

مقدمه ناشر

شنیدین می‌گن ذهن سیاله؟ یعنی ولش کنی مثل گاز به هر طرفی می‌ره. حالا این سیالیت ذهن خوبه یا بد؟ من که می‌گم حرف نداره! چون باهوش می‌شه چیزایی رو تصور کرد و به جاهایی سرک کشید که امکان نداره تو واقعیت تجربه کنی. ویژگی مشترک همه نابغه‌های دنیا اینه که ذهنشون از آدمای عادی سیال‌تره، مثلاً اینشتین وقتی داشت نسبیت رو می‌پروروند، معلوم نیست ذهنش تا کجاها رفت. در اون زمان نسبیت اونقدر عجیب و غریب به نظر می‌اومد که کسی باورش نمی‌شد به روزی به یکی از مهم‌ترین نظریه‌های فیزیک تبدیل بشه. اون موقع اینشتین بابت این نظر، حتی به تمبر پستی هم جایزه نگرفت. سی چهل سالی طول کشید تا کم‌کم به چیزایی از این نظریه اثبات شد و هنوز هم که هنوزه، داره زوایای پنهانش آشکار می‌شه. این دیگه اوج سیالیت ذهنه.

حالا اگه تو هم به وقت

«می‌نشینی چند تمرین ریاضی حل کنی خط‌کش و نقاله و پرگار شاعر می‌شود»^۱

خوشحال باش که اینم به جور سیالیت ذهنه، اما در مسیر درست قرار نگرفته! یعنی این که به چیز دیگه که به ظاهر نقطه مقابل سیالیه لازم داری: تمرکز! یا همون از این شاخه به اون شاخه نپریدن.

خب! مشکل شد دوتا؛ حالا تمرکز داشته باشیم یا سیالیت؟ جوابش اینه: هر دو!

خلاصه‌اش این می‌شه وقتی که داری ریاضی می‌خونی، روی ریاضی تمرکز کن ولی بذار ذهنت هر جای ریاضی که دوست داره سرک بکشه و موضوع (یا مسئله) رو هر جور که دلش می‌خواد تحلیل کنه. اون وقت حتماً معجزه سیالیت رو تجربه می‌کنی و لذتشو می‌بری.

کتابای ریاضی از جمله این کتاب، پر از سوژه‌های ناب برای سیالیت ذهنه. پس بخونید و حالشو ببرید.

مرسی از رفقای باسواد و بامراممون کوروش، رسول و سروش. خودم شاهد بودم که چه قدر زحمت کشیدن و برای نوشتن و بعدش بازنویسی این کتاب شب و روز نداشتن. مرسی از محسن فراهانی عزیز که پایه‌پای مولفای این کتاب جنگید و این پروژه سخت و طاقت‌فرسارو به سرانجام رساند.

دم کارشناسا و ویراستارای این کتاب گرم. دم بچه‌های R&D و QC خیلی سبز گرم. دم بچه‌های تولید (که همین‌جوری گرمه) بازم گرم‌تر. دم شما هم گرم.

تقدیم به همه دانش آموزان و معلم های خوب ایران

مقدمه مولفان

به کتاب ریاضیات ۳ خیلی سبز خوش آمدید.

نحوه استفاده از کتاب:

الف) اگر به مدرسه یا کلاس می روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمه محبت و موفقیت است»، پس از معلمان در مورد ترتیب خواندن درس نامه ها و حل کردن تست ها و بررسی پاسخ ها، کمک بگیرید.

ب) اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می کنید توصیه ما این است که: **۱)** اول درس نامه را خوب و کامل بخوانید. **۲)** چیزهایی که از درس نامه مهم است مشخص کنید یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. **۳)** یک بار دیگر فقط تست های درس نامه را حل کنید. **۴)** بروید سراغ تست ها، پاسخ تست ها را اول از پاسخ نامه کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ ها را بخوانید. خیلی از وقت ها خواندن پاسخ تست هایی که درست حل کرده ایم هم بسیار کمکتان می کند.

ساختار کتاب:

۱) قبل از هر چیزی لطفاً بروید سراغ QRcode مقدمات. در آن جا آن چه را که واجب است از محاسبات، درصد، ترتیب عملیات ریاضی و ... گفته ایم، سریعاً بخوانید و به یاد بسپارید. در تمام فصل های دیگر به این نکته ها نیاز دارید.

۲) فصل های کتاب، به ترتیب فصل های ریاضی ۳ (دوازدهم) آمده اند. در اول هر فصل مباحث مهم و پرسؤال و مباحث پیش نیاز را آورده ایم. حواستان باشد که وقتی می گوئیم پیش نیاز منظورمان این است که بهتر است روش های اصلی و مطالب بنیادی مباحث پیش نیاز را قبل از خواندن فصل مورد نظر بلد باشید. ممکن است لازم باشد مباحث پیش نیاز را از مطالب کتاب های سال های پیش یاد بگیرید.

۳) در تست های هر درس، کنار تست های عادی یک آیکن ☹️ گذاشته ایم. قرار است شما بعد از حل تست ها و بررسی پاسخ نامه این آیکن ها را به 😊 یا 😐 یا ☹️ تبدیل کنید:

😊 یعنی تست آسان 😐 یعنی تست متوسط ☹️ یعنی تست دشوار

این نمادگذاری باعث می شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید بتوانید تصمیم بگیرید که از کدام تست ها برای این کار استفاده کنید و روی سؤال ها با نماد مورد نظر تمرکز کنید تا خوب یادشان بگیرید. (البته برای این ها از هر نماد دیگری هم خودتان می خواهید می توانید استفاده کنید چون هدف اصلی این است که بتوانید بعداً به این سؤال ها برگردید) برای بعضی از تست ها هم نماد Ⓢ داریم که نشان دهنده تست های دشوار است. این تست ها مختص دانش آموزان علاقه مند است و قرار نیست همه دانش آموزان به این تست ها پاسخ دهند.

۴) نماد کنار بعضی از تست ها به رنگ آبی (Ⓢ) آمده است. این ها تست های نشان دار هستند برای دوره سریع فصل و دوتا کاربرد دارند: **الف)** دوره و جمع بندی فصل **ب)** اگر قبل از یک آزمون وقت خیلی کمی دارید می توانید فقط این تست ها را حل کنید. ما معتقدیم که جمع بندی واقعی با این روش انجام می شود نه با جدول، نمودار و ...

۵) در تست ها کامنت هایی به رنگ آبی می بینید. این ها صرفاً برای یک یادآوری ساده مطالب درس نامه یا یک اشاره کوچک به استراتژی حل تست است. کامنت ها را با فونت ریز و کم رنگ آورده ایم که اگر نخواستید برای بار اول حل تست ها از رویشان رد شوید.

۶ در درس نامه آیکن های **نکته**، **اشاره** و **خاطره** داریم:

نکته نشان دهنده نکته ای است که یا یادگرفتنش لازم است یا باعث می شود تست را سریع تر و بهتر حل کنید.

اشاره نشان دهنده یک اشاره کوچک به مطلب، مفهوم، توضیح یا مثالی است که باعث می شود مطلب را بهتر بفهمید.

این طور هم می توانیم بگوییم که **اشاره** یک **نکته** خیلی ساده و عادی است.

خاطره نشان دهنده یک تعریف، فرمول، مقدار یا ... از درس های قبلی یا سال های قبل است.

۷ درس نامه کتاب دوباره و از اول نوشته شده است. سعی کرده ایم از جدول، نمودار، دسته بندی و هر چیزی که باعث می شود درس را بهتر و مؤثرتر یاد بگیرید استفاده کنیم. حواستان باشد که برای بررسی بعضی از جدول ها باید حسابی وقت بگذارید.

۸ تک تک مثال ها و تست های درس نامه به گونه ای انتخاب شده اند که اولاً کاربرد نکته ها و مفاهیم گفته شده را ببینید و یاد بگیرید و ثانیاً نمونه های اصلی و پرتکرار تست های کنکور را ببینید. باز هم توصیه می کنیم بعد از این که درس نامه هر درس را خوب و کامل خواندید برگردید و یک بار دیگر تست های درس نامه را حل کنید.

۹ در حل تست ها چه در درس نامه و چه در پاسخ این نمادها را داریم:

راه I، **راه II** ... این ها نشان دهنده روش های مختلف حل یک تست است. معمولاً در **راه I** متداول ترین راه حل و یا سریع ترین آن ها آمده است.

عددگذاری در بعضی از تست ها که با بررسی گزینه ها و یا عددگذاری هم حل می شوند و یا بسیار سریع تر حل می شوند. در قسمت مقدمات به طور کامل در مورد استفاده از این روش هم صحبت کرده ایم. البته در این کتاب تأکید اصلی ما بر استفاده از راه های مفهومی و اصلی است ولی خب گاهی اوقات که ممکن بوده از **عددگذاری** استفاده کرده ایم، اگرچه حواسمان بوده که در استفاده از این روش افراط نکنیم.

۱۰ برای هر کدام از فصل ها و همچنین برای نقطه های زمانی مشخص در سال (مثلاً پایان نیمسال اول و ...) یک **آزمون** داریم که می توانید آن ها را به همراه **حل تشریحی** و **ویدیوی** با اسکن کردن QR code مربوط به آن ببینید. توصیه شدید و اکید داریم که تا وقتی همه مطالب فصل را خوب یاد نگرفته اید و تست های فصل را حل و دوره نکرده اید سراغ آزمون نروید. توصیه ما برای استفاده از پاسخ نامه این است:

الف تعداد مشخصی تست برای یک نشست انتخاب و حل کنید (مثلاً ۳۰ تا).

ب درستی پاسخ ها را از روی پاسخ نامه کلیدی بررسی کنید.

پ برگردید و سعی کنید تست هایی را که جواب نداده اید یا غلط زده اید دوباره حل کنید (این بار بدون محدودیت وقت).

