

راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

فیلم آموزشی

گام

اول

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Code های صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

درسنامه آموزشی

گام

دوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش مخصوص، عمیق و کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. کلیه نکات کنکوری و راهکارهای میان‌بر و تستی مورد نیاز آورده شده است.
۴. تمام تیپ‌های مهم و کنکوری و نیز تمام مطالب کتاب درسی، اعم از فعالیت‌ها، تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها و ... در مثال‌های درسنامه پوشش داده شده است.
۵. در انتهای هر فصل، خلاصه نکات آن فصل به منظور مرور و جمع‌بندی، به ویژه برای ایام آزمون سراسری و کنکورهای آزمایشی ارائه شده است.

پرسش‌های تشریحی

گام

سوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. تمام تمرین‌ها، مثال‌ها و حتی متن کتاب درسی و نیز سؤالات امتحانات نهایی سال‌های قبل که با مباحث کنونی انطباق دارند، پوشش داده شده است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گام

چهارم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تمام تمرین‌ها، مثال‌ها و حتی متن کتاب درسی به صورت تست آورده شده است.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی بوده و تمامی نکات درسی دوباره در پاسخ تست‌ها گنجانده شده است.
۷. تست‌های واجب با علامت ★ و تست‌های مخصوص جمع‌بندی با علامت ★ مشخص شده است.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

درسنامه آموزشی

فصل اول: تابع

قسمت اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی ۱۰

قسمت دوم: ترکیب توابع ۱۴

قسمت سوم: وارون تابع ۲۵

فصل دوم: مثلثات

قسمت اول: تناوب و تابع تانژانت ۳۶

قسمت دوم: نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان ۴۵

قسمت سوم: معادلات مثلثاتی ۴۹

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

قسمت اول: فرآیندهای حدی و محاسبه حد تابع ۵۸

قسمت دوم: بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $X - a$ و رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ۶۷

قسمت سوم: پیوستگی ۷۴

قسمت چهارم: حد بی‌نهایت - حد در بی‌نهایت ۷۸

فصل چهارم: مشتق

قسمت اول: تعریف مشتق - قوانین مشتق‌گیری ۹۱

قسمت دوم: خط مماس (مفهوم مشتق) - مشتق‌پذیری و ۹۸

قسمت سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۱۰۶

فصل پنجم: کاربرد مشتق

قسمت اول: یکنوایی تابع - نقطه بحرانی ۱۱۳

قسمت دوم: اکسترم‌های تابع ۱۲۰

قسمت سوم: بهینه‌سازی ۱۲۷

فصل ششم: هندسه

قسمت اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ۱۳۲

قسمت دوم: دایره ۱۴۰

فصل هفتم: احتمال

قانون احتمال کل ۱۵۳

FILM

فصل اول: تابع

جلسه (۱) تا (۴): توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی 97 min

جلسه (۵) تا (۹): ترکیب توابع 135 min

جلسه (۱۰) تا (۱۲): تابع وارون 79 min

فصل دوم: مثلثات

جلسه (۱۳) تا (۱۸): تناوب و تانژانت 96 min

جلسه (۱۹) تا (۲۱): معادلات مثلثاتی 73 min

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

جلسه (۲۲) تا (۲۵): حد بی‌نهایت 125 min

جلسه (۲۶) تا (۲۸): حد در بی‌نهایت 87 min

فصل چهارم: مشتق

جلسه (۲۹) تا (۳۲): آشنایی با مفهوم مشتق 124 min

جلسه (۳۳) تا (۴۰): مشتق‌پذیری و پیوستگی 183 min

جلسه (۴۱) تا (۴۴): آهنگ تغییر 72 min

فصل پنجم: کاربرد مشتق

جلسه (۴۵) تا (۴۹): اکسترم‌های تابع 128 min

جلسه (۵۰) و (۵۱): بهینه‌سازی 66 min

فصل ششم: هندسه

جلسه (۵۲) تا (۵۹): تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی 67 min

جلسه (۶۰) تا (۶۴): دایره 94 min

فصل هفتم: احتمال

جلسه (۶۵) تا (۶۷): قانون احتمال کل 32 min

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول: تابع

- قسمت اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی ۱۶۱
- قسمت دوم: ترکیب توابع ۱۶۳
- قسمت سوم: وارون تابع ۱۶۸
- تست‌های V.I.P ۱۷۳

فصل دوم: مثلثات

- قسمت اول: تناوب و تابع تنازانت ۱۹۶
- قسمت دوم: نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان ۱۹۹
- قسمت سوم: معادلات مثلثاتی ۲۰۳
- تست‌های V.I.P ۲۰۶

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

- قسمت اول: فرآیندهای حدی و محاسبه حد تابع ۲۲۵
- قسمت دوم: بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $X - a$ و رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ۲۲۸
- قسمت سوم: پیوستگی ۲۳۲
- قسمت چهارم: حد بی‌نهایت - حد در بی‌نهایت ۲۳۷
- تست‌های V.I.P ۲۴۱

فصل چهارم: مشتق

- قسمت اول: تعریف مشتق - قوانین مشتق‌گیری ۲۶۶
- قسمت دوم: خط مماس (مفهوم مشتق) - مشتق‌پذیری و ۲۷۰
- قسمت سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۲۷۷
- تست‌های V.I.P ۲۸۰

