



درس اول: مفاهیم اولیه مجموعه (اجتماع، اشتراک و تفاضل)

 $\pi = \frac{22}{7}$

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۱ تا ۱۰

معرفی مجموعه



مجموعه: یکی از مفاهیم تعریف نشده در ریاضیات است، یعنی تا به حال هیچ دانشمندی نتوانسته تعریف دقیق و علمی‌ای برای مجموعه ارائه کند (نقطه هم تعریف نشده). اما در ریاضیات دوره متوسطه دوم، مجموعه به دسته‌ای از اشیاء گفته می‌شود که اعضای آن دقیقاً مشخص شده باشند، برای مثال $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ یک مجموعه است، ولی $B = \{\text{بچه پول دارهای ایران}\}$ مجموعه به حساب نمی‌آید، زیرا دقیقاً نمی‌دانیم برای بچه پول دار بودن چقدر پول لازم است. 😊

مجموعه را معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی مانند A, B و ... نمایش می‌دهیم و اعضای آن را درون آکولاد می‌گذاریم. برای مثال $A = \{a, b, c\}$ یک مجموعه سه عضوی است که مثلاً a عضو آن است و می‌نویسیم: $a \in A$ ، ولی d عضو آن نیست، در این حالت می‌نویسیم: $d \notin A$.

تذکر: سه ویژگی مهم در مجموعه‌ها که دانستن آن بر همگی واجب است:

۱) در مجموعه‌ها، عضوهای تکراری را یک بار می‌نویسیم، برای مثال مجموعه $A = \{4, 4, 5, 5, 5\}$ هیچ فرقی با مجموعه $A = \{4, 5\}$ ندارد.

۲) اگر تمام اعضای مجموعه A در مجموعه B هم باشد، می‌گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$. برای مثال:

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 2, 4\} \Rightarrow A \subseteq C, B \subseteq C$$

۳) مجموعه‌ای را که هیچ عضوی ندارد تهی می‌نامیم و با $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم. همچنین فراموش نکنید که تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

بعضی‌ها هم هستند که به اشتباه $\emptyset$ را به صورت $\{\emptyset\}$ نمایش می‌دهند. (شما این‌طوری نباشید) زیرا مجموعه $\{\emptyset\}$ یک مجموعه تک عضوی است.

مثال آموزشی: زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{1, \emptyset, \{2, 3\}, 1\}$ را بنویسید.

پاسخ: مجموعه A هیچ فرقی با مجموعه $\{1, \emptyset, \{2, 3\}\}$ ندارد (قبوله؟). حالا هشت زیرمجموعه مجموعه A را با دقت ببینید:

$$A_1 = \emptyset, A_2 = \{1\}, A_3 = \{\emptyset\}, A_4 = \{\{2, 3\}\}, A_5 = \{1, \emptyset\}, A_6 = \{1, \{2, 3\}\}, A_7 = \{\emptyset, \{2, 3\}\}, A_8 = \{1, \emptyset, \{2, 3\}\}$$

جالب است بدانید که در این مجموعه، تهی هم عضو و هم زیرمجموعه A است.

تست آموزشی: اگر $A = \{a, b, \{b\}\}$ و $B = \{a, \{b\}\}$ باشند، کدام گزینه نادرست است؟

$$\emptyset \subseteq A - B$$

$$B \in A$$

$$\{b\} \subseteq A$$

$$B \subseteq A$$

پاسخ گزینه ۳: به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: با توجه به این‌که همه اعضای B درون A هستند، پس $B \subseteq A$ است. ✓

گزینه «۲»: مجموعه A عضوی به نام b دارد، پس حتماً $\{b\} \subseteq A$ می‌باشد. ✓

گزینه «۳»: این گزینه نادرست است. دقت داشته باشید که اگر مجموعه $B = \{a, \{b\}\}$ بخواهد عضوی از A باشد، دقیقاً خود مجموعه $\{a, \{b\}\}$ باید در مجموعه A باشد که به وضوح این عضو در A حضور ندارد. (میدونی که $a, \{b\}$ هیچ ربطی به $\{a, \{b\}\}$ ندراره) ✗

گزینه «۴»: تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است. (تایید!!) ✓

تست آموزشی: اگر $A = \{1, 1, 2\}$ و $B = \{\{1\}, 1\}$ باشند، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

(ب) تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر ۸ است.

(الف) تعداد اعضای این دو مجموعه برابر است.

(ت) دوتا از زیرمجموعه‌های مجموعه A و B یکسان هستند.

