راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

گام اول — فیلم آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر قسمت QR-Codeهای صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر قسمت مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

گام دوم — درسنامه آموزشی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام اول) تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط در سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.
۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژهٔ علاقمندان آورده شده است که ویژهٔ آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعهٔ آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.
۵. نکتهٔ **STP**، مخفف نکتهٔ «سیرتاپیاز» است و معمولاً شامل نکات تستی است.

گام سوم — پرسش‌های تشریحی

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام اول و دوم) تقسیم شده است.
۲. سؤالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سؤالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

گام چهارم — پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (دقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام اول تا سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخل و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌های فراتر از کتاب درسی با عنوان «ویژهٔ علاقمندان» مشخص شده است.
۶. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.
۷. تست‌های واجب با علامت ستاره (☆ و ★) مشخص شده‌اند که در صورت کمبود وقت حتماً به آن‌ها پاسخ دهید. از بین تست‌های ستاره‌دار، تست‌های دارای علامت ★ برای مرور و جمع‌بندی هستند و تست‌های دشوار با علامت 💣 مشخص شده است.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

FILM

درسنامه آموزشی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پرسش‌های تشریحی

فصل ۱

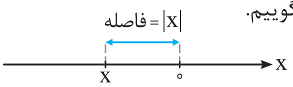
قسمت چهارم
قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قدرمطلق

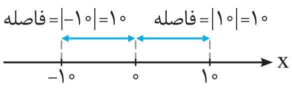
قدرمطلق: تعریف جبری قدرمطلق عدد حقیقی x، به‌صورت مقابل است:

$$|x| = \sqrt{x^۲} = \begin{cases} x & x \ge ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

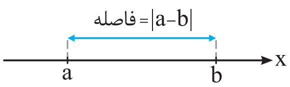
به تعبیر هندسی، به فاصلهٔ نقطهٔ متناظر با عدد حقیقی x، روی محور اعداد حقیقی تا مبدأ مختصات، قدرمطلق x می‌گوییم.



به طور مثال؛ فاصلهٔ نقاط به طول‌های ۱۰ و ۱۰− روی محور اعداد حقیقی تا مبدأ مختصات برابر ۱۰ واحد است. لذا $۱۰ = |۱۰| = |-۱۰|$



به طور کلی فاصلهٔ نقاط متناظر با اعداد حقیقی a و b روی محور اعداد حقیقی از یکدیگر برابر $|a-b|$ است.



نکته قدرمطلق عدد حقیقی x را به‌صورت روبه‌رو نیز می‌توان تعریف کرد:

$$|x| = \sqrt[۲k]{x^{۲k}} \quad , \quad (k \in \mathbb{N})$$

مثال حاصل هر یک از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید. (برگرفته از کتاب درسی)

آ) $|۱-\sqrt{۳}| + |\sqrt{۳}-۳|$ ب) $\sqrt{۴x^۲ - ۴x + ۱}$ پ) $\sqrt{۹ - ۴\sqrt{۵}}$ ت) $\sqrt{a^۴ + ۶a^۲ + ۹}$

پاسخ: آ)
$$|۱-\sqrt{۳}| + |\sqrt{۳}-۳| \xlongequal[\sqrt{۳}-۳<۰]{۱-\sqrt{۳}<۰} \sqrt{۳} - ۱ + ۳ - \sqrt{۳} = ۲$$

ب)
$$\sqrt{۴x^۲ - ۴x + ۱} = \sqrt{(۲x-۱)^۲} = |۲x-۱|$$

پ)
$$\sqrt{۹-۴\sqrt{۵}} = \sqrt{۴ - ۴\sqrt{۵} + ۵} = \sqrt{(۲-\sqrt{۵})^۲} = |۲-\sqrt{۵}| \xlongequal{۲-\sqrt{۵}<۰} \sqrt{۵} - ۲$$

ت)
$$\sqrt{a^۴ + ۶a^۲ + ۹} = \sqrt{(a^۲+۳)^۲} = |a^۲+۳| \xlongequal{a^۲+۳>۰} a^۲ + ۳$$

مثال اگر $x^۲ \le x$ باشد، حاصل $A = \sqrt{x^۲} + \sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:
$$x^۲ \le x \Rightarrow x^۲ - x \le ۰ \Rightarrow x(x-۱) \le ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \le x \le ۱$$

از رابطهٔ $۰ \le x \le ۱$ نتیجه می‌شود که $x - ۱ \le ۰$ و $x \ge ۰$ و در نتیجه $|x-۱| = ۱ - x$ و $|x| = x$ است. پس:

$$A = \sqrt{x^۲} + \sqrt{(x-۱)^۲} = |x| + |x-۱| = x + ۱ - x = ۱$$

تست اگر $a > ۰ > b$ و $|a| > |b|$، آن‌گاه حاصل عبارت $A = |a+b| + |a| + |b|$ کدام است؟

۱) $-۲b$ ۲) $-۲a$ ۳) $۲a$ ۴) $۲b$

پاسخ: چون $a > ۰$ و $b < ۰$ است، پس $|a| = a$ و $|b| = -b$. پس داریم:

$$|a| > |b| \Rightarrow a > -b \Rightarrow a + b > ۰$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$A = |a+b| + |a| + |b| = a + b + a - b = ۲a \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

ویژگی‌های قدرمطلق

با استفاده از تعریف قدرمطلق، می‌توان ویژگی‌های مهمی را برای قدرمطلق ارائه نمود. ابتدا در زیر مهم‌ترین ویژگی‌های قدرمطلق را آورده و در ادامه به اثبات برخی از این ویژگی‌ها خواهیم پرداخت.

۱) می‌دانیم فاصلهٔ هر عدد حقیقی از مبدأ مختصات، عددی نامنفی است. پس برای هر عدد حقیقی x داریم: $|x| \geq 0$

۲) از آن‌جایی که $x^2 \geq 0$، پس برای هر عدد حقیقی x داریم: $|x^2| = x^2$

۳) برای هر عدد حقیقی x داریم: $|x| = |-x|$

و برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $|a-b| = |b-a|$

۴) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $|xy| = |x| \cdot |y|$

و به طورکلی برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ می‌توان نوشت: $|x^n| = |x|^n$

۵) برای هر دو عدد حقیقی x و y به طوری‌که $y \neq 0$، داریم: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

۶) برای هر عدد حقیقی x داریم: $-|x| \leq x \leq |x|$

۷) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

۸) اگر $a > 0$، آن‌گاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

۹) اگر $a > 0$، آن‌گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

۱۰) برای هر عدد حقیقی x و هر عدد حقیقی و نامنفی a داریم: $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ یا $x < -a$

توجه کنید که اگر $a < 0$، آن‌گاه رابطهٔ $|x| > a$ همواره برقرار است، یعنی $x \in \mathbb{R}$ می‌باشد.

۱۱) برای هر دو عدد حقیقی a و b به طوری‌که $b > 0$ و هر عدد حقیقی x داریم:

$$a < |x| < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < x < b \\ \text{یا} \\ -b < x < -a \end{cases}$$

۱۲) **(نامساوی مثلث)** برای هر دو عدد حقیقی x و y: $|x+y| \leq |x| + |y|$

در نامساوی مثلث حالت تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که x و y هم‌علامت باشند. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0 \quad , \quad |x+y| < |x| + |y| \Leftrightarrow xy < 0$$

تذکر نامساوی مثلث برای هر تعداد عدد حقیقی نیز قابل تعمیم است. به عبارت دیگر اگر x_1، x_2، $\cdots$ و x_n، اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

بدیهی است که حالت تساوی باز هم زمانی برقرار است که x_i ها هم‌علامت باشند.

نتایج نامساوی مثلث

۱) اگر در نامساوی مثلث، به جای y، عبارت $-y$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: $|x-y| \leq |x| + |y|$

۲) اگر در نامساوی مثلث، به جای x، عبارت $x-y$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: $|x| - |y| \leq |x-y|$

۳) اگر در نامساوی مثلث، به جای y، عبارت $y-x$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: $|y| - |x| \leq |x-y|$

۴) از روابط (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت: $||x| - |y|| \leq |x-y|$

۵) با تبدیل y به $-y$ در روابط $|x| - |y| \leq |x-y|$ و $||x| - |y|| \leq |x-y|$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$|x| - |y| \leq |x+y| \quad , \quad ||x| - |y|| \leq |x+y|$$

اکنون برخی از ویژگی‌های قدرمطلق را ثابت می‌کنیم:

مثال برای هر دو عدد دلخواه x و y ثابت کنید $|xy| = |x||y|$ و سپس نتیجه بگیرید که اگر $y \neq 0$، آن‌گاه $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

پاسخ: می‌دانیم $\sqrt{a^2} = |a|$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$$

در رابطهٔ $|xy| = |x||y|$، با تبدیل y به $\frac{1}{y}$ $(y \neq 0)$، خواهیم داشت:

$$\left|x \times \frac{1}{y}\right| = |x| \times \left|\frac{1}{y}\right| \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

مثال اگر $a > \circ$ باشد، ثابت کنید: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

پاسخ : با توجه به تعریف قدرمطلق، می‌دانیم اگر $x \geq \circ$، آن‌گاه $|x| = x$ و چنان‌چه $x < \circ$، آن‌گاه $|x| = -x$. پس داریم:

$$|x| < a \Leftrightarrow (x \geq \circ \,,\, x < a) \quad \text{یا} \quad (x < \circ \,,\, -x < a) \Leftrightarrow (\circ \leq x < a) \quad \text{یا} \quad (-a < x < \circ) \Leftrightarrow -a < x < a$$

مثال برای هر عدد حقیقی x، ثابت کنید: $-|x| \leq x \leq |x|$

پاسخ : می‌دانیم اگر $a \geq \circ$ باشد، آن‌گاه $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$. بنابراین از رابطهٔ بدیهی $|x| \leq |x|$ نیز نتیجه می‌شود که:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

مثال نامساوی مثلث را ثابت کنید. یعنی برای هر x و y ثابت کنید: $|x+y| \leq |x| + |y|$

پاسخ : می‌دانیم $-|x| \leq x \leq |x|$ و $-|y| \leq y \leq |y|$، بنابراین با جمع طرفین این دو نامساوی هم‌جهت خواهیم داشت:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \xrightarrow{-a \leq x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a} |x+y| \leq |x| + |y|$$

تست کم‌ترین مقدار عبارت $A = |x+۲| + |x-۳|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

پاسخ : می‌دانیم $|x-۳| = |۳-x|$. بنابراین با استفاده از نامساوی مثلث خواهیم داشت:

$$A = |x+۲| + |۳-x| \geq |(x+۲) + (۳-x)| = ۵ \Rightarrow A \geq ۵$$

پس کم‌ترین مقدار A برابر ۵ بوده و گزینهٔ (۳) صحیح است.

معادلات شامل قدرمطلق

معادلات قدرمطلقی: جواب‌های معادلهٔ $|f(x)| = |g(x)|$، همان جواب‌های $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ روی هم هستند. به معادلاتی نظیر این معادله که شامل عبارت قدرمطلق هستند، معادلات قدرمطلقی گویند.

روش حل معادلات قدرمطلقی: در حالت کلی برای حل معادلات شامل قدرمطلق به روش جبری، ابتدا عبارات درون قدرمطلق‌ها را در همسایگی ریشه‌های درون قدرمطلق‌ها تعیین علامت کرده و قدرمطلق‌ها را برمی‌داریم، سپس معادلهٔ حاصل که فاقد قدرمطلق می‌باشد را حل کرده و مقدار متغیر را به‌دست می‌آوریم. جواب یا جواب‌های به‌دست آمده وقتی قابل قبول هستند که در ناحیهٔ مورد نظر باشند.