ت بروید سراغ پاسخ نامه تشریحی، اول پاسخ تست هایی را که جواب نداده اید و یا غلط زده اید ببینید و بعد از اینکه این ها را خوب فهمیدید و یاد گرفتید شروع کنید از اول نگاهی به همه پاسخ ها بیندازید. بررسی **راه I**، **راه II**، **نکته** ها، **اشاره** ها و **عددگذاری** باعث می شود به همه نکته ها و ریزه کاری های درس مسلط شوید.

۱۲ امسال یک ID هم داریم که می توانید هر سؤال یا اشکالی که داشته باشید بروید سراغ این ID نظرات، پیشنهادات و انتقادات خود را هم از همین طریق برایمان بفرستید.

☞ @riazi_hamrah_konkoor

و حرف آخر هم این که:

• آقایان افشین ملاک پور و علی مقدم نیا که از اساتید برجسته و خوشنام اند با نظرات و پیشنهاداتشان سهم مهمی در بهتر شدن کتاب داشته اند. بر خود واجب می دانیم از ایشان نهایت سپاس و تشکر را داشته باشیم.

• هم چنین همکاران عزیز دیگری نیز با ارائه نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در بازنویسی کتاب کمک کرده اند، از این دوستان، آقایان معین کرمی، حسین نادری، مصطفی کرمی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی، عباس موسوی و فرزاد فتاحی نیز کمال تشکر را داریم.

• از تمام معلمان گرامی که از این کتاب استفاده می کنند نیز درخواست می کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.

• برای این که این کتاب خیلی بهتر از قبل شود کلی کار کرده ایم. به نظر خودمان بهترین کتاب ریاضیات تجربی است 😊 و امیدواریم نظر شما هم همین باشد.

• اگر اشتباه، غلط، جابه جایی یا ... در کتاب دیدید حتماً برایمان بفرستید تا هم اصلاح و هم تشکر کنیم. از پیشنهادهایتان خوب و شاد و پیروز باشید! هم استقبال می کنیم.

📧 @mathmohsenimanesh

📧 @soroshmueeni

فهرست

تست

درس نامه

مقدمات

فصل اول

تابع

۴۱	۹	درس ۱: معرفی توابع چندجمله‌ای و بررسی x^3
۴۳	۱۲	درس ۲: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)
۴۵	۱۸	درس ۳: ترکیب توابع
۵۲	۲۵	درس ۴: انتقال نمودارها
۵۷	۳۲	درس ۵: وارون تابع و تابع وارون

فصل دوم

مثلثات

۸۹	۶۵	درس ۱: کمان‌های 2α
۹۳	۷۰	درس ۲: تابع متناوب
۹۴	۷۲	درس ۳: رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس
۹۹	۷۶	درس ۴: تانژانت
۱۰۲	۸۲	درس ۵: معادله مثلثاتی

فصل سوم

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۱۳۲	۱۰۷	درس ۱: تقسیم چندجمله‌ای‌ها
۱۳۳	۱۰۹	درس ۲: همسایگی
۱۳۳	۱۱۱	درس ۳: رفع ابهام صفرصفرم ($\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$)
۱۴۱	۱۱۹	درس ۴: حد بی‌نهایت
۱۴۵	۱۲۵	درس ۵: حد در بی‌نهایت

فصل چهارم

مشتق

۱۹۱	۱۵۲	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
۱۹۳	۱۵۷	درس ۲: قواعد مشتق‌گیری
۱۹۸	۱۶۳	درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده کردن)
۲۰۱	۱۶۷	درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی
۲۰۳	۱۷۱	درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق‌گیری در حضور براکت و قدرمطلق
۲۰۶	۱۷۴	درس ۶: پیوستگی و مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه)
۲۰۷	۱۷۶	درس ۷: نقاط مشتق‌ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم
۲۱۱	۱۸۱	درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق
۲۱۳	۱۸۴	درس ۹: مشتق تابع مرکب
۲۱۷	۱۸۸	درس ۱۰: آهنگ تغییر

تست

درس نامه

۲۴۱	۲۲۰	درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق
۲۴۳	۲۲۴	درس ۲: نقطه بحرانی
۲۴۵	۲۲۸	درس ۳: اکسترم‌های نسبی
۲۴۹	۲۳۳	درس ۴: اکسترم‌های مطلق
۲۵۱	۲۳۶	درس ۵: بهینه‌سازی

فصل پنجم کاربرد مشتق

۲۸۰	۲۵۲	درس ۱: تفکر تجسمی
۲۸۴	۲۶۴	درس ۲: بیضی
۲۸۸	۲۷۰	درس ۳: دایره

فصل ششم هندسه (تفکر تجسمی و مقاطع مخروطی)

۲۹۷	۲۹۴	درس ۱: قانون احتمال کل
-----	-----	------------------------

فصل هفتم احتمال

۲۹۹

پاسخ‌نامه تشریحی

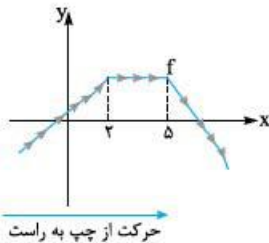
۴۹۳

پاسخ‌نامه کلیدی

دکس دوم یکنوازی (توابع صعودی و نزولی)



توابع صعودی و نزولی

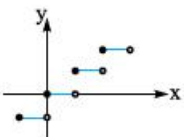


در تابع روبه‌رو اگر روی نمودار تابع از چپ به راست حرکت کنیم، گاهی اوقات y ها در حال افزایش هستند، گاهی اوقات y ها در حال کاهش‌اند و در قسمت‌هایی تابع ثابت می‌شود و عرض نقاط عوض نمی‌شود. هر کدام از این وضعیت‌ها، یک اسمی دارد تا بتوانیم منظورمان را راحت‌تر برسانیم، مثلاً می‌گوییم تابع f در $(-\infty, 2]$ اکیداً صعودی است. بیایید حالت‌های مختلف را در جدول زیر ببینیم:

تعریف ریاضی	تعریف فارسی	شماتیک	مثال
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	تابع اکیداً صعودی	با افزایش x ، y هم افزایش پیدا می‌کند.	
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	تابع صعودی	با افزایش x ، y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.	
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	تابع اکیداً نزولی	با افزایش x ، y کاهش پیدا می‌کند.	
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$	تابع نزولی	با افزایش x ، y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.	

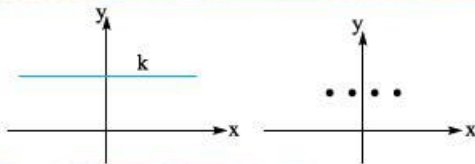
اشاره ۳

هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و هر تابع اکیداً نزولی، نزولی نیز به حساب می‌آید. دقت کنید عکس این حرف درست نیست یعنی نمی‌توانیم بگوییم که هر تابع صعودی، اکیداً صعودی است. مثلاً تابع $y = [x]$ فقط صعودی است.



البته تشخیص صعودی یا نزولی بودن از روی نمودار گاهی اوقات به دقت بیشتری احتیاج دارد، نمودارهای زیر را نگاه کنید:

اکیداً صعودی	صعودی	اکیداً نزولی	نزولی



نکته اگر با افزایش x ، y ثابت بماند ($x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 = y_1$) می‌گوییم تابع ثابت است. تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

آزمون ۱ تابع $f(x) = (a-1)x - 2a$ هم صعودی است و هم نزولی. کدام جمله دربارهٔ این تابع درست است؟

(۱) f اکیداً صعودی است. (۲) f اکیداً نزولی است.

(۳) $f(2) = -2$ (۴) محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{2a}{a-1}$ قطع می‌کند.

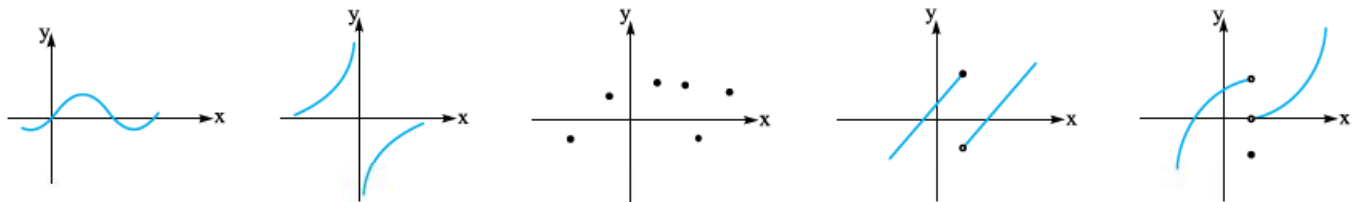
پاسخ ۱ تابع $f(x)$ هم صعودی است و هم نزولی؛ تنها تابعی که این ویژگی را دارد تابع ثابت است. می‌دانیم در تابع ثابت نباید x داشته باشیم پس باید ضریب x یعنی $a-1$ برابر صفر باشد:

$$a-1=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow f(x)=-2$$

حالا برویم سراغ بررسی گزینه‌ها: در تابع $f(x) = -2$ با افزایش x مقادیر y تغییری نمی‌کند، پس f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست و گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند. تابع $f(x) = -2$ یک تابع ثابت است، پس $f(2) = -2$ و (۳) درست است. حواسمان باشد که تابع $f(x) = -2$ اصلاً محور x ها را قطع نمی‌کند و (۴) هم نادرست است.

