



آریان حیدری. میلاد منصوری. علی منصف شکری

هرکول



کارشناس علمی: سعید عزیزی

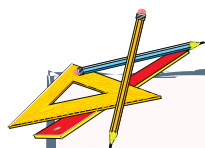
ریاضیات تجربی

و حسابان جامع

بانگ تست + پاسخ تشریحی + درسنامه

مباحث مشترک پایه دهم، یازدهم و دوازدهم

دستیاران تألیف: امین خوانین زاده، حامد علیخانی، احسان غیاثی



تعداد تست‌ها در:

تئوری	1401	5
ریاضی	1401	2
تئوری	1400	5
ریاضی	1400	5
تئوری	1399	5
ریاضی	1399	3
تئوری	1398	2
ریاضی	1398	4

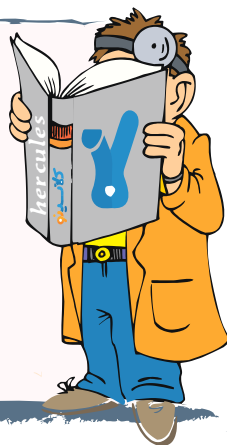
chapter.1

منبع دوم: تست‌های قریز

منبع اول: تست‌های اسبز

فصل ۱: تابع

بخش ۱: تشخیص تابع



۱ تابع f از مجموعه A به مجموعه B تعریف شده است، کدام گزینه درست است؟

۱ تعداد عضوهای برد و هم دامنه، همواره با هم برابر است.

۲ برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم دامنه آن است.

۳ لزومی ندارد که تمام عضوهای مجموعه A در مؤلفه‌های اول تابع f استفاده شوند.

۴ تعداد اعضای برد، همواره بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای هم دامنه می‌باشد.

۲ در کدام گزینه مشخصات داده شده نمی‌تواند مربوط به یک تابع باشد؟

$\begin{cases} k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^- \\ k(x) = -x^2 \end{cases}$ ۴	$\begin{cases} g: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = x^2 \end{cases}$ ۳	$\begin{cases} f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ ۲	$\begin{cases} h: (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 0] \\ h(x) = -x^2 \end{cases}$ ۱
---	--	---	---

۳ اگر رابطه $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ مربوط به یک تابع باشد، $f(3)$ کدام است؟

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۴ ۴ ۱

۴ اگر رابطه $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (m, 3)\}$ تابع نباشد، مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

۱ ۴ ۲ ۶ ۳ ۵ ۴ ۱

۵ با حذف حداقل چند زوج مرتب از رابطه $f = \{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 3)\}$ می‌توان آن را به یک تابع تبدیل کرد؟

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

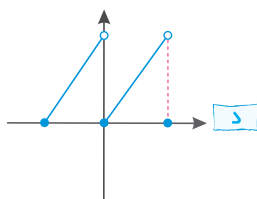
۶ اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & ; x \geq a \\ 2x + a + 2 & ; x \leq a \end{cases}$ یک تابع باشد، $f(1)$ کدام است؟

۱ ۳ ۲ ۷ ۳ ۵ ۴ ۷

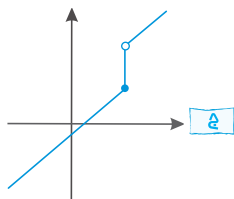
۷ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \leq 1 \\ ax + b & ; 1 \leq x \leq 2 \\ x^3 & ; x \geq 2 \end{cases}$ ضابطه یک تابع باشد، مقدار ab کدام است؟

۱ ۶۴ ۲ ۶۴ ۳ ۳۲ ۴ ۳۲ ۵ ۳۲ ۶ ۳۲ ۷ ۳۲

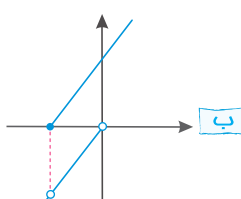
۸ چه تعداد از نمودارهای زیر، مربوط به یک تابع است؟



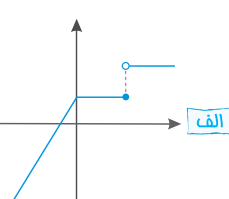
۴ سه



۳ دو



۲ یک



۱ صفر

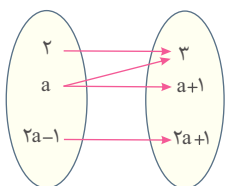
۹ اگر نمودار پیکانی تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۱ ۶

۲ ۴

۳ ۷

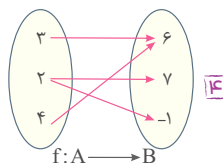
۴ ۵



۱۰ کدام یک از گزینه‌های زیر، یک تابع را معرفی می‌کند؟

۱ $f = \{(4, 2), (-1, 2), (3, 5), (\sqrt{16}, 3)\}$

۲ رابطه‌ای که هر عدد مثبت را به ریشه‌های دوم آن نسبت می‌دهد.



۳ رابطه بین افراد و وزن آن‌ها در یک زمان معین.

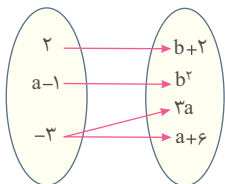
۱۱ اگر نمودار پیکانی مقابل یک تابع باشد، آنگاه بیشترین مقدار ممکن برای ab کدام است؟

۱ ۶

۲ -۳

۳ ۳

۴ ۱۲



۱۲ کدام یک از موارد زیر معرف یک تابع بر حسب متغیر مستقل x است؟

۱ $y = \sqrt{x^2}$

۲ $\sqrt{y^2} = x$

۳ $x + |y| = 0$

۴ $[y] + [x] = 0$

۱۳ در کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌توان نتیجه گرفت $f(x)$ الزاماً یک تابع است؟

۱ $f(4x+3) = 2x+3$

۲ $f(x^2+1) = x^3+2$

۳ $f([x]) = x$

۴ $f(|x|) = x^2+3$

۱۴ چه تعداد از ضابطه‌های زیر، y را به عنوان تابعی از x تعریف می‌کنند؟

الف $x = \sqrt{y-2} + \sqrt{2-y}$

ب $x = \begin{cases} 2y & ; y > 1 \\ y+3 & ; y \leq 1 \end{cases}$

ج $y = \begin{cases} x+1 & ; x \geq 2 \\ 3x & ; x \leq 2 \end{cases}$

۱ صفر

۲ یک

۳ دو

۴ سه

۱۵ در چه تعداد از روابط زیر y تابعی بر حسب متغیر مستقل x است؟

الف $|y-2| + 3 - x = 0$

ب $f(x^2) = x$

ج $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$

د $y^2 - 2y + 1 + x^2 = 0$

۱ ۱

۲ ۲

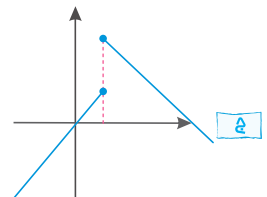
۳ ۳

۴ ۴

۱۶ از بین نمودارها و ضابطه‌های زیر، چه تعداد از آن‌ها با حذف یک نقطه تبدیل به تابع می‌شوند؟

الف $[x] = [y]$

ب $|x| = |y|$

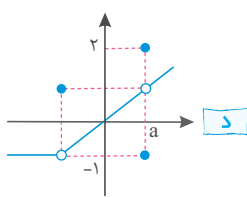


۱ صفر

۲ یک

۳ دو

۴ سه





مقدار تابع در یک نقطه

۱۸ اگر $f(x) = x + \frac{1}{x}$ باشد، حاصل $f(2 + \sqrt{3}) + f(2 - \sqrt{3})$ کدام است؟

- ۱ | ۸ | ۲ | ۶ | ۳ | $2\sqrt{3}$ | ۴ | $4\sqrt{3}$

۱۹ اگر $f(x) = \begin{cases} -3x & ; x < -1 \\ x^2 - 2x & ; -1 < x < 1 \\ 2x - 1 & ; x > 1 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(-\frac{5}{3}) + f(-\sqrt{2} + 1)$ کدام است؟

- ۱ | ۶ | ۲ | ۵ | ۳ | ۴ | ۴ | ۸

۲۰ اگر $f(3x + 2) = \sqrt{2x^3} + 1$ باشد، مقدار $f(8)$ برابر با است.

- ۱ | مربع یک عدد طبیعی
۳ | حاصل ضرب دو عدد متوالی
۲ | مجموع دو عدد فرد متوالی
۴ | مجموع دو عدد اول

۲۱ اگر $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2 + 1}$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟

- ۱ | $\frac{1}{5}$ | ۲ | ۱ | ۳ | ۲ | ۴ | $\frac{1}{2}$

۲۲ اگر $f(\sqrt{x}) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، مقدار $f(2) - f(1)$ کدام است؟

- ۱ | ۱۱ | ۲ | ۸ | ۳ | ۵ | ۴ | ۱

۲۳ اگر $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x} + 2$ ، آنگاه مقدار $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ | ۳ | ۲ | $1 + \sqrt{2}$ | ۳ | ۵ | ۴ | $2 + \sqrt{2}$

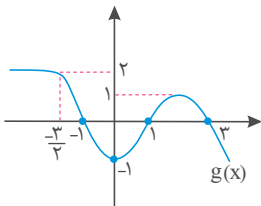
۲۴ اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ باشد، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

- ۱ | تعریف نشده | ۲ | ۶ | ۳ | ۸ | ۴ | ۱۲

۲۵ اگر $f(x) = -2x + 5 - a$ ، $g(x) = x^2 + 2x - 4$ باشد، به ازای کدام مقدار a رابطه $g(-1) = f(2)$ برقرار است؟

- ۱ | ۶ | ۲ | -۶ | ۳ | ۳ | ۴ | -۳

۲۶ اگر $f = \{(1, -2), (-2, 3), (2, -1), (3, 4)\}$ و نمودار تابع g مطابق شکل باشد، حاصل $\frac{f(3) + g(-4)}{f(-2) + g(3)}$ کدام است؟ ($Dg = \mathbb{R}$)



(تقریبی دافل - ۹۰)

- ۱ | ۱ | ۲ | $\frac{3}{2}$ | ۳ | ۲ | ۴ | $\frac{5}{4}$

۲۷ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x + 4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

- ۱ | ۶ | ۲ | ۷ | ۳ | ۸ | ۴ | ۹

۲۸ به ازای کدام ورودی، خروجی ماشین داده شده برابر ۴ است؟

- ۱ | $\frac{5}{4}$ | ۲ | $\frac{13}{4}$ | ۳ | $\frac{9}{4}$ | ۴ | ۱

ورودی $\rightarrow \frac{2}{2 - \sqrt{x-1}} \rightarrow$ خروجی

۳۹ اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $1 - 2f(x) + f(x^2)$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{1-x^2}$ ۲ $\frac{2x}{x^2-1}$ ۳ $\frac{2x+1}{1-x^2}$ ۴ $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۳۰ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

۱ صفر ۲ $4x$ ۳ $2x^2$ ۴ $4x^2$

۳۱ اگر $f(\sin x) = \cos^2 x$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟ ($D_f = [-1, 1]$)

۱ x^2 ۲ $1-x^2$ ۳ $-x^2$ ۴ $1+x^2$

۳۲ اگر $f(\tan x) = \cos^2 x$ باشد، $f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{x^2+1}$ ۲ $\frac{x^2}{x^2+1}$ ۳ x^2+1 ۴ x^2

۳۳ اگر $f(xf(x)) = 2f(x)$ و $f(1) = 2$ باشد، مقدار $f(12)$ کدام است؟

۱ ۱۸ ۲ ۱۶ ۳ ۲۴ ۴ ۳۶

۳۴ اگر $f(x+2) = g(x-1) = 3 + \sqrt{x+3}$ باشد، مقدار $f(8) - g(0)$ متعلق به کدام مجموعه است؟

۱ $\mathbb{N}$ ۲ $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ ۳ $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ۴ $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

۳۵ اگر $f(x+1) + f(2) = 4x + 6$ باشد، آنگاه مقدار $f(3)$ کدام ویژگی را دارد؟

۱ حاصل ضرب دو عدد متوالی ۲ مکعب کامل ۳ مربع کامل ۴ اول

۳۶ اگر $f(x+2) = f(x) + 3x + 1$ باشد، حاصل $f(7) - f(3)$ کدام است؟

۱ ۳۲ ۲ ۲۶ ۳ ۲۵ ۴ ۲۰

۳۷ اگر $f(x) = x^2 + 3x + 1$ باشد، حاصل $f(\frac{\sqrt{7}-3}{2}) + f(\frac{\sqrt{6}-3}{2}) - 2f(\frac{\sqrt{5}-3}{2})$ کدام است؟

۱ صفر ۲ ۱ ۳ $\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + \sqrt{7}$ ۴ $\frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + \sqrt{7}}{2}$

۳۸ اگر $f(x+2) = (x+1)^2 + 2(x+1) + 3$ باشد، حاصل $f(\sqrt{5}) + f(\sqrt{6}) + f(\sqrt{7})$ کدام است؟

۱ ۱۸ ۲ ۲۴ ۳ ۲۹ ۴ ۳۲

۳۹ اگر $2f(x) + xf(4-x) = 3x + 2$ باشد، مقدار $f(1)$ متعلق به کدام مجموعه است؟

۱ $\mathbb{W}$ ۲ $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ ۳ $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ۴ $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

۴۰ اگر $f(x+2) = 2x + 3f(3-x)$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $-\frac{1}{6}$

۴۱ اگر $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ و $f(2) = 3$ باشد، مقدار $f(4)$ کدام است؟

۱ $\sqrt{3}$ ۲ ۹ ۳ $-\sqrt{3}$ ۴ ۵

۴۲ اگر $f(x) = \{(1, a), (3, 5), (5, 3a+2)\}$ باشد و $f(x) = f(b-x)$ مقدار $a+b$ کدام است؟

۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸

۶۴۰ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر زاویه‌های زیر ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، ساق بزرگ‌تر از قاعده است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ طول کمان رو به زاویه π رادیان تقریباً برابر $3/14$ است.