نکته علاوه‌بر روش فوق، در حل معادلات شامل قدرمطلق می‌توان از روابط زیر استفاده نمود:

۱) $|u| = |v| \Rightarrow u = \pm v$

۲) $|u| = a \xrightarrow{a \geq \circ} u = \pm a$

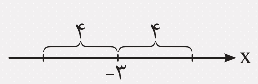
۳) $|u| = u \Rightarrow u \geq \circ$

۴) $|u| = -u \Rightarrow u \leq \circ$

۵) $|u| + |v| = |u+v| \Rightarrow u.v \geq \circ$

مثال نقاطی روی محور اعداد حقیقی بیابید که فاصلهٔ آن نقاط از نقطهٔ -۳ روی محور اعداد حقیقی برابر ۴ باشد؟

(برگرفته از کتاب درسی)



پاسخ : می‌دانیم فاصلهٔ نقاط متناظر با اعداد حقیقی a و b روی محور اعداد حقیقی از یکدیگر برابر $|a-b|$ است. بنابراین اگر طول نقطهٔ جواب مسئله را x بنامیم، بنابر فرض داریم:

$$|x-(-۳)| = ۴ \Rightarrow |x+۳| = ۴ \xrightarrow[|u|=a]{a>\circ} u=\pm a \begin{cases} x+۳ = ۴ \\ \\ x+۳ = -۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ \text{یا} \\ x = -۷ \end{cases}$$

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

آ) $||x-2|-3|=1$　　ب) $|x-1|=2x$　　پ) $|x^2-3x|+x^2-3x=0$

ت) $|3x-2|+|3-x|=|2x+1|$　　ث) $|3x+1|-|x|=x+2$

پاسخ: آ) با استفاده از رابطهٔ $|u|=a \xrightarrow{a\geq 0} u=\pm a$، داریم:

$$||x-2|-3|=1 \Rightarrow \begin{cases}|x-2|-3=1\\ |x-2|-3=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x-2|=4\\ |x-2|=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2=\pm 4\\ x-2=\pm 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=6 \text{ یا } x=-2\\ x=4 \text{ یا } x=0\end{cases}$$

ب) با فرض $2x\geq 0$ یا $x\geq 0$ داریم:

$$|x-1|=2x \Rightarrow \begin{cases}x-1=2x\\ x-1=-2x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}$$

توجه کنید که باید $x\geq 0$، لذا $x=-1$ نمی‌تواند جواب معادله باشد و $x=\frac{1}{3}$ تنها جواب این معادله است.

پ) می‌دانیم اگر $|u|=-u$، آن‌گاه $u\leq 0$. پس داریم:

$$|x^2-3x|+x^2-3x=0 \Rightarrow |x^2-3x|=-(x^2-3x) \Rightarrow x^2-3x\leq 0 \Rightarrow x(x-3)\leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0\leq x\leq 3$$

ت) اگر قرار دهیم $u=3x-2$ و $v=3-x$، آن‌گاه $u+v=2x+1$. در نتیجه در این معادله رابطهٔ $|u|+|v|=|u+v|$ برقرار است و این یعنی این‌که در نامساوی مثلث، حالت تساوی اتفاق افتاده است. پس باید u و v هم‌علامت باشند. به عبارت دیگر داریم:

$$uv\geq 0 \Rightarrow (3x-2)(3-x)\geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{2}{3}\leq x\leq 3$$

ث) این معادله را به کمک تعیین علامت عبارات درون قدرمطلق‌ها حل می‌کنیم.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	

با توجه به جدول مقابل، به کمک حالت‌بندی، معادله را حل می‌کنیم:

حالت اول: $x<-\frac{1}{3}$، در این حالت هر دو عبارت $3x+1$ و x منفی هستند. پس:

$$-(3x+1)-(-x)=x+2 \Rightarrow -3x=3 \Rightarrow x=-1$$

چون $x=-1$ در محدودهٔ $x<-\frac{1}{3}$ قرار دارد، پس $x=-1$ یکی از جواب‌های این معادله است.

حالت دوم: $-\frac{1}{3}\leq x<0$، در این حالت عبارت $3x+1$ مثبت ولی x منفی است. پس:

$$3x+1-(-x)=x+2 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

چون $x=\frac{1}{3}$ در محدودهٔ $-\frac{1}{3}\leq x<0$ قرار ندارد، پس $x=\frac{1}{3}$ قابل قبول نیست.

حالت سوم: $x\geq 0$، در این حالت هر دو عبارت $3x+1$ و x مثبت هستند، پس:

$$3x+1-x=x+2 \Rightarrow x=1$$

چون $x=1$ در محدودهٔ $x\geq 0$ قرار دارد، پس $x=1$ نیز جواب معادله بوده و در نتیجه در کل این معادله دو جواب دارد.

مثال

معادلهٔ $|x+1|=|2x-3|$ را به دو روش جبری حل کنید. (برگرفته از کتاب درسی)

پاسخ: روش اول: با استفاده از ویژگی $|u|=|v| \Rightarrow u=\pm v$، داریم:

$$|2x-3|=|x+1| \Rightarrow \begin{cases}2x-3=x+1\\ 2x-3=-x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=4\\ 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}\end{cases}$$

روش دوم: طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم. از آن‌جایی که $|u^2|=u^2$ است، داریم:

$$|2x-3|=|x+1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x-3)^2=(x+1)^2 \Rightarrow (2x-3)^2-(x+1)^2=0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (2x-3-x-1)(2x-3+x+1)=0 \Rightarrow (x-4)(3x-2)=0 \Rightarrow x=4 \text{ یا } x=\frac{2}{3}$$

مثال

معادلهٔ $\frac{۳-۲x}{|x-۲|}=۱$ را به سه روش حل کنید. (برگرفته از کتاب درسی)

پاسخ: با فرض $x \neq ۲$، معادله را می‌توان به‌صورت $|x-۲|=۳-۲x$ نوشت.

روش اول: با استفاده از تعریف قدرمطلق، عبارت درون قدرمطلق را تعیین علامت کرده و سپس معادله را حل می‌کنیم، با توجه به جدول دو حالت را در نظر می‌گیریم:

x		۲	
x-۲	-	۰	+

حالت اول: $x<۲$، در این حالت $x-۲$ منفی است. پس $|x-۲|=۲-x$ می‌باشد، در نتیجه:

$$|x-۲|=۳-۲x \Rightarrow ۲-x=۳-۲x \Rightarrow x=۱$$

با توجه به این‌که $x=۱$ در شرط $x<۲$ صدق می‌کند، آن را می‌پذیریم.

حالت دوم: $x \geq ۲$، در این حالت $x-۲$ مثبت است. پس $|x-۲|=x-۲$. در نتیجه:

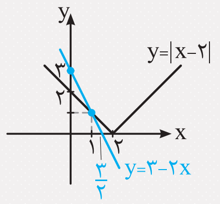
$$|x-۲|=۳-۲x \Rightarrow x-۲=۳-۲x \Rightarrow ۳x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

چون $x=\frac{۵}{۳}$ در شرط $x \geq ۲$ صدق نمی‌کند، پس این جواب قابل قبول نیست.

روش دوم: با استفاده از ویژگی $|u|=a \xrightarrow{a\geq ۰} u=\pm a$ داریم:

$$|x-۲|=۳-۲x \xrightarrow{۳-۲x\geq ۰} \begin{cases} x-۲=۳-۲x \\ x-۲=۲x-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۵ \\ -x=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵}{۳} \\ x=۱ \end{cases}$$

به ازای $x=\frac{۵}{۳}$، عبارت $۳-۲x$ منفی می‌شود و در نتیجه معادلهٔ $|x-۲|=۳-۲x$ برقرار نمی‌باشد.



روش سوم: از روش هندسی حل معادله استفاده می‌کنیم. برای این منظور نمودار $y=|x-۲|$ را به کمک انتقال نمودار $y=|x|$، به اندازهٔ دو واحد در جهت مثبت محور xها، به همراه نمودار $y=۳-۲x$، در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل، دو نمودار همدیگر را فقط در یک نقطه و آن هم در $x=۱$ که در روش‌های قبل به‌دست آوردیم، قطع می‌کنند. پس این معادله تنها یک جواب $x=۱$ را دارد.

تست

مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x|+|۲-x|=۲$ برابر بازهٔ $[a,b]$ است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: اگر قرار دهیم $u=x$ و $v=۲-x$، آن‌گاه $u+v=۲$ است، چون $|۲|=۲$، بنابراین رابطهٔ $|u|+|v|=|u+v|$ برقرار است. پس در نامساوی مثلث حالت تساوی اتفاق افتاده است. لذا باید داشته باشیم:

$$uv \geq ۰ \Rightarrow x(۲-x)\geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰\leq x\leq ۲ \Rightarrow x\in[۰,۲]$$

پس بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر ۲ بوده و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست

معادلهٔ $|x^۳+x-۱۰|=-|x^۲-x-۲|$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: معادلهٔ داده شده را می‌توان به‌صورت $|x^۲-x-۲|+|x^۳+x-۱۰|=۰$ نوشت. چون مجموع دو عبارت نامنفی صفر شده است، پس لازم است هر یک از دو عبارت صفر شود. بنابراین $x=a$ وقتی جواب این معادله است که جواب مشترک هر دو معادلهٔ $|x^۲-x-۲|=۰$ و $|x^۳+x-۱۰|=۰$ باشد. در نتیجه کافی است، معادلهٔ ساده‌تر را حل کرده و پس از یافتن جواب‌های آن در دیگری امتحان کنیم. اگر در معادلهٔ دیگری صدق کند، جواب معادله محسوب می‌شود. در این سؤال معادلهٔ $|x^۲-x-۲|=۰$ را که ساده‌تر است، حل می‌کنیم:

$$|x^۲-x-۲|=۰ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \quad \text{یا} \quad x=-۱$$

از این میان فقط $x=۲$ در معادلهٔ $|x^۳+x-۱۰|=۰$ صدق می‌کند. پس معادله تنها یک جواب دارد. در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

نامعادلات شامل قدرمطلق

در حالت کلی برای حل نامعادلات شامل قدرمطلق، ابتدا عبارات درون قدرمطلق‌ها را با توجه به ریشهٔ آن‌ها تعیین علامت نموده، سپس در هر بازه پس از برداشتن قدرمطلق‌ها، نامعادله را حل می‌کنیم. مجموعه جواب به‌دست‌آمده در هر حالت را با شرایط اولیهٔ آن حالت، یعنی شرطی که اعمال کرده‌ایم تا قدرمطلق‌ها را برداریم، اشتراک گرفته و در نهایت از مجموعه جواب‌های حالت‌هایی که در نظر گرفته‌ایم اجتماع می‌گیریم.

نکته در حل نامعادلات شامل قدرمطلق، علاوه‌بر روش فوق، استفاده از روابط زیر می‌تواند مفید واقع شود:

۱) $|u| < a \xrightarrow{a>۰} -a < u < a$

۲) $|u| > a \xrightarrow{a\geq۰} u > a$ یا $u < -a$

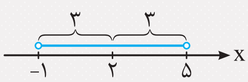
۳) $|u| < |v| \Leftrightarrow u^۲ < v^۲ \Leftrightarrow (u-v)(u+v) < ۰$

۴) $a < |u| < b \xrightarrow{b>۰} a < u < b$ یا $-b < u < -a$

۵) $|u+v| < |u| + |v| \Leftrightarrow uv < ۰$

مثال عبارت «فاصلهٔ بین x و عدد ۲ روی محور اعداد حقیقی کم‌تر از ۳ است.» را با استفاده از نماد قدرمطلق به‌صورت یک نامساوی بنویسید و سپس جواب آن را روی محور اعداد نمایش دهید. (برگرفته از کتاب درسی)

پاسخ: می‌دانیم فاصلهٔ x تا عدد ۲ روی محور اعداد حقیقی برابر $|x-۲|$ است. طبق فرض، این فاصله کم‌تر از ۳ می‌باشد. پس $|x-۲| < ۳$. با استفاده از ویژگی $|u| < a \xleftrightarrow{a>۰} -a < u < a$، داریم:



$$|x-۲| < ۳ \Rightarrow -۳ < x-۲ < ۳ \Rightarrow -۱ < x < ۵$$

مثال نامعادلات زیر را حل کنید.