توابع یکتوا و غیر یکتوا

به تابع‌های صعودی، اکیداً صعودی، نزولی، اکیداً نزولی و ثابت، می‌گوییم «یکتوا». به تابع‌های اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، می‌گوییم «اکیداً یکتوا». بعضی تابع‌ها، رفتار یکتوا ندارند، یعنی با افزایش x و حرکت از چپ به راست روی نمودار، y همیشه زیاد یا کم نمی‌شود یا ثابت نمی‌ماند بلکه گاهی افزایش و گاهی کاهش دارد. این تابع‌ها را غیر یکتوا می‌نامیم. حالا بگویید چرا نمودارهای زیر غیر یکتوا هستند؟



بررسی یکتوایی تابع

۱. یکتوایی در نمایش زوج مرتبی • در نمایش زوج مرتبی، x ها را به ترتیب از کم به زیاد می‌چینیم و به y ها نگاه می‌کنیم:

$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 10)\}$ اکیداً صعودی است (با افزایش x ، y ها همواره زیاد شده‌اند).

$g = \{(-1, 1), (0, 2), (2, 2), (3, 7)\}$ صعودی است (با افزایش x ، y ها زیاد شده یا ثابت مانده‌اند).

$h = \{(-2, 4), (-1, 2), (0, 1)\}$ اکیداً نزولی است (با افزایش x ، y ها کم شده‌اند).

$k = \{(1, 2), (2, 5), (3, 0)\}$ یکتوا نیست (با افزایش x ، y ها زیاد و کم شده‌اند).

آزمون ۲ اگر $f = \{(-1, 1), (0, 2a-1), (1, a+5), (2, 7)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود a کدام است؟

(۱) $1 < a < 6$ (۲) $1 < a < 2$ (۳) $2 < a < 6$ (۴) $a < 1$

پاسخ ۲ **راه ۱** خوشبختانه x ها از چپ به راست مرتب هستند:

پس y ها باید افزایشی باشند:

$$-1, 0, 1, 2$$

$$\begin{matrix} 1 < 2a-1 < a+5 < 7 \\ \underbrace{a > 1} \quad \underbrace{a < 2} \\ a < 6 \end{matrix}$$

بنابراین به ازای $1 < a < 2$ همهٔ شرط‌ها تأمین می‌شوند.

عددگذاری به ازای $a=2$ تابع $\{(-1, 0), (0, 3), (1, 7), (2, 7)\}$ صعودی است اما اکید نیست، پس $a=2$ غلط است. به ازای $a=3$ تابع

$\{(-1, 1), (0, 5), (1, 8), (2, 7)\}$ یکتوا نیست. پس $a=3$ هم غلط است. با قراردادن $a=0$ نیز تابع $\{(-1, 1), (0, -1), (1, 5), (2, 7)\}$ یکتوا نیست. پس

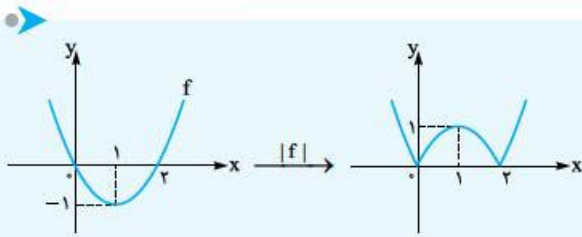
گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) نادرست‌اند.

۲. یکتوایی در نمایش جبری • تا قبل از فصل کاربرد مشتق، بهترین راه تعیین یکتوایی تابع، رسم نمودار تابع است، خصوصاً اگر تابع ما دارای

قدرمطلق یا براکت باشد و یا چندجمله‌ای باشد.

آزمون ۳ تابع $f(x) = x(x-2)$ و $|f|$ در فاصلهٔ $(0, a)$ یکتوا است. اگر a بیشترین مقدار را داشته باشد، مقدار a و وضع تابع در این بازه کدام است؟

(۱) صعودی (۲) صعودی (۳) ۱، نزولی (۴) ۲، نزولی



پاسخ ۱ نمودار $y = x(x-2)$ ریشه‌هایش صفر و ۲ است و نمودارش به راحتی قابل رسم است. یادتان هست که برای رسم $|f|$ باید قسمت‌های زیر محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کردیم. حالا با توجه به نمودار در فاصله $(0, 1)$ اکیداً صعودی است پس $a = 1$ است. **خاطره** رأس سهمی دقیقاً در وسط دو ریشه‌اش قرار دارد.

اگر در تست، فقط صحبت از یکنوا بودن و نبودن گزینه‌ها باشد، یکی از بهترین کارها، عددگذاری و استفاده از مفهوم یکنوایی است. تست زیر را ببینید:

تست ۱ کدام تابع اکیداً صعودی است؟
 ۱) $y = [x]$ ۲) $y = x - [x]$ ۳) $y = \frac{|x|}{x}$ ۴) $y = x|x|$

پاسخ ۱ اگر $x_1 = 0/1$ و $x_2 = 0/2$ را قرار دهیم. $y_1 = y_2 = 0$ می‌شود. پس تابع اکیداً صعودی نیست.
 ۲) اگر $x_1 = 2$ و $x_2 = 5$ باشند، $y_1 = y_2 = 0$ می‌شود. یعنی تابع اکیداً صعودی نیست.
 ۳) به ازای تمام x های مثبت مقدار تابع برابر ۱ است. یعنی تابع ثابت می‌شود و در نتیجه اکیداً صعودی نیست.
 پس ۴) درست است. نمودارش را هم ببینیم:

در تابع‌های چندضابطه‌ای، بعضی وقت‌ها باید مقدار مجهول را طوری انتخاب کنیم که تابع مثلاً اکیداً صعودی شود. این تست را ببینید:

تست ۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ x + a & x < 2 \end{cases}$ اکیداً صعودی باشد. حدود a کدام است؟
 ۱) $a \leq 2$ ۲) $a \leq 3$ ۳) $a \leq 1$ ۴) $a \leq 0$

پاسخ ۲ شکل را ببینید:

$y = x^2 + 1$ برای x های ۲ یا بیشتر، قسمتی از شاخه سمت راست سهمی را نشان می‌دهد که در $x = 2$ ، عرض آن ۵ است و در ادامه، اکیداً صعودی است.
 $y = x + a$ خطی با شیب ۱ است که در $x = 2$ مقدار نهایی آن $2 + a$ است.
 حالا با توجه به شکل و اکیداً صعودی بودن تابع باید $2 + a \leq 5$ باشد، پس $a \leq 3$.

بررسی یکنوایی توابع خاص

الف. توابع معروف همواره یکنوا

بعضی توابعی که بلدیم همواره یکنوا هستند، توابعی مانند $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ اکیداً صعودی هستند و یا تابع $y = [x]$ صعودی است و ... در بین این تابع‌ها، توابع خطی، نمایی و لگاریتمی در تست‌ها بیشتر مورد توجه هستند، نکات این سه تابع را خیلی جمع‌وجور در جدول زیر می‌بینیم:

تابع	یکنوایی	نمودار
تابع خطی $f(x) = ax + b$	اگر $a > 0$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ باشد، اکیداً نزولی است.	
تابع نمایی $y = a^x$	اگر $a > 1$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد، اکیداً نزولی است.	
تابع لگاریتمی $y = \log_a x$	اگر $a > 1$ باشد، اکیداً صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد، اکیداً نزولی است.	

تست ۱ | اگر $f(x) = (a+2)x + 3$ اکیداً صعودی و $g(x) = (a-1)x - 1$ نزولی باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $(-2, 1)$ (۲) $[-2, 1)$ (۳) $(-2, 1]$ (۴) $[-2, 1]$

پاسخ ۱ | f و g هر دو تابع خطی اند f اکیداً صعودی است، پس باید شیب f مثبت باشد: $a+2 > 0$ پس $a > -2$ و g نزولی است پس باید شیب g منفی یا صفر باشد: $a-1 \leq 0$ ، پس $a \leq 1$ دقت کنید که نکته g اکیداً نزولی است و g می تواند ثابت باشد؛ پس داریم: $-2 < a \leq 1$

تست ۲ | اگر $f(x) = (\frac{m-1}{2})^x$ اکیداً نزولی و $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ صعودی باشد، m کدام مقادیر را دارد؟

- (۱) $(2, 3)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(1, 3)$ (۴) نشدنی

پاسخ ۲ | f یک تابع نمایی است، برای این که تابع f اکیداً نزولی باشد، باید پایه آن بین صفر و ۱ باشد:

$$0 < \frac{m-1}{2} < 1 \xrightarrow{\times 2} 0 < m-1 < 2 \xrightarrow{+1} 1 < m < 3$$

از طرف دیگر در $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ برای آن که g صعودی باشد باید پایه $\log$ را از ۱ بیشتر باشد، پس $\frac{1}{m} < 1$ و در نتیجه $m < 2$ و از اشتراک این ها $1 < m < 2$.

ب. توابع معروف غیر یکنوا

در بین تابع هایی که می شناسیم تابع درجه ۲ (سه می) و تابع هموگرافیک همواره غیر یکنوا هستند، البته در قسمت های محدودی از دامنه ممکن است این تابع ها هم یکنوا شوند.

۱. تابع درجه دوم • سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ در کل $\mathbb{R}$ یکنوا نیست. سهمی رو به بالا قبل از رأس یعنی قبل از $x = -\frac{b}{2a}$ اکیداً نزولی و پس از آن اکیداً صعودی است. در سهمی رو به پایین برعکس است. یعنی قبل از رأس اکیداً صعودی و بعد از رأس اکیداً نزولی می شود: مثلاً $y = x^2 - 4x - 1$ سهمی رو به بالا با رأس در $x = -\frac{-4}{2} = 2$ است، پس در فاصله $(-\infty, 2)$ و هر زیرمجموعه از آن، اکیداً نزولی و در فاصله $(2, +\infty)$ و هر زیرمجموعه های آن اکیداً صعودی است.

نکته سهمی در هر بازه ای که رأس سهمی درون آن بازه باشد (یعنی سر و ته بازه نباشد)، غیر یکنوا است.

