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۴)

۱) AM ۲) MD ۳) MC ۴) $\frac{AC}{2}$

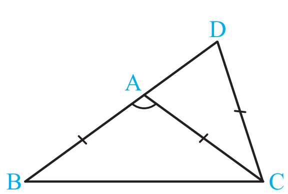
۵۰. در مثلث متساوی الساقین $ABC\,(AB = AC)$، قاعدهٔ BC را به اندازهٔ ساق تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم، اگر زاویهٔ خارجی رأس A از مثلث ABD برابر ۱۰۲ درجه باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث ABC، چند درجه است؟ (سراسری تجربی - ۹۴)

۱) ۳۴ ۲) ۳۸ ۳) ۴۲ ۴) ۴۴

۵۱. در مثلث $ABC\,(AB = AC)$، ساق AB را به اندازهٔ $BD = BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر AC باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰
۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۵۲. در مثلث متساوی الساقین $ABC\,(AB = AC)$، ساق BA را از نقطهٔ B به اندازهٔ قاعدهٔ BC تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم اگر $CD = CA$ باشد، زاویهٔ A چند درجه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)

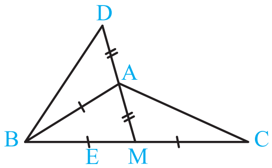


۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۵
۳) ۱۰۸ ۴) ۱۱۲

۵۳. در مثلث $ABC\ (\widehat{A} = 90^\circ\ ,\ \widehat{C} = 24^\circ)$، از رأس C خطی بر AC عمود کرده و بر روی آن $CD = CB$ را طوری جدا می‌کنیم که BD ضلع AC را قطع کند. زاویهٔ DBC چند درجه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

۱) ۳۳ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۴۸

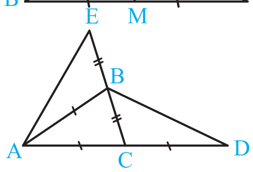
۵۴. در شکل مقابل اگر $\hat{D}+\hat{C}=۶۱^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ ABC چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۸۹)



۱) ۳۹ ۲) ۵۶

۳) ۵۸ ۴) ۶۱

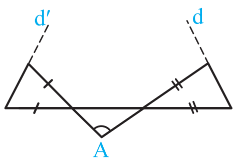
۵۵. در شکل مقابل زاویهٔ $B\hat{A}C=۵۲^\circ$، مجموع دو زاویهٔ D و E چند درجه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)



۱) ۳۸ ۲) ۵۲

۳) ۵۸ ۴) ۶۴

۵۶. در شکل مقابل، دو مثلث کناری دو مثلث متساوی‌الساقین‌اند و $\hat{A}=۱۰۰^\circ$، دو خط d و d' با زاویهٔ چند درجه متقاطع‌اند؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)



۱) ۲۰

۲) ۴۰

۳) ۴۵

۴) ۵۰

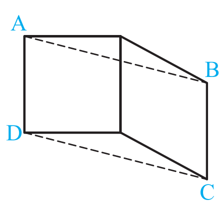
۵۷. در چهارضلعی محدب ABCD، رابطهٔ $\frac{\hat{A}}{۳}=\frac{\hat{B}}{۴}=\frac{\hat{C}}{۵}=\frac{۵\hat{D}}{۱۲}$ بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ متقابل $\hat{A}$ و $\hat{C}$ چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۹۶)

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

۵۸. در چهارضلعی محدب ABCD، رابطهٔ $\frac{\hat{A}}{۴}=\frac{\hat{B}}{۳}=\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۱۱}$ بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور $\hat{A}$ و $\hat{B}$ چند درجه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

۵۹. در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویهٔ ۶۰°، در یک ضلع مشترک‌اند، بزرگ‌ترین زاویهٔ متوازی‌الاضلاع ABCD چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۸۸)



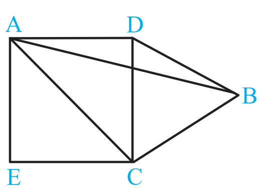
۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۶۰. مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع درون مربع در یک ضلع مشترک‌اند. در مثلث غیرقائم‌الزاویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع است، زاویهٔ بزرگ‌تر چند برابر زاویهٔ کوچک‌تر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

۱) ۷ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

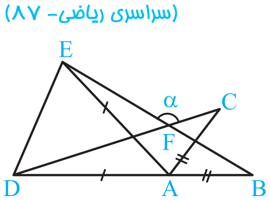
۶۱. در شکل مقابل، بر روی یک ضلع مربع مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. در مثلث ABC بزرگ‌ترین زاویه چند برابر کوچک‌ترین زاویهٔ آن است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۸)



۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) ۴ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۶۲. در شکل زیر $AB=AC$، $AD=AE$، $C\hat{A}B=۵۰^\circ$ و $A\hat{E}D=۶۵^\circ$، زاویهٔ α چند درجه است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)



۱) ۱۱۵

۲) ۱۲۰

۳) ۱۲۵

۴) ۱۳۰

۶۳. یکی از زوایای مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۱۰۰° است. نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها امتداد ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۳۵° ۴) ۴۰°

۶۴. در مثلثی زوایای A، B و C به ترتیب به نسبت ۱، ۴ و ۷ تقسیم شده‌اند. زاویه‌ای که نیمساز داخلی A با نیمساز خارجی B می‌سازد، چند درجه است؟

۱) ۳۵ ۲) ۵۲/۵ ۳) ۷۵ ۴) ۱۵

۶۵. در یک چندضلعی منتظم مجموع اندازه‌های زوایای داخلی ۶ برابر مجموع اندازه‌های زوایای خارجی است. اگر یک ضلع چندضلعی ۱۰/۵ سانتی‌متر باشد، محیط چندضلعی چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۴۷ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۵

۶۶. اگر به تعداد اضلاع یک پانزده‌ضلعی منتظم، k واحد اضافه شود، اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی چندضلعی منتظم $k+1$ درجه بیش‌تر از اندازهٔ زاویهٔ داخلی پانزده‌ضلعی منتظم می‌شود. حداکثر مقدار k کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۷. یک نُه‌ضلعی محدب حداکثر چند زاویهٔ حادهٔ داخلی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۸. اگر مجموع اندازه‌های زوایای داخلی یک $(n+k)$ ضلعی ۱۴۴۰ درجه بیش‌تر از مجموع اندازه‌های زوایای داخلی یک $(n-k)$ ضلعی باشد، k کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۹. اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک n ضلعی منتظم ۰/۶ درجه کم‌تر از اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک $(n+1)$ ضلعی منتظم است، n کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۷۰. مجموع اندازه‌های زوایای داخلی یک چندضلعی محدب بدون یکی از آن‌ها برابر ۲۵۷۰ است. اندازهٔ زاویهٔ کنار گذاشته شده کدام است؟

۱) ۱۰۰° ۲) ۱۳۰° ۳) ۱۴۰° ۴) ۱۱۰°

۷۱. اندازهٔ همهٔ زوایای یک n ضلعی محدب بدون در نظر گرفتن یکی از آن‌ها ۱۶۰° است. اگر n زوج باشد، کم‌ترین اندازهٔ زاویهٔ مجهول چند درجه است؟

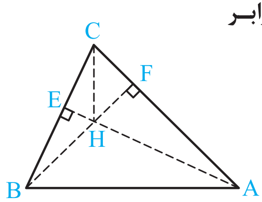
۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۱۰ ۴) ۳۰

نقاط همرسی عمودمنصف‌ها، ارتفاع‌ها و نیمسازها

۷۲. در مثلث ABC داریم $\widehat{A}=۴۰^\circ$ و $\widehat{B}=۶۰^\circ$، اگر نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع H باشد، زاویهٔ CHA چند درجه است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۸۰

۷۳. در مثلث ABC که در آن $\widehat{A}=۴۰^\circ$، $\widehat{B}=۶۰^\circ$ و H محل تلاقی سه ارتفاع است، زاویهٔ AHC چند برابر زاویهٔ BHC است؟



۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۷۴. در مثلث $ABC\,(AB < AC)$، ضلع BC را از هر دو طرف، به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم، مرکز دایره محیطی مثلث ADE (نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها)، بر روی کدام جزء مثلث ABC است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) عمودمنصف BC ۲) میانهٔ نظیر ضلع BC ۳) ارتفاع وارد بر BC ۴) نیمساز داخلی زاویهٔ A

۷۵. در کدام مثلث همهٔ نقاط همرسی عمودمنصف‌ها، ارتفاع‌ها و نیمسازها روی یک امتداد قرار دارند؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) متساوی‌الاضلاع ۳) مختلف‌الاضلاع ۴) قائم‌الزاویه

۷۶. در مثلث حاده‌الزوایای ABC، I نقطهٔ همرسی نیمسازها و O نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها می‌باشد. اگر $B\widehat{O}C = \frac{B\widehat{I}C}{۴}$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۷۷. در یک مثلث بین زوایا، رابطهٔ $\widehat{C}=\widehat{A}+۲\widehat{B}$ برقرار است. محل تلاقی سه ارتفاع کجا قرار دارد؟

۱) داخل مثلث ۲) روی محیط مثلث ۳) خارج مثلث ۴) هر سه حالت ممکن است.

۷۸. اندازهٔ زوایای خارجی یک مثلث به نسبت اعداد ۲، ۳ و ۴ است، کدام گزینه درست است؟

۱) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها، در خارج مثلث است. ۲) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها در داخل مثلث قرار دارد.