آ) $|۳x-۱| \leq ۲$ ب) $|x+۱| > ۲x$ پ) $|۳x+۲| \leq |۲x-۱|$

ت) $|۲x-۳| < |x-۵| + |x+۲|$ ث) $۲|x-۱| + |x| < ۳$

پاسخ: آ) با استفاده از رابطهٔ $|u| \leq a \xrightarrow{a\geq۰} -a \leq u \leq a$، داریم:

$$|۳x-۱| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq ۳x-۱ \leq ۲ \Rightarrow -۱ \leq ۳x \leq ۳ \Rightarrow -\frac{۱}{۳} \leq x \leq ۱$$

ب) اگر $x \leq ۰$ باشد که رابطه همواره برقرار است. لذا با فرض $x > ۰$ و براساس ویژگی $|u| > a \xrightarrow{a\geq۰} u > a$ یا $u < -a$، می‌توان نوشت:

$$|x+۱| > ۲x \Rightarrow \begin{cases} x+۱ > ۲x \\ x+۱ < -۲x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < ۱ \\ x < -\frac{۱}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع می‌گیریم}} x < ۱$$

این جواب شامل $x \leq ۰$ نیز هست.

پ) چون طرفین نامعادله نامنفی است، لذا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$|۳x+۲| \leq |۲x-۱| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (۳x+۲)^۲ \leq (۲x-۱)^۲ \Rightarrow (۳x+۲)^۲ - (۲x-۱)^۲ \leq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} ((۳x+۲)+(۲x-۱))((۳x+۲)-(۲x-۱)) \leq ۰ \Rightarrow (۵x+۱)(x+۳) \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۳ \leq x \leq -\frac{۱}{۵}$$

ت) اگر قرار دهیم $u = x-۵$ و $v = x+۲$، آن‌گاه $u+v = ۲x-۳$. لذا رابطهٔ $|u+v| < |u| + |v|$ برقرار است. بنابراین در نامساوی مثلث حالت تساوی حذف شده است. پس لازم است u و v مختلف‌العلامت باشند. به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$uv < ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۵) < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲ < x < ۵$$

ث) این نامعادله را به کمک تعیین علامت عبارات درون قدرمطلق‌ها و با استفاده از حالت‌بندی حل می‌کنیم:

x	$-\infty$	۰	۱	$+\infty$
x-۱	−	−	۰	+
x	−	۰ +		+

حالت اول: $x < ۰$؛ در این حالت عبارات x و $x-۱$ منفی‌اند. پس:

$$-۲(x-۱) - x < ۳ \Rightarrow -۳x < ۱ \Rightarrow x > -\frac{۱}{۳}$$

حال باید بین شرط اولیهٔ $x < ۰$ و مجموعه جواب $x > -\frac{۱}{۳}$ اشتراک بگیریم که به‌دست می‌آید:

$$-\frac{۱}{۳} < x < ۰ \quad (۱)$$

حالت دوم: $۰ \le x < ۱$؛ در این حالت داریم:

$$-۲(x-۱)+x<۳ \Rightarrow -x<۱ \Rightarrow x>-۱$$

با اشتراک‌گیری بین مجموعه جواب نامعادلات $۰ \le x < ۱$ و $x > -۱$، به‌دست می‌آید:

$$۰ \le x < ۱ \qquad (۲)$$

حالت سوم: $x \ge ۱$؛ در این حالت هر دو عبارت x و $x-۱$ مثبت‌اند. پس:

$$۲(x-۱)+x<۳ \Rightarrow ۳x<۵ \Rightarrow x<\frac{۵}{۳}$$

اگر بین مجموعه جواب نامعادلات $x \ge ۱$ و $x < \frac{۵}{۳}$، اشتراک بگیریم، خواهیم داشت:

$$۱ \le x < \frac{۵}{۳} \qquad (۳)$$

اکنون بین مجموعه جواب روابط (۱)، (۲) و (۳) اجتماع می‌گیریم که در این صورت مجموعه جواب معادله با بازهٔ $(-\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۳})$ برابر خواهد بود.

تست

اگر نامعادلات $|۲x+۳|<x+۲$ و $a<۳x+۲<b$ معادل یکدیگر باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ : اگر $x+۲ \le ۰$، نامعادلهٔ اول نادرست است. بنابراین با فرض $x+۲>۰$، داریم:

$$|۲x+۳|<x+۲ \Rightarrow -x-۲<۲x+۳<x+۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲x+۳<x+۲ \\ -x-۲<۲x+۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-۱ \\ -\frac{۵}{۳}<x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم.}} -\frac{۵}{۳}<x<-۱$$

چون مجموعه جواب به‌دست‌آمده در شرط $x+۲>۰$ و یا $x>-۲$ صدق می‌کند، لذا قابل قبول بوده و داریم:

$$-\frac{۵}{۳}<x<-۱ \xrightarrow{\times ۳} -۵<۳x<-۳ \xrightarrow{+۲} -۳<۳x+۲<-۱$$

بنابراین $a=-۳$ و $b=-۱$ و در نتیجه $a+b=-۴$. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

تبدیل توابع قدرمطلقی به چند ضابطه‌ای

به کمک تعریف قدرمطلق و با استفاده از تعیین علامت عبارت‌های درون قدرمطلق‌ها، یک تابع شامل قدرمطلق را می‌توان بدون استفاده از نماد قـدرمطلق و به‌صورت یک تابع چندضابطه‌ای نوشت. به مثال زیر توجه کنید:

مثال

با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید. (برگرفته از کتاب درسی)

آ) $f(x)=x|x-۱|$ ب) $f(x)=|x+۱|+|x-۲|$

پاسخ : آ) عبارت درون قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
x-۱	−	۰	+

با توجه به جدول، عبارت $x-۱$ برای $x<۱$، منفی است. پس در این حالت $|x-۱|=۱-x$ و برای هـر $x \ge ۱$، $x-۱$ نـامنفی اسـت. پـس در ایـن حالت $|x-۱|=x-۱$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} x(x-۱) & x \ge ۱ \\ x(۱-x) & x<۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۲-x & x \ge ۱ \\ x-x^۲ & x<۱ \end{cases}$$

ب) عبارت‌های درون قدرمطلق‌ها را در یک جدول تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-۱		۲	$+\infty$
x+۱	−	۰	+		+
x-۲	−		−	۰	+

با توجه به جدول می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} (-x-۱)+(۲-x) & x<-۱ \\ (x+۱)+(۲-x) & -۱ \le x \le ۲ \\ (x+۱)+(x-۲) & x>۲ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۱-۲x & x<-۱ \\ ۳ & -۱ \le x \le ۲ \\ ۲x-۱ & x>۲ \end{cases}$$

رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق

در حالت کلی، برای رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق می‌توان به کمک تعیین علامت عبارات درون قدرمطلق‌ها، تابع مفروض را به یـک تـابع چندضـابطه‌ای تبدیل نموده و در نهایت نمودار هر یک از ضابطه‌ها را روی دامنهٔ مربوط به آن رسم نمود.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

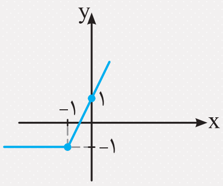
آ) $f(x)=x+|x+1|$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $f(x)=2x-|x-1|+\dfrac{|x|}{x}$

پاسخ : آ) با توجه به جدول زیر، ابتدا تابع f را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
x+1	−	0	+

$$f(x)=\begin{cases}x-x-1 & x<-1\\ x+x+1 & x\geq -1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ 2x+1 & x\geq -1\end{cases}$$

برای رسم نمودار f، کافی است نمودار $y=-1$ را در بازهٔ $(-\infty,-1)$ و نمودار $y=2x+1$ را در بازهٔ $[-1,+\infty)$ رسم کنیم. بنابراین نمودار f به‌صورت مقابل خواهد بود:

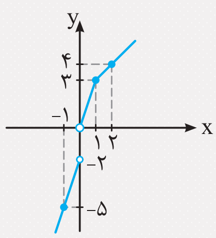


ب) با توجه به جدول زیر، تابع f را به‌صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم.

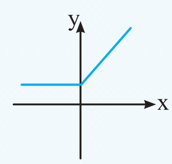
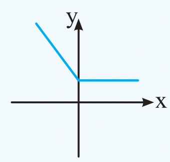
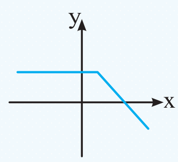
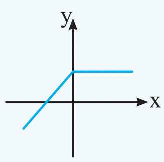
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x−1	−	−	0	+
x	−	0	+	+

$$f(x)=\begin{cases}2x+x-1+\dfrac{-x}{x} & x<0\\ 2x+x-1+\dfrac{x}{x} & 0<x<1\\ 2x-(x-1)+\dfrac{x}{x} & x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}3x-2 & x<0\\ 3x & 0<x<1\\ x+2 & x\geq 1\end{cases}$$

اکنون برای رسم نمودار تابع f کافی است، نمودار $y=3x-2$ را در بازهٔ $(-\infty,0)$، نمودار $y=3x$ را در بازهٔ $(0,1)$ و نمودار $y=x+2$ را در بازهٔ $[1,+\infty)$ رسم کنیم. پس نمودار f به‌صورت مقابل خواهد بود:

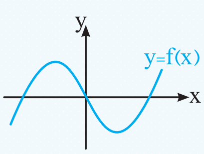


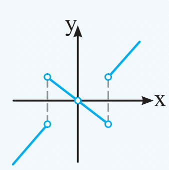
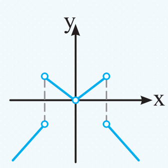
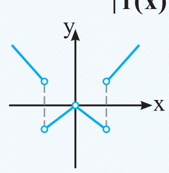
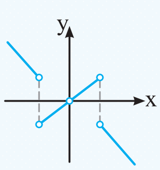
تست نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-|x||+1$ به کدام صورت است؟

(1 
(2 
(3 
(4 

پاسخ : به ازای هر $x\geq 0$، داریم $f(x)=1$. لذا یکی از گزینه‌های (2) یا (4) درست است. هم‌چنین به ازای هر $x<0$ داریم $f(x)=-2x+1$. یعنی تابع f برای $x<0$ یک تابع خطی با شیب منفی است و لذا گزینهٔ (2) صحیح است.

تست اگر نمودار $f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{xf(x)}{|f(x)|}$ به کدام صورت است؟



(1 
(2 
(3 
(4 

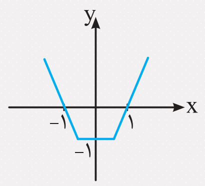
پاسخ : در بازه‌هایی که $f(x)>0$ است، یعنی نمودار تابع f بالای محور xها قرار دارد، باید نمودار $y=x$ را رسم کنیم. هم‌چنین در بازه‌هایی که نمودار f زیر محور xها قرار دارد، داریم $|f(x)|=-f(x)$ و لذا باید نمودار $y=-x$ را رسم کنیم. بنابراین گزینهٔ (3) صحیح است.

روش رسم نمودار $y=|f(x)|$ به کمک نمودار $y=f(x)$

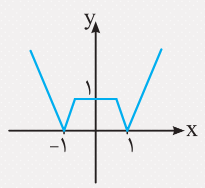
با توجه به این‌که $y=|f(x)|=\begin{cases}f(x) & f(x)\geq 0\\ -f(x) & f(x)<0\end{cases}$، برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس با توجه به این‌که نمودار $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xها است، بخش‌هایی از نمودار $y=f(x)$ که زیر محور xها واقع است را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ است. نمودار $y = |f(x)|$ را رسم کنید.