تست ۱ | اگر $f(x) = -x^2 + 3x$ در $(-\infty, a)$ اکیداً یکنوا باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ ۱ | گفتیم سهمی در $(-\infty, x_S)$ و همچنین $(x_S, +\infty)$ اکیداً یکنوا است. پس حداکثر a همان x_S است: $x_S = \frac{-(-3)}{2(-1)} = \frac{3}{2}$

گاهی اوقات باید به کلمه ها و قیده های صورت سؤال خیلی دقت کنیم. تست زیر را ببینید:

تست ۲ | اگر $y = ax^2 + (a^2 - 3)x$ فقط در $(1, +\infty)$ نزولی باشد، a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

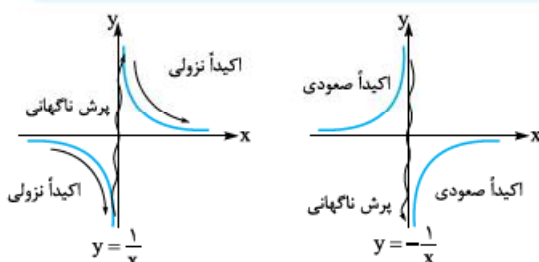
پاسخ ۲ | این که گفته فقط در $(1, +\infty)$ نزولی است؛ یعنی سهمی باید این شکلی باشد: پس داریم:

$$x_S = -\frac{a^2 - 3}{2a} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^2 - 3 = -2a \Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{جمع ضرایب}} a = 1 \text{ یا } -3$$

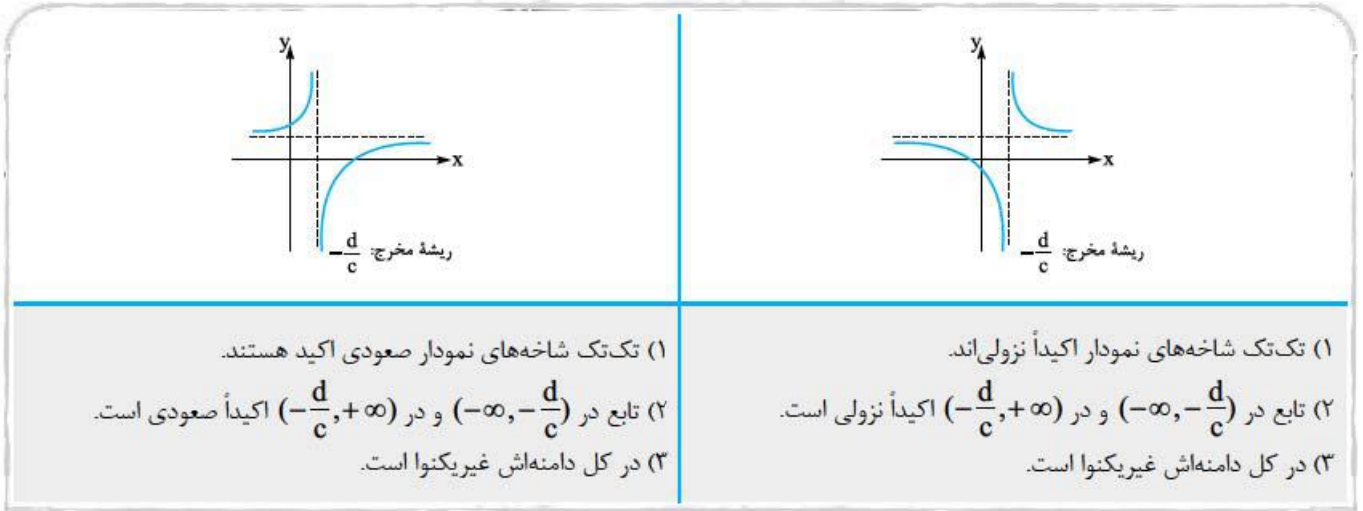
حالا دقت کنیم که سهمی باید رو به پایین باشد، پس $a < 0$ است؛ پس فقط $a = -3$ قابل قبول است.

۲. تابع هموگرافیک • اول سراغ $y = \frac{1}{x}$ می رویم:

از $-\infty$ تا صفر اکیداً نزولی است، بعد در دو طرف صفر از پایین محور y ها به بالای آن می آید و سپس دوباره از صفر تا $+\infty$ اکیداً نزولی است. پس $\frac{1}{x}$ با این که در هر کدام از شاخه هایش اکیداً نزولی است، در دامنه خودش یکنوا نیست. $y = -\frac{1}{x}$ هم در هر کدام از شاخه هایش اکیداً صعودی است ولی در کل غیر یکنواست.

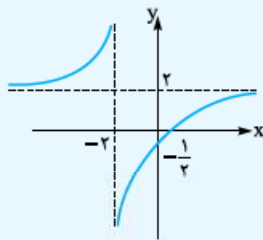


بقیه تابع‌های هموگرافیک $(y = \frac{ax+b}{cx+d})$ هم همین‌طور هستند. یعنی در محل ریشهٔ مخرج یک پرش ناگهانی دارند. اما قبل و بعد از ریشهٔ مخرج یک‌نوا هستند. ببینید:



آزمون ۱ | تابع با ضابطه $y = \frac{2x-1}{x+2}$ در کدام بازه، یک‌نوا است؟ نوع یک‌نوايي کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 0)$ ، نزولی (۲) $(-2, 4)$ ، نزولی (۳) $(-2, 4)$ ، صعودی (۴) $(-\infty, 0)$ ، صعودی



پاسخ ۳ | دیدیم که مشکل در محل ریشهٔ مخرج است، پس الان این تابع در $x = -2$ پرش خواهد کرد و باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل -2 نباشد، پس گزینه‌های (۱) و (۴) رد می‌شوند. برای تعیین صعودی یا نزولی بودن باید نمودار را ببینیم:

تابع در $(-\infty, -2)$ و نیز در $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

خاطره | اگر رسم شکل هموگرافیک یادتان رفته، نگاهی به قسمت‌های قبلی داشته باشید.

نکته | بعداً در فصل کاربرد مشتق، خواهیم دید که در تابع هموگرافیک، اگر $ad - bc > 0$ باشد، شاخه‌هایش صعودی و اگر $ad - bc < 0$ باشد، شاخه‌هایش نزولی است و اگر $ad - bc = 0$ شد، اصلاً هموگرافیک نیست!

یک‌نوايي و نامساوي‌ها

گفتیم اگر f صعودی اکید باشد: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$

و اگر f نزولی اکید باشد: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$

حالا از این جهت به موضوع نگاه کنید که اگر تابع f اکیداً صعودی باشد و آن را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند. اما وقتی f اکیداً نزولی است، با حذف آن از دو طرف جهت نامساوی تغییر می‌کند. این‌ها را ببینید:

$$f(a-1) > f(3-a) \xrightarrow{\substack{f \text{ اکیداً صعودی} \\ \text{است}}} a-1 > 3-a \quad (\text{جهت تغییر نکرد})$$

$$f(6x+1) > f(x^2-3) \xrightarrow{\substack{f \text{ اکیداً نزولی} \\ \text{است}}} 6x+1 < x^2-3 \quad (\text{جهت تغییر کرد})$$

آزمون ۲ | اگر $f(a^2+1) < f(3a-1)$ و تابع f اکیداً نزولی باشد، a چند مقدار صحیح را اختیار نمی‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$a^2+1 > 3a-1 \Rightarrow a^2-3a+2 > 0$$

پاسخ ۳ | x تابع f اکیداً نزولی است، پس جهت نامساوی تغییر می‌کند:

$$\xrightarrow{\substack{\text{جمع ضرایب} \\ \text{صفر است}}} a=1 \text{ یا } 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} a & -\infty & 1 & 2 & +\infty \\ \hline & & + & - & + \\ & & \epsilon & & \epsilon \end{array} \Rightarrow a < 1 \text{ یا } a > 2$$

پس a نمی‌تواند ۱ یا ۲ باشد و دو مقدار صحیح را نمی‌پذیرد.

یکنوایی توابع kf , $f \pm g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$

۱ اگر $f(x)$ صعودی باشد، با استفاده از خواص نامساوی می‌توانیم نشان دهیم که $kf(x)$ برای $k > 0$ صعودی و برای $k < 0$ نزولی است.

مثلاً با توجه به صعودی بودن $\sqrt{x}$ ، مطمئن هستیم $2\sqrt{x}$ و $\frac{1}{5}\sqrt{x}$ نیز صعودی‌اند و $-\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{x}$ نزولی‌اند.

۲ اگر f و g هر دو صعودی باشند، $f + g$ نیز صعودی است و در مورد $f \times g$ ، $\frac{f}{g}$ و $f - g$ حکم قطعی نمی‌توان داد.

مثلاً چون $\sqrt[3]{x}$ و 2^x صعودی‌اند، تابع $\sqrt[3]{x} + 2^x$ نیز صعودی است. به عنوان مثال مهم‌تر، $[x]$ صعودی و x نیز صعودی اکید است، پس $x + [x]$ صعودی اکید است.

اشاره ۳ اگر در دو تابع صعودی که با هم جمع می‌شوند، حداقل یکی صعودی اکید باشد، مجموع آن‌ها هم صعودی اکید است.

این حرف‌ها در حالتی که توابع نزولی باشند هم درست است. مثلاً $(\frac{1}{p})^x$ و $-x$ هر دو نزولی هستند. پس $-x + (\frac{1}{p})^x$ نیز نزولی است.

۳ اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f - g$ صعودی و $g - f$ نزولی است.