فصل پنجم: کاربرد مشتق

- قسمت اول: یکنوایی تابع - نقطه بحرانی ۳۰۱
- قسمت دوم: اکسترم‌های تابع ۳۰۳
- قسمت سوم: بهینه‌سازی ۳۰۸
- تست‌های V.I.P ۳۱۰

فصل ششم: هندسه

- قسمت اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ۳۳۱
- قسمت دوم: دایره ۳۳۶
- تست‌های V.I.P ۳۴۲

فصل هفتم: احتمال

- قانون احتمال کل ۳۶۷
- تست‌های V.I.P ۳۷۱

پرسش‌های تشریحی

فصل اول: تابع

- قسمت اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی ۳۸۵
- قسمت دوم: ترکیب توابع ۳۸۶
- قسمت سوم: وارون تابع ۳۸۹

فصل دوم: مثلثات

- قسمت اول: تناوب و تابع تنازانت ۴۰۱
- قسمت دوم: نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان ۴۰۲
- قسمت سوم: معادلات مثلثاتی ۴۰۳

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

- قسمت اول: فرآیندهای حدی و محاسبه حد تابع -
- قسمت دوم: بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $X - a$ و رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ۴۱۱
- قسمت سوم: پیوستگی -
- قسمت چهارم: حد بی‌نهایت - حد در بی‌نهایت ۴۱۱

فصل چهارم: مشتق

- قسمت اول: تعریف مشتق - قوانین مشتق‌گیری ۴۱۷
- قسمت دوم: خط مماس (مفهوم مشتق) - مشتق‌پذیری و ۴۱۸
- قسمت سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۴۲۱

فصل پنجم: کاربرد مشتق

- قسمت اول: یکنوایی تابع - نقطه بحرانی ۴۳۱
- قسمت دوم: اکسترم‌های تابع ۴۳۱
- قسمت سوم: بهینه‌سازی ۴۳۲

فصل ششم: هندسه

- قسمت اول: تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ۴۳۹
- قسمت دوم: دایره ۴۴۱

فصل هفتم: احتمال

- قانون احتمال کل ۴۵۱

قسمت سوم

معادلات مثلثاتی

فصل

۲

معادله مثلثاتی: معادلاتی که بر حسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند را معادله مثلثاتی می‌نامیم. به عنوان مثال، معادلات $3 \tan x + \cot x = 1$ و $2 \sin^2 x + \cos 2x = 0$ معادله‌های مثلثاتی هستند.

جواب معادله: مقدارهایی از زاویه مجهول که به ازای آن‌ها معادله برقرار شود، جواب معادله می‌نامند. مقصود از حل معادله مثلثاتی پیدا کردن کلیه جواب‌های آن معادله است.

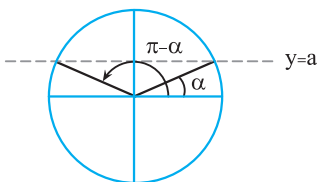
به عنوان مثال، در معادله مثلثاتی $2 \cos x = 1$ داریم:

$$2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

جواب‌هایی از معادله‌اند و تمام جواب‌های معادله $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$ می‌باشند.

حل معادله مثلثاتی

برای حل یک معادله مثلثاتی، ابتدا به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستوره‌های جبری، آن را به معادله ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ یا $\tan x = a$ یا $\cot x = a$ تبدیل شود.



حل معادله sin x = a

برای حل معادله $\sin x = a$ که $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\sin x = \sin \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha, x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

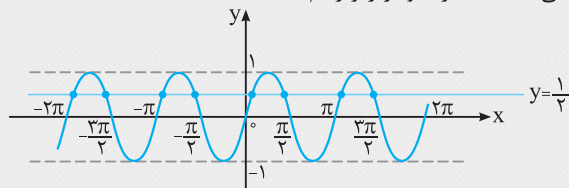
نکته اگر معادله مثلثاتی را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ بنویسیم، آنگاه تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد.

مثال معادله‌های مثلثاتی $2 \sin 2x - 1 = 0$ و $\sin 2x + \sin x = 0$ را حل کنید.

پاسخ: معادله $2 \sin 2x - 1 = 0$ را به صورت $\sin 2x = \frac{1}{2}$ درمی‌آوریم و با توجه به این که $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ می‌باشد، داریم:

$$\sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌های معادله $\sin 2x = \frac{1}{2}$ ، محل تلاقی خط $y = \frac{1}{2}$ با نمودار $y = \sin 2x$ می‌باشند که در نمودار زیر رسم شده است:



$$\sin 2x = -\sin x = \sin(-x) \Rightarrow \sin(\underbrace{2x}_u) = \sin(\underbrace{-x}_\alpha)$$

برای حل معادله مثلثاتی $\sin 2x + \sin x = 0$ ، می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نکته برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $\pm 1, \pm 2, \dots$ را قرار می‌دهیم و برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

تست

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ در بازه $(0, 2\pi)$ چقدر است؟

(۴) $\frac{41\pi}{16}$

(۳) $\frac{31\pi}{16}$

(۲) $\frac{11\pi}{3}$

(۱) $\frac{5\pi}{3}$

پاسخ: با توجه به این‌که $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشد، داریم:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{13\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{7\pi}{24} = \frac{24k\pi + 7\pi}{24} \\ x = k\pi + \frac{13\pi}{24} = \frac{24k\pi + 13\pi}{24} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱
x	$\frac{7\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}$	$\frac{31\pi}{24}, \frac{37\pi}{24}$