(برگرفته از کتاب درسی)



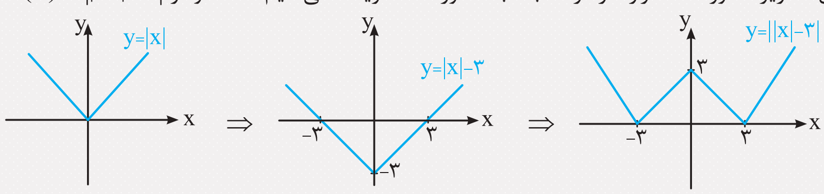
پاسخ: بخش‌هایی از نمودار f که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. پس نمودار $y = |f(x)|$ به‌صورت مقابل خواهد بود:



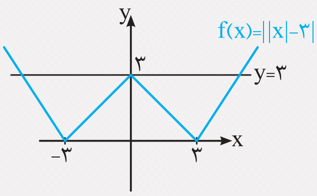
مثال ابتدا نمودار $f(x) = ||x| - ۳|$ را رسم کنید و سپس معادلهٔ $f(x) = ۳$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

(برگرفته از کتاب درسی)

پاسخ: برای رسم $f(x) = ||x| - ۳|$، ابتدا $y = |x| - ۳$ را به کمک انتقال نمودار $y = |x|$ به اندازهٔ سه واحد در راستای محور yها به سمت پایین رسم کرده و سپس بخش‌هایی از نمودار حاصل که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $f(x) = ||x| - ۳|$ حاصل شود. مراحل رسم در روبه‌رو آمده است:



اکنون نمودارهای $f(x) = ||x| - ۳|$ و $y = ۳$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



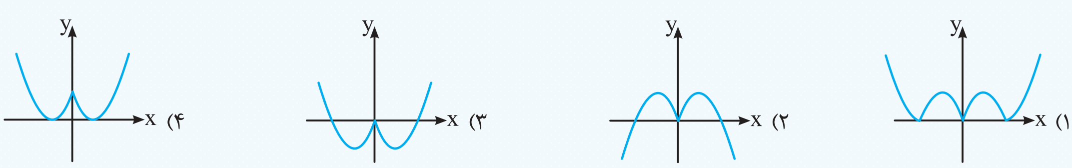
با توجه به شکل، نمودار تابع $f(x) = ||x| - ۳|$، خط $y = ۳$ را در سه نقطه قطع کرده است، پس معادلهٔ $||x| - ۳| = ۳$ سه ریشه دارد. برای یافتن این ریشه‌ها، به روش جبری عمل می‌کنیم:

$$||x| - ۳| = ۳ \Rightarrow \begin{cases} |x| - ۳ = ۳ \\ |x| - ۳ = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = ۶ \\ |x| = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm ۶ \\ x = ۰ \end{cases}$$

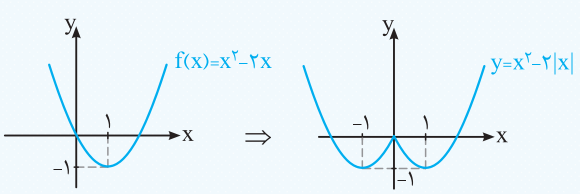
روش رسم نمودار $y = f(|x|)$ به کمک نمودار $y = f(x)$ — ویژهٔ علاقمندان

با توجه به اینکه $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq ۰ \\ f(-x) & x < ۰ \end{cases}$، برای رسم نمودار $y = f(|x|)$، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس بخش‌هایی از نمودار $y = f(x)$ که در سمت چپ محور yها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن، قرینهٔ آن قسمت از نمودار f که در سمت راست محور yها واقع است را در سمت چپ محور yها نیز رسم می‌کنیم. در واقع باید نمودار تابع $y = f(|x|)$ نسبت به محور yها متقارن باشد.

تست نمودار تابع $y = x^۲ - ۲|x|$ به کدام صورت زیر است؟

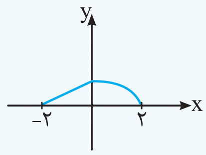


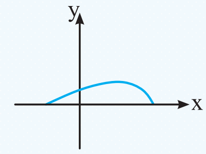
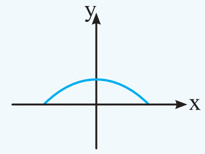
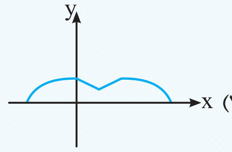
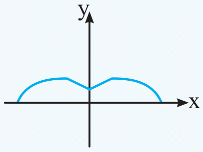
پاسخ: ابتدا نمودار $f(x) = x^۲ - ۲x = (x-۱)^۲ - ۱$ را رسم کرده، سپس با توجه به توضیحات داده‌شده در مورد نمودار $y = f(|x|)$، نمودار $f(|x|) = x^۲ - ۲|x|$ را رسم می‌نماییم.



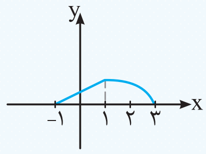
$\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(|x|-۱)$ به کدام صورت است؟



۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

پاسخ: نمودار تابع $g(x)=f(x-۱)$ به‌صورت مقابل است:



در واقع در این نمودار، نمودار تابع $y=f(x)$ یک واحد به راست منتقل شده است.

بنابراین نمودار تابع $g(|x|)=f(|x|-۱)$ به‌صورت نمودار ارائه‌شده در گزینهٔ (۴) درمی‌آید.

روش رسم نمودار توابع به فرم $y=m_۱|x-a_۱|+m_۲|x-a_۲|+\cdots+m_n|x-a_n|$

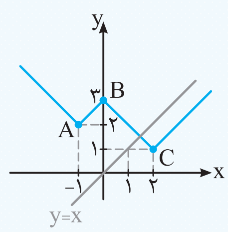
برای رسم نمودار تابع مذکور، ابتدا نقاط به طول‌های $x=a_۱$، $x=a_۲$، $\cdots$ و $x=a_n$ (ریشه‌های درون قدرمطلق‌ها) را در دستگاه مختصات مشخص نموده و آن‌ها را به ترتیب طول‌هایشان به یکدیگر وصل می‌کنیم. سپس از آخرین نقطهٔ سمت راست خطی به شیب $m=m_۱+m_۲+\cdots+m_n$ و از اولین نقطهٔ سمت چپ خطی به شیب $m'=-(m_۱+m_۲+\cdots+m_n)$ رسم می‌کنیم، به گونه‌ای که نمودار حاصل مربوط به یک تابع باشد.

نکته تابع فوق همواره دارای ماکسیمم یا مینیمم (و یا هر دو) می‌باشد که به ازای ریشه‌های درون قدرمطلق‌ها به‌دست می‌آید.

تست معادلهٔ $|x+۱|+|x-۲|-|x|=x$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: معادله را به روش هندسی حل می‌کنیم. یعنی نمودار توابع $y_۱=|x+۱|+|x-۲|-|x|$ و $y_۲=x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و تعداد نقاط تلاقی آن‌ها را تعیین می‌نماییم.



برای رسم نمودار $y_۱=|x+۱|+|x-۲|-|x|$، نقاط به مختصات $A(-۱,۲)$، $B(۰,۳)$ و $C(۲,۱)$ را به ترتیب طول آن‌ها به هم وصل می‌کنیم. توجه کنید که اگر قدرمطلق‌ها برداشته شود، شیب تابع به‌دست آمده، $m=۱$ خواهد بود. پس آخرین نقطهٔ سمت راست را با شیب $m=۱$ و اولین نقطهٔ سمت چپ را با شیب $m=-۱$ امتداد می‌دهیم.

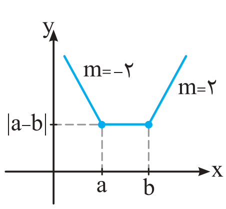
مطابق نمودار رسم‌شده، خط $y_۲=x$ نمودار $y_۱=|x+۱|+|x-۲|-|x|$ را در یک نقطه قطع می‌کند و لذا معادلهٔ $y_۱=y_۲$ فقط یک جواب دارد. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

در ادامه به بررسی دو تابع مهم و معروف به توابع گلدانی و سرسره‌ای می‌پردازیم که حالت‌های خاصی از تابع به فرم $y=m_۱|x-a_۱|+m_۲|x-a_۲|+\cdots+m_n|x-a_n|$ می‌باشند.

آ) بررسی تابع $y=|x-a|+|x-b|$

از آن‌جایی که نمودار این تابع شبیه گلدان است، این تابع به تابع **گلدانی** معروف است.

برای رسم آن، مانند آن‌چه در حالت کلی فوق گفته شد، نقاط به طول‌های $x=a$ و $x=b$ را به یکدیگر وصل نموده و ابتدا و انتهای آن را به ترتیب با شیب $m=-۲$ و $m=۲$ امتداد می‌دهیم. بنابراین با فرض $۰<a<b$ ، نمودار این تابع به‌صورت مقابل خواهد بود:

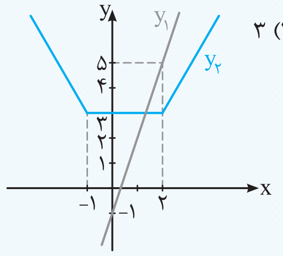


با توجه به نمودار، مینیمم مقدار تابع (کف گلدان) برابر $|a-b|$ است و بنابراین برد این تابع برابر است با: $R_f=[|a-b|,+\infty)$

هم‌چنین خط $x=\frac{a+b}{۲}$ محور تقارن تابع می‌باشد. بدیهی است که اگر $a+b=۰$ باشد، آن‌گاه محور yها محور تقارن تابع خواهد شد.

تست معادلهٔ $|x-۲|+|x+۱|=۳x-۱$ چند جواب دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳



پاسخ: نمودار توابع $y_۱=۳x-۱$ و $y_۲=|x-۲|+|x+۱|$ را رسم کرده و تعداد نقاط تلاقی آن‌ها را می‌شماریم. با توجه به نمودار، معادلهٔ داده‌شده دارای یک جواب است. پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته فرض کنید $k\in\mathbb{R}$، در این صورت برای حل معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=k$، می‌توان نمودار تابع گلدانی $y=|x-a|+|x-b|$ را با خط $y=k$ تلاقی داد. با توجه به این‌که مینیمم مقدار تابع گلدانی (کف گلدان) برابر $|a-b|$ است، یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

آ) اگر $k<|a-b|$، معادله جواب ندارد.

ب) اگر $k=|a-b|$، معادله دارای بی‌شمار جواب است و در واقع مجموعه جواب آن برابر $[a,b]$ است $(a<b)$.

پ) اگر $k>|a-b|$، آن‌گاه معادله دارای دو جواب است و در این حالت جواب‌ها عبارت‌اند از:

$$x=\frac{a+b\pm k}{۲}$$

تست مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x-۲|+|x+۱|=۵$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: داریم $a=۲$ و $b=-۱$. بنابراین کف گلدان برابر $|a-b|=۳$ و نیز $k=۵$ است. چون $|a-b|<k$، به عبارت دیگر چون کف گلدان پایین‌تر از خط $y=۵$ قرار گرفته است، پس معادله دو جواب دارد که از رابطهٔ $x=\frac{a+b\pm k}{۲}$ به‌دست می‌آید. لذا داریم:

$$x=\frac{a+b\pm k}{۲}=\frac{۲-۱\pm۵}{۲}\Rightarrow x_۱=۳ \quad \text{یا} \quad x_۲=-۲\Rightarrow x_۱+x_۲=۱\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست به ازای کدام مقدار m معادلهٔ $|x+۱|+|x|=۲m-۳$ بی‌شمار جواب دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: داریم $|a-b|=۱$ و $k=۲m-۳$. برای آن‌که معادله دارای بی‌شمار جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$k=|a-b|\Rightarrow ۲m-۳=۱\Rightarrow m=۲\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست به ازای چند مقدار صحیح m، معادلهٔ $|x-m|+|x+۲m-۱|=۲m+۱$ جواب <u>ندارد</u>؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بی‌شمار

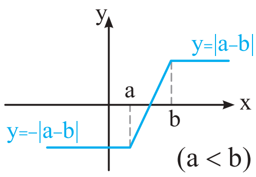
پاسخ: داریم $a=m$ و $b=-۲m+۱$. بنابراین کف گلدان برابر $|a-b|=|۳m-۱|$ و $k=۲m+۱$ است. شرط آن‌که معادله فاقد جواب باشد، آن است که داشته باشیم:

$$|a-b|>k\Rightarrow|۳m-۱|>۲m+۱\Rightarrow\begin{cases}۳m-۱>۲m+۱\\ ۳m-۱<-۲m-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>۲\\ m<۰\end{cases}$$

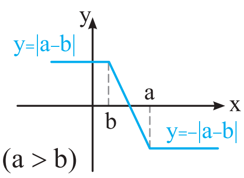
بنابراین اگر $m\in(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)$، آن‌گاه معادلهٔ فوق جواب ندارد. لذا به ازای بی‌شمار مقدار صحیح m، معادله فاقد جواب است. پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

ب) بررسی تابع $y=|x-a|-|x-b|$

برای رسم این تابع، نقاط به طول‌های $x=a$ و $x=b$ را در دستگاه مختصات به هم وصل کرده و ابتدا و انتهای آن را با شیب $m=۰$ طوری امتداد می‌دهیم که نمودار حاصل، یک تابع را توصیف کند. با فرض مثبت بودن a و b، نمودار این تابع به یکی از دو صورت زیر است:



$(a<b)$



$(a>b)$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، نمودار این تابع به‌صورت آبشار یا سرسره می‌باشد، لذا این تابع به تابع **آبشاری** یا **سرسره‌ای** نیز معروف است.

