

دوست خوبم، سلام!

ماها (منظورم من، شما و بقیه هموطنان عزیزمان است) عادت داریم خیلی قربان صدقه خودمان برویم. به عنوان نمونه، تقریباً همه‌مان معتقدیم که ایرانی‌ها از باهوش‌ترین مردم جهان هستند. دلایلش را هم کسانی مثل خیام، خوارزمی، کوروش، پروفیسور رضا، پروفیسور سمیعی، پروفیسور میرزاخانی و ... می‌دانیم. اما بیایید با هم نگاهی به آخرین نتایج بررسی میزان هوش در کشورهای جهان بیندازیم:

فهرست_کشورها_بر_پایه_بهره_هوشی https://fa.wikipedia.org/wiki/فهرست_کشورها_بر_پایه_بهره_هوشی

ایران با کسب ۸۴ امتیاز در رتبه بیست و سوم قرار گرفته است (دقت کنید که رتبه‌مان ۲۳ است و چون خیلی از کشورها رتبه یکسان دارند حدود ۹۰ کشور بالاتر از ما قرار می‌گیرند) و در ابتدای جدول، کشور سنگاپور با ۱۰۸ امتیاز رتبه ۱ و در انتهای جدول کشور گینه استوایی با ۵۹ امتیاز رتبه ۴۳ را کسب کرده است.

خب، پس چه شد؟! چرا همه‌مان فکر می‌کنیم خیلی باهوشیم؟

نام این کتاب «ریاضی هفتم تیزهوشان» است و شما که تهیه‌اش کرده‌اید هدف‌تان این بوده است که ریاضی را در سطحی بالاتر از کتاب درسی یاد بگیرید و عمیق‌تر و جدی‌تر کار کنید. راستش را بخواهید نکته اصلی همین است. پنج کشور اول فهرست کشورها براساس بهره‌هوشی همگی متعلق به شرق آسیا هستند. این کشورها حدود ۱۰۰ تا ۱۵۰ سال قبل از این، چنین جایگاهی نداشته‌اند. کار کردند، مطالعه کردند، یاد گرفتند و مهم‌تر از همه با برنامه، انگیزه و دقت زمینه پیشرفت جدی خود را فراهم کردند. خوشبختانه شما در سنی هستید که بسیار فرصت دارید که هر چه‌قدر که بخواهید جلو بروید، رشد کنید و بهتر شوید. در این نقطه، مهم این نیست که چه‌قدر تیزهوش هستید، مهم این است که با جدیت و انگیزه، برنامه خوبی برای خودتان بریزید.

امیدوارم این کتاب دوست خوبی در این راه برای‌تان باشد.

منتظر نظرات خوبتان هستیم.

شاد و پیروز باشید

به نام حق!

الان که دارم این متن رو می‌نویسم، ساعت حدوداً ۳ صبحه، مثل خیلی از شبایی که برای تألیف این کتاب بیدار موندم. البته این بیدار موندنه هیچ‌وقت زوری نبود، چون تقریباً هیچ‌وقت نمی‌فهمیدم کی صبح شد! 😊

اما حالا بالاخره بعد از ۱۴ ماه تلاش شبانه‌روزی من و مجموعه کم‌نظیر خیلی‌سبز، کتاب ریاضی تیزهوشان هفتم آماده شد. حالا ویژگی‌های این کتاب چیه اصلاً؟ **اول:** تا جایی که تونستیم درس‌نامه‌ها رو کامل و به زبان ساده نوشتیم، یعنی تقریباً مطمئنیم نکته‌ای نیست که در کتاب درسی و مهم‌تر از اون، آزمون‌های تیزهوشان مطرح شده باشه و ما بهش نپرداخته باشیم.

دوم: در چینش سؤالات و مرتب و منظم بودن سطوحشون از آسون به سخت خیلی وسواس به خرج دادیم، چون معتقدیم که این کار در جهت‌دهی به ذهن خواننده و تولید یه ذهن منظم خیلی مؤثره.

سوم: حواسمون خیلی به آپدیت‌بودن کتاب جمع بوده و تا جایی که تونستیم سعی کردیم سؤالات همه آزمون‌ها و مسابقات مهم و پرمخاطب تیزهوشانی خیلی جدید و البته قدیمی‌تر رو هم در بین سؤالات هر فصل مطرح کنیم.

چهارم: پاسخ تست‌ها! روی نوشتن پاسخ تست‌ها خیلی فکر شده و به تبع کامل‌ترین و روان‌ترین پاسخی که برای هر تست می‌تونستیم ارائه بدیم رو نوشتیم، به جرأت می‌تونم بگم، کامل‌تر از این رو جایی نمی‌تونید پیدا کنید، بخونید، حتماً متوجه می‌شید ... 😊
توصیه می‌کنم به هر فصل که می‌رسید اول درس‌نامه اول فصل رو با صبر و حوصله و البته دقت زیاد بخونید، مثال‌های درس‌نامه رو اول خودتون سعی کنید حل کنید و بعد چه حل شد، چه حل نشد، پاسخ مثال رو بخونید.

برای حل تست‌های هر فصل هم مثل درس‌نامه حوصله و دقت به خرج بدید، چون این کتاب کم تست ترکیبی و سخت نداره که حلشون جز با این دو مورد که گفتم، میسر نمی‌شه. مشخصاً در بین تست‌ها یک سری حل می‌شن و یک سری هم نه، تکلیف اونایی که حل نمی‌شن که مشخصه، به پاسخ‌نامه (جلد دوم) مراجعه می‌کنید و جواب رو بازم با حوصله می‌خونید، اما به نظرم بد نیست پاسخ اون تستایی که خودتون موفق به حلشون می‌شید رو هم تو پاسخ‌نامه یه بار ببینید، چون ممکنه راه‌حلهامون با هم فرق داشته باشه و این موضوع باعث بشه شما یه راه دیگه هم یاد بگیرید.

خب این هم از توصیه‌های من به شما دانش‌آموزای گل، اما نوبتی هم باشه نوبت تشکر از عزیزانی هست که من رو در نوشتن این کتاب یاری کردن. می‌خوام به تشکر خیلی‌خیلی صمیمانه کنم از:

- دکتر ابودر نصری و دکتر کمیل نصری که به من اعتماد کردن و فرصت خیلی‌سبزی شدن رو به من دادند.
- دکتر کوروش اسلامی؛ که مثل پدری پر ایهت و جدی اما دلسوز من رو در چگونگی تألیف و تشکیل ساختار کلی کتاب راهنمایی کردند. به حق این مرد خیلی با جذبه هست. 😊

- جناب آقای علی باقری؛ که در هر شرایطی خیلی برای من و کتاب وقت گذاشتن و تک‌تک فصل‌ها رو با هم نقد و بررسی کردیم و ایراداتشون رو برطرف کردیم. آقای باقری در طول مدت تألیف دقیقاً مثل یه برادر بزرگ‌تر هوام رو داشت و بهم خیلی کمک کرد، دمش گرم! 😊
- استاد محمود امیری؛ مرد خوش‌فکر ریاضیات با کوله‌باری از تجربه که نظرات ایشون خیلی در بهترشدن کتاب، چه از لحاظ محتوا و چه از لحاظ ساختار به من کمک کرد.

- جناب آقای پیمان اکبری؛ که معرف بنده به مجموعه خیلی‌سبز بودند، دستشون درد نکنه.
- خانم‌ها پریسا علی‌محمدی، پریسا حبیبی و مینا محمدی؛ که بسیار در امر بازخوانی و ویراستاری کتاب کمک کردند.
- خانم مرادی؛ که مسئولیت پیگیری امور مربوط به تهیه و تولید فصل‌ها و کتاب را داشتند و البته مسئولیت تحمل بدقولی‌های بنده رو. 😊
- اساتید ایده‌پرداز! جناب آقایان دکتر محمد داوری، دکتر صابر یآوری و دکتر حسین سلیمی که همواره از ایده‌های ناب این عزیزان چه در مراحل تألیف کتاب و چه در مراحل مختلف زندگی بهره بردم.

- از عزیزانی که با تماس‌های خود در رفع اشکالات این کتاب در چاپ جدید ما را یاری کردند: علیرضا علیزاده، مانا فرهنگ و محمدفواد زراعتگر و دیگر عزیزانی که بنده رو در تألیف این کتاب کمک کردند.