با دادن مقادیر صحیح به k، جواب‌های معادله را در بازه $(0, 2\pi)$ به دست می‌آوریم:

گزینه (۲) صحیح است. $\Rightarrow \frac{7\pi}{24} + \frac{13\pi}{24} + \frac{31\pi}{24} + \frac{37\pi}{24} = \frac{88\pi}{24} = \frac{11\pi}{3}$

تست

معادله $2\sin^3 x - \sin x = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

(۴) ۷

(۳) ۶

(۲) ۵

(۱) ۴

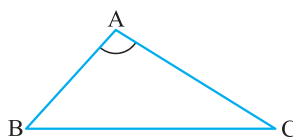
پاسخ: برای حل معادله، با استفاده از فاکتورگیری داریم:

$$\sin x (2\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow[k=0,1]{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} x = 0, x = \pi \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \xrightarrow[k=0]{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8k\pi - \pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{8k\pi + 5\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow[k=0]{x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})} \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \\ k=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

معادله در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ، ۶ جواب دارد، بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

یادآوری: مساحت مثلث ABC برابر است با:

تست

چند مثلث وجود دارد که مساحت آن ۶ و طول دو ضلع آن ۴ و ۶ باشند؟

(۴) سه

(۳) دو

(۲) یک

(۱) صفر

پاسخ: با فرض $AB = 6$ و $AC = 4$ داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin A = 6 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$$

چون A اندازه یک زاویه مثلث است، پس $0^\circ < A < 180^\circ$ می‌باشد، بنابراین:

$$\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \text{ یا } \hat{A} = 150^\circ$$

پس دو مثلث می‌توان رسم کرد. بنابراین گزینه (۳) درست است.

در برخی از حالت‌ها، جواب معادله مثلثاتی فقط با یک رابطه به دست می‌آید.

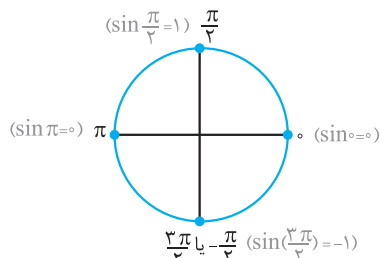
حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = 0$ و $\sin u = \pm 1$ به دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد:

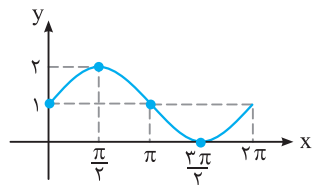
$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

$$\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$



نکته مهم: ریشه‌های معادلات $\sin u = 1$ و $\sin u = -1$ ، ریشه‌های مضاعف معادله مثلثاتی هستند و بقیه ریشه‌ها، جزء ریشه‌های ساده می‌باشند و در تعیین علامت عبارت‌های مثلثاتی، در دو طرف ریشه‌های مضاعف تغییر علامت نداریم و در دو طرف ریشه‌های ساده تغییر علامت داریم.



به عنوان مثال، نمودار تابع $f(x) = 1 + \sin x$ به کمک انتقال در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، ریشه مضاعف معادله $f(x) = 0$ است و علامت $f(x)$ در دو طرف

$x = \frac{3\pi}{2}$ مثبت است.

تست

معادله $(\sin x + 1)(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x - \frac{1}{3}) = 0$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ:

$$(\sin x + 1)(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x - \frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow \sin x + 1 = 0 \text{ یا } \sin x - \frac{1}{2} = 0 \text{ یا } \sin x - \frac{1}{3} = 0$$

معادله ریشه ندارد. $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} > 1$ ، معادله دو جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد. $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}$

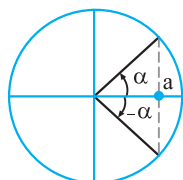
معادله دارای ریشه مضاعف $x = \frac{3\pi}{2}$ است. $\Rightarrow \sin x = -1$

بنابراین معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای سه ریشه است و در نتیجه، گزینه (۱) صحیح است.

نکته مهم: برای حل معادله مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$ از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

$$u = k\pi \pm \alpha, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال: $\sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$



حل معادله $\cos x = a$

برای حل معادله $\cos x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cos x = \cos \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

نکته: جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\cos u = \cos \alpha$ به صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.

مثال

معادلات زیر را حل کنید و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

(آ) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

(ب) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

پاسخ: (آ) $2\cos x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\cos x = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

(ب) با توجه به اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ، داریم:

$$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \Rightarrow (2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

با انتخاب $A = \cos x$ ، معادله به صورت $2A^2 - 3A + 1 = 0$ درمی‌آید: $2A^2 - 3A + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب برابر صفر است}} A = 1, A = \frac{1}{2}$

$$A = 1 = \cos x = \cos 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad , \quad A = \frac{1}{2} = \cos x \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

تست

جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

پاسخ: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ ، داریم:

$$\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4} \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۵۲

حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = 0$ و $\cos u = \pm 1$ به‌دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد: ($k \in \mathbb{Z}$)

۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$

۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$

نکته ریشه‌های معادلات $\cos u = \pm 1$ ، ریشه‌های مضاعف معادلات مثلثاتی هستند.