با توجه به نمودار، بیش‌ترین مقدار و کم‌ترین مقدار این تابع به ترتیب برابر $|a-b|$ و $-|a-b|$ است و لذا برد این تابع برابر $R_f=[-|a-b|,|a-b|]$ است.

هم‌چنین نقطهٔ $W(\frac{a+b}{2},0)$ مرکز تقارن تابع است. بدیهی است که اگر $a+b=0$ باشد، مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع خواهد شد.

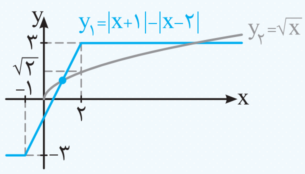
تست برد تابع $f(x)=|x+2|-|x-1|$ کدام است؟

۱) $[-2,1]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $[-2,2]$ ۴) $[-3,3]$

پاسخ: داریم $a=-2$ و $b=1$، لذا $|a-b|=3$ است. بنابراین برد تابع f برابر است با:

$R_f=[-|a-b|,|a-b|]=[-3,3]\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست معادلهٔ $\sqrt{x}=|x-2|-|x+1|$ چند جواب دارد؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: نمودار هر یک از توابع $y_1=|x+1|-|x-2|$ و $y_2=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، معادله دارای دو جواب بوده و لذا گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکته برای حل معادلهٔ $|x-a|-|x-b|=k$، $(k\in\mathbb{R})$، می‌توان نمودار تابع آبشاری $y=|x-a|-|x-b|$ را با خط $y=k$ تلاقی داد. با توجه به این‌که بیش‌ترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع آبشاری به ترتیب برابر $|a-b|$ و $-|a-b|$ است، یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

آ) اگر $-|a-b|<k<|a-b|$ یا $|k|<|a-b|$، معادله یک جواب دارد.

ب) اگر $k=|a-b|$ یا $k=-|a-b|$ و یا به طور معادل اگر $|k|=|a-b|$، آن‌گاه معادله بی‌شمار جواب دارد.

پ) اگر $k<-|a-b|$ یا $k>|a-b|$ و یا به طور معادل اگر $|k|>|a-b|$، معادله جواب ندارد.

تست معادلهٔ $|x|-|x-2|=1$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: داریم $k=1$، $a=2$ و $b=0$، پس $|a-b|=2$. چون $-|a-b|<k<|a-b|$، لذا معادله یک جواب دارد و گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست اگر معادلهٔ $|x+1|-|x-2|=m+1$ بی‌شمار جواب داشته باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: داریم $a=-1$، $b=2$ و $k=m+1$. برای این‌که معادله دارای بی‌شمار جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$|a-b|=|k|\Rightarrow|m+1|=3\Rightarrow\begin{cases}m+1=3\\m+1=-3\end{cases}\Rightarrow m=2 \text{ یا } m=-4$$

پس مجموع مقادیر m برابر -2 بوده و لذا گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست حدود m برای آن‌که معادلهٔ $|x+m+1|-|x-m|=m$ فاقد جواب باشد، کدام است؟

۱) $-1<m<-\frac{1}{3}$ ۲) $0<m<\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}<m<1$ ۴) $-\frac{1}{3}<m<0$

پاسخ: داریم $a=-m-1$، $b=m$ و $k=m$. برای این‌که معادله فاقد جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$|k|>|a-b|\Rightarrow|m|>|2m+1|\xrightarrow{\text{توان ۲}}m^2>(2m+1)^2\Rightarrow(2m+1)^2-m^2<0$$

$$\Rightarrow(2m+1-m)(2m+1+m)<0\Rightarrow(m+1)(3m+1)<0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-1<m<-\frac{1}{3}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

قسمت چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

مفهوم قدرمطلق

۲۳۰. بیش‌ترین مقدار مجموعهٔ $\{a, -a\}$ کدام است؟

۱) a ۲) $-a$ ۳) $|a|$ ۴) صفر

۲۳۱. اگر $a > 0 > b$ باشد، حاصل $|a-b| + |a+1| - |1-b|$ چقدر است؟

۱) $2a$ ۲) $2b$ ۳) $2a+2b$ ۴) $2a+2b+2$

۲۳۲. کدام رابطه همواره درست نیست؟

۱) $|a+b| \le |a| + |b|$ ۲) $|a| - |b| \ge |a-b|$ ۳) $|a| - |b| \le |a-b|$ ۴) $|a-b| \le |a| + |b|$

۲۳۳. اگر رابطهٔ $|x+y+z| \le |x| + |y| + |z|$ به رابطهٔ تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد غیرصفر x، y و z چگونه‌اند؟ (سراسری تجربی - ۸۶)

۱) مساوی هم ۲) هم‌علامت ۳) مثبت ۴) منفی

۲۳۴. اگر $2x \ge x^2$ باشد، حاصل $A = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $2-2x$ ۴) $2x-2$

۲۳۵. اگر $3x - x^2 \ge 2$ باشد، حاصل $A = |4x-1| + |x-3|$ برابر کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۳۶. اگر فاصلهٔ عدد حقیقی x روی محور اعداد حقیقی تا -1، کم‌تر از ۲ باشد، حاصل $A = |x+3| + |x-1|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۵

۲۳۷. اگر $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 0$ باشد، حاصل $|x-y|$ کدام است؟

۱) $|x+y|$ ۲) $|x| - |y|$ ۳) $|x| + |y|$ ۴) صفر

۲۳۸. کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = |x-5| + |x+1|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۳۹. کم‌ترین مقدار عبارت $A = |x-1| + |x+2| + 2|x-3|$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۴۰. بیش‌ترین مقدار عبارت $A = |x+2| - |x-1|$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

معادلات قدرمطلق

۲۴۱. مجموع مربعات طول نقاطی روی محور اعداد حقیقی که فاصلهٔ آن نقاط روی محور، از عدد ثابت -3 برابر ۲ باشد، کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۲۶ ۴) ۲۹

۲۴۲. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $||x-1| - 2| = 3$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴۳. معادلهٔ $|x-1| = 4 - 3x$ چند جواب دارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴۴. مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x^2 + 3x - 2| = |x^2 + x|$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۴۵. معادلهٔ $x|x| = kx$ ؛ $(k \ne 0)$، همواره برای x:

۱) حداقل یک جواب دارد. ۲) دو جواب دارد. ۳) جواب ندارد. ۴) سه جواب دارد.

۲۴۶. چند عدد صحیح در معادلهٔ $|4x - x^2| + x^2 - 4x = 0$ صدق می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

۲۴۷. به ازای کدام مقادیر k، معادلهٔ $||x+2| - 2| = k^2 - 7$ دارای سه جواب است؟

۱) ± 1 ۲) ± 3 ۳) ± 5 ۴) ± 9

۲۴۸. اگر مجموعه جواب معادلهٔ $|x+۱|+|۲x+۵|=|x+۴|$ یک بازه باشد، طول بازه کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۲۴۹. در مورد معادلهٔ $۲|x|+|x-۲|=۳x-۲$ کدام گزینه درست است؟

۱) فقط یک جواب دارد. ۲) فقط دو جواب دارد. ۳) فقط سه جواب دارد. ۴) بی‌شمار جواب دارد.

۲۵۰. مجموعه جواب معادلهٔ $۲x^۲+x+|۲x^۲+x-۳|=۳$ به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۵۱. معادلهٔ $|x-|x||=۱$ چگونه است؟

۱) ریشه ندارد. ۲) دو ریشه دارد. ۳) یک ریشهٔ منفی دارد. ۴) یک ریشهٔ مثبت دارد.

۲۵۲. مجموع جواب‌های معادلهٔ $۳|x-۲|+|x-۱|=۴$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $-\frac{۷}{۲}$ ۴) صفر

۲۵۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ $|۲x-۱|+|x+۲|=۳$، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۸)

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۲۵۴. معادلهٔ $\max\{|x|,۱-x^۲\}=۱$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

نامعادلات قدرمطلق

۲۵۵. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۲x+۳|<۵$ به‌صورت بازهٔ (a,b) است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۵۶. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۲x-۳|<x$، شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۲۵۷. اگر معادلهٔ $|x^۲-x|+x^۲=|x|$ و نامعادلهٔ $|x-\alpha|\le\beta$ معادل باشند، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) ۲

۲۵۸. در بازه‌ای مقادیر تابع با ضابطهٔ $y=x^۲$ کم‌تر از مقادیر تابع با ضابطهٔ $y=|x-۲|$ است. آن بازه کدام است؟

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۱,۰)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۰,۱)$

۲۵۹. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^۲-۲x|<x$ کدام بازه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۱,۳)$

۲۶۰. اگر $|x+۱|<۱$ آن‌گاه مقدار $۳x+۲$ برابر کدام عدد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) ۱

۲۶۱. اگر $|x-۱|\le ۲$ باشد، کم‌ترین مقدار عبارت $\frac{-۴}{x+۳}$، کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۲۶۲. اگر نامعادلات $|x-۱|<۰/۱$ و $a<۲x-۳<b$ معادل یکدیگر باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۶۳. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-۳|<|x+۱|$ کدام است؟

۱) $x\ge -۱$ ۲) $x>۱$ ۳) $-۱\le x\le ۱$ ۴) $x<-۱$ یا $x>۱$

۲۶۴. نامعادلهٔ $|x^۲-x|<|x|$ با کدام نامعادلهٔ زیر معادل است؟

۱) $|x+۱|<۱$ ۲) $|x-۱|<۱$ ۳) $|x|<۱$ ۴) $|x|>۱$

۲۶۵. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|\frac{x-۲}{۲x+۱}|>۱$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۲)

۱) $(-۳,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ ۲) $(-۲,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ ۴) $(-۳,-\frac{۱}{۲})$

۲۶۶. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right|>۱$ به‌صورت کدام بازه است؟ (سراسری تجربی- ۹۵ با کمی تغییر)

۱) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۲) $(۱,\frac{۳}{۲})\cup(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳})$ ۳) $(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۳})$ ۴) $(\frac{۵}{۳},۲)$

۲۶۷. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{۳-۲x}{x}\right|<۱$ کدام است؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $(۰,\frac{۳}{۲})$ ۴) $(\frac{۳}{۲},۴)$

۲۶۸. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x+۱}{x-۲}\geq\frac{x+۲}{x-۱}$ به‌صورت $|x+a|<b$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۶۹. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $||x-۱|-۲x|<۳$ به‌صورت بازهٔ (a,b) باشد، بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۲

۲۷۰. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۲x-۱|+|x+۲|>|۳x+۱|$ برابر بازهٔ (a,b) است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

۲۷۱. نمودار تابع $y=۴-|x|$ در بازهٔ (a,b) بالاتر از خط به معادلهٔ $۲y+x=۵$ قرار دارد. بزرگ‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۷۲. مجموعه جواب نامعادلهٔ $x+|x|\leq\frac{۱}{۲}x+۳$ به کدام صورت است؟