در پایان می‌خوام یه تشکر ویژه هم بکنم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مهریار راشدی ...
گاهی اوقات یه آدمایی تو زندگی ماها میان که خیلی چیزها ازشون یاد می‌گیریم. دکتر راشدی یکی از اون آدم‌های زندگی من هست که در کنار استفاده از نظرات و راهنمایی‌های به‌جا و دقیق ایشان در زمینه تألیف کتاب، کلی درس دیگه هم یاد گرفتیم. خصوصاً درس اخلاق و مردونگی. خوش به حال شاگردا و دوستای دکتر و البته خوش به حال من. 😊

خیلی دقت کردیم بی‌نقص باشیم اما مثل خیلی از کتاب‌های دیگه به احتمال زیاد این کتاب هم بدون ایراد نیست. خوشحال می‌شیم اگر ما رو در جریان ایرادات احتمالی و یا کلاً نظرات، پیشنهادات و انتقادات خودتون قرار بدید.

دلنون سبز باشه و لبتون خندون

فهرست



- فصل اول: راهبردهای حل مسئله ۷
- فصل دوم: عددهای صحیح ۳۱
- فصل سوم: جبر و معادله ۶۴
- فصل چهارم: هندسه و استدلال ۱۱۵
- فصل پنجم: شمارنده‌ها و اعداد اول ۱۶۲
- فصل ششم: سطح و حجم ۱۹۹
- فصل هفتم: توان و جذر ۲۲۸
- فصل هشتم: بردار و مختصات ۲۷۳
- فصل نهم: آمار و احتمال ۳۰۵



هندسه و استدلال

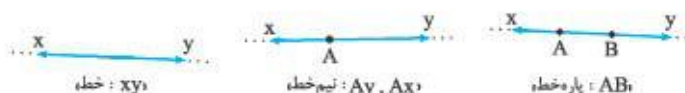
فصل ۴



در سال‌های چهارم، پنجم و ششم با برخی از مفاهیم و شکل‌های هندسی و خواص آن‌ها مثل خط، نیم‌خط، پاره‌خط، زاویه، توازی، مساحت، تقارن، چندضلعی‌ها و مجموع زوایای آن‌ها و ... آشنا شدید. مبحث هندسه را از امسال تا آخرین سال تحصیل دوره متوسطه دوم در کتاب‌های درسی‌تان می‌بینید؛ پس اگر می‌خواهید از این درس عقب نمانید باید از همین الان که شکل جدی‌تری نسبت به سال‌های قبل به خودش گرفته است، خوب و مفهومی مطالبش را یاد بگیرید تا امسال و البته سال‌های بعد کارتان راحت‌تر پیش برود. این را هم بگوییم که هندسه اصلاً درس سختی نیست و فقط لازم است که برای حل مسائل آن اولاً شکل دقیق داشته باشید و ثانیاً نگاه با حوصله و دقیق‌تر. بسیار شبا پرویم سراغ درس ...

خط، نیم‌خط، پاره‌خط

در شکل‌های مقابل xy خط، Ax و Ay نیم‌خط و AB پاره‌خط است.



در واقع با توجه به شکل، می‌توانیم نتیجه بگیریم که هر نقطه روی یک خط تشکیل دو نیم‌خط و هر دو نقطه روی یک خط تشکیل یک پاره‌خط می‌دهند. همیشه نقاط دو سر یک پاره‌خط و نقطه ابتدایی یک نیم‌خط را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می‌دهیم؛ هم‌چنین دو طرف یک خط و یک طرف یک نیم‌خط که نقطه انتهایی آن‌ها معلوم نیست را با حروف کوچک انگلیسی نمایش می‌دهیم. (شکل‌ها را ببینید.)

حالا با توجه به تعریف‌های پاره‌خط و نیم‌خط، می‌خواهیم ببینیم اگر n نقطه روی یک خط راست قرار بگیرند، چند نیم‌خط و چند پاره‌خط تولید می‌کنند. به جدول زیر توجه کنید:

تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها	پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها	شکل	تعداد نقاط روی خط
تعداد پاره‌خط‌ها: $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ تعداد نیم‌خط‌ها: $2 \times 2 = 4$	پاره‌خط: AB نیم‌خط: Ax, Ay, Bx, By		۲
تعداد پاره‌خط‌ها: $\frac{3 \times 2}{2} = 3$ تعداد نیم‌خط‌ها: $2 \times 3 = 6$	پاره‌خط: AB, AC, BC نیم‌خط: Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy		۳
تعداد پاره‌خط‌ها: $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ تعداد نیم‌خط‌ها: $2 \times 4 = 8$	پاره‌خط: AB, AC, AD, BC, BD, CD نیم‌خط: $Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy, Dx, Dy$		۴
تعداد پاره‌خط‌ها: $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ تعداد نیم‌خط‌ها: $2 \times 5 = 10$	پاره‌خط: $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$ نیم‌خط: $Ax, Ay, Bx, By, Cx, Cy, Dx, Dy, Ex, Ey$		۵

با توجه به جدول صفحه قبل می‌توانیم نتیجه بگیریم: $2 \div (\text{یکی کمتر از تعداد نقاط روی خط}) \times (\text{تعداد نقاط روی خط}) = \text{تعداد پاره‌خط‌های روی یک خط راست}$
 (تعداد نقاط روی خط) $\times 2 = \text{تعداد نیم‌خط‌های روی یک خط راست}$
 پس اگر n نقطه روی یک خط راست قرار داشته باشند، آن وقت داریم: $2 \times n = \text{تعداد نیم‌خط‌ها}$ و $\frac{n \times (n-1)}{2} = \text{تعداد پاره‌خط‌ها}$

تست: ۲۰ نقطه روی یک خط قرار دارند. اختلاف تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌هایی که این ۲۰ نقطه می‌سازند، چه قدر است؟

(۱) ۱۴۰ (۲) ۱۴۵ (۳) ۱۵۰ (۴) ۱۵۵

پاسخ: گزینه ۳ تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم:

$$2 \times 20 = 40 = \text{تعداد نیم‌خط‌ها} \quad \text{و} \quad \frac{20 \times (20-1)}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190 = \text{تعداد پاره‌خط‌ها}$$

$$\Rightarrow 190 - 40 = 150 = \text{اختلاف تعداد پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها}$$

تست: تعدادی نقطه روی یک خط قرار دارند. اگر تعداد پاره‌خط‌هایی که این نقاط می‌سازند، سه برابر تعداد نیم‌خط‌هایی باشد که می‌سازند، در این صورت چند نقطه روی این خط قرار دارند؟

(۱) ۱۱ تا (۲) ۱۲ تا (۳) ۱۳ تا (۴) ۱۴ تا

پاسخ: گزینه ۳ فرض کنید n نقطه روی خط قرار دارند؛ در این صورت تعداد پاره‌خط‌ها برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ و تعداد نیم‌خط‌ها نیز برابر $2n$ می‌شود؛ در نتیجه چون تعداد پاره‌خط‌ها سه برابر تعداد نیم‌خط‌ها است، باید داشته باشیم:

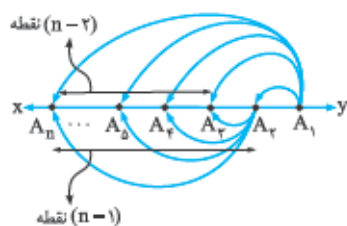
$$\frac{n(n-1)}{2} = 3 \times 2n \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 6n \xrightarrow{(\times 2)} n(n-1) = 12n \xrightarrow{(+n)} n-1 = 12 \Rightarrow n = 13$$

بنابراین تعداد نقاط روی خط ۱۳ است.

تست: تعدادی نقطه روی یک خط قرار دارند، اگر دوتا از این نقاط را برداریم، ۲۳ پاره‌خط از تعداد کل پاره‌خط‌ها کم می‌شود. در ابتدا چند پاره‌خط روی این خط وجود داشته است؟

(۱) ۶۶ تا (۲) ۹۱ تا (۳) ۸۴ تا (۴) ۷۸ تا

پاسخ: گزینه ۴ فرض کنید n نقطه $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ روی یک خط راست قرار دارند.