۵) زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{9}$ ، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان زوایای یک مثلث منفرجه‌الزاویه هستند.

د) به‌طور کلی همواره $\pi = 180^\circ$ است.

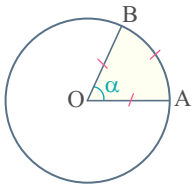
- ۱۴ ۳ ۲ ۴۱

۶۴۱ در دایره‌ای به شعاع ۹، اندازه کمان روبه‌رو به زاویه 1° ، چقدر است؟

- $\frac{\pi}{4}$ ۱ $\frac{\pi}{2}$ ۲ $\frac{\pi}{3}$ ۳ $\frac{\pi}{6}$ ۴

۶۴۲ اندازه کمان AB در دایره مقابل با شعاع دایره برابر است. اندازه زاویه $\widehat{AOB}$ تقریباً چند درجه است؟

- ۱ 60° ۲ 57° ۳ 55° ۴ 53°



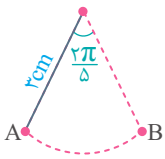
۶۴۳ طول برف‌پاک‌کن خودرویی 30° سانتی‌متر است، زاویه دوران چند درجه باشد، تا انتهای تیغه برف‌پاک‌کن مسافت ۴۵ سانتی‌متر را طی کند؟

- ۱ $\frac{280}{\pi}$ ۲ $\frac{240}{\pi}$ ۳ $\frac{180}{\pi}$ ۴ $\frac{270}{\pi}$

۶۴۴ یک آونگ ساده، حرکتی رفت و برگشتی با زاویه مرکزی $\frac{2\pi}{5}$ رادیان انجام می‌دهد. اگر طول نخ آونگ ۳cm باشد، مقدار کل مسافتی که گلوله

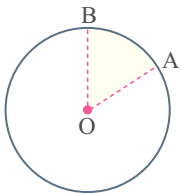
انتهای آونگ در سه بار رفت و برگشت کامل طی می‌کند، چند سانتی‌متر است؟

- ۱ $\frac{18\pi}{5}$ ۲ $\frac{24\pi}{5}$ ۳ 6π ۴ $\frac{36\pi}{5}$



۶۴۵ اندازه کمان AB روبه‌رو به زاویه 15° در دایره‌ای، برابر با $\frac{\pi}{6}$ است. محیط قطاع OAB کدام است؟

- ۱ $1 + \frac{\pi}{6}$ ۲ $2 + \frac{\pi}{3}$ ۳ $4 + \frac{\pi}{6}$ ۴ $6 + \frac{\pi}{3}$



۶۴۶ کمان روبه‌رو به زاویه 15° در دایره‌ای برابر ۲cm است. مساحت این دایره چند سانتی‌متر مربع است؟

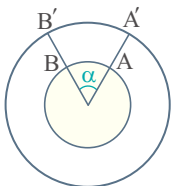
- ۱ 144π ۲ 196π ۳ $\frac{288}{\pi}$ ۴ $\frac{576}{\pi}$

۶۴۷ اگر کمان روبه‌رو به زاویه 2° در دایره‌ای $\frac{\pi}{18}$ باشد، آنگاه کمان روبه‌رو به کدام زاویه مرکزی $\frac{2\pi}{3}$ است؟

- ۱ 120° ۲ 140° ۳ 240° ۴ 280°

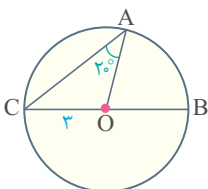
۶۴۸ در شکل مقابل شعاع دایره‌ها 6400 و 6800 است. اگر طول کمان AB برابر 1600π باشد، آنگاه اندازه زاویه α و کمان $\widehat{A'B'}$ به ترتیب کدام است؟

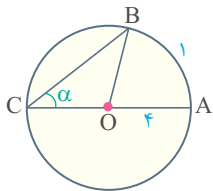
- ۱ 45° ، 1800π ۲ 30° ، 1800π ۳ 30° ، 1700π ۴ 45° ، 1700π



۶۴۹ در شکل مقابل O مرکز دایره است، اندازه کمان AB کدام است؟

- ۱ $\frac{2\pi}{9}$ ۲ $\frac{\pi}{3}$ ۳ $\frac{2\pi}{3}$ ۴ $\frac{\pi}{9}$





۴۵۰ در شکل مقابل شعاع دایره ۴ واحد است. اگر اندازه کمان AB برابر ۱ واحد باشد، اندازه زاویه α چند رادیان است؟

$$\frac{1}{8\pi} \quad \frac{1}{4\pi} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4\pi} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8\pi} \quad \frac{1}{8}$$

۴۵۱ شعاع‌های چرخ‌های یک تراکتور ۵۰ و ۱۲۰ سانتی‌متر است، اگر چرخ کوچک‌تر مسیری به طول ۱۸π متر را طی کند، چرخ بزرگ‌تر چند رادیان چرخیده است؟

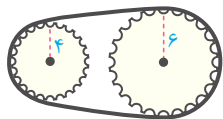
$$15\pi \quad 14\pi \quad 7/5\pi \quad 7\pi$$

$$14\pi \quad 15\pi \quad 7/5\pi \quad 7\pi$$

$$7/5\pi \quad 7\pi \quad 14\pi \quad 15\pi$$

$$7\pi \quad 14\pi \quad 15\pi \quad 7/5\pi$$

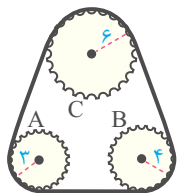
۴۵۲ دو چرخ به شعاع‌های ۴ و ۶ به وسیله تسمه‌ای مانند شکل مقابل به هم وصل شده‌اند. وقتی چرخ کوچک‌تر $\frac{15\pi}{4}$ رادیان بچرخد، چرخ بزرگ‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



$$\frac{5\pi}{2} \quad \frac{15\pi}{4} \quad \frac{15\pi}{2} \quad \frac{15\pi}{4}$$

$$\frac{45\pi}{8} \quad \frac{15\pi}{4} \quad \frac{15\pi}{2} \quad \frac{15\pi}{4}$$

۴۵۳ سه چرخ مانند شکل مقابل به هم وصل شده‌اند، وقتی دو چرخ کوچک‌تر جمعاً ۲۸ دور می‌چرخند، چرخ بزرگ‌تر چند رادیان چرخیده است؟



$$6\pi \quad 12\pi \quad 16\pi \quad 18\pi$$

$$12\pi \quad 16\pi \quad 18\pi \quad 6\pi$$

$$16\pi \quad 18\pi \quad 6\pi \quad 12\pi$$

$$18\pi \quad 6\pi \quad 12\pi \quad 16\pi$$

۴۵۴ ساعت ۲ بعد از ظهر است. زمانی که عقربه ساعت‌شمار $\frac{\pi}{36}$ بچرخد، ساعت چند می‌شود؟

$$2:12' \quad 2:10' \quad 2:7' \quad 2:3'$$

$$2:10' \quad 2:7' \quad 2:3' \quad 2:12'$$

$$2:7' \quad 2:3' \quad 2:12' \quad 2:10'$$

$$2:3' \quad 2:12' \quad 2:10' \quad 2:7'$$

۴۵۵ رأس ساعت ۱۵:۱۲، زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند رادیان است؟

$$\frac{5\pi}{12} \quad \frac{5\pi}{24} \quad \frac{11\pi}{24} \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{24} \quad \frac{11\pi}{24} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{11\pi}{24} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{12} \quad \frac{5\pi}{24}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{12} \quad \frac{5\pi}{24} \quad \frac{11\pi}{24}$$

۴۵۶ ساعت ۲:۰۰ است، تقریباً چه مدت طول می‌کشد تا زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار برای دومین بار برابر $\frac{\pi}{6}$ رادیان شود؟

$$16 \text{ دقیقه} \quad 14 \text{ دقیقه} \quad 13 \text{ دقیقه} \quad 12 \text{ دقیقه}$$

$$14 \text{ دقیقه} \quad 13 \text{ دقیقه} \quad 12 \text{ دقیقه} \quad 16 \text{ دقیقه}$$

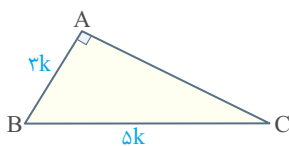
$$13 \text{ دقیقه} \quad 12 \text{ دقیقه} \quad 16 \text{ دقیقه} \quad 14 \text{ دقیقه}$$

$$12 \text{ دقیقه} \quad 16 \text{ دقیقه} \quad 14 \text{ دقیقه} \quad 13 \text{ دقیقه}$$



part 2

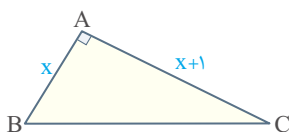
معرفی سینوس، کینوس و ...



۴۵۷ در مثلث ABC مطابق شکل حاصل $\sin B + \sin C$ کدام است؟

$$\frac{7}{5} \quad \frac{9}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5}$$

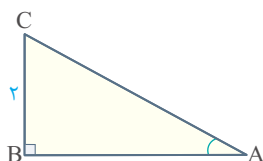
$$\frac{6}{5} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5}$$



۴۵۸ در مثلث ABC مطابق شکل اگر $\tan C + \cot C = \frac{25}{12}$ باشد، حاصل $\cos B$ کدام است؟

$$5/6 \quad 5/4 \quad 5/5 \quad 5/5$$

$$5/8 \quad 5/4 \quad 5/5 \quad 5/5$$



۴۵۹ در شکل مقابل حاصل $[\sin A] + [\cos C]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

۴ قابل محاسبه نیست.