۳) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها، روی مثلث است. ۴) نقطهٔ همرسی نیمسازها، خارج مثلث قرار دارد.

۷۹. مثلث MNP مفروض است. از رأس‌های آن خط‌هایی موازی اضلاع مقابل آن رسم می‌کنیم، مثلث ABC پدید می‌آید. نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث MNP، ....

۱) از سه ضلع آن به یک فاصله است.
۲) از سه رأس آن به یک فاصله است.
۳) از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است.
۴) از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است.

۸۰. در مثلث ABC، I نقطهٔ همرسی نیمسازها می‌باشد. کدام نقطهٔ همرسی مثلث‌های AIB، AIC و BIC خارج از مثلث ABC قرار دارد؟

۱) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها
۲) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها
۳) نقطهٔ همرسی نیمسازها
۴) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها و عمودمنصف‌ها

۸۱. در داخل یک متوازی‌الاضلاع چند نقطه وجود دارد که از دو ضلع و یک قطر آن به یک فاصله باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۲. سه خط دوبه‌دو متقاطع که همرس نیستند مفروضند. چند نقطه وجود دارد که از این سه خط به یک فاصله باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۳. رأس یک لوزی از یک قطر و خط‌های شامل دو ضلع دیگر به یک فاصلهٔ غیرصفر است. اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ این لوزی چند درجه است؟

۱) ۴۵
۲) ۶۰
۳) ۳۰
۴) ۷۵

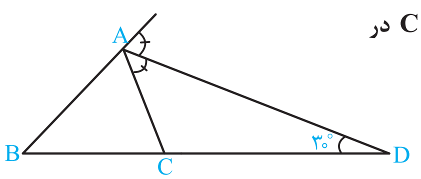
۸۴. مثلثی که اندازهٔ یک ضلع آن ۱۲ و فاصلهٔ وسط این ضلع از رأس‌ها برابر است را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های همهٔ این مثلث‌ها روی کدام شکل قرار دارد؟

۱) دایره‌ای به قطر ۱۲
۲) عمودمنصف ضلع مفروض
۳) دایره‌ای به قطر ۶
۴) خطی موازی ضلع مفروض و به فاصلهٔ ۶ از آن

نامساوی‌ها در مثلث

۸۵. در مثلث ABC، $\hat{B} = ۵۰^\circ$ و $\hat{C} = ۳۵^\circ$ است. اگر نقطهٔ D روی ضلع BC چنان باشد که $D\hat{A}C = ۲۵^\circ$، کدام نامساوی زیر نادرست است؟

۱) $AC > AB$
۲) $AB > BD$
۳) $AC > AD$
۴) $BD > AD$



۸۶. در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ خارجی A و $\hat{D} = ۳۰^\circ$ است. کم‌ترین اندازهٔ زاویهٔ C در مثلث ABC چند درجه است؟

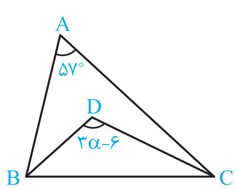
۱) ۶۰
۲) ۵۹
۳) ۶۱
۴) ۶۲

۸۷. در مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۷۰° است و $AC > AB$ است. کم‌ترین مقدار صحیح $\hat{A}$ چند درجه است؟

۱) ۴۱
۲) ۴۲
۳) ۴۰
۴) ۳۹

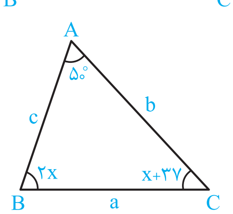
۸۸. در مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۷۰° است و $AB < AC$، اگر D نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای B و C باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار صحیح زاویهٔ DBC چند درجه است؟

۱) ۲۶
۲) ۲۷
۳) ۲۸
۴) ۲۹



۸۹. در شکل مقابل، تعداد مقادیر صحیح α کدام است؟

۱) ۳۷
۲) ۳۸
۳) ۴۰
۴) ۴۱



۹۰. با توجه به شکل روبه‌رو، حاصل عبارت $\dfrac{|a-b|+|c-b|+|a-c|}{۲}$ کدام است؟

۱) $c-a$
۲) $b-a$
۳) b
۴) c

۹۱. در مثلث ABC، نیمساز داخلی زاویهٔ A، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند، کدام نامساوی همواره درست است؟

۱) $BA > BD$
۲) $DA > DB$
۳) $AB > AD$
۴) $DB > DA$

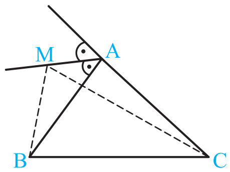
۹۲. در مثلث ABC، نیمساز خارجی زاویهٔ A، ضلع BC را در D' قطع می‌کند، کدام نامساوی همواره درست است؟

۱) $D'B > AB$
۲) $D'A > D'B$
۳) $AB > AD'$
۴) $D'B > D'A$

۹۳. در مثلث ABC با فرض مختلف‌الاضلاع بودن، میانهٔ AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است، کدام نامساوی همواره درست است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) $AM < BC$
۲) $AM < AB$
۳) $AD < AB$
۴) $AD < AM$

۹۴. در شکل روبه‌رو، نقطهٔ M روی نیمساز خارجی زاویهٔ A است، نسبت $\frac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)



۱) بزرگ‌تر از ۱
۲) کم‌تر از ۱
۳) برابر ۱
۴) غیر مشخص

۹۵. در مثلث ABC، $\hat{A} > \hat{C}$ و نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف ضلع AB در نقطهٔ D متقاطع‌اند. M و N پای عمودهایی است که از نقطهٔ D به ترتیب بر BA و BC رسم شده‌اند، کدام نابرابری درست است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $NC > NB$
۲) $NC < NB$
۳) $DA > DC$
۴) $AM < BN$

۹۶. اندازهٔ زوایای مثلثی ۱۲۰°، $(۲x - ۱۰)^\circ$ و $(y - ۵)^\circ$ است، طول بازه‌ای که $x + y$ در آن قرار دارد، کدام است؟

۱) ۳۰
۲) ۲۸
۳) ۳۲
۴) ۳۱

۹۷. در مثلث ABC، $AB < AC$ و عمودمنصف ضلع BC نیمساز خارجی زاویهٔ A را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر M و N پای عمودهایی باشند که از D به‌ترتیب بر خط‌های شامل AB و AC وارد می‌شوند، کدام نابرابری درست است؟

۱) $DC > BM$
۲) $BM < CN$
۳) $DC < BM$
۴) $BM > CN$

گزاره‌ها، مثال نقض، قضیه‌های دوشرطی و برهان خلف

۹۸. نقیض گزارهٔ «هر چندضلعی محدب حداکثر سه زاویهٔ حاده دارد.» کدام است؟

۱) وجود دارد چندضلعی محدبی که حداقل ۴ زاویهٔ حاده دارد.
۲) وجود دارد چندضلعی محدبی که زاویهٔ حادهٔ داخلی ندارد.
۳) وجود دارد چندضلعی محدبی که ۳ زاویهٔ حاده دارد.
۴) وجود دارد چندضلعی محدبی که حداقل ۳ زاویهٔ حاده دارد.

۹۹. کدام گزاره زیر را نمی‌توان به صورت دوشرطی نوشت؟

۱) در مثلثی که دو ضلع برابر باشند، ارتفاع نظیر آن‌ها برابر است.
۲) قطرهای یک لوزی عمودمنصف یکدیگرند.
۳) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است.
۴) نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث داخل آن قرار دارد.

۱۰۰. کدام قضیه به صورت دوشرطی بیان نمی‌شود؟

۱) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانهٔ یک ضلع بر هم منطبق‌اند.
۲) در مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف‌های اضلاع بر روی ضلع بزرگ‌تر، متقاطع‌اند.
۳) در مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر، نصف اندازهٔ وتر است.
۴) در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویهٔ ۹۰°، بزرگ‌ترین ضلع است.

۱۰۱. کدام گزارهٔ زیر با مثال نقض رد می‌شود؟

۱) هر مربع، یک مستطیل است.
۲) ارتفاع هر مثلث، از همهٔ اضلاع آن کوچک‌تر است.
۳) هر مثلث، حداقل یک زاویهٔ بزرگ‌تر یا مساوی ۶۰° دارد.
۴) مثلث متساوی الساقین، همواره دو زاویهٔ حاده دارد.

۱۰۲. نقیض گزارهٔ «هر عدد که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۵ بخش‌پذیر است.» کدام گزاره است؟

۱) عددی هست که بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر است ولی بر ۱۵ بخش‌پذیر نیست.
۲) عددی هست که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیست ولی بر ۱۵ بخش‌پذیر است.
۳) عددی هست که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر است ولی بر ۱۵ بخش‌پذیر نیست.
۴) عددی هست که بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر نیست ولی بر ۱۵ بخش‌پذیر است.