تست

جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 x + 3\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 2 = 0$ به کدام صورت است؟

(۴) $(2k+1)\pi$

(۳) $\frac{k\pi}{2}$

(۲) $2k\pi$

(۱) $k\pi$

پاسخ: $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos x \xrightarrow{\text{معادله}} \cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \cos x = -1, \cos x = -\frac{c}{a} = -2$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$

معادله $\cos x = -2$ جواب ندارد و داریم:

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مثال

معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

پاسخ: $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (\sin x + 1) + \cos x(1 + \sin x) = 0$

$$\Rightarrow (\sin x + 1)(1 + \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$u = k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$

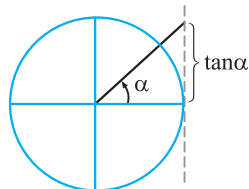
نکته مهم برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 u = a^2 = \cos^2 \alpha$ از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

مثال: $\cos^2 x = \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

حل معادلات $\cot x = a, \tan x = a$

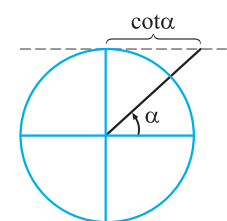
برای حل معادله $\tan x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\tan \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\tan x = \tan \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$



برای حل معادله $\cot x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cot \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cot x = \cot \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$



مثال

معادلات $\tan x + \sqrt{3} = 0$ و $\tan 2x = \cot x$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \tan 2x = \cot x \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

۵۳

مثال

معادله $\cot 2x - 1 = 0$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\cot 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cot 2x = 1 = \cot \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

حل معادلات مثلثاتی کسری

در حل معادلات مثلثاتی کسری باید ریشه‌های مخرج را از مجموعه جواب حذف کنیم.

مثال

جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\frac{2\sin x + 1}{\sin x + 2} = 1$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$(\sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = -2 < -1)$$

مخرج کسر همواره مخالف صفر است، لذا هر جوابی که به دست آید قابل قبول است:

$$\frac{2\sin x + 1}{\sin x + 2} = 1 \Rightarrow 2\sin x + 1 = \sin x + 2 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

تست

(سراسری تجربی)

جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

پاسخ:

$$\begin{array}{llll} k\pi - \frac{\pi}{4} & (4) & k\pi \pm \frac{\pi}{4} & (3) \\ k\pi + \frac{\pi}{4} & (2) & 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} & (1) \end{array}$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$= \left\{\dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots\right\} - \left\{\dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots\right\} = \left\{\dots, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots\right\} = \left\{k\pi - \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

خلاصه فصل دوم

(۱) دوره تناوب تابع‌های $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و دوره تناوب تابع $y = a \tan(bx + c) + d$ برابر $\frac{\pi}{|b|}$ است.

(۲) کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که به ازای آن تساوی $f(x + T) = f(x)$ برقرار باشد، دوره تناوب تابع f می‌گوییم.

(۳) اگر قطعه‌ای از نمودار با دوره تناوب T ، در بازه‌ای به طول l ، n بار تکرار شده باشد، آن‌گاه:

$$T = \frac{l}{n}$$

(۴) اگر T دوره تناوب تابع f باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n ، تساوی $f(x + nT) = f(x)$ برقرار است.

(۵) در توابع $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ داریم: ماکزیمم مقدار $|a| + c$ ، مینیمم مقدار $-|a| + c$

(۶) در تابع $y = a \sin(bx + c) + d$ ، با فرض مثبت بودن ab ، داریم:

$$bx + c = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

• طول نقاطی که تابع در آن نقاط بیش‌ترین مقدار را اختیار می‌کند:

$$bx + c = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

• طول نقاطی که تابع در آن نقاط کم‌ترین مقدار را اختیار می‌کند:

• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \sin(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع در آن نقاط محور x را قطع می‌کند:

$$bx + c = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(۷) در تابع $y = a \sin(bx + c) + d$ ، با فرض منفی بودن ab ، داریم:

$$bx + c = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

• طول نقاطی که تابع در آن نقاط مینیمم دارد:

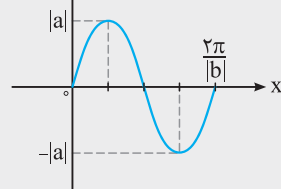
$$bx + c = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

• طول نقاطی که تابع در آن نقاط ماکزیمم دارد:

• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \sin(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع در آن نقاط محور x را قطع می‌کند:

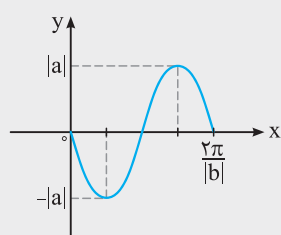
$$bx + c = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(۸) نمودار تابع $y = a \sin(bx)$ با فرض $ab > 0$ و در یک دوره تناوب به صورت $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر $ab > 0$ ، آن‌گاه در بازه $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ تابع ابتدا اکیداً صعودی است.

(۹) نمودار تابع $y = a \sin(bx)$ با فرض $ab < 0$ و در یک دوره تناوب به صورت $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر $ab < 0$ ، آن‌گاه در بازه $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ نمودار تابع ابتدا اکیداً نزولی است.