مبانی مشترک
رأسی تیزری و نمایان پاسخ دو منتهی هرکول
Hercules

۴۴۰ در شکل مقابل اندازه $\frac{\sin \beta + 1}{\cos \alpha + 1}$ کدام است؟

$\frac{27}{5(\sqrt{5}+1)}$ ۱۲	$\frac{17}{\sqrt{3}+1}$ ۱۱
$\frac{51}{7(\sqrt{3}+1)}$ ۱۴	$\frac{54}{13(\sqrt{5}+3)}$ ۱۳

۴۴۱ در شکل زیر نقطه M وسط AB است، حاصل $\tan \alpha \cot \beta$ کدام است؟

۲ ۱۲	$\frac{1}{2}$ ۱۱
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۱۴	$\sqrt{2}$ ۱۳

۴۴۲ در شکل زیر مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}}{6}$ ۱۲	$\frac{2}{5}$ ۱۱
$\frac{3}{5}$ ۱۴	$\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۱۳

۴۴۳ در شکل زیر، مستطیلی با طول ۴ و عرض ۳ رسم شده است. اگر نقطه M وسط AB باشد، $\cos^2 \alpha$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ ۱۲	$\frac{3}{4}$ ۱۱
$\frac{3}{13}$ ۱۴	$\frac{4}{13}$ ۱۳

۴۴۴ در شکل مقابل اندازه $\cot(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ کدام است؟

$\sqrt{3}$ ۱۲	$\frac{4}{3}$ ۱۱
$\frac{3}{4}$ ۱۴	۲ ۱۳

۴۴۵ در مثلث قائم‌الزاویه ABC مطابق شکل حاصل $\cot(\frac{\pi}{4} - \alpha) \cot(\frac{\pi}{4} + \beta)$ کدام است؟

۲ ۱۲	۱ ۱۱
$\frac{1}{6}$ ۱۴	$\frac{1}{2}$ ۱۳

۴۴۶ در شکل زیر، اندازه ضلع هر مربع یک واحد است. مقدار $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$ کدام است؟

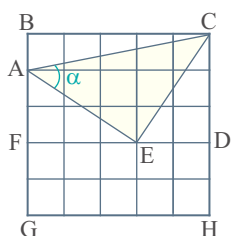
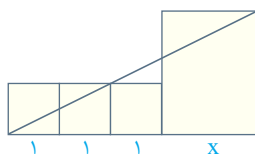
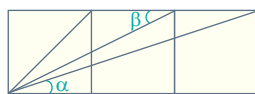
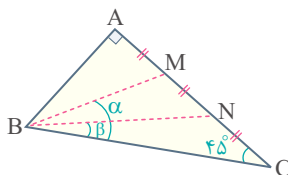
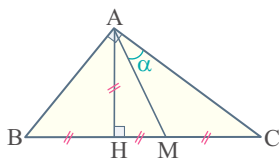
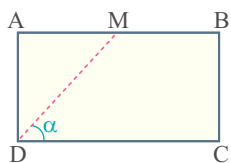
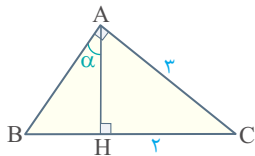
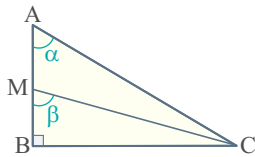
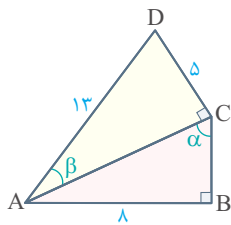
$2\sqrt{10}$ ۱۲	$2\sqrt{2}$ ۱۱
$\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۱۴	$\frac{\sqrt{10}}{10}$ ۱۳

۴۴۷ در شکل مقابل ۳ مربع به ضلع واحد و یک مربع به ضلع x داریم. مساحت مربع بزرگ‌تر کدام است؟

۴ ۱۲	۲ ۱۱
۱۲ ۱۴	۹ ۱۳

۴۴۸ در شکل مقابل مقدار α کدام است؟ (مربع‌ها به ضلع واحد هستند.)

20° ۱۱
30° ۱۲
45° ۱۳
60° ۱۴





۷۸۹ در پرتاب یک تاس عدد a رو شده است، با کدام احتمال $\sqrt{\sin 2a}$ تعریف شده است؟

- ۱ $\frac{1}{6}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{2}{3}$

۷۹۰ کدام مورد درست است؟

الف) برای هر عدد حقیقی x همواره $\cos(\cos x) > 0$ ب) برای هر عدد حقیقی x همواره $\sin(\sin x) > 0$

۱ فقط الف ۲ فقط ب ۳ هم الف و هم ب ۴ نه الف و نه ب

۷۹۱ اگر $\cot \alpha = -\frac{7}{24}$ و $\cos \alpha > 0$ باشد، مقدار $\cos \alpha - \sin \alpha$ کدام است؟

- ۱ $0/68$ ۲ $-0/68$ ۳ $1/24$ ۴ $-1/24$

۷۹۲ اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ باشد، $\sin \alpha$ کدام است؟

- ۱ $\frac{8}{17}$ ۲ $-\frac{8}{17}$ ۳ $\frac{8}{15}$ ۴ $-\frac{8}{15}$



part 7

مقایسه نسبت های مشتاتی روی دایره

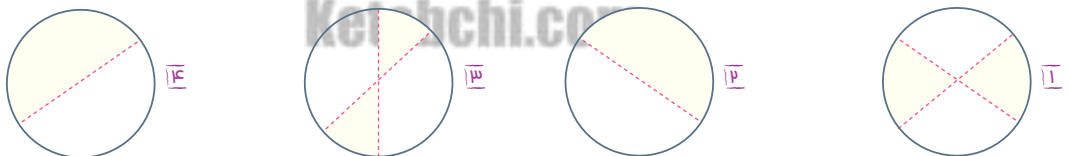
۷۹۳ چه تعداد از موارد داده شده درست است؟

الف) $\cos 2^\circ > \sin 17^\circ$ ب) $|\cos 147^\circ| > |\sin 147^\circ|$

۵ $\tan 5^\circ < \sin 41^\circ$ د) $[\cos 3] + [\sin 200] = -1$

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۷۹۴ در کدام گزینه، در ناحیه رنگی $\sin x > \cos x$ است؟

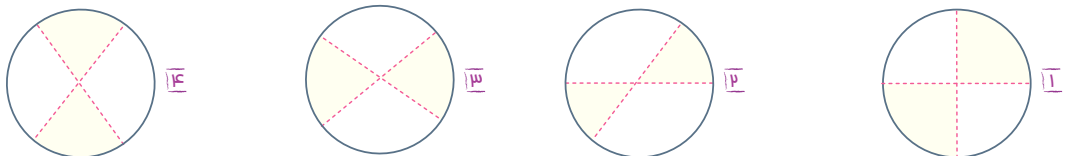


۷۹۵ اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد، انحراف معیار $\log \sin x$ و $\log \cos x$ کدام است؟

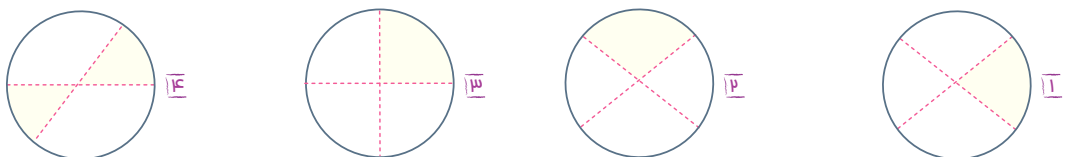
۱ $\log \sqrt{\cot x}$ ۲ $\log \sqrt{\tan x}$

۳ $\log \tan x$ ۴ $\log \cot x$

۷۹۶ در کدام گزینه، در ناحیه رنگی $|\sin x| > |\cos x|$ است؟



۷۹۷ در کدام گزینه در ناحیه رنگی $|\sin x| < \cos x$ است؟

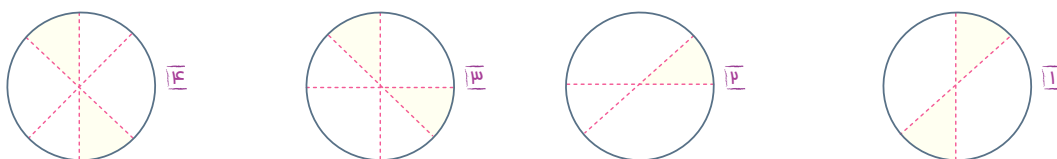


۷۹۸ چه تعداد از روابط زیر صحیح است؟ (زواياها بر حسب رادیان هستند.)

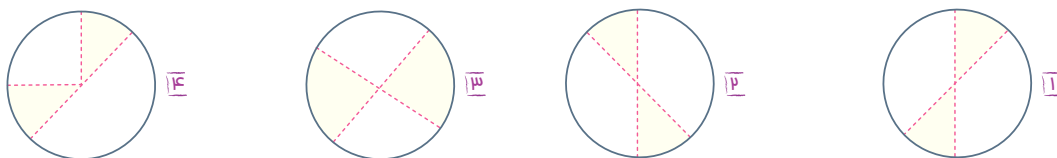
الف) $\tan 4^\circ > \cot 4^\circ$ ب) $\cos 3^\circ > \sin 3^\circ$ ج) $|\sin 5| > |\cos 5|$ د) $|\tan 2| > |\cot 2|$

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۱ ۲ ۳ ۴

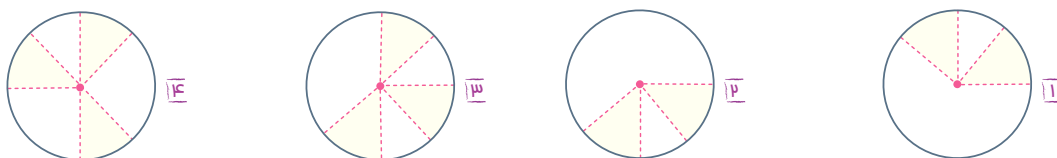
۷۹۹ در کدام گزینه هر دو نامساوی $\sin x + \cos x > 0$ و $\tan x < 0$ در ناحیه رنگ شده برقرار است؟



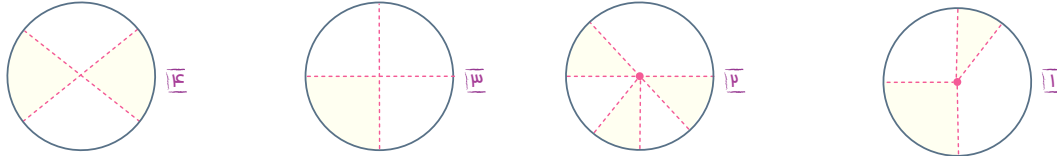
۸۰۰ در کدام ناحیه رنگ شده هر دو نامساوی $\tan x - \cot x > 0$ و $\tan x + \cot x > 0$ برقرار است؟



۸۰۱ در کدام گزینه، در ناحیه رنگی $\tan x > \cot x$ و $\sin x < \cos x$ است؟



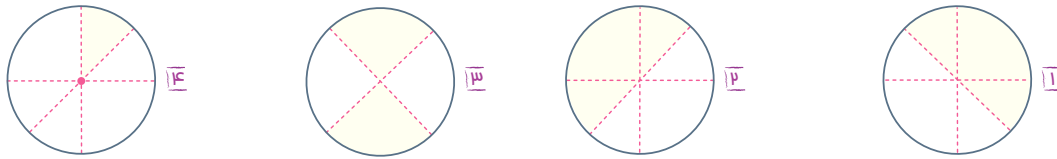
۸۰۲ در کدام گزینه در ناحیه رنگی $\tan x + \cot x > 0$ و $\sin x + \cos x < 0$ است؟



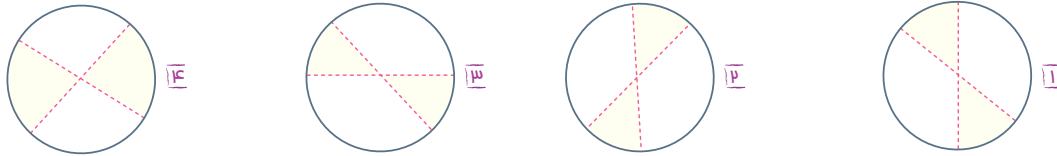
۸۰۳ در کدام گزینه در ناحیه رنگی $\tan x(\sin x - \cos x) > 0$ است؟



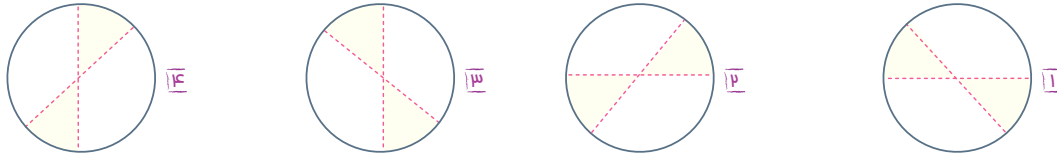
۸۰۴ اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x}$ باشد، آنگاه x در کدام ناحیه مشخص شده از دایره مثلثاتی قرار دارد؟



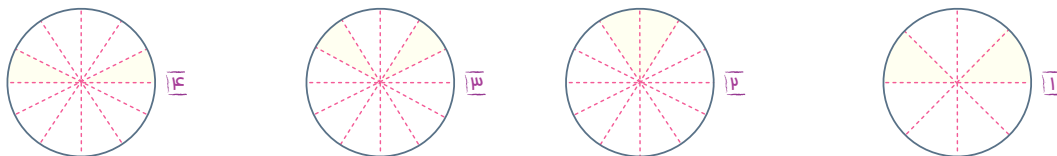
۸۰۵ در کدام گزینه، در ناحیه رنگی $|\sin x| > |\cos x|$ و $\sin 2x < 0$ است؟



۸۰۶ در کدام ناحیه رنگ شده هر دو نامساوی $\tan 2x < 0$ و $\cos 2x > 0$ برقرار است؟



۸۰۷ در کدام قسمت رنگ شده از دایره مثلثاتی $\sin 3x < 0$ برقرار است؟





۸۰۸ مقدار کدام گزینه از بقیه کوچکتر است؟ (زاویه‌ها بر حسب رادیان است)