۱۰۳. نقیض گزارهٔ «برای هر x حقیقی داریم $x < ۲$ یا $x > ۳$» کدام است؟

۱) وجود دارد x حقیقی که $۲ < x < ۳$
۲) وجود دارد x حقیقی که $۲ \le x \le ۳$
۳) وجود دارد x حقیقی که $x \ge ۳$ و $x \le ۲$
۴) وجود دارد x حقیقی که $x < ۲$ و $x > ۳$

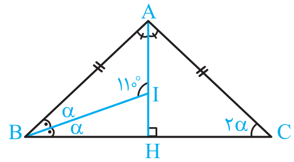
۱۰۴. نقیض گزارهٔ «هر چهارضلعی که دو قطر مساوی دارد، مستطیل است.» کدام است؟

۱) چهارضلعی هست که دو قطر مساوی ندارد و مستطیل نیست.
۲) چهارضلعی هست که دو قطر مساوی دارد و مستطیل است.
۳) چهارضلعی هست که دو قطر مساوی ندارد و مستطیل است.
۴) چهارضلعی هست که دو قطر مساوی دارد و مستطیل نیست.

۱۰۵. در اثبات گزارهٔ «در مثلث ABC، اگر $AB \ne AC$، آن‌گاه $\hat{B} \ne \hat{C}$» به کمک برهان خلف، فرض خلف کدام است؟

۱) $AB = AC$
۲) $\hat{B} > \hat{C}$
۳) $\hat{B} < \hat{C}$
۴) $\hat{B} = \hat{C}$

۴۵ — ۱ **۲** ۳ ۴



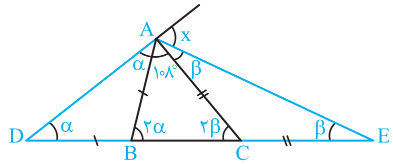
نیمساز زاویهٔ رأس متساوی‌الساقین، ارتفاع هم می‌باشد پس مثلث BIH قائم‌الزاویه است و بنا به زاویهٔ خارجی در مثلث BIH داریم:

$$۱۱۰^\circ = \alpha + ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ$$

$$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۴\alpha = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$

۴۶ — ۱ ۲ **۳** ۴

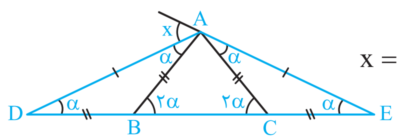
بنا به فرض $\hat{A} = ۱۰۸^\circ$ است، پس زاویهٔ DAE در مثلث ADE بزرگ‌ترین زاویه است، پس زاویهٔ خارجی آن یعنی x کوچک‌ترین است.



$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ \overset{\Delta}{ABC}: ۲\alpha + ۲\beta + ۱۰۸^\circ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ \alpha + \beta = ۳۶^\circ \end{cases} \Rightarrow x = ۳۶^\circ$$

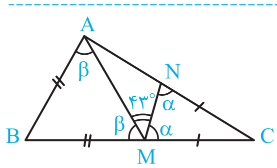
۴۷ — ۱ ۲ **۳** ۴

مفروضات پرسش روی شکل آورده شده است. واضح است که بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی مثلث ADE، زاویهٔ DAE است پس کوچک‌ترین زاویهٔ خارجی مثلث ADE مطابق شکل برابر با زاویهٔ x است. پس:



$$x = \hat{E} + \hat{D} = \alpha + \alpha = ۲\alpha$$

۴۸ — ۱ **۲** ۳ ۴



در مثلث‌های متساوی الساقین ABM و CMN داریم:

$$\hat{B} = ۱۸۰^\circ - ۲\beta \quad , \quad \hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$$

حال در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$B\hat{A}C + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}C + ۱۸۰^\circ - ۲\beta + ۱۸۰^\circ - ۲\alpha = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{A}C = ۲\alpha + ۲\beta - ۱۸۰^\circ = ۲(\alpha + \beta) - ۱۸۰^\circ$$

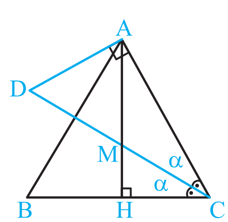
از طرفی برای زوایای به رأس M مطابق شکل داریم:

$$\alpha + \beta + ۴۳^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۸۰^\circ - ۴۳^\circ = ۱۳۷^\circ$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$B\hat{A}C = ۲ \times ۱۳۷^\circ - ۱۸۰^\circ = ۲۷۴^\circ - ۱۸۰^\circ = ۹۴^\circ$$

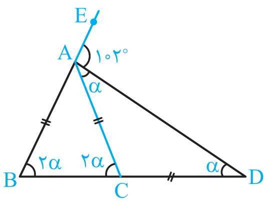
۴۹ — **۱** ۲ ۳ ۴



در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نیمساز AH ارتفاع هم می‌باشد، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHC داریم $C\hat{M}H = ۹۰^\circ - \alpha$ و بنا به زاویهٔ متقابل به رأس نتیجه می‌شود $A\hat{M}D = ۹۰^\circ - \alpha$

از طرفی بنا به فرض $D\hat{A}C = ۹۰^\circ$، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ DAC داریم $\hat{D} = ۹۰^\circ - \alpha$. بنابراین $\hat{D} = A\hat{M}D$ و در نتیجه AD = AM

۵۰ — ۱ ۲ ۳ **۴**



$D\hat{A}E$ زاویهٔ خارجی مثلث ABD است، پس:

$$D\hat{A}E = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$$

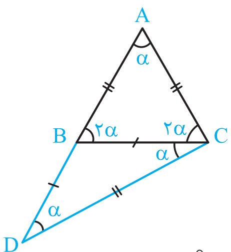
$$\Rightarrow ۱۰۲^\circ = ۳\alpha \Rightarrow \alpha = ۳۴^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{C} = ۲\alpha = ۶۸^\circ$$

$$B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ - ۴\alpha = ۱۸۰^\circ - ۱۳۶^\circ = ۴۴^\circ$$

۵۱ — ۱ ۲ ۳ **۴**

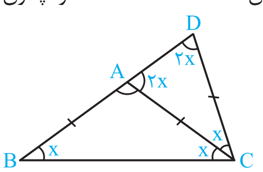
بنا به فرض، ساق AB را به اندازهٔ BD = BC امتداد داده‌ایم به طوری که CD = AC = AB شده است. اگر فرض کنیم $\hat{D} = \alpha$، زوایا مطابق شکل می‌شوند و در مثلث ABC داریم:



$$۲\alpha + ۲\alpha + \alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۳۶^\circ$$

۵۲ — ۱ ۲ **۳** ۴

فرض کنیم اندازهٔ زاویهٔ B برابر x باشد در مثلث متساوی‌الساقین ABC نتیجه می‌شود $A\hat{C}B = x$ و بنا به زاویهٔ خارجی داریم $C\hat{A}D = ۲x$. اما مثلث CAD متساوی‌الساقین است. پس $\hat{D} = C\hat{A}D = ۲x$ و چون BD = BC می‌باشد پس می‌توان نوشت:

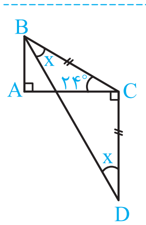


$$\hat{D} = B\hat{C}D \Rightarrow ۲x = x + A\hat{C}D \Rightarrow A\hat{C}D = ۲x - x = x$$

$$\overset{\Delta}{ADC}: ۲x + ۲x + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۳۶^\circ$$

$$B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ - ۲x = ۱۸۰^\circ - ۲ \times ۳۶^\circ = ۱۸۰^\circ - ۷۲^\circ = ۱۰۸^\circ$$

۵۳ — **۱** ۲ ۳ ۴

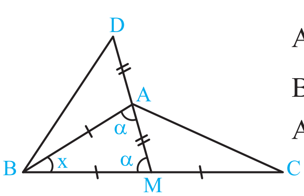


در مثلث متساوی الساقین BCD اندازهٔ زاویهٔ رأس برابر $۹۰^\circ + ۲۴^\circ = ۱۱۴^\circ$ است. بنابراین داریم:

$$x + x + ۱۱۴^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲x = ۸۰^\circ - ۱۴^\circ = ۶۶^\circ \Rightarrow x = ۳۳^\circ$$

۵۴ — ۱ ۲ **۳** ۴



$$\begin{cases} AB = CM \\ B\hat{A}D = A\hat{M}C = ۱۸۰^\circ - \alpha \\ AD = AM \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(\text{ض‌زض})} \overset{\Delta}{BAD} \cong \overset{\Delta}{CMA} \Rightarrow A\hat{B}D = \hat{C}$$

$B\hat{A}M$ زاویهٔ خارجی مثلث ABD است، پس:

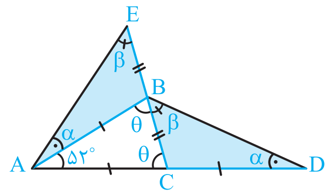
$$B\hat{A}M = ABD + \hat{D} \Rightarrow \alpha = \hat{C} + \hat{D} \xrightarrow{\hat{C}+\hat{D}=۶۱^\circ} \alpha = ۶۱^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABM}: \alpha + \alpha + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶۱^\circ + ۶۱^\circ + x = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - ۱۲۲^\circ = ۵۸^\circ$$

۵۵ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

دو مثلث BCD و BEA همنهشت‌اند و زوایای نظیر مطابق شکل است. داریم:



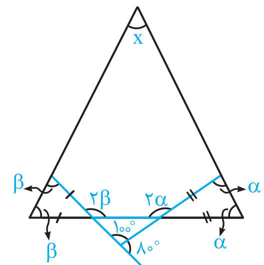
$$\begin{cases}\theta=\alpha+\beta\\ \theta+\theta+52^\circ=180^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{180^\circ-52^\circ}{2}=90^\circ-26^\circ=64^\circ$$