همان‌طور که در شکل می‌بینید A_1 به $n-1$ نقطه و A_2 نیز به $n-2$ نقطه (به جز A_1) وصل‌اند؛ پس اگر A_1 را حذف کنیم، $n-1$ پاره‌خط و اگر A_2 را حذف کنیم $n-2$ پاره‌خط دیگر حذف می‌شوند؛ پس باید داشته باشیم:

$$(n-1) + (n-2) = 23 \Rightarrow 2n - 3 = 23 \Rightarrow 2n = 26 \Rightarrow n = 13$$

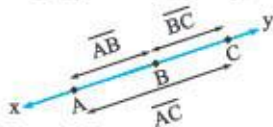
$$\Rightarrow \text{تعداد کل پاره‌خط‌های اولیه} = \frac{13 \times (13-1)}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$$

طول پاره‌خط

فاصله بین دو نقطه A و B را طول پاره‌خط AB می‌نامند و آن را با نماد $\overline{AB}$ نمایش می‌دهند؛ مثلاً اگر فاصله نقطه A و نقطه B روی خطی راست مانند xy برابر ۷ سانتی‌متر باشد، آن وقت می‌نویسیم $\overline{AB} = 7 \text{ cm}$.



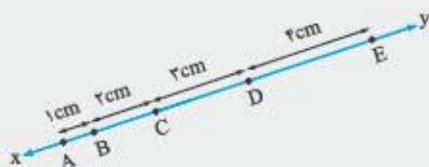
توجه: مطابق شکل روبه‌رو اگر A، B و C سه نقطه روی یک خط راست باشند، آن وقت روابط زیر همیشه برقرارند:



$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \Rightarrow \begin{cases} 1) \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} \\ 2) \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} \end{cases}$$



مثال: با توجه به شکل زیر، حاصل جمع طول همه پاره‌خط‌ها را به دست آورید.



پاسخ: تمام پاره‌خط‌ها را تعیین کرده و طول آن‌ها را می‌یابیم؛ سپس همه طول‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\overline{AB} = 1 \text{ cm}, \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 1 + 2 = 3 \text{ cm}, \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = 3 + 3 = 6 \text{ cm}, \overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 6 + 4 = 10 \text{ cm}$$

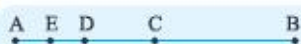
$$\overline{BC} = 2 \text{ cm}, \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 2 + 3 = 5 \text{ cm}, \overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = 5 + 4 = 9 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = 3 \text{ cm}, \overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = 3 + 4 = 7 \text{ cm}$$

$$\overline{DE} = 4 \text{ cm}$$

پس حاصل جمع طول همه پاره‌خط‌ها برابر است با:

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{BE} + \overline{CD} + \overline{CE} + \overline{DE} = 1 + 3 + 6 + 10 + 2 + 5 + 9 + 3 + 7 + 4 = 50$$



تست: در شکل مقابل C وسط AB، D وسط AC و E وسط AD است. کدام گزینه صحیح نیست؟

$$\overline{CD} = \frac{\overline{AB}}{4} \quad (1)$$

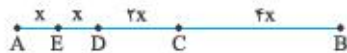
$$2\overline{AE} + \overline{CD} = \overline{BC} \quad (2)$$

$$\overline{BE} = \frac{5}{6}\overline{AB} \quad (3)$$

$$\frac{\overline{BC}}{2} + \overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AC} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴ فرض کنید $\overline{AE} = x$ در این صورت چون E وسط AD است، پس $\overline{AE} = \overline{ED}$ و بنابراین $\overline{ED} = x$.

حالا دوباره چون D وسط AC است، پس $\overline{AD} = \overline{CD}$ اما دقت کنید که $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED} = x + x = 2x$ پس $\overline{CD} = 2x$ و نهایتاً چون C وسط AB است، پس $\overline{AC} = \overline{BC}$ و در نتیجه چون $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 2x + 2x = 4x$ ، بنابراین $\overline{BC} = 4x$. حالا تمام گزینه‌ها را چک می‌کنیم:



$$1) 2\overline{AE} = 2x, \overline{CD} = 2x \Rightarrow 2\overline{AE} + \overline{CD} = 2x + 2x = 4x = \overline{BC} \quad \checkmark$$

$$2) \frac{\overline{AB}}{4} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{4} = \frac{4x + 4x}{4} = \frac{8x}{4} = 2x = \overline{CD} \quad \checkmark$$

$$3) \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{4x}{2} = 2x, \overline{AE} = x \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{2} + \overline{AE} = 2x + x = 3x = \frac{3}{4} \times 4x = \frac{3}{4}\overline{AC} \quad \checkmark$$

$$4) \overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = 4x + 3x = 7x, \frac{5}{6}\overline{AB} = \frac{5}{6} \times 8x = \frac{20}{3}x \Rightarrow 7x \neq \frac{20}{3}x \quad \times$$

پس رابطه گزینه (۴) غلط است و در نتیجه جواب مسئله همین گزینه است.



تست: در شکل مقابل، اگر $\frac{AD}{EB} = \frac{4}{3}$ ، $\frac{CE}{BD} = 2$ ، $ED = 10$ و $AC = 2$ ، آن وقت $\overline{AB} - \overline{CE}$ کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ چون $\frac{CE}{BD} = 2$ پس $\overline{CE}$ دو برابر $\overline{BD}$ است؛ یعنی اگر فرض کنیم $\overline{BD} = x$ ، آن وقت $\overline{CE} = 2x$. حالا با توجه به شکل داریم:



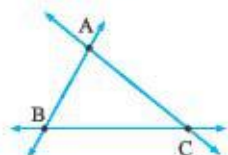
$$\frac{AD}{EB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{AC + CE + ED}{ED + DB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2 + 2x + 10}{10 + x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{12 + 2x}{10 + x} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(12 + 2x) = 4(10 + x)$$

$$\Rightarrow 36 + 6x = 40 + 4x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \overline{CE} = 2x = 2 \times 2 = 4, \overline{DB} = x = 2$$

$$\overline{AB} - \overline{CE} = \overline{AC} + \overline{ED} + \overline{DB} = 2 + 10 + 2 = 14$$

حالا با توجه به شکل چون $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CE} + \overline{ED} + \overline{DB}$ پس داریم:

شرط وجود مثلث



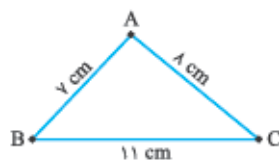
دیدیم که اگر C نقطه‌ای روی پاره خط AB (بین دو نقطه A و B) باشد، آن وقت تساوی $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ برقرار است. اما اگر نقاط A ، B و C همگی روی یک خط قرار نداشته باشند، آن وقت اولاً A ، B و C می‌توانند تشکیل یک مثلث بدهند و ثانیاً در مثلث به وجود آمده مجموع طول هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است؛ یعنی با توجه به شکل مقابل داریم:

① $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$

② $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$

③ $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$

توجه کنید که برای ساختن یک مثلث باید هر سه شرط بالا برقرار باشند؛ یعنی اگر حتی یکی از آن‌ها هم برقرار نباشد، مثلثی به وجود نمی‌آید؛ مثلاً مثلثی وجود ندارد که طول اضلاع آن ۵، $\frac{6}{5}$ و ۱۲ باشد؛ چون درست است که $\frac{6}{5} + 5 > 12$ و $12 + \frac{6}{5} > 5$ ، اما $5 + \frac{6}{5} = 11\frac{1}{5}$ است و $11\frac{1}{5}$ هم از ۱۲ بزرگتر نیست؛ یعنی شرط $5 + \frac{6}{5} > 12$ برقرار نیست؛ پس چنین مثلثی وجود ندارد؛ اما اگر سه پاره خط داشته باشیم که طول آن‌ها اعداد ۷، ۸ و ۱۱ باشند، آن وقت می‌توانیم توسط این سه پاره خط مثلث بسازیم؛ چون هر سه رابطه بالا برقرار می‌شوند:

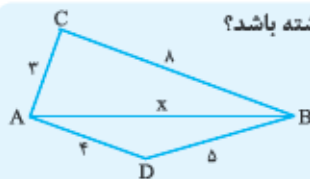


① $8 + 7 > 11 \checkmark$

② $8 + 11 > 7 \checkmark$

③ $11 + 7 > 8 \checkmark$

تست: با توجه به شکل مقابل، اگر طول AB برابر عددی صحیح باشد، آن وقت چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟



۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۲ دقت کنید اگر فرض کنیم $\overline{AB} = x$ ، آن وقت با توجه به شرط وجود مثلث باید داشته باشیم:

$$\triangle ABD: \overline{AB} < \overline{AD} + \overline{BD} \Rightarrow x < 2 + 5 \Rightarrow x < 7 \quad (1) \quad \triangle ABC: \overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC} \Rightarrow 3 + x > 4 \Rightarrow x > 1 \quad (2)$$

پس با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که x باید از ۱ کوچکتر و از ۷ بزرگتر باشد؛ در نتیجه چون x صحیح است، پس می‌تواند برابر یکی از مقادیر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ باشد. البته باز هم باید چک شود که اگر x برابر هر کدام از مقادیر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ یا ۷ باشد، هر سه شرط وجود مثلث برای هر دو مثلث برقرار می‌شوند یا نه، که اگر به جای x هر یک از مقادیر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ یا ۷ را قرار دهیم، می‌بینیم که هر سه شرط برای هر دو مثلث برقرار می‌شوند، پس طول $\overline{AB}$ سه مقدار صحیح می‌پذیرد و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

یک بار دیگر مثال قبل را ببینید. شاید این سؤال در ذهنتان ایجاد شود که روابط (۱) و (۲) از کجا آمدند؟ جواب سؤال این است که فرمول یا روش خاصی برای نوشتن این رابطه‌ها نداریم؛ بلکه با توجه به مثلث‌ها چندتا نامساوی می‌نویسیم و بعد از بین آن‌ها به‌دردبخورترین‌ها را انتخاب کرده و به کمک آن‌ها مسئله را حل می‌کنیم. در این مسئله دو نامساوی که نوشتیم از بقیه نامساوی‌ها به‌دردبخورتر بودند.



تست: چند مثلث با محیط ۱۰ و طول اضلاع صحیح می توان ساخت؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

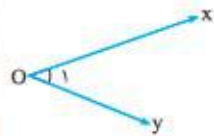
پاسخ: گزینه ۲ با توجه به جدول زیر، حالت های مختلف طول اضلاع را نوشته و آن هایی که قابل قبول اند را انتخاب می کنیم:

حالت های مختلف طول دو ضلع دیگر	مجموع طول دو ضلع دیگر (محیط = ۱۰)	طول کوچک ترین ضلع
$(۵, ۴) \times$ $۴+۱ > ۵$ $(۶, ۳) \times$ $۳+۱ > ۶$ $(۷, ۲) \times$ $۲+۱ > ۷$ $(۸, ۱) \times$ $۱+۱ > ۸$	۹	۱
$(۴, ۴) \checkmark$ $(۳, ۵) \times$ $۲+۳ > ۵$ $(۲, ۶) \times$ $۲+۲ > ۶$	۸	۲
$(۴, ۳) \checkmark$	۷	۳

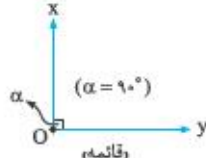
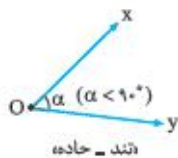
دقت کنید که طول کوچک ترین ضلع نمی تواند برابر ۴ یا مقداری بیشتر از ۴ باشد؛ چون در این صورت محیط مثلث حداقل برابر ۱۲ واحد می شود؛ مثل $(۴, ۴, ۴)$ ، در حالی که ما به دنبال مثلث هایی با محیط ۱۰ هستیم؛ بنابراین با توجه به جدول تنها دو مثلث وجود دارند که محیط آن ها برابر ۱۰ و طول اضلاع آن ها نیز صحیح است.

زاویه

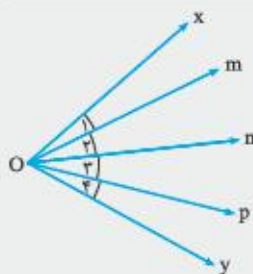
با مفهوم زاویه در سال چهارم آشنا شدید. در این جا اول به یادآوری نکات و تعریف های زاویه می پردازیم و بعد می رویم سراغ مطالب پیشرفته تر در مورد زاویه ها.



در شکل بالا زاویه xOy را می بینید. این زاویه را می توان به صورت های $y\hat{O}x$ ، $\hat{O}_1$ و $\hat{O}$ نمایش داد. زاویه بزرگ تر از 90° و کوچک تر از 90° را زاویه تند، زاویه 90° را زاویه قائمه، زاویه بزرگ تر از 90° و کوچک تر از 180° را زاویه منفرجه و نهایتاً زاویه 180° را زاویه نیم صفحه می نامند. به شکل های زیر توجه کنید:



در همین ابتدا، شاید بد نباشد که مسئله های تیزهوشانی که از همین مطالب ساده در آزمون ها مطرح می شوند را بررسی کنیم، مثال زیر را ببینید:



مثال: در شکل مقابل، زاویه xOy توسط چند نیم خط به تعدادی زاویه تقسیم شده است. اگر $x\hat{O}y < 90^\circ$ ،

آن وقت تعداد کل زوایای تند شکل چقدر است؟

پاسخ: دقت کنید که در شکل $x\hat{O}y$ از همه زوایای دیگر بزرگ تر است؛ پس چون $x\hat{O}y < 90^\circ$ ، نتیجه می گیریم مابقی زاویه ها هم کم تر از 90° هستند؛ یعنی تند هستند، بنابراین زاویه های حاده شکل عبارت اند از:

$y\hat{O}p$ ، $y\hat{O}n$ ، $y\hat{O}m$ ، $y\hat{O}x$ ، $p\hat{O}n$ ، $p\hat{O}m$ ، $p\hat{O}x$ ، $n\hat{O}m$ ، $n\hat{O}x$ ، $m\hat{O}x$

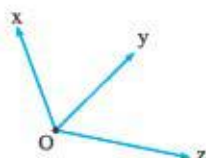
که تعداد آن ها نیز برابر ۱۰ تا است.

نکته: به کمک راهبرد الگوسازی، می‌توان نتیجه گرفت که اگر یک زاویه تند به n قسمت تقسیم شود، آن وقت تعداد کل زاویه‌های تند ایجاد شده برابر می‌شود با $\frac{n \times (n+1)}{2}$ ، مثلاً در مثال قبل چون $\hat{xOy}$ به ۴ قسمت تقسیم شده بود، تعداد کل زوایا برابر $10 = \frac{4 \times (4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2}$ تا شد.

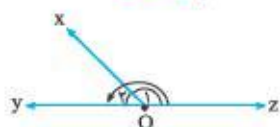
حالت‌های مختلف دو زاویه

دو زاویه می‌توانند نسبت به هم حالت‌های مختلفی داشته باشند که در زیر به معرفی این حالت‌ها می‌پردازیم:

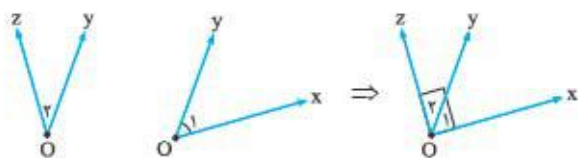
① **دو زاویه مجاور:** دو زاویه‌ای که دارای رأس مشترک و یک ضلع مشترک باشند را دو زاویه مجاور می‌نامیم؛ مثلاً در شکل روبه‌رو، دو زاویه $\hat{xOy}$ و $\hat{yOz}$ مجاورند.



② **دو زاویه مجانب:** دو زاویه‌ای که در کنار هم تشکیل زاویه نیم‌صفحه می‌دهند را دو زاویه مجانب می‌نامیم؛ مثلاً در شکل مقابل چون $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$ ، پس $\hat{xOz}$ و $\hat{xOy}$ مجانب‌اند.



③ **دو زاویه متمم:** دو زاویه‌ای که مجموع آن‌ها برابر 90° باشد را دو زاویه متمم می‌نامیم؛ مثلاً در شکل‌های زیر، چون $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$ ، پس دو زاویه $\hat{xOy}$ و $\hat{yOz}$ متمم یکدیگرند.



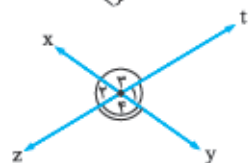
توجه: متمم زاویه حاده x برابر $(90 - x)^\circ$ است؛ مثلاً متمم زاویه 2° ، برابر $90 - 2 = 88^\circ$ می‌باشد.

④ **دو زاویه مکمل:** دو زاویه‌ای که مجموع آن‌ها برابر 180° باشد را دو زاویه مکمل می‌نامیم؛ مثلاً در شکل زیر، چون $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$ ، پس $\hat{xOy}$ و $\hat{yOz}$ مکمل یکدیگرند.