$\cot 4$ ۱۴

$\cot 3$ ۱۳

$\cot 2$ ۱۲

$\cot 1$ ۱۱



شیب خط

۸۰۹ معادله خط مقابل کدام است؟

$y = -\sqrt{3}x + 1$ ۱

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ ۳

۸۱۰ در شکل مقابل حاصل $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ کدام است؟

$\log_{32} 4$ ۱

$\log_{32} 8$ ۳

$\log_{16} 2$ ۲

$\log_{16} 8$ ۴

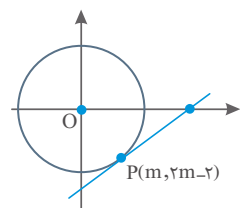
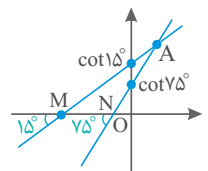
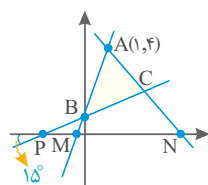
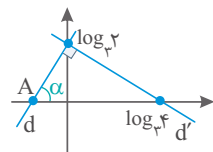
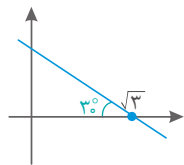
۸۱۱ خط گذرنده از نقاط $A(\sin 1^\circ, \cos 1^\circ)$ و $B(\cos 1^\circ, \sin 1^\circ)$ چه زاویه‌ای با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد؟

15° ۱۴

135° ۱۳

120° ۱۲

6° ۱



$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ۱۴

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۱۳

$\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ۱۲

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۱

۸۱۳ در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، مساحت مثلث کدام است؟ ($\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$)

$6 + \sqrt{3}$ ۲

$2\sqrt{3} + 3$ ۴

$3 + \sqrt{3}$ ۱

$3 + 4\sqrt{3}$ ۳

۸۱۴ نقطه تلاقی خط‌های شکل مقابل کدام است؟

$(1, \sqrt{3})$ ۲

$(2, 2\sqrt{3})$ ۴

$(2, 5)$ ۱

$(1, 4)$ ۳

۸۱۵ معادله خطی که در نقطه $P(m, 2m-2)$ بر دایره مثلثاتی مقابل مماس است، کدام است؟

$4y - 3x = -5$ ۱

$4x = 3y - 5$ ۲

$4y = 3y - 5$ ۳

$4x = 3y + 5$ ۴



زاویه‌های $k\pi \pm \alpha$ و $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

۸۱۶ اگر $\cos(x + \frac{\pi}{8}) = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sin^2(\frac{3\pi}{8} - x)$ کدام است؟

$\frac{4}{9}$ ۱۴

$\frac{3}{4}$ ۱۳

$\frac{4}{9}$ ۱۲

$\frac{1}{9}$ ۱



۱۰۹۵ بزرگ‌ترین جواب معادله $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos(\pi - x)$ در بازه $[0, 2\pi]$ به کدام صورت است؟

- ۱ $\frac{7\pi}{6}$ ۲ $\frac{15\pi}{18}$ ۳ $\frac{25\pi}{18}$ ۴ $\frac{31\pi}{18}$

۱۰۹۶ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $1 = \sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8})$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

- ۱ $\frac{3\pi}{4}$ ۲ $\frac{5\pi}{4}$ ۳ $\frac{3\pi}{2}$ ۴ $\frac{7\pi}{4}$

۱۰۹۷ معادله $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند ریشه دارد؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

۱۰۹۸ معادله $1 = \log_{\sin x} \cos x + \frac{1}{4} \log_{\sin x} 3$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند ریشه دارد؟

- ۱ ۱ ۲ ۳ ۴ جواب ندارد.

۱۰۹۹ منحنی‌های $y = \cos 2x$ و $y = |\cos x|$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند بار یکدیگر را قطع می‌کنند یا بر هم مماس می‌شوند؟

- ۱ ۱ ۲ ۳ ۴



part 16

مسائل OPT

۱۱۰۰ تعداد جواب‌های معادله $7 \cos^3 x - 3 \cos^2 x = 10$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ ۵ ۳ ۴ صفر

۱۱۰۱ تعداد جواب‌های معادله $-2 = 3 \cos^2 x + 2 \cos^3 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ ۴ ۳ ۴ صفر

۱۱۰۲ جواب‌های عمومی معادله $3 = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ به کدام صورت است؟

- ۱ $\frac{k\pi}{3}$ ۲ $\frac{k\pi}{6}$ ۳ $\frac{2k\pi}{3}$ ۴ $2k\pi$

۱۱۰۳ معادله $5 = 3 \sin^2 x - 2 \sin^3 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

۱۱۰۴ جواب کلی معادله مثلثاتی $8 = 5 \cos^3 x + 3 \cos x$ به کدام صورت است؟

- ۱ $\frac{2k\pi}{3}$ ۲ $k\pi$ ۳ $2k\pi$ ۴ $\frac{2k\pi}{2}$

۱۱۰۵ تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $-2 = 5 \sin^2(x) + 2 \cos(3x)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۵ ۴ ۷



part 17

مسائل 2α

۱۱۰۶ معادله $0 = \cos 2x - \cos x + 1$ چند جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

۱۱۰۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 x + 2 \cos x = 0$ ، کدام است؟

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$ $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۱۰۸ اگر $\frac{2\pi}{3}$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $\sin x \cos x + a = 0$ باشد، انحراف معیار تمام جواب‌های معادله در بازهٔ $[2\pi, 3\pi]$ کدام است؟

$\frac{\pi}{12}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6}$ $\frac{11\pi}{6}$

۱۱۰۹ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\frac{5\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{3} + x) \sin(\pi + x) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{15\pi}{4}$ 2π π

۱۱۱۰ معادلهٔ $\log_p \sin x + \log_p \cos x = -2$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

1 2 3 4

۱۱۱۱ اگر $x = \alpha$ یکی از ریشه‌های معادله $\cos x = 1 - \sin \frac{x}{2}$ باشد، $\tan 2\alpha$ کدام است؟ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$

$\sqrt{3}$ $-\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۱۱۲ چارک اول جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan x = \sin 2x$ در بازه $[0, 4\pi]$ کدام است؟

π $\frac{7\pi}{4}$ 2π $\frac{7\pi}{8}$

۱۱۱۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ $2(\sin x + \cos x) = 1 + 2 \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

2 3 4 5

۱۱۱۴ انحراف معیار جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\frac{12\pi}{11}) + \sin(\frac{\pi}{3} - x) \sin x = 0$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

$\frac{\pi}{11}$ $\frac{\pi}{22}$ $\frac{9\pi}{44}$ $\frac{9\pi}{22}$

۱۱۱۵ یک تاس را پرتاب کرده و عدد رو شده را به جای a در معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x - a \sin x - \cos x + \frac{a}{4} = 0$ قرار می‌دهیم احتمال آن که انتهای

کمان‌های جواب‌های معادله فقط روی دو نقطه از دایرهٔ مثلثاتی قرار بگیرند چقدر است؟

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$

۱۱۱۶ معادلهٔ $\tan x + \cot x = 4$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

2 4 6 8

۱۱۱۷ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \tan x \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

$k\pi - \frac{\pi}{4}$ $k\pi + \frac{\pi}{4}$ $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۱۱۸ معادلهٔ $|\sin 2x| = \cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ ، چند جواب دارد؟

2 4 6 8

۱۱۱۹ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$\frac{5\pi}{2}$ 3π $\frac{7\pi}{2}$ 4π



پاسخنامه فصل اول

تابع



۱ ۲ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته

مجموعه A دامنه تابع و مجموعه B هم دامنه تابع نامیده می شود.
در ضمن وقتی یک تابع از A به B می نویسیم باید تمام عضوهای مجموعه A در مؤلفه های اول تابع f استفاده شوند ($D_f = A$) و بر هر تابع نیز زیرمجموعه ای از هم دامنه است بنابراین تکرار اعضای برد تابع همواره کوچکتر یا مساوی تکرار اعضای هم دامنه است. ($R_f \subseteq B$)

پس گزینه های ۱ و ۳ و ۴ نادرست می باشند و فقط گزینه ۲ صحیح است.

۲ ۲ در گزینه ۲ برد تابع (یعنی سایه نمودار روی محور y ها) برابر $(0, +\infty)$

است، در صورتی که هم دامنه تابع $\mathbb{R}^+$ است که شامل عدد صفر نمی باشد، در حالی که می دانیم برد تابع باید زیر مجموعه ای از هم دامنه تابع باشد. در سایر گزینه ها برد تابع، زیر مجموعه ای از مجموعه هم دامنه داده شده می باشد.

۳ ۱ با توجه به این که دو زوج مرتب $(3, m+2)$ و $(3, m^2)$ مؤلفه اول

یکسان دارند، باید مؤلفه های دوم آن ها نیز با هم برابر باشد، یعنی:

$$m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2, -1$$

$$(m-2)(m+1) = 0$$

۱ به ازای $m = 2$ دو زوج مرتب $(2, 4)$ و $(2, 1)$ به وجود می آید که تابع بودن f را رد می کند، پس $m = 2$ غیر قابل قبول است.

۲ به ازای $m = -1$ هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه های اول یکسان نیستند،پس تنها به ازای $m = -1$ رابطه داده شده تابع است، بنابراین:

$$f(3) = m^2 = (-1)^2 = 1$$

نکته

اگر یک رابطه به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب داده شود، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه اول یکسان نباشد. (یعنی اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه اول یکسان باشند، باید مؤلفه ی دوم آن ها نیز یکسان باشند.)

۳ ۴ برای آن که رابطه داده شده تابع نباشد، باید ورودی های یکسان،

خروجی های متفاوتی داشته باشند، پس اگر m یکی از مقادیر ۲ یا ۳ باشد، رابطه داده شده تابع نیست، پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر $2 + 3 = 5$ می باشد. توجه داشته باشید که اگر $m = 1$ باشد، زوج مرتب تکراری $(1, 3)$ به وجود می آید که در این حالت رابطه داده شده تابع می باشد.

۳ ۵ چون در تابع هیچ دو زوج مرتبی نباید مؤلفه اول یکسان داشته

باشند، پس از بین زوج مرتب های $(1, 2)$ ، $(1, 4)$ باید یکی را حذف کنیم و از بین زوج مرتب های $(2, 4)$ ، $(2, 2)$ ، $(2, 3)$ باید دو تا را حذف کنیم. بنابراین با حذف حداقل ۳ زوج مرتب رابطه فوق یک تابع خواهد شد.

۴ ۳ از ضابطه $f(a) = a^2 + 4a$ و از ضابطه پایین $f(a) = 3a + 2$ است،حال برای این که $f(x)$ تابع باشد، لازم است که این دو مقدار یکسان باشند:

$$a^2 + 4a = 3a + 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ یا } a = 1$$

$$(a+2)(a-1)$$

مثلاً به ازای $a = -2$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & ; x \geq -2 \\ 2x & ; x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 1^2 + 4(1) = 5$$

البته به ازای $a = 1$ نیز باز هم به همین نتیجه می رسیم.

نکته

تابع چند ضابطه ای:

یک رابطه ی چند ضابطه ای مانند $f(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \geq a \\ h(x) & ; x \leq a \end{cases}$ در صورتی تابع است که:
۱) خود ضابطه ها یعنی $g(x)$ ، $h(x)$ تابع باشند. ۲) $g(a) = f(a)$ باشد.

۷ ۱ برای تابع بودن باید مقدار تابع در $x = 1$ ، $x = 2$ با هم برابر باشند،

$$x = 1 \Rightarrow a + b = 0$$

$$\Rightarrow a = 8, b = -8 \Rightarrow ab = -64$$

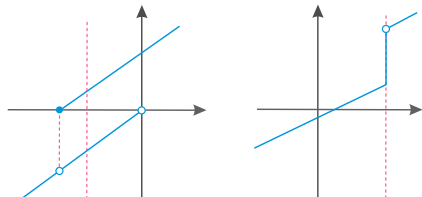
$$x = 2 \Rightarrow 2a + b = 8$$

یعنی:

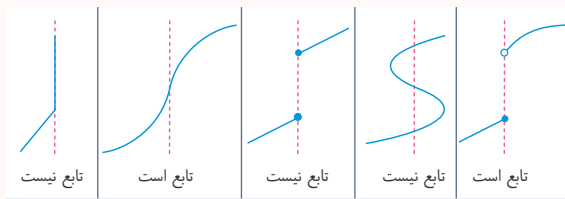
۸ ۳ نمودار الف و د تابع هستند. اما نمودارهای ب و ع تابع

نیستند، چون بعضی خط های موازی محور y ها نمودار را در بیش از یک نقطه

قطع می کند.