آزمون ۱ کدام تابع نزولی است؟

۱ $-2x + \frac{1}{x}$ ۲ $(\frac{1}{2})^x + 2^x$ ۳ $\log_{1/5} x + x^2$ ۴ $-\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

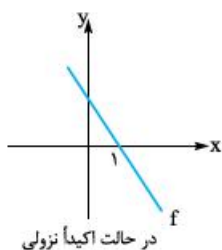
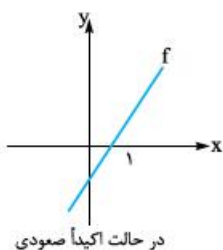
پاسخ ۴

۱ $-2x$ نزولی و $\frac{1}{x}$ غیریکنوا است. پس برای $-2x + \frac{1}{x}$ نظری نداریم.

۲ $(\frac{1}{2})^x$ نزولی و 2^x صعودی است و از مجموع آن‌ها خبر نداریم.

۳ $\log_{1/5} x$ نزولی است و ما را مجبور می‌کند فقط $x > 0$ باشد، برای این x ‌های مثبت x^2 اکیداً صعودی است. پس در مورد مجموع آن‌ها حرفی نمی‌شود زد.

اما در ۴، $-\sqrt{x}$ نزولی است و x ‌های مثبت را قبول می‌کند. $\frac{1}{x}$ هم برای $x > 0$ نزولی است. پس جمع دو تابع نزولی را داریم که نزولی است.



یک تیپ مهم • یک مدل سؤال هم سال‌ها قبل در کنکور آمد که هنوز

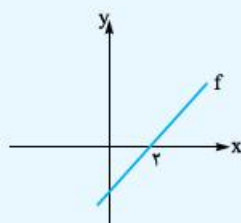
پس‌لرزه‌هایش دیده می‌شود. مثلاً می‌گوید f تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ است و $f(1) = 0$ ، کلید حل تست این است که نمودار f را به شکل روبه‌رو رسم کنیم:

این تست را ببینید:

آزمون ۲ تابعی اکیداً صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ است که محور x را با طول ۲ قطع می‌کند. دامنه $y = \sqrt{xf(x)}$ شامل کدام نیست؟

۱ $(0, 2)$ ۲ $(-\infty, 0)$ ۳ $(2, +\infty)$ ۴ $\emptyset$

پاسخ ۱ گفتیم معنی صورت سؤال این است که نمودار تابع این شکلی می‌شود:



جدول تعیین علامت f		x	$-\infty$	۲	$+\infty$
		f	-	۰	+

و می‌توانیم $xf(x)$ را تعیین علامت کنیم:

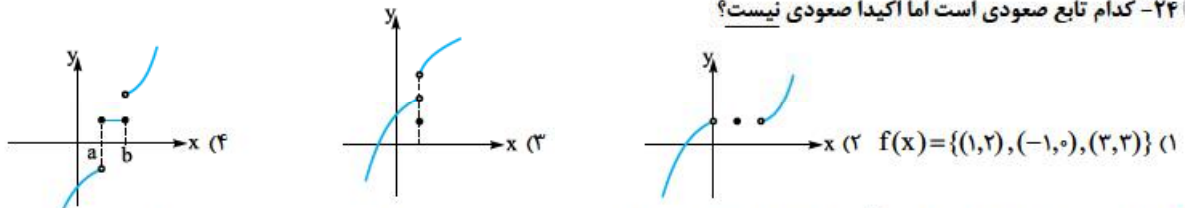
x	$-\infty$	۰	۲	$+\infty$
x	-	۰	+	+
f(x)	-	-	۰	+
xf(x)	+	-	۰	+

یعنی دامنه $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ یا $\mathbb{R} - (0, 2)$ است. پس دامنه شامل $(0, 2)$ نیست.

درس دوم: یکنوایی (توابع صعودی و نزولی)

بررسی یکنوایی تابع

۲۴- کدام تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست؟



۲۵- اگر تابع $f = \{(1, 1), (3, 6), (\sqrt{2}, m^2 - 2), (10, 20)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۶- اگر $f = \{(1, 3a + 1), (-1, a + 1), (2, 4a + 3)\}$ تابعی صعودی باشد، مقادیر a در کدام بازه است؟

(۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $(-\infty, 0)$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $[0, +\infty)$

برای تعیین یکنوایی تابعی که چندضابطه‌ای، قدرمطلق یا برابری هستند، همیشه تابع را رسم می‌کنیم.

۲۷- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$ چگونه است؟

(۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۲۸- کدام یک از توابع زیر در دامنه خود اکیداً صعودی نیست؟

(۱) $f(x) = \frac{|x|}{x} + x$ (۲) $f(x) = 2 - |x - 1|$ (۳) $f(x) = 2x - |x - 1|$ (۴) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$

۲۹- تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x > 1 \\ k & x = 1 \\ +1 & x < 1 \end{cases}$ به ازای چند مقدار صحیح k ، در دامنه‌اش نزولی است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۰- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 3x + a & x < 0 \end{cases}$ بر دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۳۱- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ g(x) & x > -1 \end{cases}$ تابعی نزولی باشد، ضابطه g کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $y = |x|$ (۲) $y = -x^2$ (۳) $y = -|x| - x$ (۴) $y = x + |x|$

(کتاب درسی)

۳۲- یکنوایی تابع $f(x) = x|x| + \frac{x}{|x|}$ در دامنه $\{0\} - (-1, 1)$ چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

۳۳- دو تابع $y = x|x|$ و $y = x + |x|$ در کدام بازه اکیداً صعودی هستند؟

(۱) $[0, 1]$ (۲) $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ (۳) $[0, \frac{1}{2}]$ (۴) $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$

۳۴- تابع $f(x) = |x|(x-1)$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۳۵- تابع $x > 0$ و $f(x) = |x^2 - 2x|$ در بازه (a, b) نزولی اکید است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۳۶- تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

(۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

۳۷- تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-2|$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

(۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

بررسی یکنوایی توابع خاص

۳۸- کدام یک از توابع زیر یک به یک و غیر یکنوا است؟

(۱) $y = 2^x - 2$ (۲) $y = -\log_2 x + 2$ (۳) $y = -2^{-x}$ (۴) $y = \frac{1}{x}$

۳۹- به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = (\frac{2m+1}{4})^x$ نزولی است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار m

۴۰- اگر تابع $f(x) = (a^2 - 3)^x$ در $\mathbb{R}$ هم صعودی و هم نزولی باشد. تابع $g(x) = a^x$ چگونه است؟

(۱) ابتدا صعودی سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی (۳) اکیداً صعودی (۴) اکیداً نزولی

۴۱- تابع $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی، نه نزولی (۴) هم صعودی، هم نزولی

۴۲- تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x^2$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی، نه نزولی (۴) هم صعودی، هم نزولی

در سهمی‌ها، یک سمت رأس صعودی و سمت دیگر رأس نزولی است.

۴۳- تابع $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ روی بازه $[-1, 2]$ چگونه است؟

(۱) ابتدا صعودی سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی (۳) نزولی (۴) صعودی

۴۴- تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x : |x-1| < 2\}$ همواره چگونه است؟

(۱) نزولی (۲) مثبت (۳) صعودی (۴) منفی

۴۵- اگر تابع $f(x) = (\frac{1}{m})x^2 - x + 3$ در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد. محدوده m کدام است؟

(۱) $-2 \leq m < 0$ (۲) $0 < m \leq 2$ (۳) $m \leq -2$ (۴) $m \geq 2$

۴۶- تابع $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 1$ در بازه $[-1, 2]$ غیر یکنوا است. بازه m کدام است؟

(۱) $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$ (۲) $-1 < m < \frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$

۴۷- اگر تابع $f(x) = (a-2)x^2 + 2ax + 3$ همواره یکنوا باشد. $f(2)$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

تابع همواره افیک. هیچ گاه یکنوا نیست. مگر این که دامنه تابع محدود شده باشد.

۴۸- تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ مفروض است. در کدام یک از بازه‌های زیر برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه رابطه $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ برقرار است؟

(۱) $(-3, -1)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۴۹- تابع $f(x) = \frac{-1}{x-2}$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار صحیح a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

(سراسری ۹۸)

(خارج ۹۸)

(کتاب درسی)

۵۰- کدام یک از توابع زیر در بازه $(-2, +\infty)$ اکیداً صعودی است؟

(۱) $y = \frac{x-1}{x+3}$ (۲) $y = \frac{2x-3}{x+1}$ (۳) $y = \frac{x+1}{x-2}$ (۴) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

۵۱- اگر در بازه $(1, +\infty)$ تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x-a}$ اکیداً یکنوا باشد، حدود a کدام است؟

(۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $(-\infty, 2) - \{-2\}$ (۴) $(-\infty, 2] - \{-2\}$

برای حل بقیه تست‌ها بهتر است، به مفهوم صعودی و نزولی بودن، توجه کنید.

۵۲- اگر f یک تابع اکیداً نزولی بوده و $f(3) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(۱) $[0, 3]$ (۲) $\mathbb{R} - (0, 3)$ (۳) $(-\infty, 3]$ (۴) $[3, +\infty)$

۵۳- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(2) = 0$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

شمار اکیداً صعودی‌ها: هر که x باش بیشتر، y باش بیشتر

۵۴- اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(1+a) > f(3-2a)$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار صحیح a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲

۵۵- اگر $g(x) = \sqrt{f(2x+1)} - f(x-2)$ و f اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع $g(x)$ کدام است؟

(۱) $[-3, +\infty)$ (۲) $(-3, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -3]$ (۴) $(-\infty, -3)$

۵۶- اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(\frac{1}{x}) - f(x)}$ به کدام صورت است؟

(۱) $\mathbb{R} - (-1, 1)$ (۲) $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (۳) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

۵۷- اگر $f(x) = \frac{1-x}{x}$ ، آن‌گاه در کدام یک از بازه‌های زیر نمودار تابع $y = f(1+x^2)$ بالای نمودار تابع $y = f(3+x^2)$ قرار دارد؟

(۱) $(0, \sqrt{2})$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $(-2, -\sqrt{2})$

۵۸- چندتا از عبارات زیر درست است؟

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است.