نتیجه: چون دو زاویه مجانب تشکیل زاویه نیم‌صفحه می‌دهند، پس مجموع آن‌ها برابر 180° است و نتیجه آن‌که دو زاویه مجانب همواره مکمل‌اند.

توجه: مکمل زاویه x ($0^\circ < x < 180^\circ$)، برابر $(180 - x)^\circ$ است؛ مثلاً مکمل زاویه 96° ، برابر $180 - 96 = 84^\circ$ است.

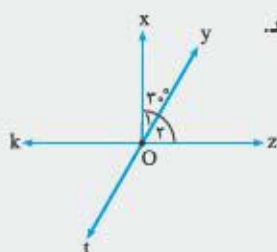


⑤ **دو زاویه متقابل به رأس:** دو زاویه‌ای که یک رأس آن‌ها مشترک و اضلاع آن‌ها در امتداد یکدیگر باشند را متقابل به رأس می‌نامیم. در واقع از برخورد دو خط راست، چهار زاویه درست می‌شود که زوایای مقابل، متقابل به رأس هستند؛ مثلاً در شکل مقابل، دو زاویه $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ و همچنین دو زاویه $\hat{O}_2$ و $\hat{O}_4$ متقابل به رأس‌اند.

توجه: اندازه دو زاویه متقابل به رأس با هم برابر است. (چرا؟)

با توجه به شکل بالا دو زاویه $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ مجانب‌اند؛ همچنین دو زاویه $\hat{O}_2$ و $\hat{O}_4$ نیز مجانب‌اند، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 180^\circ - \hat{O}_2 \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 &= 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_3 = 180^\circ - \hat{O}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$



مثال: با توجه به شکل، اگر دو زاویه $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ متمم باشند، آن وقت اندازه زوایای خواسته شده را به دست آورید.

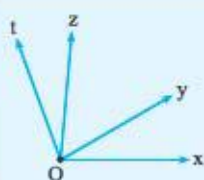
الف) $y\hat{O}z$

ب) $z\hat{O}t$

پ) $x\hat{O}k$

ت) $t\hat{O}k$

پاسخ: چون $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ متمم اند، پس $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$ و چون $\hat{O}_1 = 30^\circ$ ، بنابراین $\hat{O}_2 = 60^\circ$ ، یعنی $y\hat{O}z = 60^\circ$. حالا دقت کنید که دو زاویه $y\hat{O}z$ و $z\hat{O}t$ مجانباند؛ پس این دو زاویه مکمل اند؛ یعنی داریم $y\hat{O}z + z\hat{O}t = 180^\circ$ و چون $y\hat{O}z = 60^\circ$ ، بنابراین $z\hat{O}t = 120^\circ$. حالا دقت کنید که گفتیم $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$ ، یعنی $x\hat{O}z = 90^\circ$ ، پس دوباره با توجه به شکل، چون $x\hat{O}z$ و $x\hat{O}k$ تشکیل زاویه نیم صفحه می دهند، داریم $x\hat{O}k = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. نهایتاً چون دو زاویه $y\hat{O}z$ و $t\hat{O}k$ متقابل به رأس اند، پس $t\hat{O}k = y\hat{O}z$ ، یعنی $t\hat{O}k = 60^\circ$.



تست: در شکل مقابل، داریم: $x\hat{O}z = 85^\circ$ ، $t\hat{O}y = 8^\circ$ و $x\hat{O}t = 11^\circ$. اندازه زاویه $z\hat{O}y$ کدام است؟

۳۵° (۲)

۲۵° (۱)

۵۵° (۴)

۴۵° (۳)

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به شکل و اندازه زوایا داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x\hat{O}z = 85^\circ \Rightarrow x\hat{O}y + y\hat{O}z = 85^\circ \\ t\hat{O}y = 8^\circ \Rightarrow t\hat{O}z + z\hat{O}y = 8^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \underbrace{x\hat{O}y + y\hat{O}z + t\hat{O}z + z\hat{O}y}_{x\hat{O}t} = 8^\circ + 85^\circ \Rightarrow x\hat{O}t + z\hat{O}y = 165^\circ$$

$$\Rightarrow 11^\circ + z\hat{O}y = 165^\circ \Rightarrow z\hat{O}y = 55^\circ$$

تست: اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دو زاویه مکمل باشند، به طوری که $\hat{A}$ از ۲ برابر $\hat{B}$ به اندازه 6° کم تر باشد، آن وقت متمم زاویه $\hat{B}$ کدام است؟

۴۰° (۴)

۳۰° (۳)

۲۰° (۲)

۱۰° (۱)

پاسخ: گزینه ۱ چون $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مکمل اند، پس $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$. از طرف دیگر چون $\hat{A}$ از ۲ برابر $\hat{B}$ به اندازه 6° کم تر است، پس باید داشته باشیم $\hat{A} = 2\hat{B} - 6^\circ$ ، بنابراین نتیجه می گیریم که:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \\ \hat{A} = 2\hat{B} - 6^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{2\hat{B} - 6^\circ + \hat{B}}_{\hat{A}} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{B} = 24^\circ \xrightarrow{(+3)} \hat{B} = 8^\circ \Rightarrow \hat{B}_{\text{متمم}} = 90^\circ - 8^\circ = 82^\circ$$

تست: حاصل جمع سه زاویه $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ به اندازه 30° از زاویه نیم صفحه بیشتر است. اگر $\hat{B}$ به اندازه 30° از متمم $\hat{A}$ بیشتر باشد و $\hat{C}$ نیز به اندازه 10° از مکمل $\hat{B}$ کم تر باشد، آن وقت حاصل جمع متمم $\hat{A}$ ، مکمل $\hat{B}$ و 20° درجه بیشتر از مکمل مکمل $\hat{C}$ کدام است؟

۲۱۰° (۴)

۲۲۰° (۳)

۲۳۰° (۲)

۲۶۰° (۱)

$$\hat{B} = \underbrace{(90^\circ - \hat{A})}_{\text{متمم } \hat{A}} + 30^\circ = 120^\circ - \hat{A} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ چون $\hat{B}$ ، 30° از متمم $\hat{A}$ بیشتر است، پس باید داشته باشیم:

از طرف دیگر چون $\hat{C}$ به اندازه 10° از مکمل $\hat{B}$ کم تر است، پس داریم:

$$\hat{C} = (180^\circ - \hat{B}) - 10^\circ \Rightarrow \hat{C} = 170^\circ - \hat{B} \xrightarrow{(1)} \hat{C} = 170^\circ - (120^\circ - \hat{A}) = 170^\circ - 120^\circ + \hat{A} \Rightarrow \hat{C} = 50^\circ + \hat{A} \quad (2)$$

حالا چون زاویه نیم صفحه برابر 180° است، پس با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می گیریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ + 30^\circ \Rightarrow \hat{A} + \underbrace{120^\circ - \hat{A}}_{\hat{B}} + \underbrace{50^\circ + \hat{A}}_{\hat{C}} = 210^\circ \Rightarrow 170^\circ + \hat{A} = 210^\circ \Rightarrow \hat{A} = 40^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ \\ \hat{C} = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ \end{cases}$$

پس با توجه به اندازه های $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ داریم:

$$\hat{A}_{\text{مکمل}} = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$\hat{B}_{\text{مکمل}} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

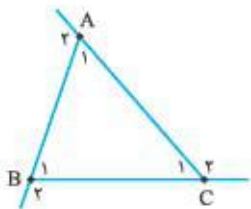
$$\hat{C}_{\text{مکمل}} = 180^\circ - \hat{C} \Rightarrow \hat{C}_{\text{مکمل}} = 180^\circ - (180^\circ - \hat{C}) = 180^\circ - 180^\circ + \hat{C} = \hat{C} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل جمع مورد نظر}} 50^\circ + 100^\circ + 110^\circ = 260^\circ$$

• زیاده در مثلث

هر مثلث سه زاویه داخلی و سه زاویه خارجی دارد. در شکل مقابل، زاویه های $\hat{A}_1$ ، $\hat{B}_1$ و $\hat{C}_1$ زوایای داخلی و زاویه های $\hat{A}_2$ ، $\hat{B}_2$ و $\hat{C}_2$ نیز زوایای خارجی هستند.



در هر مثلث دلخواه ABC روابط زیر همواره برقرارند:

① مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است: یعنی $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$.