در نمودار تابع هر خط عمودی دلفواه، باید آن را در اکثر در یک نقطه قطع کند.

۹ ۴ همان طور که دیده می شود از a دو پیکان خارج شده که برای تابعبودن باید انتهای دو پیکان یکسان باشد. پس باید $a + 1 = 3$ باشد و این یعنی $a = 2$ با قرار دادن $a = 2$ می فهمیم که $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ پس $f(3) = 5$ خواهدبود. [اگر $(a, b) \in f$ باشد، آنگاه می نویسیم $f(a) = b$]

نکته

تابع پیکانی:

۱) اگر یک رابطه به صورت نمودار پیکانی داده شود، در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان [نه بیش تر نه کم تر] خارج شود.

۲) اگر گفته شود یک نمودار پیکانی تابع است ولی از یک عضو مجموعه اول دو پیکان خارج شود و به اعداد Δ و Δ وصل شود، الزماً باید $\Delta = \Delta$ باشد.

توجه ۱: اگر از یک عضو پیکانی خارج نشود آن رابطه تابع نیست.

توجه ۲: اگر به یک یا چند عضو از مجموعه دوم پیکانی وارد نشود یا چند پیکان به یک عضو وارد شود، فکلی در تابع بودن ایثار نمی شود.

۱۰ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ دو زوج مرتب $(4, 2)$, $(4, 3)$ را داریم و تابع نمی‌باشد. $(\sqrt{16}=4)$

۲ هر عدد مثبت دارای دو ریشه دوم قرینه است، به عنوان مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶ اعداد ۴، -۴ می‌باشند، پس تابع نیست. $(x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4)$

۳ به ازای هر فرد در یک زمان معین یک عدد به عنوان وزن مشخص می‌شود و تابع است.

۴ از عدد ۲ دو پیکان خارج شده، پس تابع نیست.

۱۱ چون از -۳ دو پیکان خارج شده باید داشته باشیم:

اگر $a=3$ باشد، خواهیم داشت: $3a = a + 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$f = \{(2, b+2), (2, b^2), (-3, 9)\} \xrightarrow{\text{تابع}} b^2 = b+2$

$$\Rightarrow \underbrace{b^2 - b - 2 = 0}_{(b-2)(b+1)} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow ab = -3, 6$$

بنابراین حداکثر مقدار ممکن برای ab عدد ۶ است.

۱۲ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم: $1 \quad y = \sqrt{x^2} \Rightarrow y = |x|$

به ازای هر x ، برای y فقط و فقط یک مقدار داریم. پس تابع است. ✓

۲ $\sqrt{y^2} = x \Rightarrow x = |y|$

به ازای x دلخواه ۱، برای y دو مقدار ± 1 به دست می‌آید و تابع نیست. ✗

۳ به ازای $x = -1$ داریم: $-1 + |y| = 0 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

پس برای y دو مقدار به دست می‌آید و تابع نیست. ✗

۴ به ازای $x = -1$ داریم:

$$[y] + [-1] = 0 \Rightarrow [y] - 1 = 0 \Rightarrow [y] = 1 \Rightarrow 1 \leq y < 2$$

به ازای $x = -1$ برای y بیشمار مقدار به دست می‌آید، پس رابطه داده شده تابع نیست. ✗

۱۳ قبل از حل تست به نکته زیر توجه کنید:

نکته

برای تشخیص تابع بودن رابطه‌هایی که به صورت فرمولی و شایبه بیان می‌شوند می‌توان از مثال نقض استفاده کرد، یعنی اگر به ازای یک x بیش از یک مقدار برای y به دست آمد، آن رابطه تابع نیست.

در واقع رابطه‌ای تابع است که بتوان y را بر حسب x و به صورت $y = f(x)$ نشان داد و منظور از $f(x)$ یک رابطه بر حسب ورودی است.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ اگر $2x + 3 = f(4x + 3)$ باشد، آنگاه: $4x + 3 = T \Rightarrow x = \frac{T-3}{4}$

$$f(T) = 2\left(\frac{T-3}{4}\right) + 3 = \frac{T-3}{2} + 3 = \frac{T+3}{2}$$

بنابراین $f(x) = \frac{x+3}{2}$ یک تابع خطی است. ✓

نکته

اگر $a \neq 0$ و $f(ax+b) = a'x+b'$ باشد، آنگاه $f(x)$ یک تابع است و به طور کلی اگر $g(x)$ یک تابع باشد و $f(ax+b) = g(x)$ آنگاه $f(x)$ هم تابع است.

۲ اگر $x^3 + 2 = f(x^3 + 1) = x^3 + 2 = x^3 + 1 + 1$ باشد، پس $f(x) = x + 1$ است که می‌دانیم

یک تابع است. ✓

آزید خروارید

تابع یک به یک

اگر $g(x)$ تابعی یک به یک باشد، آنگاه از $f(g(x)) = h(x)$ نتیجه می‌گیریم که $y = f(x)$ تابع است. بد نیست چند مثال معروف توابع یک به یک را هم بلد باشیم:

۱ $g(x) = ax + b$ با شرط $a \neq 0$

۲ $g(x) = a\sqrt[n]{a'x+b'} + b$ (با شرط $aa' \neq 0$)

۳ $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $ad-bc \neq 0$)

۴ $a(x) = ax^{2n+1} + b$

۵ $g(x) = \log_a x$

۶ $g(x) = a^x$

۱۳ با قرار دادن $x = 1$ و $x = 1/2$ می‌فهمیم که $f(1) = 1$ ، $f(1/2) = 1/2$ پس تابع نیست. ✗

۱۴ $f(|x|) = x^2 + 3 = |x|^2 + 3 \Rightarrow f(x) = x^2 + 3$ ✓

۱۴ ضابطه‌هایی تابع هستند که به ازای هر مقدار x ، تنها یک مقدار برای y بدهند. در تشخیص این که یک ضابطه تابع باشد یا نه، گاهی بهتر است از رسم کمک بگیریم یا این که به نحو خوبی عددگذاری کنیم.

الف $\sqrt{y-2} + \sqrt{2-y} = x$: در این جا به علت وجود عبارت $\sqrt{y-2}$ باید

$y \geq 2$ باشد. اما چون $\sqrt{2-y}$ هم داریم، پس باید $y \leq 2$ از این دو شرط به دست آمده می‌فهمیم که باید $y = 2$ باشد. پس:

$$y=2 \Rightarrow x = \sqrt{0} + \sqrt{0} \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0, 2)$$

این ضابطه فقط همین یک نقطه $(0, 2)$ است. لذا تابع است. ✓

ب با قرار دادن $x = 4$ در این رابطه به دو مقدار می‌رسیم: $y = 2$ از ضابطه بالا و $y = 1$ از ضابطه پایین پس هم $(4, 2)$ و هم $(4, 1)$ در این ضابطه صدق می‌کند.

لذا این ضابطه یک تابع نیست. ✗

۵ ضابطه های بالا و پایین تابع هستند. ✓

اما باید نقطه مرزی $x = 2$ را بررسی کنیم:

تابع نیست $\Rightarrow 6 \neq 3 \Rightarrow f(2) = 6 \Rightarrow f(2) = 3$ ضابطه بالا

۱۵ به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف به ازای x دلخواه ۴ داریم:

$$|y-2| + 3 - 4 = 0 \Rightarrow |y-2| = 1 \Rightarrow y-2 = \pm 1 \Rightarrow y = 3, 1$$

چون به ازای یک مقدار x برای y دو مقدار به دست آمد، این رابطه تابع نیست.

تذکره

معمولاً رابطه‌هایی که در آن y دارای توان زوج یا قدر مطلق یا جزء صمیع باشد، مشکوک به تابع نبودن هستند اما باز هم نیاز به بررسی دارد مثلاً رابطه $x^2 + y^2 = 0$ تابع است چون این رابطه تنها شامل یک نقطه $(0, 0)$ است.

ب

$$x^2 = t \Rightarrow x = \pm \sqrt{t} \Rightarrow f(t) = \pm \sqrt{t} \Rightarrow f(x) = \pm \sqrt{x}$$

به ازای یک x دلخواه، مثلاً $x = 4$ دو مقدار ± 2 برای y به دست می‌آید و این

یعنی، این رابطه تابع نیست. ✗

۵ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = -2 \Rightarrow x^2 + y^2 = -2xy$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Rightarrow (x+y)^2 = 0 \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow y=-x$$

به ازای هر x فقط و فقط یک مقدار برای y داریم و این یعنی، y تابعی بر حسب متغیر x است.



د با مربع کامل کردن داریم: $(y-1)^2 + x^2 = 0 \Rightarrow y=1, x=0$

این رابطه یک نقطه است، پس تابع است. ✓

بنابراین فقط موارد ۵ و ۵ تابع می‌باشند.

۱۶ بررسی موارد:

الف) خیلی بیشتر از یک نقطه ایراد دارد. مثلاً $(1, 1), (1, 1/5), (1, 1/2), (1, 1/6)$

و ... همه این نقاط در $[x]=[y]$ صدق می‌کند. پس با حذف یک نقطه، این رابطه به تابع تبدیل نمی‌شود. ✗

ب) مشکل بیشتر از یک نقطه است. نقاط $(1, 1), (1, -1), (2, 2), (2, -2)$ همه روی نمودار $|x|=|y|$ قرار دارند. تا همین جا به حذف حداقل دو نقطه نیاز داریم. ✗

۵ کفایت یکی از آن دو نقطه توپر را حذف کنیم. [فرقی ندارد کدام یکی]. بعد از آن به نمودار یک تابع می‌رسیم. ✓

د در این نمودار با حذف نقطه $A(a, -1)$ یا $B(a, 2)$ نمودار تبدیل به تابع خواهد شد. ✓

۱۷ ۲ باتوجه به تعریف تابع، از هر عضو مجموعه A ، فقط و فقط یک پیکان به سمت عضوی از مجموعه B خارج می‌شود، به ازای هر عضو A دقیقاً n انتخاب برای خارج شدن هر پیکان وجود دارد و با توجه به اینکه مجموعه A دارای m عضو است، بنابراین طبق اصل ضرب، کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{n \times n \times n \times \dots \times n}_{m \text{ تا}} = n^m$$

نکته اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشند، تعداد n^m تابع از A به B می‌توان تعریف کرد.

۱۸

$$f(2+\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$$f(2-\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

بنابراین حاصل عبارت برابر ۸ است.

۱۹

۱ باید ببینیم که هر ورودی تابع $f(x)$ ، مقدار خروجی آن به ازای کدام ضابطه به دست می‌آید، ابتدا $f(x)$ را کمی مرتب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3} < -1 &\Rightarrow f(-\frac{5}{3}) = -3(-\frac{5}{3}) = 5 \\ -1 < -\sqrt{2} + 1 < 1 &\Rightarrow f(-\sqrt{2} + 1) = (-\sqrt{2} + 1 - 1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \\ \Rightarrow f(-\frac{5}{3}) + f(-\sqrt{2} + 1) &= 5 + 1 = 6 \end{aligned}$$

۲۰

۴ لازم نیست $f(x)$ را حساب کنیم. فقط کفایت مقدار مناسبی به جای x دغدگذاری کنید تا در $f(3x+2)$ به $f(8)$ برسیم. این مقدار مناسب $x=2$ است:

$$3x+2=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(8) = \sqrt{2(2^2)} + 1 = 4 + 1 = 5 = 2 + 3$$

نکته اگر تابعی به صورت $f(x) = \dots$ بود برای پیدا کردن $f(u)$ در عبارت به جای همه x ها u را قرار می‌دهیم:

$$1 \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3} \Rightarrow f(2) = \sqrt[3]{2^2 + 3} = \sqrt[3]{7}$$

$$2 \quad f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x^2 - 1) = (x^2 - 1) + \frac{1}{(x^2 - 1)}$$

$$3 \quad f(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(\Delta) = \Delta^2 + 2\Delta + 1$$

اما به عنوان مثال اگر $f(2x+3)$ را داشته باشیم و $f(9)$ را بخواهیم باید مقداری از x را پیدا کنیم که به ازای آن $2x+3=9$ شود، یعنی: $2x+3=9 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$ می‌گذاریم. حال در طرف دوم هر جا x دیدیم به جای آن ۳ می‌گذاریم.

$$f(\frac{x}{2} + 1) = \frac{2x-1}{x} \Rightarrow f(5) = ?$$

$$\frac{x}{2} + 1 = 5 \Rightarrow \frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow f(5) = \frac{2 \times 8 - 1}{8} = \frac{15}{8}$$

مثال

۲۱ ۴ برای آن که از $f(x + \frac{1}{x})$ به $f(2)$ برسیم، فقط کفایت $x=1$ باشد:

$$x=1 \Rightarrow f(1+1) = \frac{1}{(1)^2 + 1} \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}$$