ب) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

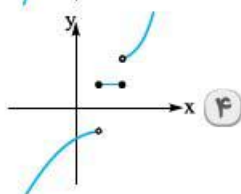
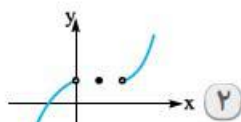
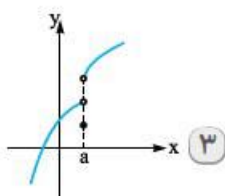
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹- تابع $f(x) = |a+x^3|$ در بازه $(-\infty, a-2)$ نزولی است. چند عدد طبیعی در مجموعه مقادیر a وجود دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۶۰- در مورد تابع $y = (-\sqrt{1-2^{5-x}})^5$ کدام درست است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) غیریکنوا (۴) ثابت



در ۲ تابع اکیداً صعودی است. در ۳ چون در $x=a$ مقدار تابع نسبت به نقاط همسایگی چپ کم‌تر شده (نقطهٔ توپر) تابع نه صعودی است و نه نزولی ولی صعودی است، اکیداً صعودی نیست چون تابع در بازهٔ $[a, b]$ ثابت است.

۲۵. گزینه ۲ می‌دانیم در یک تابع اکیداً صعودی اگر x زیاد شود، y زیاد می‌شود؛ یعنی $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ ، پس بهتر است زوج مرتب‌های تابع f را به ترتیب صعودی برحسب x مرتب کنیم:

$$f = \{(1, 1), (\sqrt{2}, m^2 - 2), (3, 6), (10, 20)\}$$

$x = \sqrt{2}$ بین $1 < \sqrt{2} < 3$ است. پس باید $f(1) < f(\sqrt{2}) < f(3)$ باشد:

$$1 < m^2 - 2 < 6 \Rightarrow 3 < m^2 < 8 \Rightarrow \sqrt{3} < |m| < 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < m < 2\sqrt{2} \Rightarrow m = \text{مقدار صحیح} = 2 \\ -2\sqrt{2} < m < -\sqrt{3} \Rightarrow m = \text{مقدار صحیح} = -2 \end{cases}$$

پس حدود m شامل دو عدد صحیح است.

۲۶. گزینه ۴

تابع $f = \{(1, 3a+1), (-1, a+1), (2, 4a+3)\}$ اگر بخواهد صعودی باشد باید با افزایش مقدار x مقدار y زیاد شود (یا ثابت بماند)، پس:

$$\begin{aligned} -1 < 1 &\Rightarrow a+1 \leq 3a+1 \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \\ -1 < 2 &\Rightarrow a+1 \leq 4a+3 \Rightarrow 3a \geq -2 \Rightarrow a \geq -\frac{2}{3} \\ 1 < 2 &\Rightarrow 3a+1 \leq 4a+3 \Rightarrow a \geq -2 \end{aligned}$$



حالا با اشتراک این‌ها داریم:

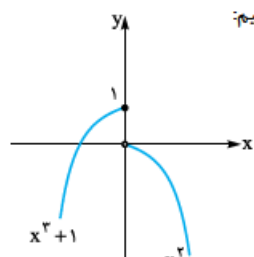
پس جواب می‌شود $a \geq 0$.

۲۷. گزینه ۳

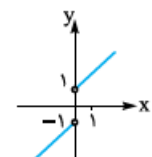
اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی و سپس

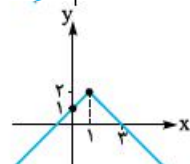
نزولی است.



۲۸. گزینه ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



$$f(x) = \frac{|x|}{x} + x = \begin{cases} 1+x & x \geq 0 \\ -1+x & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$



$$f(x) = 2 - |x-1| \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & x \geq 1 \\ x+1 & x < 1 \end{cases}$$

۲۹. گزینه ۴ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(1) f = \{(-1, 0), (1, 2), (3, 3)\}$$

با افزایش x مقدار y هم زیاد شده پس اکیداً صعودی است.

۳۲. گزینه ۱ | اول ضابطه تابع $f(x) = x|x| + \frac{x}{|x|}$ را به ازای $x > 0$ و

$x < 0$ ساده می‌کنیم: (حواسمان هست که $x = 0$ در دامنه نیست)

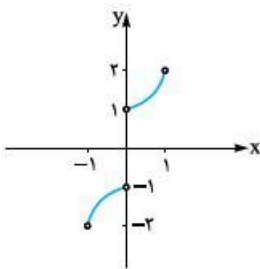
$$x > 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 \quad x < 0 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 1$$

حالا نمودار تابع را در بازه $(-1, 1)$ رسم

می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل می‌بینیم تابع در

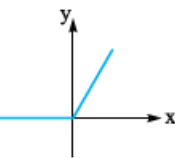
بازه $(-1, 1)$ صعودی (اکید) است.



۳۳. گزینه ۴ | نمودار هر دو تابع را در بازه $[0, 3]$ (بازه‌ای که شامل تمام

گزینه‌ها باشد) رسم می‌کنیم:

$$y = x[x] = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x & 1 \leq x < 2 \\ 2x & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



$$y = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

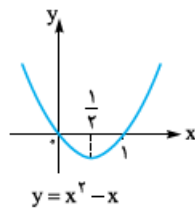
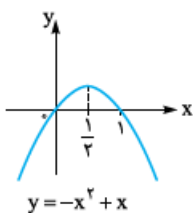
تابع $y = x + |x|$ به ازای $x \geq 0$ صعودی اکید است. پس فقط کافی است تابع

$y = x[x]$ را بررسی کنیم. تابع $y = x[x]$ در بازه $[0, 1)$ ثابت است پس باید

بازه‌ای را انتخاب کنیم که شامل قسمتی از بازه $[0, 1)$ نباشد. یعنی بازه $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$.

۳۴. گزینه ۲ | نمودار تابع $y = |x|(x-1)$ را رسم می‌کنیم:

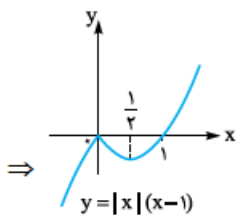
$$\begin{aligned} x < 0 &\Rightarrow y = -x^2 + x \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & x < 0 \\ x^2 - x & x \geq 0 \end{cases} \\ x \geq 0 &\Rightarrow y = x^2 - x \end{aligned}$$



با توجه به نمودار، تابع در بازه $[0, \frac{1}{4}]$ نزولی

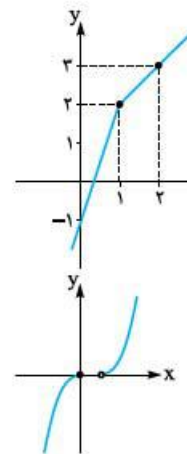
اکید است پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر

$$\frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$



۳۵. گزینه ۳ | نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم می‌کنیم:

$$f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$



$$f(x) = 2x - |x-1|$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$$

با توجه به نمودارها، تابع $f(x) = 2 - |x-1|$ غیریکتوا است و بقیه تابع‌ها صعودی اکید هستند.

۲۹. گزینه ۳ | اول نمودار تابع را

رسم می‌کنیم:

حالا با توجه به نمودار تابع برای این که تابع

نزولی باشد باید $-2 \leq f(1) = k \leq 1$

باشد، پس $-2 \leq k \leq 1$ و مقادیر صحیح

k عبارتند از $-2, -1, 0, 1$ یعنی چهار

مقدار صحیح.

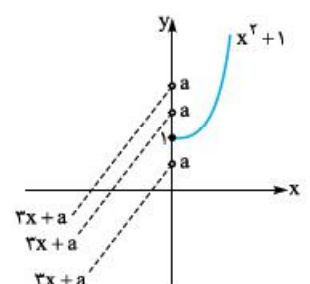
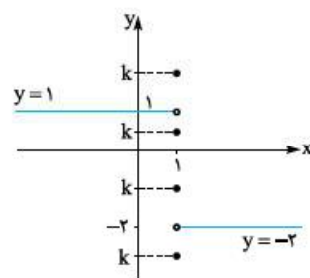
۳۰. گزینه ۲ | اول نمودار تابع را

رسم می‌کنیم:

حالا با توجه به نمودار برای این که تابع

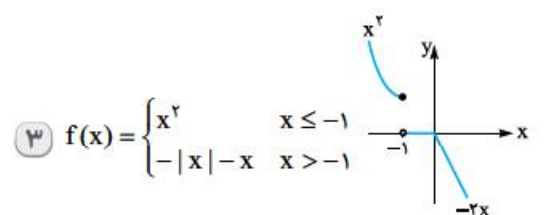
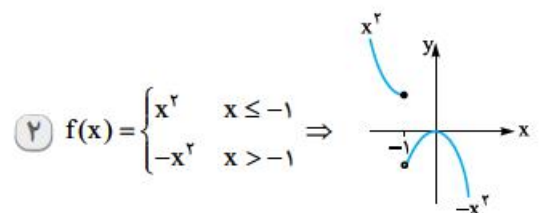
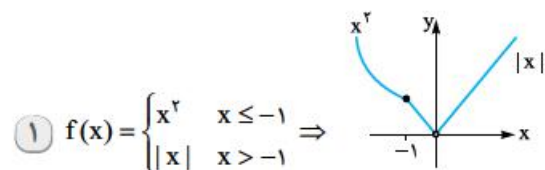
در دامنه‌اش صعودی اکید باشد، حداکثر

a می‌تواند برابر ۱ باشد.