۵۶ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

در بزرگ‌ترین مثلث روی شکل داریم: $x+\alpha+\beta=180^\circ$

در پایین‌ترین مثلث روی شکل، جمع زوایای خارجی 360° است، پس:



$$2\alpha+2\beta+80^\circ=360^\circ\Rightarrow\alpha+\beta+40^\circ=180^\circ\Rightarrow\alpha+\beta=140^\circ$$

$$\begin{cases}x+\alpha+\beta=180^\circ\\ \alpha+\beta=140^\circ\end{cases}\Rightarrow x+140^\circ=180^\circ\Rightarrow x=40^\circ$$

۵۷ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

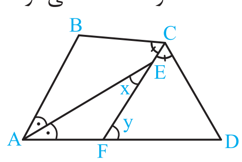
بنا به فرض بین زوایای چهارضلعی محدب ABCD رابطهٔ $\frac{\hat A}{3}=\frac{\hat B}{4}=\frac{\hat C}{5}=\frac{5\hat D}{12}$ برقرار است پس می‌توانیم فرض کنیم $\hat A=15x$، $\hat B=20x$، $\hat C=25x$ و $\hat D=12x$. اما مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است. پس می‌توان نوشت:

$$\hat A+\hat B+\hat C+\hat D=360^\circ\Rightarrow 15x+20x+25x+12x=360^\circ$$

$$\Rightarrow 72x=360^\circ\Rightarrow x=5^\circ$$

و اندازهٔ زوایای چهارضلعی $\hat A=75^\circ$، $\hat B=100^\circ$، $\hat C=125^\circ$ و $\hat D=60^\circ$ می‌شود.

مطابق شکل نیمسازهای دو زاویهٔ $\hat A$ و $\hat C$ در نقطهٔ E متقاطع‌اند و به کمک زاویهٔ خارجی داریم:



$$y=x+\frac{\hat A}{2}=x+\frac{75^\circ}{2}\qquad(1)$$

$$\overset{\Delta}{CFD}: y+\frac{\hat C}{2}+\hat D=180^\circ\Rightarrow y+\frac{125^\circ}{2}+60^\circ=180^\circ$$

$$\Rightarrow y=120^\circ-\frac{125^\circ}{2}=\frac{115^\circ}{2}\qquad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\frac{115^\circ}{2}=x+\frac{75^\circ}{2}\Rightarrow x=\frac{115^\circ-75^\circ}{2}=\frac{40^\circ}{2}=20^\circ$$

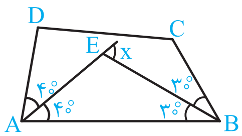
۵۸ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

به کمک خواص تناسب داریم:

$$\frac{\hat A}{4}=\frac{\hat B}{3}=\frac{\hat C+\hat D}{11}=\frac{\hat A+\hat B+\hat C+\hat D}{4+3+11}=\frac{360^\circ}{18}=20^\circ$$

$$\Rightarrow\hat A=4\times20^\circ=80^\circ,\ \hat B=3\times20^\circ=60^\circ$$

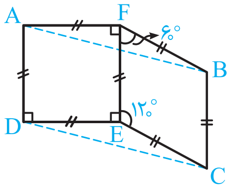
مطابق شکل E محل برخورد نیمسازهای زوایای $\hat A$ و $\hat B$ است و در مثلث AEB بنا به زاویهٔ خارجی داریم:



$$x=\frac{\hat A}{2}+\frac{\hat B}{2}=40^\circ+30^\circ=70^\circ$$

۵۹ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

می‌خواهیم زاویهٔ ADC را محاسبه کنیم. مثلث DEC متساوی‌الساقین است و زاویهٔ رأس آن برابر است با $D\hat EC=360^\circ-90^\circ-120^\circ=150^\circ$ و داریم:

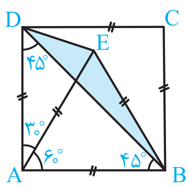


$$E\hat DC+E\hat CD+D\hat EC=180^\circ\Rightarrow 2E\hat DC+150^\circ=180^\circ$$

$$\Rightarrow E\hat DC=\frac{30^\circ}{2}=15^\circ,\ A\hat DC=90^\circ+E\hat DC=90^\circ+15^\circ=105^\circ$$

۶۰ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

مثلث غیر قائم‌الزاویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع AEB است، مثلث BED می‌باشد.



$$A\hat ED=A\hat DE=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$$

$$B\hat ED=A\hat ED+A\hat EB=75^\circ+60^\circ=135^\circ$$

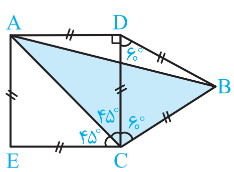
$$D\hat BE=A\hat BE-A\hat BD=60^\circ-45^\circ=15^\circ$$

و زاویهٔ دیگر مثلث BDE برابر $B\hat DE=180^\circ-(135^\circ+15^\circ)=30^\circ$ است، پس:

$$\frac{B\hat ED}{D\hat BE}=\frac{135}{15}=9$$

۶۱ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

در مثلث متساوی‌الساقین ABD، اندازهٔ زاویهٔ رأس برابر $90^\circ+60^\circ=150^\circ$ است.



پس $D\hat AB=D\hat BA=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$ و داریم:

$$C\hat AB=C\hat AD-D\hat AB=45^\circ-15^\circ=30^\circ$$

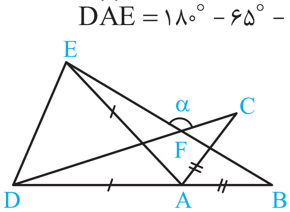
$$A\hat BC=D\hat BC-D\hat BA=60^\circ-15^\circ=45^\circ$$

$$A\hat CB=45^\circ+60^\circ=105^\circ$$

بنابراین $\frac{A\hat CB}{C\hat AB}=\frac{105^\circ}{30^\circ}=\frac{7}{2}$

۶۲ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

در مثلث متساوی‌الساقین ADE بنا به فرض $A\hat ED=65^\circ$، پس $A\hat DE=65^\circ$ و در نتیجه $D\hat AE=180^\circ-65^\circ-65^\circ=50^\circ$



از طرفی $C\hat{A}B = ۵۰^\circ$، پس $D\hat{A}C = B\hat{A}E = ۱۳۰^\circ$ و داریم:

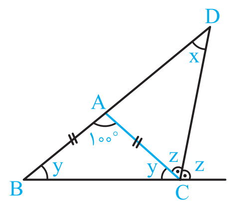
$$AD = AE \quad , \quad D\hat{A}C = B\hat{A}E \quad , \quad AC = AB$$

$$\xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{DAC} \cong \overset{\Delta}{EAB} \Rightarrow A\hat{D}C = A\hat{E}B = x$$

$\overset{\Delta}{DEF}$ زاویهٔ خارجی : $\alpha = D\hat{E}F + E\hat{D}F = ۶۵^\circ + x + ۶۵^\circ - x = ۱۳۰^\circ$

۶۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویهٔ خارجی رأس با قاعدهٔ مثلث موازی است و آن را قطع نمی‌کند.



از طرفی زوایای مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین همواره حاده‌اند، پس زاویهٔ داده شده زاویهٔ رأس مثلث است. یعنی $\hat{A} = ۱۰۰^\circ$.

داریم: $y + y + ۱۰۰^\circ = ۱۸۰^\circ$

$$\Rightarrow ۲y = ۸۰^\circ \Rightarrow y = ۴۰^\circ$$

$$۲z + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow z = \frac{۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

$\overset{\Delta}{BCD}$ زاویهٔ خارجی : $z = x + y \Rightarrow ۷۰^\circ = x + ۴۰ \Rightarrow x = ۳۰^\circ$

۶۴ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

اندازهٔ زوایای مثلث x، $۴x$ و $۷x$ است، در نتیجه:

$$۷x + ۴x + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

پس $\hat{A} = ۱۵^\circ$، $\hat{B} = ۴x = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۷x = ۱۰۵^\circ$ و زاویهٔ بین نیمساز داخلی زاویهٔ A و نیمساز خارجی زاویهٔ B برابر $\frac{\hat{C}}{۲} = \frac{۱۰۵^\circ}{۲} = ۵۲/۵^\circ$ است.

۶۵ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

در هر n ضلعی محدب، مجموع زوایای داخلی $(n - ۲) \times ۱۸۰^\circ$ و مجموع زوایای خارجی ۳۶۰° است، بنا به فرض داریم:

$$(n - ۲) \times ۱۸۰^\circ = ۶ \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow n - ۲ = ۱۲ \Rightarrow n = ۱۴$$

چون n ضلعی منتظم است و اندازهٔ هر ضلع آن ۱۰/۵ سانتی‌متر است، پس محیط آن برابر است با: $۱۴ \times ۱۰/۵ = ۱۴۷$

۶۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{(n - ۲) \times ۱۸۰^\circ}{n} = ۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

و بنا به فرض داریم:

$$\left(۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{k + ۱۵}\right) - \left(۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{۱۵}\right) = k + ۱$$

$$\Rightarrow ۲۴^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{k + ۱۵} = k + ۱ \Rightarrow ۲۴k + ۳۶۰ - ۳۶۰ = k^۲ + ۱۶k + ۱۵$$

$$\Rightarrow k^۲ - ۸k + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (k - ۳)(k - ۵) = ۰$$

در نتیجه $k = ۳$ یا $k = ۵$ است، پس بیش‌ترین مقدار k برابر ۵ می‌باشد.