۲۲ ۳ با جایگذاری $x=1, x=4$ داریم:

$$\begin{cases} x=4 \Rightarrow f(\sqrt{4}) = 4 + 2\sqrt{4} = 8 \Rightarrow f(2) = 8 \\ x=1 \Rightarrow f(\sqrt{1}) = 1 + 2\sqrt{1} = 3 \Rightarrow f(1) = 3 \end{cases}$$

$$f(2) - f(1) = 8 - 3 = 5$$

بنابراین داریم:

۲۳ ۱ برای محاسبه $f(\sqrt{2})$ باید $\sqrt{x}+1=\sqrt{2}$ باشد، پس داریم:

$$\sqrt{x}+1=\sqrt{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+2\sqrt{x}+1=2 \Rightarrow x+2\sqrt{x}=1$$

در نتیجه:

$$f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x} + 2 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 1 + 2 = 3$$

۲۴ ۲ ابتدا باید مقدار $f(-144)$ را به دست آوریم:

$$f(-144) = \sqrt{-144+2|-144|} = \sqrt{-144+2(144)} = \sqrt{144} = 12$$

حال باید $f(12)$ را محاسبه کنیم.

$$f(12) = \sqrt{12+2|12|} = \sqrt{12+24} = \sqrt{36} = 6$$

۲۵ ۱ کفایت $f(2), g(-1)$ را محاسبه کنیم و با هم مساوی قرار دهیم:

$$\begin{cases} f(2) = -4 + 5 - a = 1 - a \\ g(-1) = 1 - 2 - 4 = -5 \end{cases} \xrightarrow{f(2)=g(-1)} 1 - a = -5 \Rightarrow a = 6$$

۲۶ ۳ در تابع f داریم $f(-2)=3, f(3)=4$ حال نقاط $(3,0), (-4,2)$

روی نمودار تابع g قرار دارند، پس:

$$g(-4)=2, g(3)=0 \Rightarrow \frac{f(3)+g(-4)}{f(-2)+g(3)} = \frac{4+2}{3+0} = \frac{6}{3} = 2$$



۳۶۴ ۴ AB قسمتی از محیط دایره‌ای به شعاع ۶۰۰ + ۶۴۰۰ کیلومتر است.

برای به دست آوردن این قسمت از محیط از تناسب استفاده می‌کنیم:

36°	$2\pi r$
45°	x

$$\Rightarrow x = \frac{45^\circ \times 2 \times \pi \times r}{36^\circ} = \frac{\pi \times 7000}{4} = 1750\pi$$

در هر ساعت این ماهواره 10π کیلومتر را طی می‌کند، پس برای طی 1750π کیلومتر به ۱۷۵ ساعت زمان نیاز دارد.

۳۶۷ ۳ مساحت قسمتی از دایره را می‌خواهیم، پس از تناسب با یک دایره کامل استفاده می‌کنیم:

36°	πr^2
6°	x

$$\Rightarrow x = \frac{6^\circ \times \pi r^2}{36^\circ} = \frac{\pi}{6} \times \frac{36}{\pi} = 6$$

۳۶۸ ۳ می‌دانیم عقربه ساعت‌شمار در ۱۲ ساعت 2π رادیان دوران می‌کند، پس داریم:

2π	12
$\frac{3\pi}{5}$	x

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{3\pi}{5} \times 12}{\frac{3\pi}{5}} = \frac{18}{5} \text{ h} \xrightarrow{\times 60} 216 \text{ min}$$

۳۶۹ ۲ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته در دایره به شعاع r طول کمان θ به زاویه مرکزی θ رادیان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L = r \cdot \theta$$

$$L = r \cdot \theta \Rightarrow 15 = \frac{5}{4} \times r \Rightarrow r = 12 \Rightarrow S = \pi r^2 = 144\pi$$

۳۷۰ ۴ بررسی موارد:

الف زاویه‌های زیر ساق تقریباً برابر 57° هستند پس زاویه رأس مثلث مذکور برابر $66^\circ = 180^\circ - 2(57^\circ)$ است. می‌دانیم در هر مثلث ضلع روبه زاویه بزرگتر، بزرگتر از ضلع روبه زاویه کوچکتر است. پس در این مثلث قاعده از ساق‌ها بزرگ‌تر است. *

ب با توجه به رابطه $\theta = \frac{L}{R}$ داریم: $\pi = \frac{L}{1} \Rightarrow L = \pi \approx 3.14$ ✓

ج مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه یا π رادیان است، زوایای داده شده اصلاً تشکیل مثلث نمی‌دهند زیرا:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \neq \pi \times$$

د عدد نسبت محیط دایره به قطر آن است که تقریباً 3.14 می‌باشد، در واقع π رادیان [تقریباً 3.14 رادیان] معادل 180° درجه است. *

۳۷۱ ۲ قبل از حل تست به نکته زیر توجه کنید:

نکته اندازه کمان θ به زاویه α درجه در دایره به شعاع r برابر است با:

$$L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r)$$

$$L = \frac{1^\circ}{360} (2\pi \times 9) = \frac{\pi}{2}$$



پاسخنامه فصل دوم

مثلات



$$15^\circ = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12} \text{ rad} \quad 18^\circ = 18 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10} \text{ rad}$$

نکته به طور کلی اگر D اندازه یک زاویه بر حسب درجه و R اندازه زاویه بر حسب

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

رادیان باشد آنکه همواره داریم:
با توجه به نکته فوق می‌توان گفت برای تبدیل یک زاویه به رادیان باید آن را π در کنیم یعنی در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنیم و برای تبدیل یک زاویه به درجه، آن را بدون π می‌کنیم؛ یعنی در $\frac{180}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. [شبه استوکیومتری در شیمی]

۳۷۲ ۱ هر π رادیان معادل 180° است. بنابراین به جای π رادیان معادل آن

$$\frac{2\pi}{9} \text{ rad} = \left(\frac{2 \times 180}{9}\right)^\circ = 40^\circ$$

$$\frac{180}{5} = 36^\circ \text{ همان } 36^\circ \text{ درجه است. لذا:}$$

$$\begin{cases} x + y = 60^\circ \\ x - y = 36^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 48^\circ, y = 12^\circ$$

۳۷۳ ۳ زاویه‌های مثلث را $\frac{\pi}{3}$ ، B ، A در نظر بگیریم. از آن‌جا که جمع زاویه‌های

هر مثلثی 180° یا π رادیان است داریم:

$$\begin{cases} A + B + \frac{\pi}{3} = \pi \\ A - B = \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \frac{2\pi}{3} \\ A - B = \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{3\pi}{8}, B = \frac{7\pi}{24}$$

بنابراین زاویه‌ها $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{7\pi}{24}$ ، $\frac{3\pi}{8}$ هستند که نسبت آن‌ها $\frac{1}{3}$ ، $\frac{7}{24}$ ، $\frac{3}{8}$ است. با ضرب کردن نسبت‌ها در ۲۴ به اعداد ۹، ۸، ۷ می‌رسیم.

۳۷۴ ۳ در واقع قسمتی از محیط دایره را می‌خواهیم که کمانی به طول

$15 - 10 = 5$ درجه از دایره جدا می‌کند. اگر محیط کل دایره (یعنی 360°) را می‌خواستیم محیط دایره $2\pi r$ بود، حال که محیط قسمتی از آن را می‌خواهیم از تناسب استفاده می‌کنیم:

36°	$2\pi r$
15°	x

$$\Rightarrow x = \frac{15^\circ \times 2\pi r}{36^\circ} = \frac{3/14 \times 6400}{12} \approx 1675$$

نکته می‌دانیم محیط هر دایره برابر $2\pi r$ و مساحت آن برابر πr^2 است. حال اگر

بخواهیم طول کمان α درجه یا مساحت قطاع α درجه یا زمان سپری شده بعد از α° دوران عقربه ساعت‌شمار یا دقیقه‌شمار را پیدا کنیم، می‌توانیم از یک فردول تناسب استفاده کنیم.

36°	$2\pi r$	36°	πr^2	36°	12 h	36°	6 min
α°	x	α°	x	α°	x	α°	x

دقیقه شمار ساعت شمار مساحت قطاع طول کمان.

حال برای تبدیل α به رادیان آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{45}{2\pi} \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{8} \text{ rad}$$

نکته اندازه کمان $\frac{1}{8}$ شعاع دایره است. پس زاویه $\hat{O} = \frac{1}{8} \text{ rad}$ و نظر به این که

مثلث BCO متساوی الساقین است، می‌فهمیم که $\alpha = \frac{\hat{O}}{2} = \frac{1}{16} \text{ rad}$

۴ ۶۵۱ می‌دانیم که مسافت طی شده هر دو چرخ همواره با هم مساوی است، یعنی در این مسئله چرخ بزرگتر هم 18π متر طی کرده است، بنابراین داریم:

$$L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r) \Rightarrow 18\pi = \frac{\alpha}{360} (2\pi \times 1/2) \Rightarrow \alpha = 7/5 \times 360^\circ$$

حال برای تبدیل درجه به رادیان زاویه را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می‌کنیم:

$$\alpha = 7/5 \times 360^\circ \times \frac{\pi}{180} = 15\pi$$

۲ ۶۵۲ نسبت شعاع‌ها $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ است. پس نسبت محیط‌ها هم $\frac{3}{2}$ است. یعنی

وقتی چرخ کوچکتر $\frac{15\pi}{4}$ رادیان می‌چرخد، چرخ بزرگتر $\frac{2}{3}$ این مقدار می‌چرخد.

$$\frac{2}{3} \times \frac{15\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

یعنی:

نکته به طور کلی اگر دو قرقره به شعاع‌های r_A ، r_B که توسط تسمه به هم متصل شده باشند و قرقره A به اندازه θ_A رادیان و قرقره B به اندازه θ_B رادیان دوران کند آنگاه:

$$r_A \theta_A = r_B \theta_B$$

$$4 \times \frac{15\pi}{4} = 6 \times \theta_B \Rightarrow \theta_B = \frac{5\pi}{2}$$

۳ ۶۵۳ زاویه چرخش چرخ کوچک را θ_A و چرخ متوسط را θ_B و چرخ بزرگ را θ_C فرض می‌کنیم در این صورت داریم:

$$r_A \cdot \theta_A = r_B \cdot \theta_B \Rightarrow \begin{cases} 3\theta_A = 4\theta_B \\ \theta_A + \theta_B = 2\pi \end{cases} \Rightarrow \theta_A + \frac{3}{4}\theta_A = 2\pi \Rightarrow \theta_A = 16$$

حال رابطه را برای A و C می‌نویسیم:

$$r_A \theta_A = r_C \theta_C \Rightarrow 3 \times 16 = 6 \times \theta_C \Rightarrow \theta_C = 8$$

بنابراین چرخ بزرگ ۸ دور چرخیده و هر دور معادل با 2π رادیان است پس 16π رادیان چرخیده است.

۳ ۶۵۴ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته در هر دقیقه عقربه ساعت شمار $(\frac{1}{2}^\circ)$ و عقربه دقیقه شمار 6° می‌پزد. یعنی دقیقه شمار ۱۲ برابر ساعت شمار می‌پزد.

پس وقتی ساعت شمار $\frac{\pi}{36}$ چرخیده، حتماً دقیقه شمار $\frac{12\pi}{36} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ چرخیده است. لذا $\frac{60}{6} = 10$ دقیقه زمان گذشته و ساعت $2:10$ است.