۳۱. گزینه ۳ | نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ g(x) & x > -1 \end{cases}$ را به ازای هر کدام

از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:



می‌بینیم که تابع f به ازای (۳) نزولی است پس جواب می‌شود (۳)، نمودار

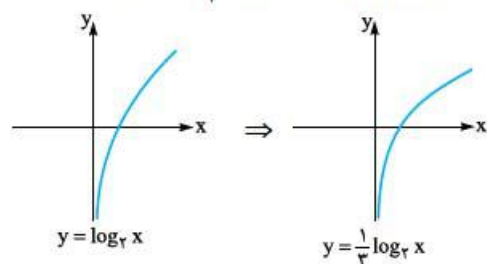
را هم خودتان رسم کنید! (۴)

۴۰. گزینه ۳ | تابع ثابت یعنی $f(x) = k$ و تابع $f(x) = (a^x - 2)^x$ وقتی ثابت است که $a^x - 2 = 1$ باشد پس $a^x = 4$ و در نتیجه $a = 2$ یا $a = -2$. حالا برای تابع $g(x) = a^x$ مقدار $a = -2$ غیر قابل قبول است پس $g(x) = 2^x$ و در نتیجه تابع g ، صعودی اکید است.

۴۱. گزینه ۱ |

راه I | ضابطه تابع را با استفاده از رابطه $\log_b a^n = n \log_b a$ ($a > 0$)

ساده و نمودار تابع را رسم می کنیم: $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \log_2 x$



با توجه به شکل تابع اکیداً صعودی است.

راه II | تابع $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$ را می توانیم به شکل ترکیب دو تابع

$f(x) = (g \circ h)(x)$ یعنی $g(x) = \log_2 x$ و $h(x) = \sqrt[3]{x}$ حالا در g ، h و $g \circ h$ هر دو صعودی اکیدند پس $g \circ h$ هم اکیداً صعودی است.

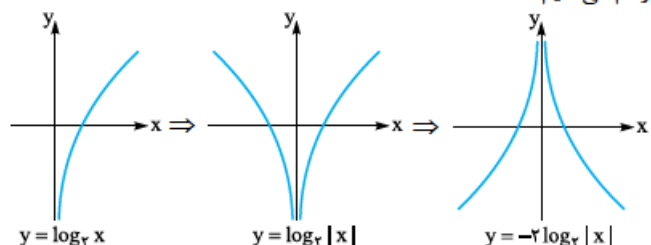
۴۲. گزینه ۳ | راه II | اولاً با استفاده از رابطه $\log_b a^n = n \log_b a$

(با شرط $a > 0$) می توانیم بنویسیم:

$$f(x) = \log_{2/5} x^2 = 2 \log_{2/5} |x| = 2 \log_{\frac{1}{2/5}} |x| = -2 \log_2 |x|$$

حالا نمودار تابع $y = -2 \log_2 |x|$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \log_2 x$

رسم می کنیم:



با توجه به نمودار، تابع نه صعودی است و نه نزولی.

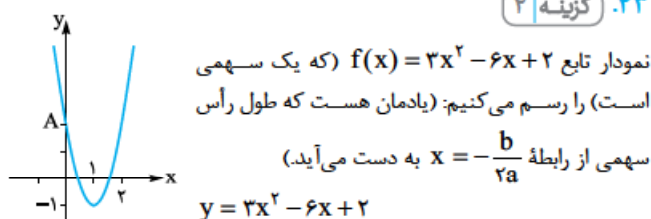
راه II | اگر دو تابع $h(x) = x^2$ و $g(x) = \log_{2/5} x$ را در نظر بگیریم

است. $f(x) = (g \circ h)(x) = \log_{2/5} x^2$

تابع $g(x) = \log_{2/5} x$ نزولی است (چون $0 < 2/5 < 1$ است) و تابع درونی

$h(x) = x^2$ نه صعودی است و نه نزولی، پس $g \circ h$ هم نه صعودی است و نه نزولی.

۴۳. گزینه ۲ |

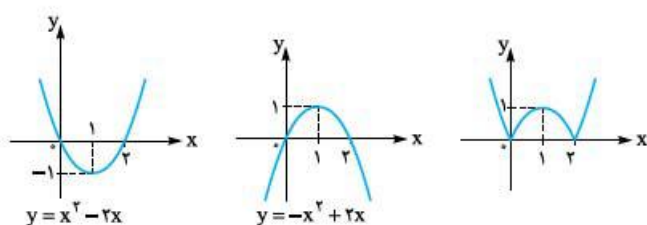


نمودار تابع $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ (که یک سهمی است) را رسم می کنیم: (یادمان هست که طول رأس

سهمی از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می آید.)

$$x_S = -\frac{-6}{2 \times 3} = \frac{6}{6} \Rightarrow x_S = 1 \Rightarrow y_S = 3 - 6 + 2 = -1 \Rightarrow S(1, -1)$$

نقطه برخورد با محور y : $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$



پس تابع در $(1, 2)$ نزولی است و $b - a = 2 - 1 = 1$.

۳۶. گزینه ۱ | نمودار تابع را رسم می کنیم:

$$f(x) = |x + 2| + |x - 1|$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} -3 & -2 & 1 & 2 \\ \hline 5 & 3 & 3 & 5 \end{array}$$

حالا طبق نمودار تابع در بازه $(-\infty, -2]$

اکیداً نزولی است.

۳۷. گزینه ۳ | نمودار تابع را رسم می کنیم:

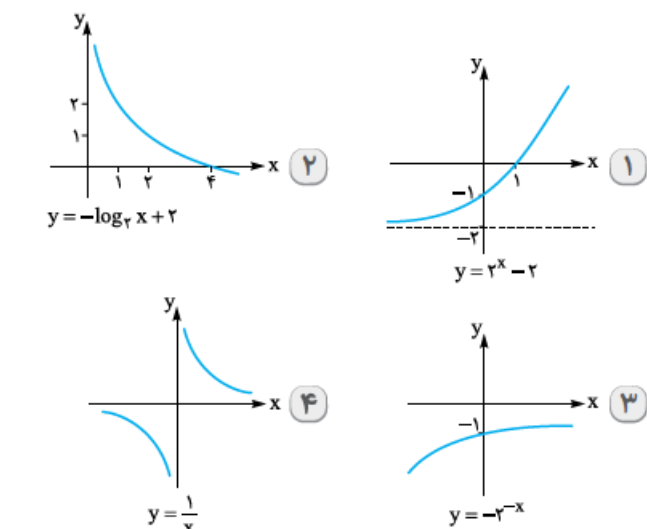
$$f(x) = |x + 1| - |x - 2|$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} -2 & -1 & 2 & 3 \\ \hline -3 & -3 & 3 & 3 \end{array}$$

حالا طبق نمودار تابع در بازه $[-1, 2]$ اکیداً

صعودی است.

۳۸. گزینه ۴ | نمودار هر کدام از تابع ها را رسم می کنیم:



حالا با توجه به نمودارها، تابع $y = \frac{1}{x}$ غیر یکنوا و یک به یک است. در درس نامه

هم داشتیم که تابع هموگرافیک (و از جمله $\frac{1}{x}$ و $-\frac{1}{x}$) غیر یکنوا هستند.

۳۹. گزینه ۲ | می دانیم تابع $f(x) = a^x$ به ازای $0 < a < 1$ ، نزولی اکید

است و از طرفی تابع به ازای $f(x) = 1$ و $f(x) = 0$ هم نزولی (ثابت) است. پس

در تابع $f(x) = (\frac{3m+1}{4})^x$ باید داشته باشیم:

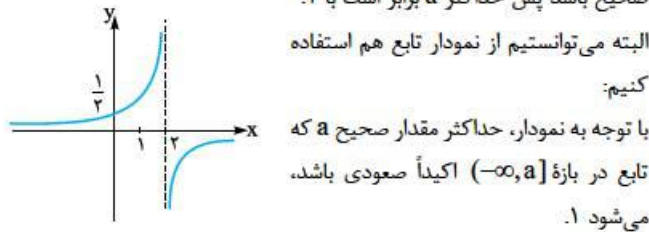
$$0 \leq \frac{3m+1}{4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 3m+1 \leq 4$$

$$\Rightarrow -1 \leq 3m \leq 3 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$$

مقادیر صحیح بازه $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ عبارتند از $m = 0$ و $m = 1$ یعنی دو مقدار

صحیح.

۴۹. گزینه ۱ می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{-1}{x-2}$ در همسایگی ریشهٔ مخرجش (مجاوب قائمش) به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند. پس برای این که تابع در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً صعودی باشد باید a را طوری انتخاب کنیم که بازه $(-\infty, a]$ شامل عدد ۲ (یعنی ریشهٔ مخرج) نشود و چون قرار است a عدد صحیح باشد پس حداکثر a برابر است با ۱.



۵۰. گزینه ۱ طبق آنچه در سؤال قبل دیدیم ریشهٔ مخرج تابع باید در بازه $(-2, +\infty)$ قرار نداشته باشد و با این حساب فقط **۱** یعنی $y = \frac{x-1}{x+3}$ قابل قبول است.

۵۱. گزینه ۴ گفتیم ریشهٔ مخرج در دست می‌کند. پس الان $\frac{a}{y} \leq 1$ یعنی ریشهٔ مخرج نباید در فاصله $(1, +\infty)$ باشد. پس داریم: $\frac{a}{y} \leq 1$ و در نتیجه $a \leq 2$. اما دقت کنید که اگر $a = -2$ باشد، اصلاً تابع هموگرافیک نداریم:

$$\begin{aligned} a = -2 \rightarrow f(x) &= \frac{x+1}{2x-(-2)} \\ &= \frac{x+1}{2x+2} = \frac{x+1}{2(x+1)} = \frac{1}{2}, (x \neq -1) \end{aligned}$$

پس در این حالت، f به تابعی ثابت تبدیل می‌شود که اکیداً یکنوا نیست. جواب کامل‌تر $a \leq 2$ به جز $a = -2$ است. یعنی $\{-2\} - (-\infty, 2]$.