۶۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

هر n ضلعی محدب حداکثر ۳ زاویهٔ حادهٔ داخلی دارد. زیرا در غیر این‌صورت زوایای منفرجهٔ خارجی بیش‌تر از ۴ می‌شود و مجموع زوایای خارجی از ۳۶۰° بیش‌تر می‌شود که تناقض است.

۶۸ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n - ۲) \times ۱۸۰^\circ$ است پس مجموع زوایای یک $(n + k)$ ضلعی برابر $(n + k - ۲) \times ۱۸۰^\circ$ و مجموع زوایای یک $(n - k)$ ضلعی برابر $(n - k - ۲) \times ۱۸۰^\circ$ است، بنا به فرض داریم: $(n + k - ۲) \times ۱۸۰^\circ = ۱۴۴۰ + (n - k - ۲) \times ۱۸۰^\circ$

با تقسیم طرفین تساوی بر ۱۸۰° داریم:

$$\Rightarrow n + k - ۲ = ۸ + n - k - ۲ \Rightarrow ۲k = ۸ \Rightarrow k = ۴$$

۶۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\left(۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n + ۱}\right) - \left(۱۸۰^\circ - \frac{۳۶۰^\circ}{n}\right) = ۰/۶ \Rightarrow \frac{۳۶۰^\circ}{n} - \frac{۳۶۰^\circ}{n + ۱} = \frac{۶}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{\div ۶\ \text{طرفین}} ۶۰ \times \frac{n + ۱ - n}{n(n + ۱)} = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow n(n + ۱) = ۶۰۰ \Rightarrow n = ۲۴$$

۷۰ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

بنا به فرض مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب داده شده بدون یکی از آن‌ها ۲۵۷۰° است، پس مجموع زوایای داخلی $(n - ۲) \times ۱۸۰^\circ$ از این عدد بزرگ‌تر است. $(n - ۲) \times ۱۸۰^\circ > ۲۵۷۰ \Rightarrow n - ۲ > ۱۴/...$

$$\Rightarrow n > ۱۶/... \Rightarrow n \geq ۱۷$$

اما مجموع زوایای داخلی ۱۷ ضلعی محدب برابر $(۱۷ - ۲) \times ۱۸۰^\circ = ۲۷۰۰^\circ$ است، پس اندازهٔ زاویهٔ کنار گذاشته شده برابر $۲۷۰۰^\circ - ۲۵۷۰^\circ = ۱۳۰^\circ$ است.

۷۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

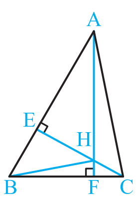
اندازهٔ یک زاویه x و سایر زوایای n ضلعی محدب داده شده برابر ۱۶۰° است، پس تعداد این زوایا $n - ۱$ است و داریم:

$$(n - ۱) \times ۱۶۰ + x = (n - ۲) \times ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۶۰n - ۱۶۰ + x = ۱۸۰n - ۳۶۰$$

$$\Rightarrow x = ۲۰n - ۲۰۰$$

چون $x > ۰$ است، پس باید $n > ۱۰$ یا $n \geq ۱۱$ باشد و کم‌ترین مقدار زوج آن $n = ۱۲$ است که به ازای آن $x = ۲۴۰^\circ - ۲۰۰^\circ = ۴۰^\circ$ می‌شود.

۷۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)



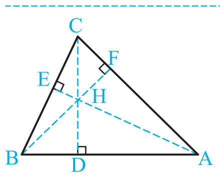
چون H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است، پس $CE \perp AB$ و $AF \perp BC$، در چهارضلعی BEHF مجموع زوایا ۳۶۰° است.

$$\hat{B} + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + E\hat{H}F = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ + E\hat{H}F = ۳۶۰^\circ \Rightarrow E\hat{H}F = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

متقابل به رأس $C\hat{H}A = E\hat{H}F = ۱۲۰^\circ$

۷۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴)



بنا به فرض داریم $\hat{A} = ۴۰^\circ$, $\hat{B} = ۶۰^\circ$

$$AFHD : \hat{A} + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + D\hat{H}F = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow D\hat{H}F = ۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ = ۱۴۰^\circ \Rightarrow B\hat{H}C = ۱۴۰^\circ$$

$$BEHD : \hat{B} + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + D\hat{H}E = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow D\hat{H}E = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow A\hat{H}C = ۱۲۰^\circ$$

$$\frac{A\hat{H}C}{B\hat{H}C} = \frac{۱۲۰^\circ}{۱۴۰^\circ} = \frac{۶}{۷}$$

فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

قسمت اول: ترسیم‌های هندسی

۱. پاره‌خط AB به طول ۱۰ سانتی‌متر مفروض است، نقطه یا نقاطی را تعیین کنید که از A به فاصلهٔ ۸ سانتی‌متر و از B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند.

۲. ثابت کنید اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، آن‌گاه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۳. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد، آن‌گاه آن نقطه، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

۴. ثابت کنید اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، آن‌گاه از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

۵. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن‌گاه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

۶. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که اندازهٔ قطرهای آن ۱۲ و ۱۶ سانتی‌متر باشد و اندازهٔ زاویهٔ بین قطرهای آن 45° باشد.

۷. مستطیلی رسم کنید که اندازهٔ قطرهایش ۶ سانتی‌متر باشد و زاویهٔ بین دو قطر آن 45° باشد.

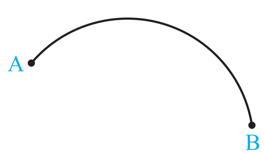
۸. متوازی‌الاضلاعی را رسم کنید که اندازه‌های دو ضلع و یک قطر آن معلوم باشد.

۹. متوازی‌الاضلاعی که اندازهٔ دو قطر و یک ضلع آن معلوم است را رسم کنید.

۱۰. روی خط مفروض d نقطه‌ای به فاصله‌های مساوی از دو نقطهٔ معلوم A و B پیدا کنید.

۱۱. وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۱۲. شکل مقابل کمانی از دایره است، مرکز دایره را تعیین کنید.



۱۳. ثابت کنید اگر در نیم‌دایره به قطر AB، C نقطه‌ای از نیم‌دایره به غیر از A و B باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ ACB برابر 90° است.

۱۴. مثلثی رسم کنید که اندازهٔ دو ضلع آن ۱۲ و ۱۶ و میانهٔ نظیر ضلع سوم آن برابر ۱۰ باشد.

۱۵. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یک ضلع زاویهٔ قائمه و زاویهٔ روبه‌رو به آن معلوم باشد.

۱۶. نقطهٔ M داخل $x\hat{O}y$ مفروض است. خطی چنان رسم کنید که اضلاع زاویه را قطع کند و از نقطهٔ M بگذرد و M وسط پاره‌خط حاصل باشد.

۱۷. مثلثی رسم کنید که طول ضلع $BC = a$، طول میانهٔ $AM = m_a$ و زاویهٔ α بین میانهٔ AM و ارتفاع AH در آن معلوم باشند.

۱۸. در مثلث ABC طول نیمساز زاویهٔ B، اندازهٔ زاویهٔ B و اندازهٔ زاویهٔ C معلوم هستند. مثلث ABC را رسم کنید.

۱۹. زاویهٔ xOy به اندازهٔ 45° مفروض است. نقطهٔ معلوم A روی Oy قرار دارد. نقطهٔ M را روی Oy چنان تعیین کنید که فاصلهٔ آن تا Ox برابر MA باشد.

۲۰. در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC و $(A = 90^\circ)$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نقطهٔ M را روی AH چنان بیابید که مجموع فواصل آن از AB و AC برابر فاصله‌اش از BC باشد.

قسمت دوم: استدلال

۲۱. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است.

۲۲. ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های زوایای داخلی غیرمجاور آن.

۲۳. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° است.

۲۴. ثابت کنید در هر مثلث زاویهٔ بین نیمساز و ارتفاع رسم شده از یک رأس مثلث، برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر.

۲۵. ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب مجموع اندازه‌های زوایای داخلی برابر ۳۶۰° است.

۲۶. ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر nضلعی محدب برابر است با $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$

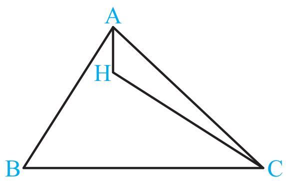
۲۷. ثابت کنید مجموع اندازهٔ زوایای خارجی هر nضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

۲۸. ثابت کنید عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرسند.

۲۹. ثابت کنید ارتفاع‌های هر مثلث همرسند.

۳۰. ثابت کنید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرسند.

۳۱. ثابت کنید اگر نقطهٔ همرسی نیمسازها و نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های یک مثلث بر هم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع است.



۳۲. در شکل مقابل، H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است. اگر اندازهٔ زاویهٔ BCH برابر α باشد، اندازهٔ زاویهٔ BAH را بر حسب α به‌دست آورید.

۳۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$ از نقطهٔ M وسط AC عمودی بر BC رسم می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم، تا امتداد AB را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید خط شامل BM بر خط شامل CD عمود است.

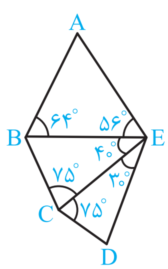
۳۴. در مستطیل $ABCD$، پاره‌خط BH را عمود بر قطر AC رسم می‌کنیم. از نقطهٔ M روی AH خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا BH را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید خط شامل CE بر خط شامل BM عمود است.

۳۵. ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است.