۲ ۶۵۵ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته زاویه‌ای که در هر ساعت توسط عقربه ساعت شمار طی می‌شود برابر 3° است.

$$L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r) \Rightarrow r = \frac{\alpha}{360} (2\pi r) \Rightarrow \alpha = \frac{360}{2\pi} \cdot \frac{\pi \times 2/12}{2\pi} \Rightarrow \alpha = 57^\circ$$

$$L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r) \Rightarrow 45 = \frac{\alpha}{360} (2\pi \times 30) \Rightarrow \alpha = \frac{45 \times 360}{60\pi} = \frac{270}{\pi}$$

۴ ۶۴۴ ابتدا طول مسیر طی شده در یک بار پیمایش مسیر از A تا B را پیدا می‌کنیم، چون زاویه بر حسب رادیان است داریم:

$$L = r \cdot \theta = 3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$$

حال سه بار رفت و برگشت کامل یعنی ۶ بار پیمایش مسیر A تا B:

$$L' = 6L = 6 \times \frac{6\pi}{5} = \frac{36\pi}{5}$$

۳ ۶۴۵ ابتدا شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r) \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{15}{360} (2\pi r) \Rightarrow r = 2$$

حال محیط قطاع OAB برابر است با:

$$p = 2r + \widehat{AB} = 4 + \frac{\pi}{6}$$

۴ ۶۴۶ فرض کنیم شعاع دایره r باشد، در این صورت داریم:

$$L = \left(\frac{15}{360}\right) (2\pi r) = 2 \Rightarrow \frac{\pi r}{12} = 2 \Rightarrow r = \frac{24}{\pi}$$

بنابراین مساحت این دایره برابر است با:

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{24}{\pi}\right)^2 = \frac{576}{\pi}$$

۳ ۶۴۷ می‌دانیم $L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r)$ است، بنابراین:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{18}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Rightarrow \alpha_2 = 240^\circ$$

$$\text{۱} L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r) \Rightarrow 1600\pi = \frac{\alpha}{360} (2\pi \times 6400) \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\text{۲} \widehat{A'B'} = \frac{45}{360} (2\pi \times 6400) = \frac{1}{8} (2\pi \times 6400) = 1600\pi$$

۳ ۶۴۹ مثلث OAC متساوی الساقین است و زاویه $\hat{AOB}$ زاویه خارجی این مثلث است، پس:

$$\hat{AOB} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$$

حال طول کمان $\widehat{AB}$ برابر است با:

$$L = \frac{\alpha}{360} (2\pi r) = \frac{40}{360} (2\pi \times 3) = \frac{2\pi}{3}$$

۴ ۶۵۰ ابتدا زاویه $\hat{BOA} = \theta$ را پیدا می‌کنیم:

$$\widehat{AB} = \frac{\theta}{360} (2\pi r) \Rightarrow 1 = \frac{\theta}{360} (2\pi \times 4) \Rightarrow \theta = \frac{45}{\pi}$$

حال θ زاویه خارجی مثلث BCO است، پس داریم:

$$\theta = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\theta = \frac{45}{2\pi}$$

نسبت های قرینه کمان را از هم اکنون بلد باشید:

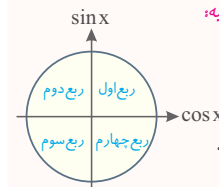
$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

به قول معروف کسینوس منفی خوار (منفی را می خورد) بقیه سوراخدار. [منفی را بیرون می اندازد]

۴ رادیان تقریباً معادل $228^\circ \approx 4 \times 57^\circ$ است که در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین داریم:

$$\sin(-4) = -\sin(4) = -\sin(228^\circ) > 0$$

$$\cos(-4) = \cos(4) = \cos(228^\circ) < 0$$



۱. سینوس بالا و پایین داره (مثل Y در دستگاه مختصات)

• اگر بالا باشیم [ربع اول و دوم] سینوس مثبت است.

• اگر پایین باشیم [ربع سوم و چهارم] سینوس منفی است.

۲. کسینوس راست و چپ داره (مثل X ها در دستگاه مختصات)

• اگر راست باشیم [ربع اول و چهارم] کسینوس مثبت است.

• اگر چپ باشیم [ربع دوم و سوم] کسینوس منفی است.

۳. می دانیم سینوس و چپ بر روی کسینوس نشیند تانژانت پرپر آید و برعکس کتانژانت

یعنی $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ پس برای تعیین علامت تانژانت و کتانژانت کافیست علامت سینوس و کسینوس را در هم ضرب کنیم. مشخص است که تانژانت و کتانژانت همواره هم علامت هستند.

برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

عبارات $\sin 2x$, $\tan x$, $\cot x$ همواره هم علامت هستند.

بررسی موارد:

الف) چون x در ربع سوم است پس $\tan x > 0$ و در نتیجه $\sin 2x > 0$.

ب) چون در ربع سوم $\tan x$, $\cot x$ مثبت هستند پس مجموع آن ها نیز مثبت است.

ج) عبارات داده شده را باز می کنیم:

$$\cot x + \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x = \frac{\cos(1 + \sin x)}{\sin x} = \cot x (1 + \sin x) > 0$$

۷۸۹ ۲ برای آنکه $\sqrt{\sin 2a}$ تعریف شود باید $\sin 2a \geq 0$ باشد، می دانیم

$\sin 2a$ همواره با $\tan \theta$ هم علامت است، پس بررسی می کنیم به ازای a های

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ چند مقدار $\tan a$ مثبت است [دقت کنید a بر حسب رادیان است]

۱. $a = 1 \approx 57^\circ$ ربع اول $\rightarrow \tan a > 0$ ✓ $a = 2 \approx 114^\circ$ ربع دوم $\rightarrow \tan a < 0$ ✗

۲. $a = 3 \approx 171^\circ$ ربع سوم $\rightarrow \tan a > 0$ ✓ $a = 4 \approx 228^\circ$ ربع سوم $\rightarrow \tan a > 0$ ✓

۳. $a = 5 \approx 285^\circ$ ربع چهارم $\rightarrow \tan a < 0$ ✗ $a = 6 \approx 342^\circ$ ربع چهارم $\rightarrow \tan a < 0$ ✗

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

در نتیجه داریم:

۷۹۰ ۱ $\sin x$ و $\cos x$ همواره بین -۱ و ۱ قرار دارند، یعنی -۱ رادیان و ۱ رادیان.

پس کمان های نسبت های مثلثاتی بیرونی همواره زاویه ای بین 57° و 128° است.

یعنی یا در ناحیه چهارم است یا ناحیه اول، بنابراین:

الف) در ناحیه اول و چهارم، کسینوس همواره مثبت است. ✓

ب) در ناحیه اول سینوس مثبت و در ناحیه چهارم سینوس منفی است. ✗

۷۹۱ ۳ برای تعیین مقدار $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ از مثلث کمکی استفاده می کنیم،

اما باید حواسمان باشد چون α در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد، در آخر علامت سینوس و کسینوس را لحاظ کنیم.

$$\cot \alpha = -\frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{24}{25} \\ \cos \alpha = \frac{7}{25} \end{cases}$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{7}{25} - \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{31}{25} = 1/24$$

در نتیجه داریم:

۷۹۲ ۲ از آن جایی که $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ است پس سینوس و کسینوس

مختلف علامت هستند. با توجه به مثبت بودن کسینوس، پس سینوس منفی

است، در نتیجه α در ربع چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد. حال برای تعیین مقدار

سینوس می توان از مثلث کمکی استفاده کرد اما در آخر باید علامت سینوس

را لحاظ کنیم.

$$\cos \alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{8}{17}$$

ربع چهارم

$$\cos 2 = \cos (2 \times 57^\circ) > \sin 17^\circ \Rightarrow \ominus > \oplus \quad \times$$

ب در $\alpha = 135^\circ$ داریم $|\sin \alpha| = |\cos \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ اما هرچه به سمت π در دایره مثلثاتی حرکت کنیم $\cos \alpha$ به -1 نزدیک تر و $\sin \alpha$ به صفر نزدیک تر می شود، در نتیجه اندازه کسینوس (نه مقدار آن) بزرگ تر و اندازه سینوس (حتی مقدار آن) کمتر می شود و در نتیجه:

ع ۵ رادیان تقریباً معادل $285^\circ = 5 \times 57^\circ$ است. هرچه از -45° یا هر زاویه ای با همان جایگاه در دایره مثلثاتی به $-\frac{\pi}{4}$ نزدیک تر می شویم از مقدار $\tan \alpha$ کم می شود و به $-\infty$ میل می کند. پس $\tan 5 < -1$ است و همواره سینوس هر زاویه ای از -1 بزرگ تر است.

$$\tan 5 < \sin 41 \quad \checkmark$$

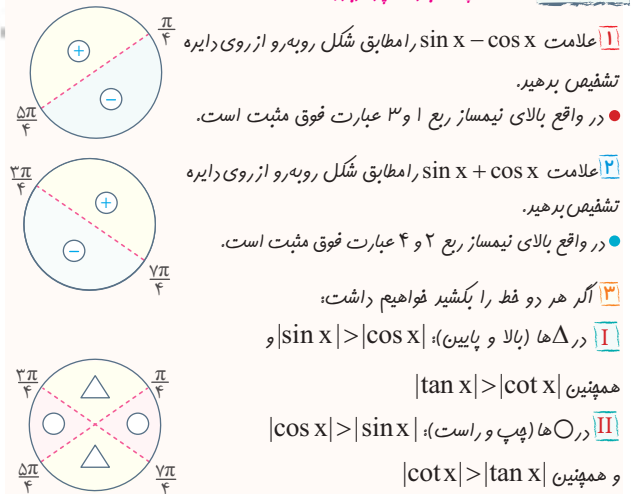
بیشتر از ۱ - کمتر از ۱ -

د ۳ رادیان در ناحیه دوم مثلثاتی، جایی که کسینوس منفی است قرار دارد و 20° در ناحیه سوم مثلثاتی جایی که سینوس منفی است قرار دارد و در نتیجه داریم:

$$[\cos 3^\circ] + [\sin 20^\circ] = [-\dots] + [-\dots] = -1 + (-1) = -2 \quad \times$$

۷۹۴ ۴ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

علامت چند عبارت پرکاربرد:



در این مسئله $\sin x > \cos x$ معادل است با $\sin x - \cos x > 0$ که جواب آن گزینه **۱۴** است.

۷۹۵ ۱ چون $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ است، پس $\cos x > \sin x > 0$ است، بنابراین $\log \cos x > \log \sin x$ حال داریم:

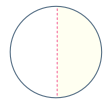
$$\sigma = \frac{\log \sin x - \log \cos x}{2} = \frac{1}{2} (\log \cos x - \log \sin x)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2} \log \cot x = \log \sqrt{\cot x}$$

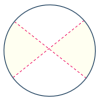
انحراف معیار دو دایره آماری a و b برابر است با:

$$\sigma = \frac{|a-b|}{2}$$

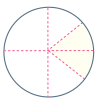
۷۹۶ ۴ قدر مطلق سینوس در بالا و پایین بیشتر از قدر مطلق کسینوس است.



۱ از $|\sin x| < |\cos x|$ می فهمیم $\cos x$ از یک مقدار مثبت بزرگ تر است، پس خود $\cos x$ هم مثبت است.



۲ از طرفی چون $\cos x > 0$ پس می توان نامعادله $|\sin x| < |\cos x|$ را به صورت $|\sin x| < \cos x$ نوشت:



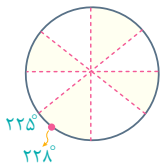
در نتیجه از اشتراک **۱** و **۲** داریم:

۷۹۸ ۲ ابتدا برای راحت تر شدن کار رادیان ها را به درجه تبدیل می کنیم:

$$2 \text{ rad} = 2 \times 57^\circ = 114^\circ \quad 3 \text{ rad} = 3 \times 57^\circ = 171^\circ$$

$$4 \text{ rad} = 4 \times 57^\circ = 228^\circ \quad 5 \text{ rad} = 5 \times 57^\circ = 285^\circ$$

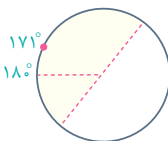
حال به بررسی موارد می پردازیم:



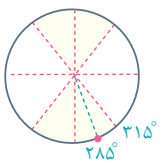
الف در ناحیه های رنگی همواره $\tan x - \cot x > 0$ است، یعنی مقدار تانژانت از کتانژانت بیشتر است

$$\checkmark \tan 228^\circ > \cot 228^\circ$$

ب در ناحیه رنگ شده $\sin x - \cos x > 0$ است یعنی مقدار سینوس از کسینوس بیشتر است پس $\sin 171^\circ > \cos 171^\circ$ است. البته 171°

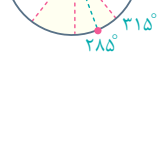


در ناحیه دوم است، جایی که سینوس مثبت و کسینوس منفی است پس قطعاً سینوس از کسینوس بزرگ تر است. $\times$



ع در ناحیه رنگ شده $|\sin x| > |\cos x|$ است. پس

$$\checkmark |\sin 285^\circ| > |\cos 285^\circ|$$



د همچنین در ناحیه رنگی شکل قسمت **ع** همواره

$|\tan x| > |\cot x|$ است که 114° در ناحیه رنگی است در نتیجه $|\tan 114^\circ| > |\cot 114^\circ|$ است. $\checkmark$

۷۹۹ ۳

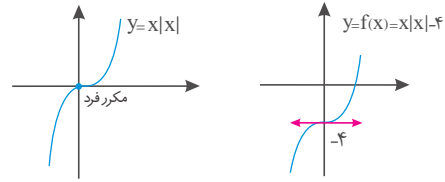


۱ $\sin x + \cos x > 0$ بالا نیمساز ربع ۲ و ۳ اشتراک

۲ $\tan x < 0$ ربع ۲ و ۳

بنابراین در گزینه **۳** همواره روابط فوق برقرار است چون زیرمجموعه ناحیه به دست آمده است.