۱) $[-۴,۲]$ ۲) $[-۶,۱]$ ۳) $[-۶,۲]$ ۴) $[-۲,۶]$

۲۷۳. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x|(x-۱)>۲x-۲$ شامل چند عدد صحیح منفی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۲۷۴. مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-۴)|x|<۲x-۵$، به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۱-\sqrt{۶},۱+\sqrt{۶})$ ۳) $(۱,۵)\cup(۱+\sqrt{۶},+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$

۲۷۵. مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^۲-۲x<|x-۲|$، به‌صورت کدام بازه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(۱,۲)$

۲۷۶. مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲x+۱-|x-۲|>|x^۲+۱|$ به‌صورت کدام بازه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(۱,۲)$

۲۷۷. جواب نامعادلهٔ $|x-۱|+|x-۲|>x$ کدام مجموعه است؟

۱) $(-\infty,۳)$ ۲) $(۱,۳)$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱)\cup(۳,+\infty)$

۲۷۸. مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۲x-۱|>|x-۳|$ به‌صورت $|۳x+a|>b$ بیان شده است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(۵,۱)$ ۲) $(۱,۵)$ ۳) $(۳,۴)$ ۴) $(۴,۳)$

۲۷۹. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^۲-۲|<|x+۱|-۱$، بازهٔ (a,b) باشد، وسط این بازه کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۲۸۰. مجموعه جواب دستگاه معادلات $\begin{cases}|x|<۲\\|۲x-۱|<|x|\end{cases}$ کدام است؟

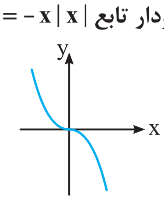
۱) $\{x:-۱<x<۱\}$ ۲) $\{x:-۲<x<۲\}$ ۳) $\{x:۰<x<۲\}$ ۴) $\{x:-۲<x<۱\}$

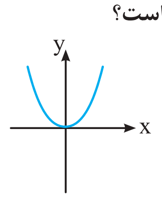
نمودار توابع شامل قدرمطلق

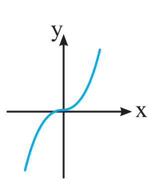
۲۸۱. نمودار تابع $y=||x|-|۴x||-|۲x|$ بر نمودار کدام تابع منطبق است؟

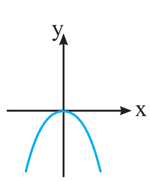
۱) $-|x|$ ۲) $|x|$ ۳) $|۳x|$ ۴) $|۲x|$

۲۸۲. نمودار تابع $y=-x|x|$ شبیه کدام است؟

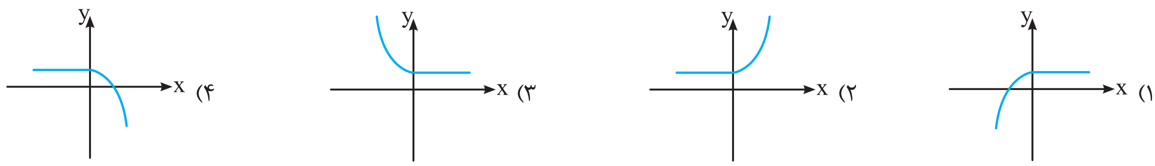
۱)


۲)


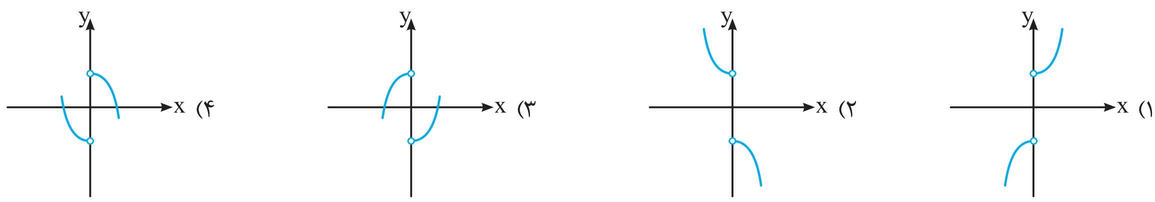
۳)


۴)


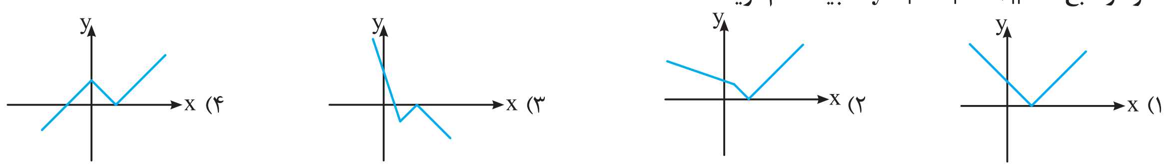
۲۸۳. نمایش هندسی تابع $y = x|x| - x^2 + 1$ به کدام صورت است؟



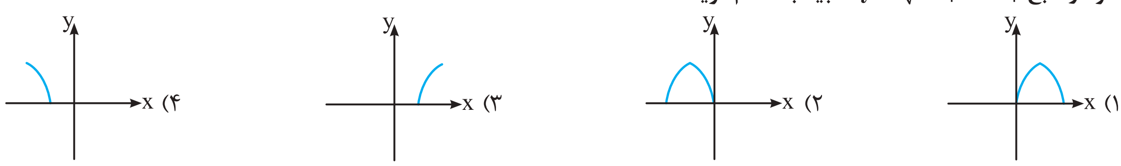
۲۸۴. نمودار تابع $f(x) = x\left(|x| - \frac{1}{|x|}\right)$ به کدام صورت است؟



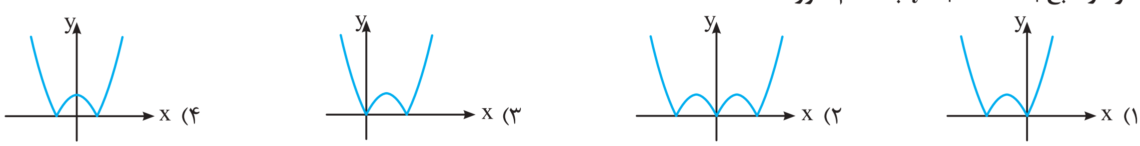
۲۸۵. نمودار تابع $y = |x - |x-1|| - x$ شبیه کدام گزینه است؟



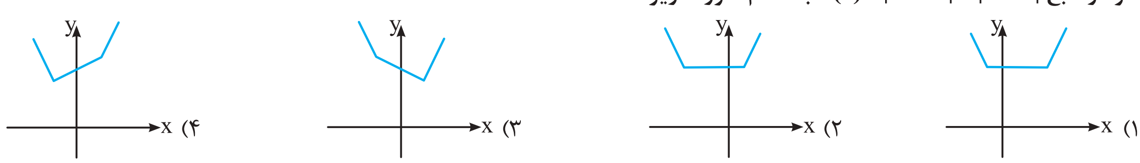
۲۸۶. نمودار تابع $y = \sqrt{2 - |x+2|}$ شبیه به کدام گزینه است؟



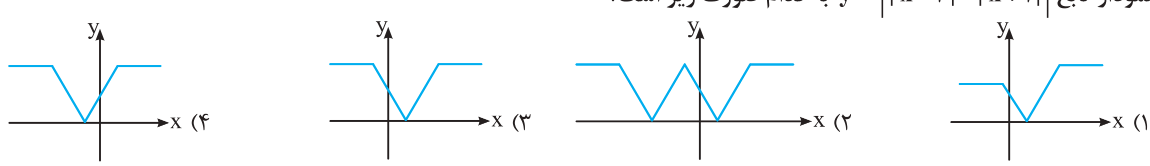
۲۸۷. نمودار تابع $y = |x^2 - 2x|$ به کدام صورت است؟



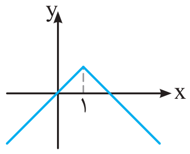
۲۸۸. نمودار تابع $f(x) = |x+3| + |x-1|$ به کدام صورت زیر است؟



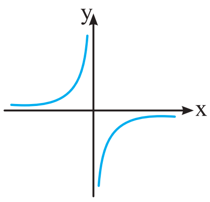
۲۸۹. نمودار تابع $y = \big||x-2| - |x+1|\big|$ به کدام صورت زیر است؟

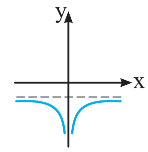


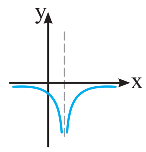
۲۹۰. اگر نمودار $y = f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = f(|x-1|)$ کدام است؟

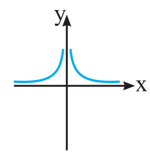


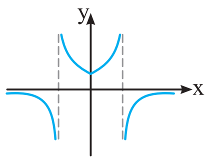
۲۹۱. اگر نمودار $y = f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = f(|x| - ۱)$ به کدام صورت است؟



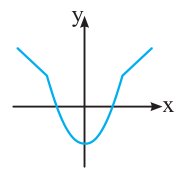
۱) 

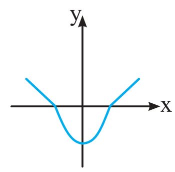
۲) 

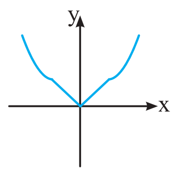
۳) 

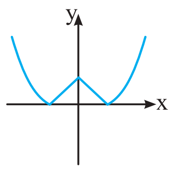
۴) 

۲۹۲. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \min\{x^۲ - ۱، |x|\}$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

معادلات مربوط به نمودارهای گلدانی و آبشاری

۲۹۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x+۳| + |x-۱| = ۶$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۲۹۴. اگر اختلاف دو ریشهٔ معادلهٔ $|x-۲| + |x+۱| = k$ برابر ۷ باشد، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۲۹۵. بر روی محور طول‌ها نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به طول‌های ۲- و ۳ روی محور x ها برابر ۷ است. مجموع مربعات طول این نقاط کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱۳ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

۲۹۶. حدود m برای آن‌که معادلهٔ $|x-۱| - |x+۲| = m - ۱$ دارای یک جواب باشد، کدام است؟

۱) $۰ < m < ۱$ ۲) $-۱ < m < ۰$ ۳) $-۳ < m < -۱$ ۴) $-۲ < m < ۴$

۲۹۷. حدود m برای آن‌که معادلهٔ $|x-۳| - |x+۲m| = m$ جواب نداشته باشد، کدام است؟

۱) $-۳ < m < -۱$ ۲) $-۱ < m < ۳$ ۳) $۰ < m < ۳$ ۴) $-۳ < m < ۰$

۲۹۸. نمودارهای دو تابع $y = |x-۲| + |x+۱|$ و $y = x + ۷$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) ۱۲
۳) ۱۳ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۲۹۹. به ازای چند مقدار m معادلهٔ $|x-m| + |x+m-۱| = m+۱$ بی‌شمار جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۰۰. حدود m برای آن‌که معادلهٔ $|x-m+۱| + |x+m| = ۲ - m$ دو جواب داشته باشد، کدام است؟

۱) $۰ < m < ۲$ ۲) $-۱ < m < ۱$ ۳) $-۲ < m < ۱$ ۴) $-۱ < m < ۲$

مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار توابع قدرمطلقی

۳۰۱. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $y = ۳|x| + x - ۴$ و محور x ها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۳۰۲. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ و $y = \frac{۱}{۲}x + ۲$، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۹)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۳۰۳. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x|-x$ و $y=۲-\frac{۳}{۲}x$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) ۶

☆**۳۰۴.** مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=x+|x|$ و $y=۲-|x|$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۵)

۱) ۲ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۳

☆**۳۰۵.** مساحت ناحیهٔ محدود بین منحنی تابع $f(x)=x+|۲x|$ و خط $y=۳$ چند واحد سطح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

★**۳۰۶.** مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $f(x)=|x-۱|+|x+۱|$ و خط $y=۴$ چند واحد سطح است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۰۷. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $f(x)=|x+۲|-|x|$ و خط $y=x$ چند واحد سطح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

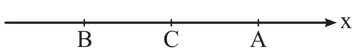
قسمت پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