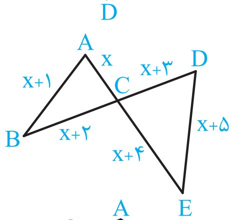
۳۶. ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر بزرگ‌تر است. (عکس ۳۵)

۳۷. ثابت کنید در هر مثلث مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازهٔ ضلع سوم بزرگ‌تر است. (قضیهٔ نامساوی مثلث)

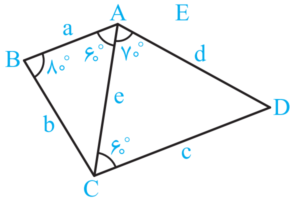
۳۸. ثابت کنید در هر مثلث تفاضل هر دو ضلع از ضلع سوم کوچک‌تر است.



۳۹. در شکل مقابل طول بزرگ‌ترین پاره‌خط را با ذکر دلیل بیابید.



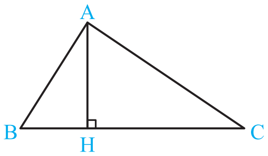
۴۰. در شکل مقابل اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه را با ذکر دلیل تعیین کنید. $(x>۰)$



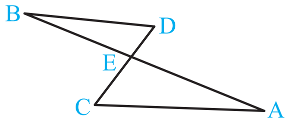
۴۱. در شکل مقابل عبارت $|e-c|+|e-a|+|d-a|$ را بدون نماد قدرمطلق و به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۴۲. ثابت کنید در یک مثلث، نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایا از رأس روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع، بیش‌ترین فاصله را نسبت به هر رأس دیگر مثلث دارد.

۴۳. در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A و $AC>AB$ است. ثابت کنید $A\hat{D}C>A\hat{D}B$



۴۴. **در شکل مقابل $AH \perp BC$ و $BH < CH$ است. ثابت کنید $AB < AC$**



۴۵. **در شکل مقابل دو پاره‌خط AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کرده‌اند به‌طوری که $\hat{C} > \hat{A}$ و $\hat{D} > \hat{B}$ است. ثابت کنید $AB > CD$**

۴۶. **گزاره‌های ساده و مرکب را مشخص کنید.**

آ) دو عدد صحیح وجود دارد که تفاضل مربعاتشان مجذور کامل است.

ب) هر عدد صحیح فرد یا زوج است.

پ) به‌ازای هر دو عدد حقیقی، حاصل جمع اولی با دومی برابر حاصل‌جمع دومی با اولی است.

ت) در لوزی قطرها بر هم عمودند و نیمساز زوایا می‌باشند.

ث) اگر $a^2 = 1$، آن‌گاه $a = \pm 1$

ج) اگر $a^2 > 4$، آن‌گاه $a > 2$ یا $a < -2$ است.

۴۷. **نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.**

آ) هر مستطیل یک مربع است.

ب) پنج‌ضلعی محدبی وجود دارد که ۴ زاویهٔ قائمه دارد.

پ) هر مثلث حداقل دو ضلع برابر دارد.

ت) هیچ چهارضلعی زاویهٔ بزرگ‌تر از زاویهٔ قائمه ندارد.

ث) یک چهارضلعی محدب وجود دارد که مجموع زوایای خارجی آن کم‌تر از 360° است.

۴۸. **با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$، آن‌گاه $\hat{B} \neq \hat{C}$**

۴۹. **می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.**

۵۰. **به کمک برهان خلف ثابت کنید هر پاره‌خط یک و تنها یک عمودمنصف دارد.**

۵۱. **به کمک برهان خلف ثابت کنید در مثلث ABC، اگر AD نیمساز زاویهٔ A باشد و $BD \neq CD$، آن‌گاه $AB \neq AC$**

۵۲. **برای حدس کلی زیر مثال نقض ارائه دهید:**

«اگر در یک چهارضلعی دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.»

۵۳. **گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.**

آ) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

پ) اگر میانهٔ یک مثلث نصف یک ضلع آن باشد، آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه است.

ت) هر زاویهٔ خارجی یک چندضلعی محدب از هر زاویهٔ داخلی آن بزرگ‌تر است.

ث) هر مثلث حداقل یک زاویهٔ کوچک‌تر از 60° دارد.

۵۴. **عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آن‌ها را به‌صورت یک قضیهٔ دوشرطی بنویسید.**

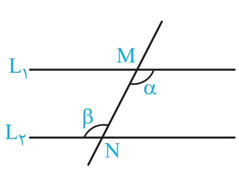
آ) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویهٔ آن نیز برابرند.

ب) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

پ) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

ت) در هر مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف‌های ضلع‌ها در وسط وتر همرسند.

ث) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش نیمساز زاویه‌هایش است.

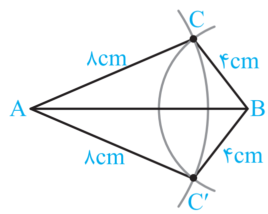


۵۵. **به کمک برهان خلف ثابت کنید اگر در شکل مقابل $\alpha = \beta$ باشد، آن گاه $L_1 \parallel L_2$ است.**

پاسخ فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

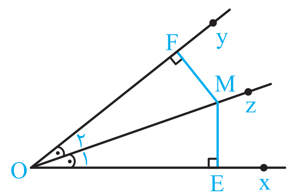
۱

پاره‌خط AB را به طول ۱۰ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع ۴ سانتی‌متر و به مرکز A و شعاع ۸ سانتی‌متر دو کمان رسم می‌کنیم. چون $۱۰ > ۴ + ۴ = ۸$، پس این دو کمان یکدیگر را در دو نقطهٔ C و C′ قطع می‌کنند، پس مسئله دارای دو جواب است.



۲

نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ xOy است و ME و MF فواصل آن از دو ضلع زاویه است، داریم:

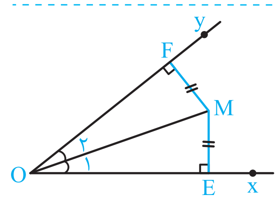


$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{OEM} \cong \overset{\Delta}{OFM} \Rightarrow ME = MF$$

۳

فرض کنیم نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ xOy به یک فاصله باشد $(ME = MF)$

M را به O وصل می‌کنیم، داریم:

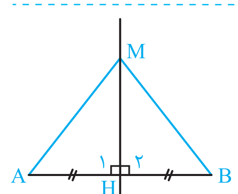


$$\left.\begin{array}{l} ME = MF \\ OM = OM \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OME} \cong \overset{\Delta}{OMF} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

یعنی OM نیمساز زاویهٔ xOy است، پس M روی این نیمساز قرار دارد.

۴

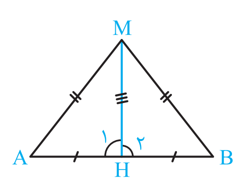
مطابق شکل نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، فاصله‌های M از دو سر پاره‌خط، MA و MB است، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH} \Rightarrow MA = MB$$

۵

فرض کنیم نقطهٔ M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد $(MA = MB)$، می‌خواهیم ثابت کنیم M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد، به همین جهت M را به H (وسط پاره‌خط AB) وصل می‌کنیم،



داریم:

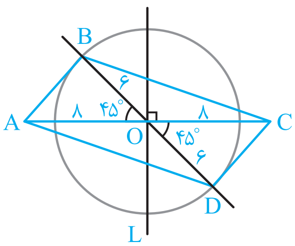
$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

اما دو زاویهٔ H_1 و H_2 مکمل‌اند، پس اندازهٔ هر کدام 90°است و این یعنی MH عمودمنصف AB است.

۶

ابتدا پاره‌خط AC به طول ۱۶ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم، سپس عمودمنصف AC (خط L) را رسم کرده و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم.

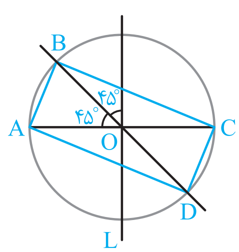
به مرکز O و شعاع ۶ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم.



نیمسازهای دو زاویهٔ قائمه را مطابق شکل رسم می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها با دایره را B و D می‌نامیم. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند و زاویهٔ بین قطرهایش 45° است.

۷

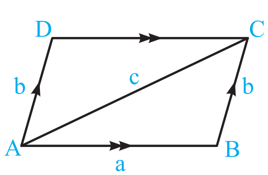
پاره‌خط AC را به طول ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، خط L عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، به مرکز O و شعاع ۳ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم.



نیمسازهای زاویه‌های قائمهٔ بین L و AC را رسم می‌کنیم، نقاط تلاقی آن‌ها با دایره را B و D می‌نامیم، چهارضلعی ABCD مستطیل خواسته شده است.

۸

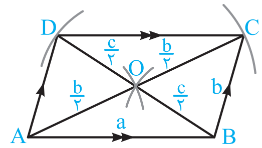
فرض کنیم در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل $AB = a$، $AD = b$ و قطر $AC = c$ معلوم باشند، جهت رسم متوازی‌الاضلاع به شرح زیر عمل می‌کنیم.



ابتدا پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع b و به مرکز A و شعاع c دو کمان رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن‌ها را C می‌نامیم. از نقطه‌های C و A دو خط به ترتیب به موازات AB و BC رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن‌ها را D می‌نامیم، ABCD متوازی‌الاضلاع موردنظر است.