۲۲۵۹ توجه کنید $y = x|x|$ به صورت شکل سمت چپ است، حال کافیت نمودار را ۴ واحد به پایین انتقال دهیم تا به شکل راست برسیم:

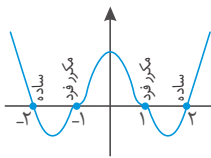


۲۲۶۰ در ابتدا ضابطه $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = (|x| - 2)(|x| - 1)|x - 1||x + 1|$$

دقت کنید که $(|x| - 1)$ دارای دو ریشه ساده $x = 1$ و $x = -1$ است که در کنار

عوامل $|x - 1|$ و $|x + 1|$ ریشه مکرر مرتبه فرد روی نمودار ایجاد می‌کنند. با توجه به این نکات و ساده بودن ریشه‌های $x = \pm 2$ و مثبت بودن اعتبار داریم:

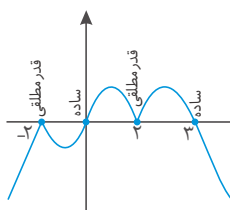


۲۲۶۱ عامل $|x| - 2$ دارای دو ریشه ساده

$x = \pm 2$ می‌باشد. ولی ما در این مسئله با عامل

$|x| - 2$ مواجه هستیم که دو ریشه قدر مطلق

$x = \pm 2$ دارد. دو ریشه ساده $x = 0$ و اعتبار



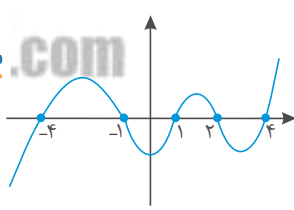
منفی داریم:

۲۲۶۲ عبارت دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$y = (x - 2)(|x| - 4)(|x| - 1)$$

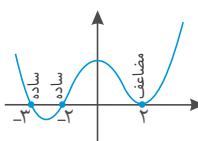
اعتبار مثبت و ریشه‌های ساده ± 4 و ± 1

را داریم:



۲۲۶۳ ضابطه $f(x)$ را به صورت $f(x) = (3 + |x|)(2 - |x|)(3 + x)(2 - x)$

تجزیه می‌کنیم، $x = 2$ هم برای $(x - 2)$ و هم برای $(|x| - 2)$ ریشه ساده است.



لذا برای $(|x| - 2)(x - 2)$ ریشه $x = 2$ مکرر از مرتبه

۲ است. ریشه‌های $x = -2$ و $x = 3$ ساده هستند.

$(|x| + 3)$ هم ریشه ندارد. اعتبار نیز مثبت است.

نکته

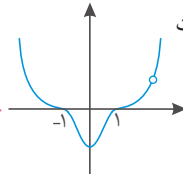
اگر $x = \alpha$ ریشه مرتبه m تابع $g(x)$ و ریشه مرتبه n تابع $h(x)$ باشد،

آنگاه همین $x = \alpha$ ریشه مرتبه $m + n$ تابع $f(x) = g(x)h(x)$ است.

۲۲۶۴ عامل $(x - 2)^5$ را از صورت

و مخرج ساده می‌کنیم:

$$y = (x^2 - 1)^3 \Rightarrow$$



نکته

اگر عامل $(x - \alpha)^n$ به طور کامل از صورت و مخرج ساده شود، در رسم

نمودار انگار که عامل $(x - \alpha)^n$ هرگز نداشتیم، فقط روی نمودار در $x = \alpha$ باید نقطه

تو قالی قرار دهیم.

۲۲۶۵ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته

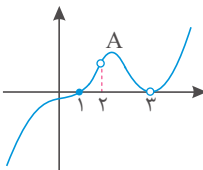
در رسم نمودار، تابع را تا می‌توانید ساده کنید ولی به آفرین مرحله که رسیدید

و نمودار را رسم کردید، با توجه به دامنه تابع اولیه (که ساده نشده) نقاط تو قالی نمودار را

مشخص کنید.

به راحتی می‌توان ضابطه را به صورت $y = (x - 1)^3(x - 3)^2$ ساده کرد و نمودار

زیر را بدست آورد. اما برای نقاط تو خالی باید به ضابطه



$$y = \frac{(x - 1)^3(x - 2)^2(x - 3)^4}{(x^2 - 5x + 6)^2}$$

اولیه تابع، یعنی $y = \frac{(x - 1)^3(x - 2)^2(x - 3)^4}{(x^2 - 5x + 6)^2}$

توجه کنیم و به همین خاطر $x = 2, 3$ که از صورت و

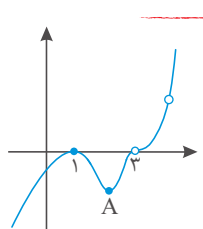
مخرج ساده شدند را تو خالی رسم کردیم.

نکته کلیدی که در حل این سوال مهم است، پیدا کردن نقطه A ، است. که برای تشخیص جایگاه A به نکته زیر توجه کنید.

نکته در تابع $f(x) = (x - \alpha)^m(x - \beta)^n$ طول نقطه A (ماکزیم یا مینیم)

$$\text{از فرمول } x_A = \frac{m\beta + n\alpha}{m + n} \text{ به دست می‌آید.}$$

در این تست $x_A = \frac{3 \times 3 + 2 \times 1}{3 + 2} = \frac{11}{5} > 2$ به همین خاطر نقطه تو خالی در $x = 2$ قبل از A است.



۲۲۶۶ اگر این تابع را ساده کنیم به تابع

$$y = (x - 1)^4(x - 3)^3$$

می‌رسیم، نقاط تو خالی با

توجه به ضابطه تابع قبل از ساده شدن انتخاب

شده‌اند $(x = 3, 4)$ و البته: $x_A = \frac{12 + 3}{4} = \frac{15}{4}$

۲۲۶۷ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته

اگر ریشه مخرج ساده نشد، تابع دو ویژگی مهم پیدا می‌کند.

۱ **میانب قائم**

۲ **قاصیت کشسانی نمودار**

۱ **میانب قائم** در حقیقت همان ریشه مخرج است که بر دو نوع

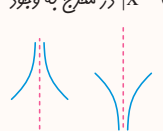
است. نوع اول مربوط به ریشه‌های ساده مخرج، یا ریشه‌های مکرر مرتبه

فرد، یعنی $\frac{g(x)}{(x - \alpha)^{2n+1}}$ هستند که ویژگی آن‌ها وجود شافه‌های نا هم علامت از نمودار در اطراف میانب است.

نوع دیگری از میانب قائم داریم که از ریشه‌های $(x - \alpha)^{2n}$ یا $|x - \alpha|$ در مخرج به وجود

می‌آیند. این میانب‌ها یا آتش‌فشان‌ها مانند شکل سمت

چپ هستند یا باتلاقی مانند شکل سمت راست.

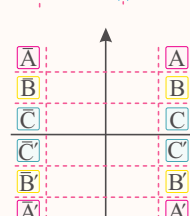


۲ **قاصیت کشسانی نمودار** $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ به کمک اعتبار

و درجه صورت $[g(x)]$ و درجه مخرج $[h(x)]$

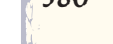
مشخص می‌شود. به این صورت که دستگاه مفتحات را به ۶ تاییه

در سمت راست و ۶ تاییه در سمت چپ تقسیم بندی می‌کنیم:



رسم شماتیک نمودارها

رأی تدری و همایان جامع حو منبج هرکول



۱۱ کشسان گریه A: اگر درجه صورت بیشتر از درجه مخرج باشد و اعتبار مثبت باشد، شروع رسم از A و اگر اعتبار منفی باشد از A' است.

مثلاً: $y = \frac{(x-1)^5(x+2)^3}{(x-2)^6}$ با توجه به اینکه درجه صورت ۸ و درجه مخرج ۶ است و اعتبار مثبت است نقطه شروع رسم این نمودار از A است:

۱۲ کشسان گریه B: اگر درجه‌های صورت و مخرج برابر باشد و اعتبار مثبت باشد شروع از B و اگر اعتبار منفی باشد شروع از B' است.

مثلاً: در رسم تابع $y = \frac{(x-1)^3x}{(x+2)^4}$ درجه صورت و مخرج هر دو ۴ است و اعتبار مثبت است پس شروع از B است.

۱۳ کشسان گریه C: اگر درجه صورت کمتر از مخرج باشد از C (وقتی اعتبار مثبت است) یا از C' (وقتی اعتبار منفی است) شروع به رسم می‌کنیم، مثلاً در رسم تابع $y = \frac{x}{(x-1)^3}$ اعتبار مثبت و درجه مخرج بیشتر از صورت است پس شروع از C است.

حال چند مثال دقیق‌تر را با هم مرور کنیم:

مثال ۱: $y = \frac{(x+1)^7}{(x-2)^3(x-3)^2}$

۱ اعتبار مثبت و درجه صورت بیشتر از مخرج است پس شروع از A می‌باشد.

۲ $x = 3$ مخرج قاعده آشفشانی یا باتلاقی

۳ $x = 2$ مخرج قاعده معمولی

۴ $x = -1$ ریشه مکرر با تکرار فرد

توجه ۱: دقت کنید که شروع نمودار از محور x ها دور است، پس سمت چپ هم نمودار از محور x ها دور می‌شود. یعنی نموداری که با A یا A' شروع می‌شود، باید با $\bar{A}$ یا $\bar{A}'$ تمام شود. همین هم برای B, C برقرار است.

مثال ۲: $y = \frac{(x+1)^2(1-x)}{(x+2)^3|x-2|}$

۱ اعتبار منفی و درجه مخرج بیشتر، شروع از C'

۲ $x = 2$ مخرج آشفشانی یا باتلاقی

۳ $x = 1$ ریشه ساده

۴ $x = -1$ ریشه مکرر با تکرار زوج

۵ $x = -2$ مخرج قاعده معمولی

در تابع $f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-1)}$ درجه صورت بیشتر است.

۱ اعتبار مثبت شروع از A

۲ $x = 3$ ریشه مضاعف

۳ $x = 1$ مخرج معمولی

۴ اتمام نمودار از A' است.

۲۲۶۸ ۳ اول ضابطه $f(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(x+4)(x+1)}{(|x|-2)(x-4)}$$

۱ اعتبار مثبت و درجه صورت بیشتر از مخرج پس شروع از A

۲ $x = 1$ ریشه مضاعف

۳ $x = -4, -1$ ریشه ساده صورت

۴ $x = 2, -2, 4$ مخرج قاعده معمولی

۲۲۶۹ ۳ با ساده کردن ضابطه $f(x)$ داریم:

$$f(x) = \frac{(x+4)(x+1)(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)} = (x+4)(x-2)$$

۱ اعتبار مثبت

۲ $x = -4, 2$ ریشه ساده

۳ $x = -1, -3$ تو خالی

۴ $x_A = \frac{(-4)+2}{2} = -1$

۲۲۷۰ ۴ با توجه به اینکه $x^2 = |x|^2$ است، با فاکتورگیری از $|x|$ در صورت $f(x)$ داریم:

$$f(x) = \frac{|x|(|x|-4)}{(x+3)|x+2|(x-1)^5}$$

۱ اعتبار مثبت و درجه صورت بیشتر از صورت شروع از C

۲ $x = 0$ ریشه قدر مطلق

۳ $x = 4, -4$ ریشه‌های ساده

۴ $x = -3, 1$ مخرج معمولی

۵ $x = -2$ مخرج آشفشانی یا باتلاقی

۲۲۷۱ ۱ برای حل این تست ابتدا به نکته زیر توجه کنید:

نکته: اگر $f(x)$ عاملی به صورت $\frac{x-\alpha}{|x-\alpha|}$ داشته باشد، آنگاه در $x = \alpha$ ناپیوستگی دارد. در این نوع مسائل باید $f(x)$ را طبق ریشه بازه‌بندی کنیم.

در این تست $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 3 \\ -1 & ; x < 3 \end{cases}$ و نمودار آن شبیه به گزینه ۱ است.

۲۲۷۲ ۲ تابع $f(x)$ عامل $\frac{x-1}{|x-1|}$ دارد و لذا باید بازه‌بندی شود بنابراین نمودار این تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x > 1 \\ -(x+2) & ; x < 1 \end{cases}$$

۲۲۷۳ ۴ به علت وجود $(x-4)^3$ در صورت و $|x-4|$ در مخرج، باید تابع را بازه‌بندی کنیم، در نتیجه نمودار این تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)^2 & ; x > 4 \\ -(x-4)^2 & ; x < 4 \end{cases}$$