(پ) $\{1\}$ هم عضو و هم زیرمجموعه B است.

$$4$$

$$3$$

$$2$$

$$1$$

پاسخ گزینه ۳: قبل از بررسی تک تک گزاره‌ها باید بگوییم مجموعه A یک مجموعه دو عضوی به صورت $A = \{1, 2\}$ است و همچنین زیرمجموعه‌های دو مجموعه A و B به صورت زیر می‌باشند:

$$A = \{1, 2\}; A_1 = \emptyset, A_2 = \{1\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{1, 2\}$$

$$B = \{\{1\}, 1\}; B_1 = \emptyset, B_2 = \{\{1\}\}, B_3 = \{1\}, B_4 = \{\{1\}, 1\}$$

حالا خیلی راحت می‌توان گفت گزاره‌های (الف)، (پ) و (ت) همگی درست هستند و فقط گزاره (ب) نادرست است، پس پاسخ تست گزینه «۳» می‌باشد.

نکته:

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است.

مثلاً مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $2^4 = 16$ تا زیرمجموعه دارد. (باورت نمیشه بشین بنویسون!!)



فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

گاج

تست آموزشی اگر مجموعه مرجع $\mathbb{Z}$ و $A \subseteq \mathbb{Z}$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

- ۱ اگر A متناهی باشد، A' متناهی است.
 - ۲ اگر A نامتناهی باشد، A' نامتناهی است.
 - ۳ اگر A نامتناهی باشد، A' نامتناهی است.
 - ۴ اگر A متناهی باشد، A' نامتناهی است.
- پاسخ گزینه ۴** به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

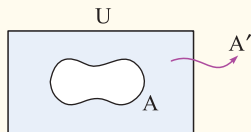
- گزینه «۱»: نادرست است. دلیلش هم این است که اگر از مجموعه نامتناهی $\mathbb{Z}$ تعداد متناهی عضو حذف شود، A' نامتناهی می‌شود. *
- گزینه «۲»: نادرست است. برای مثال اگر A مجموعه اعداد زوج باشد، A' مجموعه اعداد فرد می‌شود که هر دو نامتناهی هستند. *
- گزینه «۳»: نادرست است. اگر $A = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ باشد، $A' = \{\}$ می‌شود که متناهی است. *
- گزینه «۴»: درست است. ✓

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۶۵ تا ۸۹

خواص متمم



برای اینکه این قسمت را خیلی خوب متوجه شوید به عبارت مقابل دقت کنید، «برعکس همه‌چی، می‌شود هیچی و برعکس هیچی می‌شود همه‌چی»، بنابراین یعنی $U' = \emptyset$ و $\emptyset' = U$. این هم چند رابطه دیگر که برای درک بهترشان حتماً باید سراغ نمودار ون برویم:



$$(A')' = A, A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = U, A - A' = A$$

در آخر هم چندتا رابطه که به کمک آن‌ها حل تست‌ها خیلی ساده‌تر می‌شود:

۱ $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$ (تفاضل)

۲ $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

۳ $(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$

به این ویژگی قانون **دمورگان** گفته می‌شود (لارش اینه که همه‌پیو برعکس میکنه).

۴ $A \cap (A' \cup B) = A \cap B, A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

به این دو تساوی هم قوانین **شبه جذب** گفته می‌شود.

مثال آموزشی اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ باشند، هر یک از مجموعه‌های $A' \cup B$ و $A' \cap B'$ را به دست آورید.

پاسخ با توجه به این که $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ است، پس A' و B' به صورت زیر می‌باشند:

$$A' = U - A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ و } B' = U - B = \{1, 2, 8, 9, 10\}$$

در نتیجه خواسته مسئله، یعنی مجموعه‌های $A' \cup B$ و $A' \cap B'$ را به ترتیب به دست می‌آوریم. ببینید:

$$A' \cap B' = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 2, 8, 9, 10\} = \{8, 9, 10\}$$

$$A' \cup B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

مثال آموزشی اگر $U = \mathbb{N}$ ، $B = \{x | x \leq 4\}$ و $A = \{x | x > 5\}$ باشند، آنگاه مجموعه $(A \cap B)'$ را به دست آورید.

پاسخ روش مستقیم حل مسئله این است که B' یعنی متمم مجموعه B را پیدا کنیم و اشتراک آن را با A به دست آوریم. بعد در آخر متمم این مجموعه نسبت به $\mathbb{N}$ را پیدا کنیم. بیایید از راه بهتری به نام دمورگان مسئله را حل کنیم. دمورگان می‌گوید که $(A \cap B)' = A' \cup B$ است، پس باید متمم A را به دست آوریم و سپس اجتماع آن با B را پیدا کنیم. ببینید:

$$A' = \mathbb{N} - A = \mathbb{N} - \{x | x > 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A' \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

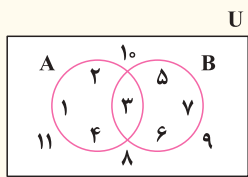
مثال آموزشی متمم مجموعه $(B - A)' - B$ را به دست آورید.