۹

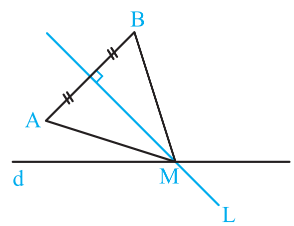
فرض کنید در متوازی‌الاضلاع ABCD، $AB=a$ و $AC=b$ و $BD=c$ معلوم باشد. می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. پس $OA=\frac{AC}{۲}=\frac{b}{۲}$ و $OB=\frac{BD}{۲}=\frac{c}{۲}$



پاره‌خط $AB=a$ را رسم می‌کنیم، به مرکز A و شعاع $\frac{b}{۲}$ و به مرکز B و شعاع $\frac{c}{۲}$ دو کمان رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم، به مرکز O و شعاع $\frac{b}{۲}$ کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با امتداد OA را C و به مرکز O و شعاع $\frac{c}{۲}$ کمانی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با امتداد OB را D می‌نامیم. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

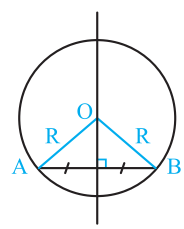
۱۰

خط L عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با خط d را M می‌نامیم، M نقطه‌ای است که از A و B به یک فاصله است و روی خط L قرار دارد.



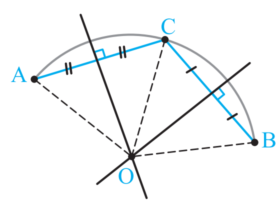
۱۱

عمودمنصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد، زیرا مرکز دایره از دو سر وتر AB به یک فاصله است ($OA=OB=R$).



۱۲

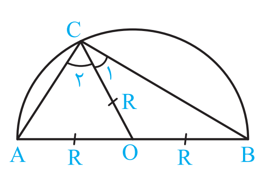
نقطهٔ دلخواه C را روی کمان داده شده در نظر می‌گیریم، عمودمنصف‌های وترهای BC و AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن‌ها را O می‌نامیم.



داریم $OA=OC=OB$، یعنی نقطهٔ O مرکز دایره‌ای است که کمان داده شده بخشی از آن است.

۱۳

مرکز نیم‌دایره را به نقطهٔ C وصل می‌کنیم. مثلث‌های OAC و OBC متساوی‌الساقین هستند زیرا $OA=OC=OB=R$، در نتیجه $\hat{C}_۱=\hat{B}$ و $\hat{C}_۲=\hat{A}$ و در مثلث ABC داریم:

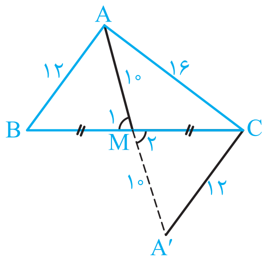


$$\hat{A}+\hat{C}_۲+\hat{C}_۱+\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۲+\hat{C}_۲+\hat{C}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲(\hat{C}_۱+\hat{C}_۲)=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۹۰^\circ \Rightarrow A\hat{C}B=۹۰^\circ$$

۱۴

فرض کنیم مثلث ABC مثلثی است که دو ضلع آن $AB=۱۲$ و $AC=۱۶$ و میانهٔ نظیر ضلع سوم $AM=۱۰$ باشد، اگر AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد دهیم، دو مثلث AMB و $A'MC$ به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت‌اند، پس $A'C=AB=۱۲$.

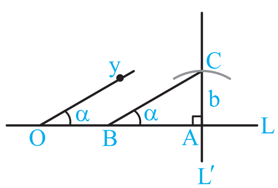


بنابراین اضلاع مثلث $AA'C$ معلوم هستند($AC=۱۶$، $A'C=۱۲$ و $AA'=۲۰$)

طریقهٔ ترسیم: ابتدا مثلث ACA' را با معلوم بودن سه ضلع آن می‌سازیم، سپس میانهٔ نظیر ضلع $AA'=۲۰$ را رسم می‌کنیم (CM) و آن را از نقطهٔ M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B به‌دست آید، مثلث ABC جواب است.

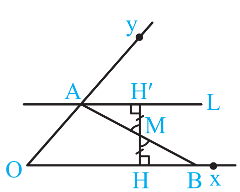
۱۵

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC($\hat{A}=۹۰^\circ$) ضلع $AC=b$ و زاویهٔ $\hat{B}=\alpha$ معلوم هستند. می‌خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم. دو خط عمود بر هم L و L' متقاطع در نقطهٔ A را رسم می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه O را روی L درنظر می‌گیریم و نیم‌خط Oy را چنان رسم می‌کنیم که زاویه به اندازهٔ α ایجاد شود. به مرکز A و شعاع b کمانی رسم می‌کنیم تا خط L' را در نقطهٔ C قطع کند و از نقطهٔ C خطی موازی نیم‌خط Oy رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با خط L را B می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب است.



۱۶

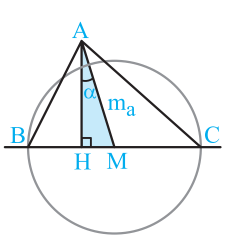
مطابق شکل زاویهٔ xOy و نقطهٔ M داخل آن مفروض است. عمود MH را بر نیم‌خط Ox وارد می‌کنیم و آن را از سمت M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ H' امتداد می‌دهیم،



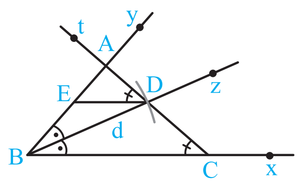
سپس خط L را در نقطهٔ H' عمود بر HH' رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Oy را A می‌نامیم، A را به M وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط Ox را در نقطهٔ B قطع کند. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BMH و AMH' به حالت (زض‌ز) هم‌نهشت هستند پس $MA=MB$

۱۷

مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH را با معلوم بودن وتر $AM=m_a$ و زاویهٔ $H\hat{A}M=\alpha$ رسم می‌کنیم. به مرکز M و شعاع $\frac{a}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با امتداد MH را B و C می‌نامیم. A را به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب است.



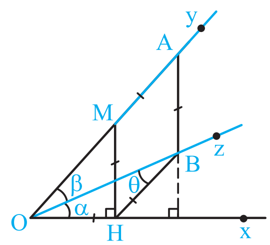
۱۸



در مثلث ABC اندازهٔ زوایای $\hat{B}=\alpha$ و $\hat{C}=\beta$ و طول نیمساز $BD=d$ معلوم هستند می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم.

زاویهٔ xBy را به اندازهٔ α و Bz نیمساز آن را رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع d کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن با Bz را D می‌نامیم و DE را موازی نیم‌خط Bx رسم می‌کنیم. زاویهٔ $E\hat{D}t$ را برابر β رسم می‌کنیم و محل تلاقی نیم‌خط Dt و امتداد آن با نیم‌خط‌های By و Bx را به‌ترتیب A و C می‌نامیم. مثلث ABC جواب است.

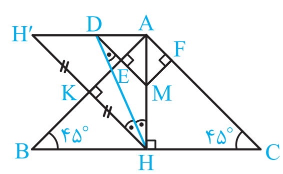
۱۹



فرض کنیم M نقطه‌ای روی Oy باشد به‌طوری که $MA=MH$، چون $x\hat{O}y=45^\circ$ پس $O\hat{M}H=45^\circ$ و در نتیجه $OH=MH$. لوزی AMHB را می‌سازیم داریم $BH=MH$، پس $OH=BH$ یعنی مثلث OHB متساوی‌الساقین است و می‌توان نوشت $\alpha=\theta$ و از طرفی بنا به قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم $\beta=\theta$ بنابراین $\alpha=\beta$ یعنی OB نیمساز زاویهٔ xOy است.

طریقهٔ ترسیم: Oz نیمساز زاویهٔ xOy را رسم می‌کنیم. از A خطی عمود بر Ox رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با Oz را B می‌نامیم از B خطی موازی نیم‌خط Oy رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Ox را H می‌نامیم. در نقطهٔ H عمودی بر Ox رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با Oy را M می‌نامیم. داریم $MH=MA$

۲۰



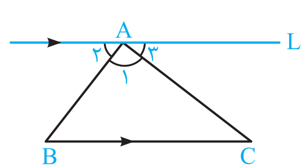
در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC، AH ارتفاع است (نیمساز هم است). می‌خواهیم نقطهٔ M را روی AH چنان تعیین کنیم که: $MH=2ME$

یا $MH=ME+MF$ (چون چهارضلعی AEMF مربع است.)