② هر زاویه خارجی مکمل زاویه داخلی اش است: یعنی:

الف) $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ$ ب) $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ پ) $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$

③ هر زاویه خارجی برابر حاصل جمع دو زاویه داخلی غیر مجاورش است: یعنی:

الف) $\hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$ ب) $\hat{B}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C}_1$ پ) $\hat{C}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1$

اما چرا هر زاویه داخلی برابر حاصل جمع دو زاویه داخلی غیر مجاورش است؟ رابطه اول را اثبات می کنیم. با توجه به شکل داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 &= 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 &= 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{A}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$$

تست: اندازه سه زاویه مثلثی با اعداد ۳، ۷ و ۸ متناسب اند. اندازه بزرگ ترین زاویه خارجی این مثلث چقدر است؟

۱۷۰° (۴)

۱۱۰° (۳)

۱۲۰° (۲)

۱۵۰° (۱)

پاسخ: گزینه ۱ فرض کنید زوایای این مثلث به ترتیب $3x$ ، $7x$ و $8x$ درجه هستند؛ در این صورت باید داشته باشیم:

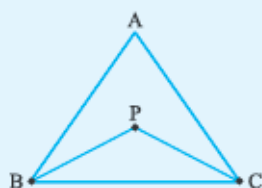
$$3x + 7x + 8x = 180^\circ \Rightarrow 18x = 180^\circ \xrightarrow{(+18)} x = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \text{زوایا: } 3x = 3 \times 10^\circ = 30^\circ, 7x = 7 \times 10^\circ = 70^\circ, 8x = 8 \times 10^\circ = 80^\circ$$

حالا دقت کنید که کوچک ترین زاویه داخلی، بزرگ ترین زاویه خارجی را دارد. پس با توجه به زاویه ها، بزرگ ترین زاویه خارجی مثلث برابر

$$\text{است با } 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

تست: در شکل زیر، اندازه زاویه BAC برابر 70° است. اندازه زاویه BPC چقدر است؟ (PB و PC به ترتیب نیمسازهای زاویه های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هستند.)



۱۰۵° (۱)

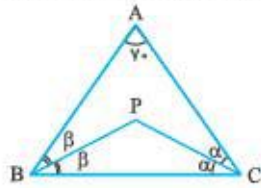
۱۱۵° (۲)

۱۲۵° (۳)

۱۳۵° (۴)



پاسخ: گزینه ۳ چون PC نیمساز زاویه C است، پس فرض می‌کنیم $\hat{ACP} = \hat{PCB} = \alpha$ ، به همین ترتیب چون PB نیمساز $\hat{ABC}$ است، پس فرض می‌کنیم $\hat{ABP} = \hat{PBC} = \beta$.



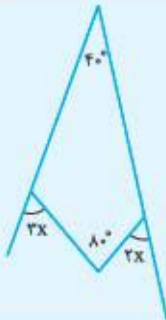
حالا توجه کنید که چون $\hat{A}$ در مثلث ABC برابر 70° است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 70^\circ + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 110^\circ \xrightarrow{(+2)} \alpha + \beta = 55^\circ$$

اکنون مثلث PBC را ببینید. در این مثلث داریم:

$$\hat{PBC} + \hat{BCP} + \hat{BPC} = 180^\circ \Rightarrow \beta + \alpha + \hat{BPC} = 180^\circ \Rightarrow 55^\circ + \hat{BPC} = 180^\circ \Rightarrow \hat{BPC} = 125^\circ$$

تست: با توجه به شکل مقابل، اندازه زاویه X برابر است با



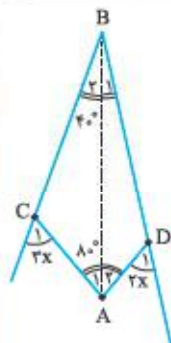
(۱) 24°

(۲) 36°

(۳) 12°

(۴) 18°

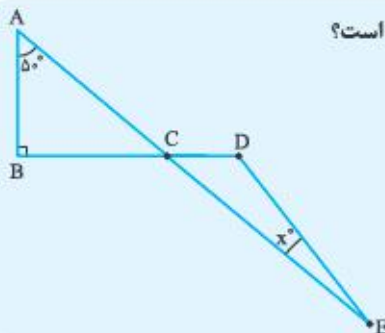
پاسخ: گزینه ۱ به شکل مقابل دقت کنید. اگر از A به B وصل کنیم، آن وقت دو مثلث ABC و ABD به وجود می‌آیند که به ترتیب $\hat{D}_1$ و $\hat{C}_1$ زوایای خارجی آن‌ها هستند؛ پس چون هر زاویه خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش است، نتیجه می‌گیریم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABD: \hat{D}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_2 \\ \triangle ABC: \hat{C}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = \hat{CBD} + \hat{CAD} = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow 3x + 2x = 120^\circ \Rightarrow 5x = 120^\circ \xrightarrow{(+5)} x = 24^\circ$$

تست: در شکل مقابل، نصف مکمل زاویه D از دو برابر متمم زاویه A، 55° کم‌تر است. مقدار X کدام است؟



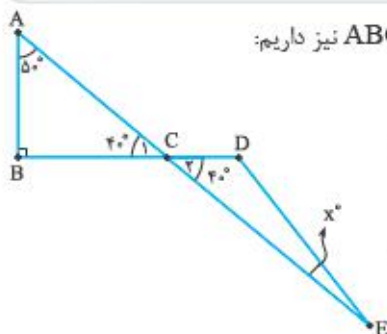
(۱) 10°

(۲) 20°

(۳) 30°

(۴) 40°

پاسخ: گزینه ۱ اول دقت کنید که چون $\hat{C}_1$ و $\hat{C}_2$ متقابل به رأس هستند، پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. در مثلث ABC نیز داریم:



$$\hat{C}_1 = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \Rightarrow \hat{C}_1 = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) \Rightarrow \hat{C}_1 = 40^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = 40^\circ$$

حالا چون دو برابر متمم $\hat{A}$ ، برابر $2 \times (90^\circ - \hat{A}) = 2 \times (90^\circ - 55^\circ) = 80^\circ$ باشد، پس نصف مکمل $\hat{D}$ باید برابر $80^\circ - 55^\circ = 25^\circ$ باشد؛ پس نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{180^\circ - \hat{D}}{2} = 25^\circ \xrightarrow{(\times 2)} 180^\circ - \hat{D} = 50^\circ \Rightarrow \hat{D} = 130^\circ \Rightarrow \triangle CDE: \hat{E} = x = 180^\circ - (\hat{C}_2 + \hat{D}) = 180^\circ - (40^\circ + 130^\circ) = 10^\circ$$

سوالات چهارگزینه‌ای

تعداد پاره‌خطها و نیم‌خطها



۱- در شکل روبه‌رو چند نیم‌خط موجود است؟

- ۱۵ (۱) ۱۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۴ (۴)

۲- اگر روی خطی پنج نقطه قرار داشته باشد، آن وقت تعداد پاره‌خطها برابر است با (تیمز)

- ۱۰ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۳- چند نقطه روی یک خط تشکیل ۲۰ تا نیم‌خط می‌دهند. این نقاط تشکیل چند پاره‌خط می‌دهند؟

- ۵۰ (۱) ۴۵ (۲) ۱۹۰ (۳) ۴۰ (۴)

۴- روی خطی ۹۶ نقطه قرار دارند. اگر چپ‌ترین نقطه و راست‌ترین نقطه روی خط را حذف کنیم، چند پاره‌خط حذف می‌شوند؟

- تا ۱۹۲ (۱) تا ۱۹۱ (۲) تا ۱۹۰ (۳) تا ۱۸۹ (۴)

۵- تعدادی نقطه روی یک خط مشخص می‌کنیم. اگر تعداد پاره‌خطهایی که این نقاط می‌سازند، سه برابر تعداد نیم‌خطها باشد، با قراردادن سه نقطه بیشتر از دو برابر این نقاط روی یک خط، چند نیم‌خط به دست می‌آید؟

- تا ۵۶ (۱) تا ۵۸ (۲) تا ۶۰ (۳) تا ۶۲ (۴)