(۱۰) در تابع $y = a \cos(bx + c) + d$ ، با فرض منفی بودن ab ، داریم:

$$bx + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

• طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند:

$$bx + c = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

• طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند:

• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور x را در آن نقاط قطع می‌کند:

$$bx + c = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

(۱۱) در تابع $y = a \cos(bx + c) + d$ ، با فرض مثبت بودن ab ، داریم:

$$bx + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

• طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند:

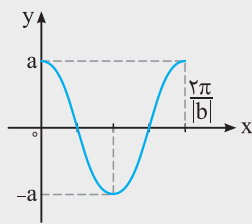
$$bx + c = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

• طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند:

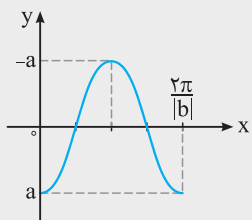
• اگر ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx + c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور x را در آن نقاط قطع می‌کند:

$$bx + c = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

(۱۲) نمودار تابع $y = a \cos(bx)$ با فرض $a > 0$ و در یک دوره تناوب به صورت روبه‌رو می‌باشد:



نمودار تابع $y = a \cos(bx)$ با فرض $a < 0$ و در یک دوره تناوب (بازه $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$) به صورت روبه‌رو می‌باشد:



(۱۳) دامنه تابع $y = a + b \tan u$ به صورت $\mathbb{R} - \{u = k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ است.

(۱۴) با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ ، تابع در بازه‌های $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ، ... و $(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2})$ اکیداً صعودی می‌باشد، اما تابع در هر بازه‌ای که شامل این مقادیر باشد، غیریکتوا خواهد شد.

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{یا} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad , \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad (15)$$

(۱۶) اگر مقدار $\sin x + \cos x$ یا $\sin x - \cos x$ را داشته باشیم، می‌توان مقدار $\sin 2x$ را با به توان رساندن تساوی‌های داده‌شده به دست آورد. هم‌چنین اگر مقدار $\cos 2x$ را بخواهیم به دست آوریم، باز هم ابتدا مقدار $\sin 2x$ را به دست می‌آوریم و سپس مقدار $\cos 2x$ را از رابطه $\cos 2x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 2x}$ مشخص می‌کنیم.

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad , \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (17)$$

(۱۸) عبارت $1 + \sin 2x$ با عبارت $(\sin x + \cos x)^2$ و عبارت $1 - \sin 2x$ با عبارت $(\sin x - \cos x)^2$ برابر است.

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \quad (19)$$

(۲۰) $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ را می‌توان با فرمول‌های زیر بر حسب $\cos 2x$ نوشت:

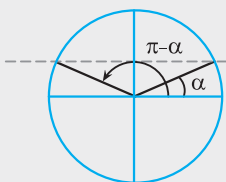
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (21)$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha \quad (22)$$

(۲۳) برای حل معادله $\sin x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\sin x = \sin \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

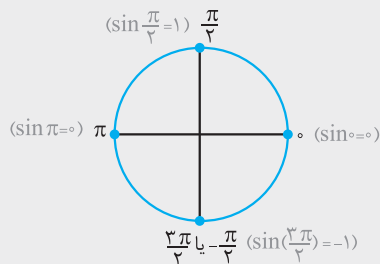


$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

(۲۴) اگر معادله مثلثاتی را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ بنویسیم، آنگاه تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد.

(۲۵) برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $\pm 1, \pm 2, \dots$ را قرار می‌دهیم و برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

(۲۶) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = 0$ و $\sin u = \pm 1$ به دست آید با حفظ روابط زیر می توان سریع تر جواب معادله را به دست آورد:



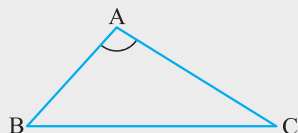
$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

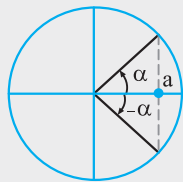
(۲۷) برای حل معادله مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$ از رابطه $u = k\pi \pm \alpha, (k \in \mathbb{Z})$ استفاده می کنیم.

(۲۸) مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

(۲۹) برای حل معادله $\cos x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ابتدا α را طوری پیدا می کنیم که $\cos \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cos x = \cos \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب های معادله از فرمول زیر به دست می آید:



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

(۳۰) جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos u = \cos \alpha$ به صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.

(۳۱) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = 0$ و $\cos u = \pm 1$ به دست آید، با حفظ روابط زیر می توان سریع تر جواب معادله را به دست آورد: ($k \in \mathbb{Z}$)

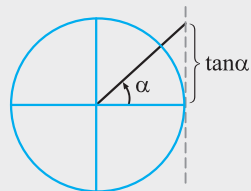
$$۱) \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$۲) \cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$$

$$۳) \cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$$

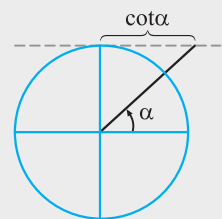
(۳۲) برای حل معادله مثلثاتی $\cos^2 u = a^2 = \cos^2 \alpha$ از رابطه $u = k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$ استفاده می کنیم.