وضعیت نقطه روی محور اعداد حقیقی

☆**۳۰۸.** فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B روی محور اعداد حقیقی متناظر با ۴ و ۵- کدام است؟

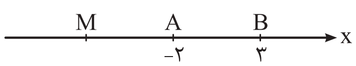
۱) ۹- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۹

☆**۳۰۹.** در شکل مقابل، نقطهٔ C وسط نقاط A و B قرار دارد. اگر $x_C=۴$ و $|AB|=۶$، آن‌گاه $x_A-۲x_B$ کدام است؟



۱) ۵- ۲) ۳- ۳) ۵ ۴) ۳

۳۱۰. با توجه به شکل مقابل، اگر $\frac{|AM|}{|BM|}=\frac{۳}{۴}$ باشد، طول نقطهٔ M کدام است؟



۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۷- ۴) ۱۹-

۳۱۱. دو نقطهٔ A و B را به طول‌های a و b $(a<b)$ روی محور $x'Ox$ انتخاب کرده و پاره‌خط AB را به ترتیب از چپ به راست به وسیلهٔ نقاط N و M به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. طول نقطهٔ N برحسب a و b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}b+\frac{۲}{۳}a$ ۲) $\frac{۱}{۴}a+\frac{۲}{۳}b$ ۳) $\frac{۱}{۳}b+\frac{۲}{۳}a$ ۴) $\frac{۱}{۳}a+\frac{۲}{۵}b$

وضعیت نقطه در صفحهٔ مختصات

۳۱۲. اگر نقطهٔ $(m-۱،۴)$ روی محور عرض‌ها واقع باشد، کدام نقطه روی محور طول‌ها قرار دارد؟

۱) $(۲،m^۲+m+۱)$ ۲) $(۳،m^۲-۳m+۲)$ ۳) $(۴،۲m)$ ۴) $(۳،m+۱)$

☆**۳۱۳.** نقطهٔ $(\sqrt{۱-m}+۱ ، m^۲+۲)$ در کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

مختصات وسط یک پاره‌خط

۳۱۴. نقاط $A(a،۳)$ و $B(۴،a-۱)$ مفروضند. اگر وسط پاره‌خط AB روی محور طول‌ها باشد، a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۴-

★**۳۱۵.** نقطهٔ $A(۷،۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) $(۱،۵)$ ۲) $(۳،۴)$ ۳) $(۳،۵)$ ۴) $(۴،۳)$

☆**۳۱۶.** به ازای کدام مقدار m، خط $x-y=۲$، از وسط پاره‌خطی که نقاط $A(m-۲،۳m+۲)$ و $B(m+۶،m)$ دو سر آن هستند، عبور می‌کند؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۲۳۲ — (۱) **(۲)** (۳) (۴)

گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نامساوی مثلث و نتایج آن را بیان می‌کنند، ولی گزینهٔ (۲) نادرست است. به طور مثال به ازای $a=۰$ و $b=۱$، گزینهٔ (۲) برقرار نیست.

۲۳۳ — (۱) **(۲)** (۳) (۴)

حالت تساوی در نامساوی مثلث وقتی برقرار است که عبارات درون قدرمطلق‌ها هم‌علامت باشند.

۲۳۴ — (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$x^۲ \le ۲x \Rightarrow x^۲ - ۲x \le ۰ \Rightarrow ۰ \le x \le ۲ \Rightarrow \begin{cases} x \ge ۰ \\ x \le ۲ \Rightarrow x - ۲ \le ۰ \end{cases}$$

$$A = \sqrt{x^۲} + \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} = |x| + |x - ۲| = x + ۲ - x = ۲$$

۲۳۵ — (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$۳x - x^۲ \ge ۲ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ \le ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲) \le ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱ \le x \le ۲ \Rightarrow \begin{cases} x - ۳ < ۰ \\ ۴x - ۱ > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = ۴x - ۱ + ۳ - x = ۳x + ۲$$

چون $۱ \le x \le ۲$ است، پس $۳ \le ۳x \le ۶$ و در نتیجه $۵ \le ۳x + ۲ \le ۸$ می‌باشد. بنابراین حاصل A هر عددی از بازهٔ $[۵،۸]$ می‌تواند باشد. پس حاصل A نمی‌تواند برابر ۹ باشد.

۲۳۶ — **(۱)** (۲) (۳) (۴)

می‌دانیم فاصلهٔ دو عدد a و b روی محور اعداد حقیقی برابر $|a-b|$ است. بر این اساس می‌توان نوشت:

$$|x+۱| < ۲ \Rightarrow -۲ < x + ۱ < ۲ \Rightarrow -۳ < x < ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < ۱ \Rightarrow x - ۱ < ۰ \\ -۳ < x \Rightarrow x + ۳ > ۰ \end{cases}$$

با استفاده از تعریف قدرمطلق داریم:

$$A = |x+۳| + |x-۱| = x + ۳ + ۱ - x = ۴$$

۲۳۷ — (۱) (۲) **(۳)** (۴)

واضح است که $\frac{x}{|x|} = \pm ۱$ و $\frac{y}{|y|} = \pm ۱$، چون $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = ۰$، پس x و y مختلف‌العلامت‌اند و در نتیجه x و $-y$ هم‌علامت هستند. پس حالت تساوی در نامساوی مثلث می‌تواند برای x و $-y$ اتفاق بیفتد.

$$|x-y| = |x + (-y)| = |x| + |-y| = |x| + |y|$$

۲۳۸ — (۱) (۲) (۳) **(۴)**

می‌دانیم $|x-۵| = |۵-x|$. با استفاده از نامساوی مثلث خواهیم داشت:

$$f(x) = |۵-x| + |x+۱| \ge |(۵-x) + (x+۱)| = ۶ \Rightarrow f(x) \ge ۶$$

۲۳۹ — (۱) (۲) **(۳)** (۴)

می‌توان نوشت $|۶-۲x| = |۲x-۶| = ۲|x-۳|$. لذا بنابر تعمیم نامساوی مثلث داریم:

$$A = |x-۱| + |x+۲| + |۶-۲x| \ge |(x-۱) + (x+۲) + (۶-۲x)| = ۷$$

$$\Rightarrow A \ge ۷$$

۲۴۰ — (۱) (۲) (۳) **(۴)**

بنابر یکی از نتایج نامساوی مثلث، یعنی نامساوی $|x| - |y| \le |x-y|$ داریم:

$$A = |x+۲| - |x-۱| \le |(x+۲) - (x-۱)| = ۳ \Rightarrow A \le ۳$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار A برابر ۳ بوده و لذا گزینهٔ (۴) صحیح است.

۲۴۱ — (۱) (۲) **(۳)** (۴)

می‌دانیم فاصلهٔ دو نقطهٔ a و b روی محور برابر $|a-b|$ می‌باشد. اگر x طول نقطهٔ مورد نظر روی محور باشد، طبق فرض داریم:

$$|x-(-۳)| = ۲ \Rightarrow |x+۳| = ۲ \Rightarrow \begin{cases} x + ۳ = ۲ \\ x + ۳ = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = -۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱ + ۲۵ = ۲۶$$

۲۴۲ — (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$||x-۱| - ۲| = ۳ \Rightarrow \begin{cases} |x-۱| - ۲ = ۳ \\ |x-۱| - ۲ = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-۱| = ۵ \\ |x-۱| = -۱ \quad (\text{غیرممکن}) \end{cases}$$

$$|x-۱| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۵ \\ x - ۱ = -۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ x = -۴ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = ۲$$

۲۴۳ — (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$|x-۱| = ۴ - ۳x \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۴ - ۳x \\ x - ۱ = ۳x - ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۴} \\ ۲x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

به ازای $x = \frac{۳}{۲}$، طرف راست معادلهٔ $|x-۱| = ۴ - ۳x$ منفی می‌شود و این در حالی است که طرف چپ معادله همواره نامنفی است. پس $x = \frac{۳}{۲}$ قابل قبول نیست و $x = \frac{۵}{۴}$ تنها جواب معادله است.

۲۴۴ — **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$|x^۲ + x| = |x^۲ + ۳x - ۲| \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + x = x^۲ + ۳x - ۲ \\ x^۲ + x = -x^۲ - ۳x + ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ ۲x^۲ + ۴x - ۲ = ۰ \end{cases}$$

می‌دانیم اگر معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای دو جواب باشد، مجموع جواب‌های آن برابر $-\frac{b}{a}$ است. پس مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۴x - ۲ = ۰$ برابر $-\frac{b}{a} = -۲$ می‌باشد و لذا مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x^۲ + x| = |x^۲ + ۳x - ۲|$ برابر -۱ خواهد بود.

۲۴۵ — **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$x|x| = kx \Rightarrow x|x| - kx = ۰ \Rightarrow x(|x| - k) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ |x| = k \end{cases}$$

$x = ۰$ یک جواب معادله است. چون $k \ne ۰$، لذا در صورتی‌که $k > ۰$ باشد، معادلهٔ $|x| = k$ دو جواب خواهد داشت که در این صورت معادلهٔ $x|x| = kx$ سه جواب دارد و چنان‌چه $k < ۰$، معادلهٔ $|x| = k$ جواب نخواهد داشت که در این صورت معادلهٔ $x|x| = kx$ همان یک جواب $x = ۰$ را دارد. پس این معادله حداقل یک جواب دارد.

۲۴۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

می‌دانیم اگر $|u|=u$، آن‌گاه $u\ge ۰$ پس داریم:

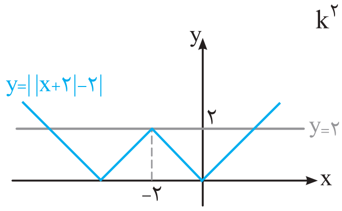
$$|۴x-x^۲|+x^۲-۴x=۰ \Rightarrow |۴x-x^۲|=۴x-x^۲$$

$$\Rightarrow ۴x-x^۲\ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰\le x\le ۴$$

این مجموعه جواب شامل ۵ عدد صحیح است.

۲۴۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نمودار $y=||x+۲|-۲|$ به‌صورت زیر است. برای این‌که معادلهٔ $||x+۲|-۲|=m$ دارای سه جواب باشد، باید $m=۲$ باشد. پس $k^۲-۷=۲\Rightarrow k=\pm۳$



۲۴۸ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$|x+۱|+|۲x+۵|=|x+۴|$$

$$\xrightarrow{|-u|=|u|} |-x-۱|+|۲x+۵|=|x+۴|$$

می‌دانیم رابطهٔ $|a|+|b|=|a+b|$ وقتی برقرار است که $ab\ge ۰$ باشد.

پس:

$$(-x-۱)(۲x+۵)\ge ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -\frac{۵}{۲}\le x\le -۱$$

$$\Rightarrow \text{طول بازه}=-۱-(-\frac{۵}{۲})=\frac{۳}{۲}$$

۲۴۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

چون سمت چپ معادله نامنفی است، پس لازم است، داشته باشیم $۳x-۲\ge ۰$ و در نتیجه $|۳x-۲|=۳x-۲$. لذا داریم $|۲x|+|x-۲|=|۳x-۲|$. بنابراین رابطهٔ $|a|+|b|=|a+b|$ برقرار است، پس $ab\ge ۰$ بنابراین:

$$۲x(x-۲)\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۲ \text{ یا } x\le ۰$$

از طرفی چون $۳x-۲\ge ۰$ بود، پس $x\ge \frac{۲}{۳}$ و در نتیجه مجموعه جواب معادله برابر است با $[۲,+\infty)$. لذا معادله بی‌شمار جواب دارد.