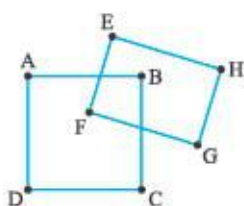
۶- چند نقطه روی یک خط قرار دارند، به طوری که اختلاف تعداد پاره‌خطها و نیم‌خطهایی که ایجاد می‌کنند، پنج برابر تعداد این نقاط است. اگر یک نقطه به این نقاط اضافه کنیم، چند پاره‌خط جدید تولید می‌شود؟

- ۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

۷- روی خطی ۱۶ نقطه موجود است. اگر دو نقطه به این نقاط اضافه کنیم، به تعداد کل پاره‌خطها x تا اضافه می‌شود. از این ۱۶ نقطه چند نقطه برداریم تا تعداد پاره‌خطهای حذف‌شده از دو برابر x یکی کم‌تر شود؟

- ۷ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

۸- در شکل مقابل چند پاره‌خط وجود دارد؟



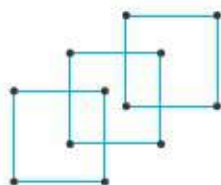
۱۴ (۱)

۱۵ (۲)

۱۶ (۳)

۱۷ (۴)

۹- در شکل مقابل چند پاره‌خط وجود دارد؟



۲۰ (۱)

۲۴ (۲)

۲۸ (۳)

۳۲ (۴)

۱۰- تعداد پاره‌خطهای موجود در شکل مقابل برابر است با



۵۵ (۲)

۵۴ (۱)

۵۷ (۴)

۵۶ (۳)

طول پاره خط

(سیزدهمین دوره مسابقات علمی (اهفوان ۹۴-۹۳)



۱۱- پاره خط AB به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده است. کدام گزینه نادرست است؟

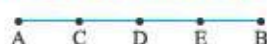
$$\overline{AC} = \frac{1}{6} \overline{AB} \quad (۲)$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{3} \overline{DB} \quad (۱)$$

$$\overline{CE} = \frac{2}{3} \overline{AB} \quad (۴)$$

$$\overline{AF} = ۴ \overline{DE} \quad (۳)$$

(پیشرفت تفهیلی یزد ۹۵-۹۴)



$$\overline{CB} = \frac{2}{3} \overline{DB} \quad (۲)$$

$$\overline{AE} = ۳ \overline{AC} \quad (۱)$$

$$\overline{EB} = \frac{1}{4} \overline{AB} \quad (۴)$$

$$(\overline{AD} - \overline{CD}) + \overline{CE} = \overline{AE} \quad (۳)$$

(پیشرفت تفهیلی سمپار ۹۵-۹۴)



$$\frac{2}{3} \overline{BE} = \frac{2}{5} \overline{AF} \quad (پ) \quad (۳)$$

$$\overline{AD} - \overline{BD} = \overline{AE} - \overline{DE} \quad (ب) \quad (۲)$$

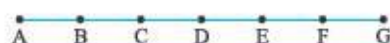
$$\overline{AC} = \frac{1}{4} \overline{BF} \quad (الف) \quad (۱)$$

(۴)

صفر

۱۴- در شکل زیر طول پاره خطهای کوچک با هم برابر است. در این شکل اندازه پاره خط AC برابر $2\overline{AB}$ است. اندازه چند پاره خط دیگر برابر

(آزمون پیشرفت تفهیلی اهفوان ۹۵-۹۴)



$$۳ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

$$۵ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

۱۵- در شکل زیر، نقطه D وسط پاره خط AE و نقطه C وسط AD و نقطه B وسط AC است. اگر $\overline{AE} = ۱۶ \text{ cm}$ ، مجموع طول همه پاره خطهای

(المپیاد ریاضی خراسان ۹۵-۹۴)



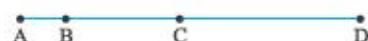
$$۶۸ \quad (۲)$$

$$۷۶ \quad (۱)$$

$$۸۰ \quad (۴)$$

$$۷۲ \quad (۳)$$

(آفریقای جنوبی مرحله دوم ۹۵-۹۴)



$$\frac{5}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۵)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۴)$$

۱۷- نقطه های A، B، C و D روی یک خط راست قرار دارند و $\overline{AB} = ۱۰$ ، $\overline{AC} = ۳$ ، $\overline{BD} = ۵$ و $\overline{CD} = ۸$. طول پاره خط BC چه قدر است؟

(المپیاد هندسه ایران ۹۵-۹۴)

$$۸ \quad (۳)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

$$۱۸ \quad (۵)$$

$$۱۳ \quad (۴)$$

۱۸- نقاط A، B، C و D روی یک خط راست طوری قرار گرفتند که $\overline{AB} = ۱۳$ ، $\overline{BC} = ۱۱$ ، $\overline{CD} = ۱۴$ و $\overline{DA} = ۱۲$. فاصله بین دورترین نقطه ها

(کاتلورو)

کدام است؟

$$۵۰ \quad (۳)$$

$$۳۸ \quad (۲)$$

$$۱۴ \quad (۱)$$

$$\text{هیچ کدام} \quad (۵)$$

$$۲۵ \quad (۴)$$

۱۹- چهار نقطه A، B، C و D روی خطی راست قرار دارند. اگر $\overline{AB} = ۱۳$ ، $\overline{CD} = ۱۴$ و $\overline{DA} = ۱۲$ ، آن وقت بیشترین فاصله بین دو نقطه چه قدر است؟

$$۳۹ \quad (۴)$$

$$۲۵ \quad (۳)$$

$$۲۴ \quad (۲)$$

$$۱۴ \quad (۱)$$

۲۰- دو نقطه B و C روی پاره خط AD قرار دارند. طول $\overline{AB}$ ۴ برابر طول $\overline{BD}$ و طول $\overline{AC}$ ۹ برابر طول $\overline{CD}$ است. طول $\overline{BC}$ چند برابر طول $\overline{AD}$ است؟

(آمریکا)

$$\frac{5}{36} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{10} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{13} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{36} \quad (۱)$$



۲۱- پنج نقطه A, B, D, E طوری قرار گرفته‌اند که $\overline{AC} = ۵$ ، $\overline{AE} = ۴$ ، $\overline{BC} = ۱۴$ ، $\overline{BD} = ۲$ و $\overline{DE} = ۳$. فاصله بین وسط پاره‌های $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ چه قدر است؟ (Regatta)

- (۱) $۲/۵$ (۲) $۳/۵$ (۳) $۴/۵$ (۴) $۵/۵$

۲۲- چهار نقطه A, B, C, D روی خطی قرار دارند به طوری که $\overline{AB} < \overline{AC}$ ، $\overline{AC} < \overline{AD}$ ، $\overline{BD} < \overline{BC}$ و $\overline{CD} > \overline{AB}$. این نقاط از چپ به راست با چه ترتیبی ظاهر می‌شوند؟

- (۱) $DACB$ (۲) $CADB$ (۳) $DBAC$ (۴) $CDAB$

۲۳- پنج نقطه روی یک خط راست هستند. علی فاصله بین هر دو جفت از این نقطه‌ها را اندازه گرفت و به ترتیب صعودی، عددهای $۲, ۵, ۶, ۸, ۹$ ، $k, ۱۵, ۱۷, ۲۰$ و ۲۲ را به دست آورد. مقدار k چه قدر است؟ (کنکور ۲۰۱۵)

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۲۴- نقاط A, B, C طوری قرار دارند که $\overline{AB} = ۵$ ، $\overline{AC} = ۹$ و $\overline{BC} = ۱۴$. اگر D نقطه‌ای باشد که فاصله آن از A برابر نصف فاصله‌اش از C باشد، آن وقت مجموع همه مقادیر ممکن برای حاصل جمع $\overline{AD} + \overline{BD}$ چه قدر است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۵ (۳) ۲۳ (۴) ۲۴

۲۵- نقاط A, B, C, D, E, F را روی خط d چنان در نظر گرفته‌ایم که $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$. اگر این نقاط به ترتیب از چپ به راست روی خط قرار گیرند و ضمناً $\overline{AC} = ۹۰$ و همچنین نقطه X در سمت راست F قرار گیرد، طول $\overline{XF}$ چه قدر باشد تا طول $\overline{XD}$ سه برابر طول $\overline{EC}$ باشد؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۷۶ (۳) ۷۷ (۴) ۷۸

شرط وجود مثلث

۲۶- کدام دسته از اعداد زیر، اندازه‌های سه ضلع مثلث می‌توانند باشند؟ (تیمز)