برای حل معادله $\tan x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری پیدا می کنیم که $\tan \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\tan x = \tan \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب های معادله از فرمول زیر به دست می آید:



$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

برای حل معادله $\cot x = a$ و $a \in \mathbb{R}$ ابتدا α را طوری پیدا می کنیم که $\cot \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cot x = \cot \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب های معادله از فرمول زیر به دست می آید:



$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

قسمت سوم: معادلات مثلثاتی

حل معادله مثلثاتی $\sin u = a$

(سراسری تجربی)

☆ ۲۶۷. یکی از جواب‌های معادله $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ کدام است؟

$$(1) \frac{2\pi}{3} \quad (2) \frac{5\pi}{6} \quad (3) \frac{7\pi}{6} \quad (4) \frac{4\pi}{3}$$

☆ ۲۶۸. جواب‌های کلی معادله $5\sin x + 3\cos(\frac{3\pi}{4} - x) - 1 = 0$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ است. مجموعه مقادیر k کدام‌اند؟

$$(1) \{1, 5\} \quad (2) \{1, 7\} \quad (3) \{5\} \quad (4) \{1, 5, 7\}$$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۶۹. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

$$(1) \frac{3\pi}{8} \quad (2) \frac{\pi}{2} \quad (3) \frac{5\pi}{8} \quad (4) \frac{3\pi}{2}$$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۷۰. نمودار تابع $y = \sin 2x$ ، خط $y = -\frac{1}{4}$ را در بازه $[0, \pi]$ در چند نقطه قطع می‌کند؟

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) 3$$

☆ ۲۷۱. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos(\frac{\pi}{4} + x) + \cos(\frac{3\pi}{4} + x) + \sin(\pi + x) = -1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4) 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

(سراسری تجربی- ۹۰)

☆ ۲۷۲. جواب کلی معادله $\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{4} + x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2) 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (3) 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4) k\pi + \frac{\pi}{4}$$

(سراسری ریاضی- ۸۷)

☆ ۲۷۳. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{4} + x)\sin(\pi + x) = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2) k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (3) 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (4) 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

☆ ۲۷۴. جواب کلی معادله مثلثاتی $(1 + \cos 2x)\cot(\frac{\pi}{4} + x) = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (2) k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3) k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4) k\pi + \frac{\pi}{6}$$

(سراسری تجربی فارغ از کشور- ۸۶)

☆ ۲۷۵. جواب کلی معادله مثلثاتی $2\tan x \cdot \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2) k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (3) 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4) 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

☆ ۲۷۶. یکی از جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \sqrt{3}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (2) k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad (3) 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (4) 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۷۷. یکی از جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (2) k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (3) 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (4) 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

☆ ۲۷۸. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2) k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3) \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} \quad (4) \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$$

(سراسری ریاضی)

☆ ۲۷۹. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 2x + \sin x = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) \frac{k\pi}{2} \quad (2) k\pi \quad (3) k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (4) 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(سراسری تجربی- ۹۳)

☆ ۲۸۰. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{4} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$(1) k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2) 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3) 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \quad (4) \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

- ☆ ۲۸۱. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin \Delta x + \sin \epsilon x = 1 + \cos \pi$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟
 (۱) 8π (۲) 9π (۳) 10π (۴) 11π (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)
- ☆ ۲۸۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟
 (۱) $\frac{14\pi}{3}$ (۲) 4π (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) 5π (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)
- ☆ ۲۸۳. چند مثلث با مساحت $4\sqrt{3}$ و اندازهٔ دو ضلع ۴ و ۶ وجود دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (برگرفته از کتاب درسی)
- حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos u = a$
- ☆ ۲۸۴. جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $4 \cos x (\cos x - 2) = -3$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (برگرفته از کتاب درسی)
- ☆ ۲۸۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (سراسری تجربی- ۸۶)
- ☆ ۲۸۶. نمودار تابع $y = x + 2 \cos 2x$ ، خط $y = x + 1$ را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{8}$
- ☆ ۲۸۷. نمودار تابع $f(x) = 2 \cos((2x - 1)\pi)$ در بازهٔ $[-1, 1]$ ، محور x را در چند نقطه قطع می‌کند؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶
- ☆ ۲۸۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $k\pi$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$
- ☆ ۲۸۹. در معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos^2 x + \cos x = 1$ ، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟
 (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع (۲) مثلث قائم‌الزاویه (۳) دوزنقه (۴) مستطیل (سراسری ریاضی خارج از کشور)
- ☆ ۲۹۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 3 \cot x \cdot \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (سراسری تجربی- ۸۷)
- ☆ ۲۹۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)
- ☆ ۲۹۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{\pi}{3} + x) \cos(-x)$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (سراسری تجربی)
- ☆ ۲۹۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (سراسری تجربی)
- ☆ ۲۹۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (سراسری تجربی- ۹۵)
- ☆ ۲۹۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)
 (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (سراسری تجربی- ۹۶)

۲۹۶. معادله $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۹۷☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 4 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi$

(برگرفته از کتاب درسی)

۲۹۸. مجموع جواب‌های معادله $\cos 3x - \sin x = 0$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{8}$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) $-\frac{3\pi}{8}$ (۴) $-\frac{5\pi}{8}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)

۲۹۹☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی- ۹۱)

۳۰۰☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(-\frac{3\pi}{4} + x)$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی- ۹۲)

۳۰۱☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۳۰۲☆. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۱)

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۷)

۳۰۳. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 2x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$ (۲) $\frac{2k\pi}{5}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

حل معادله مثلثاتی $\tan u = a$

(سراسری تجربی- ۹۷)

۳۰۴☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{4}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(سراسری تجربی)

۳۰۵☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin^2 x - \sin 2x = 1$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور)

۳۰۶. جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos x(\cos x - \sin x) = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری تجربی- ۹۴)

۳۰۷☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری ریاضی- ۸۶)

۳۰۸☆. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

تسستهای V.I.P

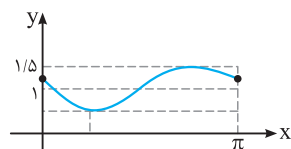
۳۰۹. دوره تناوب تابع $f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \cos(\pi x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۱۰. دوره تناوب تابع $f(x) = \tan x \cdot \cot x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) 2π