۵۲. گزینه ۱ | راه II یک تابع نزولی اکید است و $f(3) = 0$: پس اگر یک نمودار فرضی برای f رسم کنیم: نتیجه می‌گیریم برای $x < 3$ مقدار f مثبت و برای $x > 3$ مقدار f منفی است. حالا برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ عبارت $xf(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f(x)$		+	+	-
x	-	-	+	+
$xf(x)$	-	-	+	-

راه II می‌توانیم برای f یک تابع مثال بزنیم. ساده‌ترین تابع، تابع خطی است پس $f(x) = -x + 3$ را در نظر می‌گیریم ($+3$ را برای این نوشتیم که تابع محور x ها را در نقطه $x = 3$ قطع کند). حالا دامنهٔ تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$x(-x+3) \geq 0$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
تعیین علامت		-	+	-

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 3$

۵۳. گزینه ۱ | راه II f تابعی صعودی است پس از $f(2) = 0$ نتیجه می‌گیریم:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	-	+	

حالا با توجه به نمودار، تابع در بازه $[-1, 1]$ نزولی و در بازه $[1, 2]$ صعودی است: پس تابع روی بازه $[-1, 2]$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

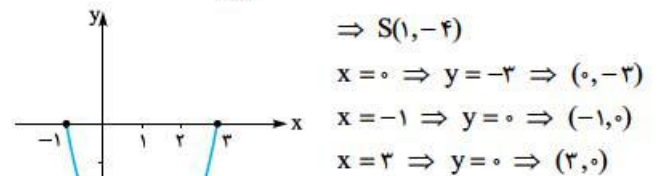
۴۴. گزینه ۴ اول دامنهٔ $\{x : |x-1| < 2\}$ را ساده می‌کنیم:

$$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

حالا نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x - 3$ را رسم می‌کنیم:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$x = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 - 3 = -4$$



$$\Rightarrow S(1, -4)$$

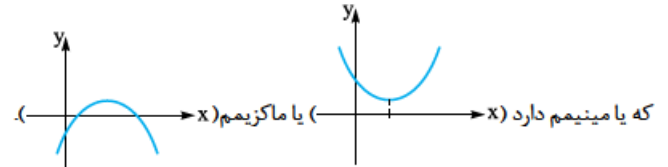
$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (3, 0)$$

حالا با توجه به شکل، تابع در بازه $[-1, 3]$ همواره منفی است.

۴۵. گزینه ۲ نمودار تابع $f(x) = \left(\frac{1}{m}\right)x^2 - x + 3$ یک سهمی است



پس در صورتی می‌تواند در بازه $[1, +\infty)$ صعودی باشد که اولاً مینیمم داشته باشد و ثانیاً ($1 \leq$ طول رأس) باشد، برقراری این دو شرط را بررسی می‌کنیم:

$$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$1 \leq \text{طول رأس} \Rightarrow -\frac{1}{2\left(\frac{1}{m}\right)} \leq 1 \Rightarrow \frac{m}{2} \leq 1 \xrightarrow{m>0} m \leq 2$$

پس باید $0 < m \leq 2$ باشد.

۴۶. گزینه ۴ نمودار تابع $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 1$ یک سهمی است پس به شرطی در بازه $[-1, 2]$ غیریکنواست که طول رأس سهمی بین -1 و 2 باشد: (طول رأس سهمی برابر بود با $-\frac{b}{2a}$)

$$-1 < -\frac{-(2m+1)}{2(1)} < 2 \Rightarrow -1 < \frac{2m+1}{2} < 2$$

$$\Rightarrow -2 < 2m+1 < 4 \Rightarrow -3 < 2m < 3 \Rightarrow \frac{-3}{2} < m < \frac{3}{2}$$

۴۷. گزینه ۴ تابع $f(x) = (a-2)x^2 + 2ax + 3$ یک تابع درجه دوم است پس نمی‌تواند یکنوا باشد. پس برای یکنوا بودن تابع باید جمله x^2 حذف شود یعنی $a-2 = 0$ پس $a = 2$ و در نتیجه:

$$f(x) = 4x + 3 \Rightarrow f(2) = 4(2) + 3 = 11$$

۴۸. گزینه ۴ عبارت «برای هر x_1 و x_2 عضو

این بازه رابطه $f(x_1) > f(x_2)$ برقرار باشد، یعنی می‌خواهیم بازه‌ای را پیدا کنیم که

تابع در آن بازه نزولی اکید باشد. برای پیدا کردن این بازه، تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار، تابع در بازه $(0, +\infty)$ نزولی اکید است پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که زیرمجموعهٔ این بازه باشد که می‌شود بازه $(0, 1)$.



۵۸. گزینه ۲ از بین گزاره‌ها، (ب) و (پ) همواره درست است؛ چون اگر f

صعودی اکید و g صعودی باشد، داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_1 > x_2 &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ x_1 > x_2 &\Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 > x_2$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_1) > (f+g)(x_2)$$

اشاره اگر g نزولی باشد، $-g$ صعودی است.

برای نشان دادن نادرستی گزاره‌های دیگر مثال نقض می‌آوریم:

(الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2x+3 \text{ صعودی} \\ g(x) &= -x \text{ نزولی} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f+g)(x) = x+3 \text{ صعودی}$$

(ت) اگر تابع f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f \times g$ صعودی اکید است:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2x+3 \text{ صعودی اکید} \\ g(x) &= -3 \text{ ثابت} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f \times g)(x) = -6x-9 \text{ نزولی اکید}$$

اگر توجه کنید، دو گزاره (ب) و (پ) در حقیقت یکسان‌اند:

(ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

(پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

بگویید چرا این دو گزاره یکسان‌اند؟!

۵۹. گزینه ۲ نمودار f را رسم می‌کنیم باید بازه $(-\infty, a-2)$ زیرمجموعه‌ای از بازه $(-\infty, -\sqrt{a})$ باشد، یعنی:

$$a-2 \leq -\sqrt{a} \Rightarrow a + \sqrt{a} - 2 \leq 0$$

برای تجزیه عبارت سمت چپ، دقت کنید که $a=1$ یکی از ریشه‌های نامعاده است و داریم:

$$(a-1) + (\sqrt{a}-1) \leq 0 \Rightarrow (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}^2 + \sqrt{a} + 2) \leq 0$$

مثبت

پس تنها مقدار طبیعی a برابر ۱ است.

۶۰. گزینه ۲ $5-x$ نزولی است، پایه ۲ صعودی است که ضریب منفی،

آن را نزولی می‌کند. $\sqrt{\quad}$ و توان ۵ صعودی‌اند و یک منفی در پشت رادیکال داریم که نزولی است. پس ۳ تا عامل نزولی داریم که ضریبشان $(-)$ می‌شود و تابع در کل نزولی است.

این‌طور هم می‌توانیم بنویسیم:

$$y = (-\sqrt{1-x})^5$$

$\ominus \oplus \oplus \oplus \oplus \Rightarrow \ominus$ نزولی

حالا عبارت $(x^2-x)f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$		-	-	-	+
(x^2-x)		+	-	+	+
$(x^2-x)f(x)$		-	+	-	+

دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2-x)f(x)}$ برابر بازه‌ای است که $(x^2-x)f(x) \geq 0$ باشد، پس طبق جدول می‌شود $[0,1] \cup [2,+\infty)$ که شامل تمام اعداد طبیعی هست.

راه II می‌توانیم برای f یک تابع ساده (مثلاً خطی) مثال بزنیم که اکیداً صعودی باشد و محور طول‌ها را در نقطه $x=2$ قطع کند یعنی $f(x) = x-2$.

حالا دامنه تابع $y = \sqrt{(x^2-x)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y = \sqrt{(x^2-x)(x-2)} = \sqrt{x(x-1)(x-2)}$$

$$x(x-1)(x-2) \geq 0$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
تعیین علامت		-	+	-	+

پس دامنه تابع برابر است با $[0,1] \cup [2,+\infty)$ که شامل تمام اعداد طبیعی هست.

۵۴. گزینه ۲ می‌دانیم در یک تابع صعودی اگر $f(x_1) > f(x_2)$ باشد

حتماً داریم $x_1 > x_2$ ، پس: $f(3-2a) > f(1+a) \Rightarrow 3-2a > 1+a$

$$\Rightarrow 2a < 2 \Rightarrow a < \frac{2}{2}$$

و حالا که $a < \frac{2}{2}$ است، بزرگ‌ترین مقدار صحیح a برابر صفر است.

۵۵. گزینه ۳ راه I فب شرط دامنه رادیکال چی بود؟ باید زیر رادیکال

$$f(2x+1) - f(x-2) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(2x+1) \geq f(x-2) \Rightarrow 2x+1 \leq x-2$$

$$\Rightarrow x \leq -3 \Rightarrow D = (-\infty, -3]$$

عددگذاری f نزولی است، پس $f(1) - f(-2)$ منفی است و $x=0$ در

$g(x)$ نمی‌خورد. یعنی گزینه‌های شامل صفر غلط هستند (۱) و (۲) نیست. به ازای $x=-3$ زیر رادیکال صفر است که مشکلی ندارد؛ پس خود -3 هست (۴) نیست.

۵۶. گزینه ۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) \geq f(x)$$

$f(x) = 2^x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف f ها، علامت برنمی‌گردد.

$$\frac{1}{x} \geq x$$

نامعادله به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x} \geq 0$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

	-1	0	1	
کل	+	-	+	-
جواب	+	-	+	-

۵۷. گزینه ۱ تابع f در $(0, +\infty)$ نزولی اکید است، پس:

$$f(1+x^2) > f(3+x^2) \Rightarrow 1+x^2 < 3+x^2 \Rightarrow x^2 - x^2 - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-2) < 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

حالا چون نامعادله را در بازه $(0, +\infty)$ حل کردیم جواب می‌شود $0 < x < \sqrt{2}$.