- (۱) $۲, ۳, ۵$ (۲) $۴, ۲/۵, ۱/۵$ (۳) $۷, ۳, ۵$ (۴) $۸, ۴, ۳$

۲۷- طول اضلاع مثلثی $x, ۳/۵$ و ۸ است. x کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟ (سنه ۹۴)

- (۱) ۷ (۲) $۹/۰۶$ (۳) ۱۱ (۴) $۳۵/۳$

۲۸- دو نقطه A و B به فاصله ۱۰ سانتی‌متر از هم قرار دارند. چند نقطه مانند C می‌توان پیدا کرد که از A به فاصله ۴ سانتی‌متر و از B به فاصله ۳ سانتی‌متر قرار داشته باشند؟ (تیمز)

- (۱) دو نقطه (۲) یک نقطه (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

۲۹- چند مثلث به طول اضلاع صحیح موجود هستند که محیط آن‌ها برابر ۱۰ شود؟

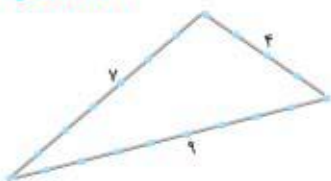
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۰- چند مثلث متساوی‌الساقین با حداکثر ۱۳ چوب‌کبریت می‌توان ساخت؟ (پیشرفت تحصیلی سمپا ۹۵)

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷

۳۱- ۲۰ چوب‌کبریت را به شکل یک مثلث چیده‌ایم. با این تعداد چوب‌کبریت، چند مثلث متفاوت می‌توان ساخت؟ (آفریقای جنوبی)

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۷



۳۲- با توجه به ادعاهای زیر، کدام گزینه صحیح است؟

ادعای اول: تمام مثلث‌های با محیط ۷ و اندازه اضلاع صحیح، متساوی‌الساقین هستند.

ادعای دوم: فقط دو مثلث با محیط ۹ و اندازه اضلاع صحیح وجود دارد.

(۱) ادعای اول درست و ادعای دوم نادرست است.

(۲) ادعای اول و دوم هر دو درست هستند.

(۳) ادعای اول نادرست و ادعای دوم درست است.

(۴) ادعای اول و دوم هر دو نادرست هستند.

۳۳- تعداد مثلث‌های مختلف‌الاضلاعی که ضلع‌های آن‌ها عددهای صحیح و محیط هر یک کم‌تر از ۱۳ باشد، برابر است با

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (استعدادهای درخشان)

۳۴- از میان همه مثلث‌های متساوی‌الساقین به طول ساق ۷ که طول قاعده‌شان با یک عدد صحیح بیان می‌شود، مثلی را انتخاب کرده‌ایم که

بیشترین محیط را دارد. محیط این مثلث برابر است با

(۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۲۱ (۴) ۲۷

۳۵- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، می‌دانیم $\overline{AB} = \overline{AC} = ۵$ و $\widehat{BAC} > ۶۰^\circ$. طول محیط این مثلث عددی صحیح است. چند مثلث از این

نوع وجود دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۶- مصطفی می‌خواهد مثلث متساوی‌الساقینی رسم کند که اولاً طول ساق‌هایش ۶ واحد، ثانیاً اندازه رأسش بیشتر از ۶۰° باشد و ثالثاً طول

قاعده‌اش عددی طبیعی باشد. او چند مثلث مختلف می‌تواند بکشد؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۳۷- در شکل مقابل، طول AC کدام یک از گزینه‌ها ممکن است باشد؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۳۸- با توجه به شکل مقابل، اگر x عددی صحیح و مثبت باشد، آن وقت مجموع مقادیری که به جای x می‌توان

قرار داد برابر است با

(۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۷

۳۹- طول ضلع‌های $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ از چهار ضلعی محدب $ABCD$ به ترتیب برابر ۱ و ۴ است. طول قطر BD نیز برابر ۲ است. اگر BD ، چهارضلعی

را به دو مثلث متساوی‌الساقین تقسیم کند، محیط چهارضلعی چقدر است؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۴۰- روباه مکار ۱۰۰ تکه چوب دارد که طول همه آن‌ها با هم فرق دارد. او ادعا می‌کند که با هر سه تایی از این چوب‌ها می‌تواند مثلث درست کند.

پینوکیو قصد دارد درستی ادعای او را با امتحان کردن چوب‌ها و ساختن مثلث‌های مختلف مشخص کند. حداقل چند بار باید آزمایش کند تا از

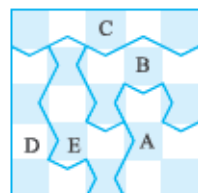
درستی یا نادرستی ادعای روباه مطمئن شود؟

(۱) ۱۰۰ بار (۲) ۱۰۰×۹۹ بار (۳) تقریباً $\frac{۱۰۰}{۳}$ بار (۴) ۱ بار

۴۱- مربعی ۵×۵ را مانند شکل مقابل به پنج قسمت تقسیم کرده‌ایم. هر برش، دنباله‌ای از شکل‌های به صورت

است که البته همگی با هم یکسان هستند. محیط کدام قسمت بیشتر است؟

(۱) B (۲) C (۳) D (۴) E



طول پاره خط در شکل های هندسی

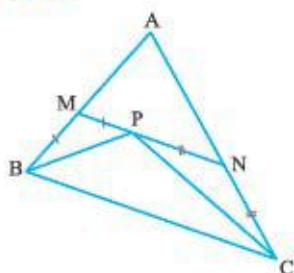
۴۲- طول ضلع های مثلثی ۶، ۱۰ و ۱۱ است. مثلث متساوی الاضلاعی داریم که محیط آن با محیط این مثلث برابر است. طول هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع چه قدر است؟

(کانونگورو)

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴) ۹

۴۳- در مثلث ABC ، $AB = 5$ ، $BC = 6$ و $AC = 7$. دو حشره با هم و در جهت های مخالف از رأس A شروع به حرکت روی اضلاع مثلث می کنند. می دانیم سرعت این دو در طول مسیر یکسان است و اولین بار در نقطه ای مانند D روی BC به هم می رسند. طول BD کدام است؟

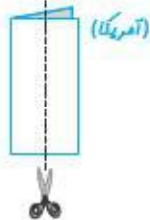
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (آفریقای جنوبی)



۴۴- می دانیم در شکل مقابل، $AB = 12$ و $AC = 20$. در این صورت محیط مثلث AMN چه قدر است؟

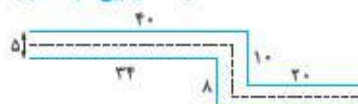
- (۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

۴۵- کاغذی مربعی به طول ضلع ۴ را از وسط تا کرده و سپس هر دو لایه را موازی با خط تا پریده ایم. در نتیجه سه مستطیل به دست آمده است. نسبت محیط یکی از مستطیل های کوچک جدید به مستطیل بزرگ جدید چه قدر است؟



- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$ (آفریقای جنوبی)

(آفریقای جنوبی مرحله دوم)



۴۶- طول خط چین شکسته در وسط راه. برحسب میلی متر برابر است با

- (۱) ۶۷ (۲) ۶۸ (۳) $67 \frac{1}{5}$ (۴) ۶۹

۴۷- در مثلث متساوی الساقین ABC ، $AB = 2BC$. اگر محیط ABC برابر ۲۰۰ میلی متر باشد، آن گاه طول AC چند میلی متر است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴) ۱۰ (آفریقای جنوبی مرحله دوم)

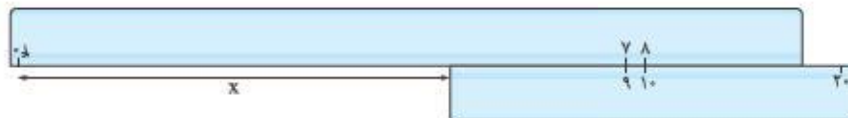
۴۸- کامبیز نواری کاغذی به طول ۳۶ سانتی متر را به ۴ مستطیل دلخواه، مطابق شکل زیر تقسیم کرده و سپس وسط این مستطیل ها را به هم وصل کرده است. مجموع طول خط های MN و PQ چه قدر است؟

(کانونگورو)



- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۴۹- دو خط کش که پایینی ۲۰ سانتی متر و بالایی ۴۰ سانتی متر است، روی هم قرار گرفته اند. با توجه به شکل، فاصله مجهول x برابر است با



- (۱) ۱۶ cm (۲) ۱۸ cm (۳) ۱۹ cm (۴) ۱۷ cm