KH را عمود بر AB رسم می‌کنیم و آن را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ H' امتداد می‌دهیم، مثلث $AH'H$ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. نیمساز زاویهٔ AHH' را رسم می‌کنیم، محل تلاقی آن با AH' را D می‌نامیم، از D خطی موازی HH' رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با AH را M می‌نامیم. مثلث DMH متساوی‌الساقین است $(MD=MH)$. در نتیجه $MH=MD=2ME$

۲۱

از نقطهٔ A خط L را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم، داریم:

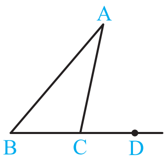


$$\left.\begin{array}{l} L\parallel BC \text{ و مورب } AB \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B} \\ L\parallel BC \text{ و مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_3=\hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_2+\hat{A}_3$$

$$\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}+\hat{A}_1=\underbrace{\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3}_{180^\circ} \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}+\hat{A}=180^\circ$$

۲۲

می‌خواهیم ثابت کنیم $A\hat{C}D=\hat{A}+\hat{B}$، داریم:

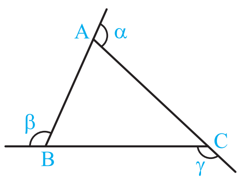


$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{B}+A\hat{C}B=180^\circ \\ A\hat{C}B+A\hat{C}D=180^\circ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+A\hat{C}B=A\hat{C}B+A\hat{C}D \Rightarrow A\hat{C}D=\hat{A}+\hat{B}$$

۲۳

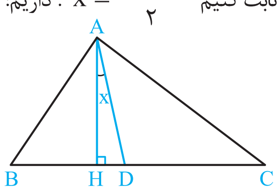
α و β و γ زوایای خارجی مثلث ABC هستند، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\hat{B}+\hat{C} \\ \beta=\hat{A}+\hat{C} \\ \gamma=\hat{A}+\hat{B} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \alpha+\beta+\gamma=2\underbrace{(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})}_{180^\circ}=360^\circ$$

۲۴

در شکل زیر با فرض $\hat{B}>\hat{C}$، می‌خواهیم ثابت کنیم $x=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$. داریم:



$$AD \text{ نیمساز } \hat{A} \Rightarrow B\hat{A}D=D\hat{A}C=\frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow B\hat{A}H+H\hat{A}D=\frac{\hat{A}}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم $B\hat{A}H=90^\circ-\hat{B}$، در نتیجه:

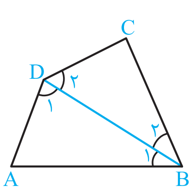
$$90^\circ-\hat{B}+x=\frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow 180^\circ-2\hat{B}+2x=\hat{A}$$

$$\Rightarrow 180^\circ-2\hat{B}+2x=180^\circ-\hat{B}-\hat{C} \Rightarrow 2x=2\hat{B}-\hat{B}-\hat{C}$$

$$2x=\hat{B}-\hat{C} \Rightarrow x=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$$

۲۵

در چهارضلعی محدب ABCD مطابق شکل قطر BD را رسم می‌کنیم، داریم:

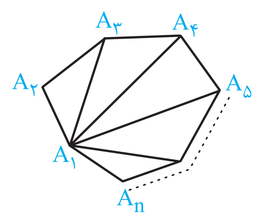


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD}: \hat{A}+\hat{B}_1+\hat{D}_1=180^\circ \\ \overset{\Delta}{BCD}: \hat{C}+\hat{B}_2+\hat{D}_2=180^\circ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} \hat{A}+\hat{C}+(\hat{B}_1+\hat{B}_2)+(\hat{D}_1+\hat{D}_2)=360^\circ$$

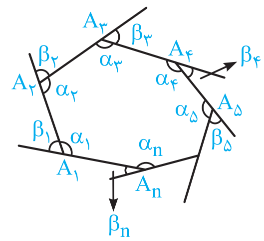
$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}+\hat{B}+\hat{D}=360^\circ$$

۲۶



n ضلعی محدب $A_1A_2A_3\dots A_n$ را درنظر می‌گیریم، قطرهایی که در رأس A_1 مشترک هستند را رسم می‌کنیم، رأس A_1 با ضلع‌های A_2A_3، A_3A_4، A_4A_5، $\dots$ و $A_{n-1}A_n$ تشکیل مثلث می‌دهند.
چون تعداد این ضلع‌ها $n-2$ است (n ضلع منهای دو ضلع A_1A_2 و A_1A_n) پس تعداد این مثلث‌ها برابر $n-2$ است و مجموع زوایای این مثلث‌ها همان مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب مفروض است، پس مقدار آن برابر است با $(n-2)\times 180^\circ$

۲۷



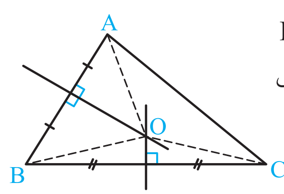
مطابق شکل در هر یک از رأس‌های n ضلعی محدب $A_1A_2A_3\dots A_n$ زوایای داخلی و خارجی مکمل‌اند، پس:

$$(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\dots+(\alpha_n+\beta_n)=n\times 180^\circ$$
$$\Rightarrow (\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)=n\times 180^\circ$$

اما مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب برابر $(n-2)\times 180^\circ$ است، پس:

$$\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n=n\times 180^\circ-(n-2)\times 180^\circ$$
$$=n\times 180^\circ-n\times 180^\circ+2\times 180^\circ=360^\circ$$

۲۸

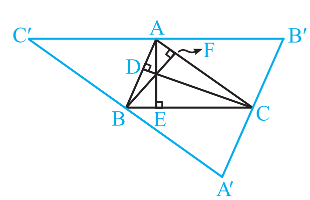


نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع BC و AB را O می‌نامیم، O را به رأس‌های مثلث وصل می‌کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} O \text{ متعلق به عمودمنصف } BC \Rightarrow OB=OC \\ O \text{ متعلق به عمودمنصف } AB \Rightarrow OB=OA \end{array}\right\}\Rightarrow OA=OC$$

تساوی فوق یعنی نقطهٔ O از دو سر ضلع AC به یک فاصله است، پس O روی عمودمنصف ضلع AC قرار دارد، در نتیجه هر سه عمودمنصف اضلاع مثلث در نقطهٔ O همرسند.

۲۹



ارتفاع‌های AE، BF و CD را در مثلث ABC رسم می‌کنیم، از رأس‌های مثلث ABC خطوطی موازی اضلاع مقابل آن‌ها رسم می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ ایجاد می‌شود، داریم:

$$\left.\begin{array}{r} AB'\parallel BC\text{، مورب } AC\Rightarrow B\hat{C}A=C\hat{A}B' \\ AC=CA \\ AB\parallel B'C\text{، مورب } AC\Rightarrow B\hat{A}C=A\hat{C}B' \end{array}\right\}$$

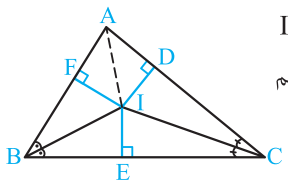
$$\xrightarrow{\text{(زضز)}} \overset{\Delta}{ABC}\cong \overset{\Delta}{CB'A}\Rightarrow AB'=BC$$

با استدلال مشابه دو مثلث ABC و BAC' به حالت (زضز) هم‌نهشت هستند پس $AC'=BC$ در نتیجه $AB'=AC'$

$$AE\perp BC\text{ ، }B'C'\parallel BC\Rightarrow AE\perp B'C'$$

بنابراین AE عمودمنصف ضلع $B'C'$ در مثلث $A'B'C'$ است، با استدلال مشابه نتیجه می‌شود BF و CD به‌ترتیب عمودمنصف اضلاع $A'C'$ و $A'B'$ هستند، اما می‌دانیم عمودمنصف اضلاع یک مثلث همرسند، پس سه ارتفاع مثلث ABC همرسند.

۳۰

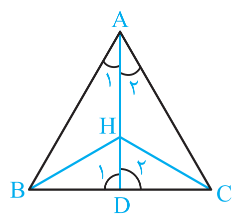


نقطهٔ تلاقی نیمساز زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را I می‌نامیم و از I بر اضلاع مثلث عمود رسم می‌کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} I \text{ روی نیمساز زاویهٔ } B \Rightarrow IF=IE \\ I \text{ روی نیمساز زاویهٔ } C \Rightarrow IE=ID \end{array}\right\}\Rightarrow IF=ID$$

تساوی اخیر یعنی نقطهٔ I از اضلاع زاویهٔ A به یک فاصله است، پس I روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، یعنی سه نیمساز زوایای داخلی مثلث ABC همرسند.

۳۱



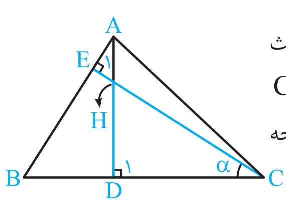
فرض کنیم H نقطهٔ همرسی نیمسازها و ارتفاع‌های مثلث ABC باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.
A را به H وصل می‌کنیم، AH را امتداد می‌دهیم تا BC را در نقطهٔ D قطع کند، چون H نقطهٔ همرسی نیمسازها است پس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و چون H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها است پس $\hat{D}_1=\hat{D}_2=90^\circ$ داریم:

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2\text{ ، }AD=AD\text{ ، }\hat{D}_1=\hat{D}_2=90^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{(زضز)}} \overset{\Delta}{ABD}\cong \overset{\Delta}{ACD}\Rightarrow AB=AC$$

با استدلال مشابه داریم $AB=BC$ پس $AB=AC=BC$ و این یعنی مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۳۲



چون H نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است پس امتدادهای AH و CH به‌ترتیب بر BC و AB عمودند در نتیجه $\hat{E}_1=\hat{D}_1=90^\circ$. داریم:

$$\overset{\Delta}{DHC}: D\hat{H}C+90^\circ+\alpha=180^\circ\Rightarrow D\hat{H}C=90^\circ-\alpha$$
$$\overset{\Delta}{AHE}: A\hat{H}E+90^\circ+E\hat{A}H=180^\circ\Rightarrow E\hat{A}H=90^\circ-A\hat{H}E$$

دو زاویهٔ AHE و DHC متقابل به رأس هستند پس برابرند پس می‌توان نوشت:

$$E\hat{A}H=90^\circ-D\hat{H}C=90^\circ-(90^\circ-\alpha)=\alpha\Rightarrow B\hat{A}H=\alpha$$