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)



۳۱۱. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{3}$

۳۱۲. حاصل $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ به ازای $x = 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۳۱۳. حاصل $\sin^2(\frac{\pi}{4} + \alpha) \sin^2(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{44}$ کدام است؟

- (۱) $2(\sqrt{5} - 1)$ (۲) $\frac{1}{16}(\sqrt{3} + 2)$ (۳) $\frac{1}{16}(2 - \sqrt{3})$ (۴) $\sqrt{5} - 1$

(سراسری ریاضی)

۳۱۴. اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{4} - a) \cos(\frac{\pi}{4} - b)$ کدام است؟

- (۱) $\sin 4a$ (۲) $\cos 4a$ (۳) $\sin^2 2a$ (۴) $\cos^2 2a$

۳۱۵. حاصل $\cos 36^\circ \cos 72^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳۱۶. حاصل عددی $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۳۱۷. حاصل $\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $-4\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۳۱۸. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۳۱۹. اگر $\tan x + \cot x = k - 1$ ، آن‌گاه حدود k برای آن‌که معادله جواب داشته باشد، کدام است؟

- (۱) $-1 < k < 3$ (۲) $k \geq 3$ یا $k \leq -1$ (۳) $k > 2$ (۴) $k < -\frac{1}{2}$

(سراسری ریاضی- ۹۵)

۳۲۰. مجموعه تمام جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$ ، در بازه $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{4}$ (۲) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{5\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۳۲۱. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (\sin x + \tan x)$ ، کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۳۲۲. مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی $\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2\sqrt{3}$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{3}$ (۲) 2π (۳) $\frac{7\pi}{3}$ (۴) $\frac{11\pi}{3}$

۳۲۳. در معادله مثلثاتی $\sin^2 x (\sin x + \cos x) = \cos^2 x (\cos x - \sin x)$ ، مجموعه تمام جواب‌ها در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳)

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{7\pi}{4}$ (۴) $\frac{9\pi}{4}$

با قرار دادن اعداد صحیح $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ به جای k ، x هایی که در بازه $(0, \pi)$ قرار دارند را مشخص می‌کنیم:

$$k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{\lambda}, \frac{3\pi}{\lambda}$$

$$k=1 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{\lambda} \notin (0, \pi), x = \frac{11\pi}{\lambda} \notin (0, \pi)$$

به ازای سایر مقادیر k نیز، x های به دست آمده در بازه $(0, \pi)$ قرار ندارند.

بنابراین معادله در بازه $(0, \pi)$ دارای دو جواب $\frac{\pi}{\lambda}$ و $\frac{3\pi}{\lambda}$ است و در نتیجه:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{\lambda} + \frac{3\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

۲۶۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

با حل معادله مثلثاتی $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ ، طول نقاط تلاقی دو نمودار در بازه $[0, \pi]$ مشخص می‌شود:

$$\sin(3x) = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 3x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{18} = \frac{12k\pi - \pi}{18} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{3} + \frac{\pi}{18} = \frac{6(2k+1)\pi + \pi}{18} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

با قرار دادن اعداد صحیح $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ به جای k ، x های بین $[0, \pi]$ را مشخص می‌کنیم:

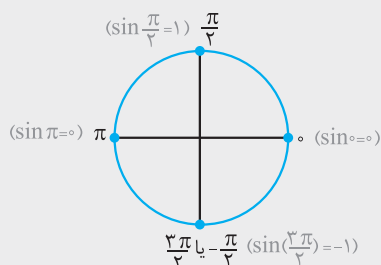
$$k=1 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{18} \checkmark, k=0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{18} \checkmark$$

دو مقدار برای x به دست می‌آید و در نتیجه نمودار دو تابع همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

۲۷۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

نکته: هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = \pm 1$ و $\sin u = 0$

به دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد:



$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow -\sin x + \sin x - \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = 1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

با انتخاب $\sin x = A$ ، معادله به صورت $2A^2 - 3A - 2 = 0$ درمی‌آید:

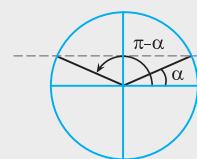
$$2A^2 - 3A - 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow A = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 = \sin x \text{ (غیرممکن)} \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{2} = \sin x, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

۲۶۸ (۴ ۳ ۲ ۱)



نکته: برای حل معادله $\sin x = a$

و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\sin x = \sin \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$\Delta \sin x + 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow \Delta \sin x - 3 \sin x = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}, i \in \{1, 5\}$$

۲۶۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

نکته: اگر معادله مثلثاتی را به صورت $\sin u = \sin \alpha$ بنویسیم، آن‌گاه

تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد.

نکته: برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را قرار می‌دهیم و برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

عبارت $\sin x \cos x$ با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \text{ برابر } \frac{1}{2} \sin 2x \text{ است. طبق فرض داریم:}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{\lambda k\pi + \pi}{\lambda} \\ x = k\pi + \frac{3\pi}{8} = \frac{\lambda k\pi + 3\pi}{\lambda} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ -2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

۲۷۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

نکته: برای حل معادله مثلثاتی $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$ رابطه $u = k\pi \pm \alpha$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ استفاده می‌کنیم.