۲۵۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$۲x^۲+x+|۲x^۲+x-۳|=۳\Rightarrow |۲x^۲+x-۳|=-(۲x^۲+x-۳)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+x-۳\le ۰\Rightarrow (x-۱)(۲x+۳)\le ۰\Rightarrow -\frac{۳}{۲}\le x\le ۱$$

$$\Rightarrow \max(b-a)=۱-(-\frac{۳}{۲})=\frac{۵}{۲}$$

۲۵۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

نکته: در حالت کلی برای حل معادلات شامل قدرمطلق به روش جبری، ابتدا عبارات درون قدرمطلق را در همسایگی ریشه‌های درون قدرمطلق‌ها تعیین علامت کرده و قدرمطلق‌ها را برمی‌داریم و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم. جواب یا جواب‌های به‌دست آمده وقتی قابل قبول هستند که در ناحیهٔ مورد نظر باشند.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $x\ge ۰$ $|x|=x\Rightarrow |x-|x||=|x-x|=۰$

پس در این حالت معادلهٔ $|x-|x||=۱$ جواب ندارد.

حالت دوم: $x<۰$

$$|x|=-x\Rightarrow |x-|x||=|x+x|=|۲x|\xrightarrow{x<۰}-۲x$$

$$|x-|x||=۱\Rightarrow -۲x=۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

۲۵۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

این معادله را به روش حالت‌بندی حل می‌کنیم:

x		۱		۲	
x-۱	-	۰	+		+
x-۲	-		-	۰	+

با توجه به جدول فوق، سه حالت در نظر می‌گیریم:

$$x<۱: -۳(x-۲)-(x-۱)=۴\Rightarrow -۴x=-۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۴} \quad ✓$$

این جواب در محدودهٔ $x<۱$ قرار دارد. پس قابل قبول است.

$$۱\le x\le ۲: -۳(x-۲)+(x-۱)=۴\Rightarrow -۲x=-۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \quad ✗$$

این جواب در شرط $۱\le x\le ۲$ صدق نمی‌کند، پس آن را نمی‌پذیریم.

$$x>۲: ۳(x-۲)+(x-۱)=۴\Rightarrow ۴x=۱۱\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۴} \quad ✓$$

چون $\frac{۱۱}{۴}>۲$، پس این جواب نیز قابل قبول است. پس مجموع جواب‌های معادله $\frac{۳}{۴}+\frac{۱۱}{۴}=\frac{۱۴}{۴}=\frac{۷}{۲}$ است.

۲۵۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

با توجه به ریشه‌های عبارات درون قدرمطلق، سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $x\le -۲$:

$$-۲x+۱-x-۲=۳\Rightarrow -۳x=۴\Rightarrow x=-\frac{۴}{۳}$$

این جواب در محدودهٔ $x\le -۲$ قرار ندارد. پس قابل قبول نیست.

حالت دوم: $-۲<x\le \frac{۱}{۲}$:

$$-۲x+۱+x+۲=۳\Rightarrow x=۰$$

این جواب در محدودهٔ $-۲<x\le \frac{۱}{۲}$ قرار دارد و قابل قبول است.

حالت سوم: $x>\frac{۱}{۲}$:

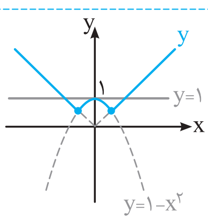
$$۲x-۱+x+۲=۳\Rightarrow ۳x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

این جواب را هم می‌پذیریم. زیرا در محدودهٔ $x>\frac{۱}{۲}$ واقع است.

مجموع جواب‌های معادله برابر $۰+\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}$ است.

۲۵۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

نمودار تابع $y=\max\{|x|,۱-x^۲\}$ به‌صورت روبه‌رو است. مطابق شکل، خط $y=۱$ این نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند.



۲۵۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$|۲x+۳|<۵\Rightarrow -۵<۲x+۳<۵\xrightarrow{-۳}-۸<۲x<۲$$

$$\xrightarrow{\div ۲}-۴<x<۱\Rightarrow x\in(-۴,۱)$$

پس $(a,b)=(-۴,۱)$ و لذا بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر ۵ است.

۵۶. ماشین A کاری را به تنهایی ۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین کار را در ۶ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هرکدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟ (مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۵۷. یاسمین یک کتاب ۶۰۰ صفحه‌ای را به گونه‌ای مطالعه کرده است که تعداد صفحاتی که در هر روز خوانده، یکسان بوده است. او حساب کرد اگر هر روز ۶ صفحه بیش‌تر می‌خواند، ۵ روز زودتر کتاب را تمام می‌کرد. تعیین کنید یاسمین این کتاب را چند روزه و هر روز چند صفحه خوانده است؟ (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۵۸. محیط یک مستطیل برابر ۲۰ واحد طول است. اگر اندازهٔ طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض آن را حساب کنید.
(مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۹ کتاب درسی)

۵۹. معادلات زیر را حل کنید. (نهایی– شهریور ۹۱)

آ) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۹}$ ب) $\sqrt{۱-x^۲}=x$

پ) $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$ (نهایی– شهریور ۹۱) ت) $\sqrt{۲x-۱}=۲-x$

ث) $\sqrt{۳-۳x}=۳+\sqrt{۳x+۲}$ ج) $\sqrt{x+۲}-\sqrt{۳x+۳}=۱$

چ) $\sqrt{x^۲-x}+\sqrt{۲x^۲-x-۱}=۰$ ح) $۲+\sqrt{x+۱}=\sqrt{x}$ (نهایی– خرداد ۹۶)

۶۰. اگر $x=۱$ یکی از جواب‌های معادلهٔ $۲+ax=\sqrt{۴-۴x^۲}$ باشد، جواب دیگر معادله را در صورت وجود بیابید.

۶۱. با تغییر متغیر مناسب، معادلات زیر را حل کنید.

آ) $x^۲+۴x-۶=۲\sqrt{x^۲+۴x-۳}$ ب) $\sqrt{x^۲+۲x-\sqrt{۲x^۲+۴x}}=۲$

پ) $\sqrt{۴x^۲-۶x-۱}=۳x-۲x^۲$

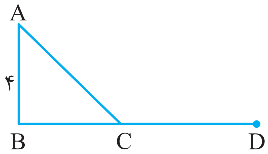
۶۲. بدون حل معادله، نشان دهید معادلات زیر جواب ندارند.

آ) $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۳-x}=x-۵$ ب) $\sqrt{x^۲-۱}+۲\sqrt{x}=۰$

پ) $\sqrt{x^۲+۹}+\sqrt{x^۲+۱}=۲$

۶۳. چند عدد وجود دارد که جذر آن ۲۰ واحد از خود عدد کوچک‌تر باشد؟ (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۲۱ کتاب درسی)

۶۴. مطابق شکل مقابل، اگر $AB=۴$ ، $BD=۱۲$ و $AC+CD=۱۴$ ، آن‌گاه اندازهٔ CD را به‌دست آورید.



قسمت چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

۶۵. جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پُر کنید. (نهایی– دی ۹۳)

آ) جواب‌های معادلهٔ $|x+۱|=۴$ برابر با .... و .... است. ب) مجموعه جواب نامعادلهٔ $|۲x-۱|<۷$ ، بازهٔ .... است.

۶۶. جای خالی را با عبارت ریاضی مناسب پُر کنید. (نهایی– خرداد ۹۱)

اگر $x\le ۱$ باشد، ضابطهٔ تابع $y=|x-۳|+|x-۱|$ بدون استفاده از قدرمطلق برابر است با ....

۶۷. عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (مشابه کار در کلاس‌های ۱ و ۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $|-۷-(-۳)|$ ب) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|+|\sqrt{۷}-\sqrt{۵}|$ پ) $\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$ ت) $\sqrt{۹x^۲-۶x+۱}$

۶۸. عبارت «فاصلهٔ بین دو عدد x و a کم‌تر از ۰/۰۱ است.» را با استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید. (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

۶۹. با فرض این‌که a و b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید $|ab|=|a||b|$ (نهایی– دی ۹۱)

۷۰. برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید $|a+b|\le|a|+|b|$ (نهایی– خرداد ۹۰)

۷۱. نقاطی روی محور اعداد حقیقی بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابت ۵- برابر ۳ باشد. (مشابه مسئلهٔ صفحهٔ ۲۶ کتاب درسی)

۷۲. به کمک نامساوی مثلث در قدرمطلق ثابت کنید معادلهٔ $|۳x-۱|+|۳x+۲|=۲/۹$ جواب ندارد.

۷۳. با استفاده از نامساوی مثلث، کم‌ترین مقدار توابع زیر را تعیین کنید.

آ) $f(x)=|x+3|+|x-2|$ ب) $f(x)=|2x-4|+|3-2x|$

۷۴. معادلات زیر را حل کنید.

آ) $|2x+1|=5$ ب) $||x|-2|=3$ (نهایی- شهریور ۹۳)

پ) $\sqrt{x^2+2x+1}=2-3x$ ت) $|x^2+x|=|x^2+6x-9|$

۷۵. اگر $|x+3|<5$ باشد، نشان دهید $|2x-3|<19$

۷۶. اگر فاصلهٔ عدد حقیقی x از عدد ۱ روی محور اعداد حقیقی کم‌تر از ۲ باشد، ثابت کنید $|5x-4|<11$

۷۷. با استفاده از تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، ضابطهٔ هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

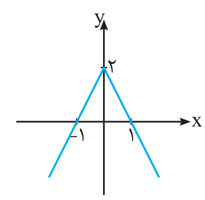
آ) $f(x)=x|x-2|$ (نهایی- دی ۹۰) ب) $g(x)=|x^2-x|$

پ) $h(x)=|x-1|-|x+3|$ (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

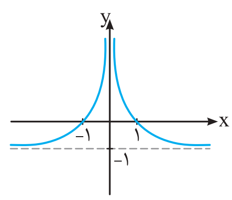
۷۸. ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)=|x-1|+|2-x|$ را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید و سپس نمودار آن را رسم کنید. (نهایی- خرداد ۹۴)

۷۹. در هر یک از شکل‌های زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است. نمودار $y=|f(x)|$ را رسم کنید. (مشابه فعالیت ۴ صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)

آ)



ب)



۸۰. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y=2$ معادلات به‌دست‌آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

آ) $y=|3x-1|$ ب) $y=x-\dfrac{x-1}{|x-1|}$ پ) $y=|x|+|x-1|$ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

۸۱. ابتدا نمودار $f(x)=||x|-1|$ را رسم کنید و سپس معادلهٔ $f(x)=\dfrac{1}{2}$ را به روش هندسی و جبری حل کنید. (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

۸۲. ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x^2-4x|$ را رسم کنید. سپس معادلهٔ $f(x)=3$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

(مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

۸۳. معادلهٔ $|3x+2|=|x^2-2|$ را به روش هندسی و جبری حل کنید. (مشابه کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۲۷ کتاب درسی)

۸۴. معادلات زیر را به روش جبری و هندسی حل کنید.

آ) $|x+2|=2x+3$ ب) $x+\dfrac{x}{|x|}=3$ (نهایی- خرداد ۹۳) پ) $|2x-1|=|x+3|$

۸۵. بر روی محور طول‌ها نقاطی بیابید که مجموع فاصله‌های آن‌ها از نقاط به طول‌های ۲ و ۱- روی محور xها برابر ۵ باشد.

(مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

قسمت پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

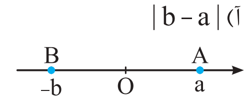
۸۶. روی محور اعداد، مبدأ را با O، نقطهٔ متناظر ۷ را با A و نقطهٔ متناظر ۵- را با B مشخص می‌کنیم. مطلوب است:

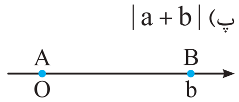
(مشابه فعالیت صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

آ) اندازهٔ جبری پاره‌خط‌های OA، OB و AB ب) فاصلهٔ نقاط A و B و فاصلهٔ نقاط O و B

۸۷. اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، فاصلهٔ بین A و B را در هر شکل با عبارت مناسب نظیر کنید.

آ) $|b-a|$ ب) $|b|$ پ) $|a+b|$





۸۸. اگر نقطهٔ $A(m-2, 3m+2)$ روی محور yها و نقطهٔ $B(n^2+3, n+1)$ روی محور xها باشد، مختصات وسط پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

۸۹. حدود m را طوری تعیین کنید که نقطهٔ $A(4-2m, m-3)$ در ربع سوم محورهای مختصات باشد.