با توجه به اتحاد جبری $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ و اتحاد مثلثاتی $\cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x = 1 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

۲۷۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-x)) \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} x = \frac{k\pi}{2}$$

۲۸۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x, \quad \frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin 3x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

توجه کنیم که $x = k\pi$ غیر قابل قبول است، زیرا منجر کسر را صفر می‌کند.

۲۸۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin \Delta x + \sin \epsilon x = 1 + \cos \pi = 0 \Rightarrow \sin \Delta x = -\sin \epsilon x$$

$$\Rightarrow \sin \Delta x = \sin(-\epsilon x) \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi - \epsilon x \\ \Delta x = 2k\pi + (\pi - (-\epsilon x)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{9} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} x = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \dots, \frac{18\pi}{9} \\ x = \pi \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌های معادله} = (0 + \frac{2\pi}{9} + \dots + \frac{18\pi}{9}) + \pi = 11\pi$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۲۷۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \sin x \cos x = 0 \xrightarrow{\times 2} 1 - 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۲۷۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan x, \quad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$(1 + \cos 2x) \cot(\frac{\pi}{2} + x) = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x \times (-\tan x) = 1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x \times \frac{-\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow -\sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -1 = \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

۲۷۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$2 \tan x \cdot \cos^2 x = 2 \times \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (*)$$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(*)} x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

دقت کنید که به ازای هیچ مقدار k ، $k\pi + \frac{\pi}{4}$ برابر $k\pi + \frac{\pi}{2}$ نمی‌شود.

۲۷۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

مقدار $\sin x$ باید عددی مخالف صفر باشد، بنابراین باید داشته باشیم: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ ، داریم:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \frac{2\sin^2 x}{\sin x} = 2\sin x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{3}) = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۲۷۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

برای حل معادله مثلثاتی $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$ ، از اتحاد مثلثاتی $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ استفاده می‌کنیم تا معادله‌ای درجه دوم بر حسب $\sin x$ به دست آید:

$$\cos 2x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow (1 - 2\sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x + \sin x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \sin x(-2\sin x + 1) = 0$$

۲۸۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

با اتحاد $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، معادله را بر حسب کسینوس می‌نویسیم:

$$2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{A = \cos x} 2A^2 + 3A - 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow A = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}, -2 \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} A = \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۸۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

با حل معادله $x + 2 \cos 3x = x + 1$ ، طول نقاط تلاقی دو نمودار به دست می‌آید:

$$x + 2 \cos 3x = x + 1 \Rightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$$

۲۸۷ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته: هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = \pm 1$ و $\cos u = 0$ به دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد: ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$
- ۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$
- ۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$

با حل معادله $f(x) = 0$ ، طول نقاط تلاقی نمودار تابع با محور x ها مشخص می‌شود. همچنین با قرار دادن اعداد صحیح $0, \pm 1, \dots$ به جای k ، x های بازه $[-1, 1]$ را مشخص می‌کنیم.

$$2 \cos((3x-1)\pi) = 0 \Rightarrow (3x-1)\pi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{\div \pi} 3x-1 = k + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{k}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2k+3}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{x \in [-1, 1]} x = -\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$$

بنابراین نمودار f ، محور x ها را در ۶ نقطه قطع می‌کند.

۲۸۸ (۴) (۳) (۲) (۱)

با اتحاد مثلثاتی $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ، همه نسبت‌ها به کسینوس تبدیل می‌شود:

$$2(1 - \cos^2 2x) - \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 2x - \cos 2x + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب برابر صفر است}} \cos 2x = 1, \cos 2x = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} < -1$$

معادله $\cos 2x = -\frac{3}{2}$ جواب ندارد و در نتیجه:

$$\cos 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

۲۸۹ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{A = \cos x} 2A^2 + A - 1 = 0$$

$$\Rightarrow A = -1, A = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

۲۸۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin x$$

معادله: $\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x = \sin(-x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

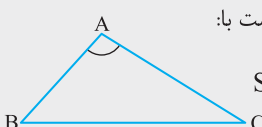
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ ، $0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$ و 2π است. داریم:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = 0 + \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + 2\pi = 5\pi$$

۲۸۳ (۴) (۳) (۲) (۱)

یادآوری: مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

طبق فرض اگر $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $S = 4\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه داریم:

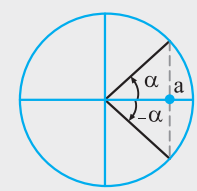
$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A \Rightarrow 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin A$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A یک زاویه مثلث است و در نتیجه $0^\circ < A < 180^\circ$. در این محدوده دو مقدار برای A وجود دارد که $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ شود. پس دو مثلث با فرض‌های داده شده وجود دارد.

۲۸۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

نکته ۱: برای حل معادله $\cos x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos \alpha = a$ شود تا معادله به صورت $\cos x = \cos \alpha$ درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول روبرو به دست می‌آید:



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

نکته ۲: جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\cos u = \cos \alpha$ به صورت $u = 2k\pi \pm \alpha$ است.

با تغییر متغیر $\cos x = t$ ، معادله به صورت $f(t-2) = -3$ درمی‌آید:

$$f(t-2) = -3 \Rightarrow 4t^2 - 8t - 3 = -3 \Rightarrow 4t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(4)(3) = 16 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm 4}{8} = \frac{1 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} = \cos x \text{ (غیرممکن)} \\ t = \frac{1}{2} = \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

معادله $\cos x = \frac{3}{2}$ جواب ندارد، زیرا $\frac{3}{2}$ عددی بزرگ‌تر از یک است.