پاسخ اول مجموعه داده شده را ساده‌تر می‌کنیم. از تفاضل می‌دانیم که $B - A = B \cap A'$ و همچنین با استفاده از ویژگی دمورگان و باز هم تفاضل می‌توان نوشت:

$$(B \cap A')' - B = (B' \cup A) \cap B'$$

خاصیت جذب را که به خاطر دارید؟ به کمک جذب به جای مجموعه $B' \cap (B' \cup A)$ می‌نویسیم B' . در نهایت خواسته مسئله متمم این مجموعه است، یعنی:

$$(B')' = B$$



با توجه به نمودار و مقابل، مجموعه $A - (B' - A)$ چه عضوهایی دارد؟

مثال آموزشی

پاسخ **روشن اول:** مطابق نمودار داده شده $U = \{1, 2, \dots, 11\}$ و $B = \{3, 5, 6, 7\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ می باشند، پس $B' = \{1, 2, 4, 8, 9, 10, 11\}$ و با جای گذاری مجموعه های به دست آمده در $A - (B' - A)$ می توان نوشت:

$$\{1, 2, 3, 4\} - (\{1, 2, 4, 8, 9, 10, 11\} - \{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\} = A$$

روشن دوم: به کمک ویژگی های گفته شده در مورد مجموعه ها می توان نوشت: $A - (B' - A) = A - (B' \cap A') = A \cap (B' \cap A')' \xrightarrow{\text{دمورگان}} A \cap (B \cup A) \xrightarrow{\text{جذب}} A = \{1, 2, 3, 4\}$

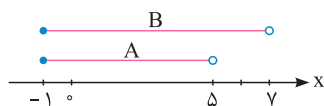
تست آموزشی اگر $A = [-1, 5]$ ، $B = [-1, 7]$ و $A' \cap B' = [-2, -1) \cup [7, 9)$ باشد، مجموعه مرجع کدام است؟

۴ $[-2, 9]$

۳ $(-2, 9]$

۲ $[-2, 9)$

۱ $(-2, 9)$



پاسخ گزینه ۲ با توجه به این که $A = [-1, 5]$ و $B = [-1, 7]$ است، ابتدا $A \cup B$ را به کمک محور مقابل تعیین می کنیم:

$$A \cup B = [-1, 5] \cup [-1, 7] = [-1, 7]$$

از طرفی مطابق قاعده دمورگان، $A' \cap B' = (A \cup B)'$ است، پس مجموعه مرجع را به گونه ای انتخاب می کنیم که متمم $[-1, 7]$ برابر $[-2, -1) \cup [7, 9)$ باشد. حالا با توجه به این که اجتماع یک مجموعه و متمم آن برابر با مجموعه مرجع است، مجموعه مرجع را تعیین می کنیم:



$$U = [-1, 7] \cup [-2, -1) \cup [7, 9) = [-2, 9)$$

تست آموزشی اگر $A \cup (B - A) = B$ باشد، آنگاه.....

۴ $B = \emptyset$

۳ $A \subseteq B'$

۲ $B \subseteq A$

۱ $A \subseteq B$

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = A \cup B = B$$

پاسخ گزینه ۱ مجموعه $B - A$ همان $B \cap A'$ است، حالا به کمک ویژگی شبه جذب می توان نوشت:

از طرفی وقتی $A \cup B$ برابر B شود، یعنی A زیرمجموعه ای از B است ($A \subseteq B$).

تست آموزشی حاصل عبارت $(B \cup A) \cap ((B - A)' \cap A')$ کدام است؟

۴ $A - B$

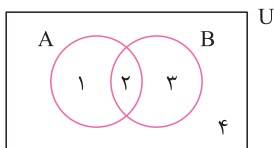
۳ B

۲ $B - A$

۱ $\emptyset$

پاسخ گزینه ۱ **روشن اول:** $B - A$ برابر $B \cap A'$ است. حالا به کمک قانون دمورگان به جای $(B \cap A')'$ می نویسیم $B' \cup A$. پس داریم:

$$(B \cup A) \cap ((B' \cup A) \cap A') \xrightarrow{\text{شبه جذب}} (B \cup A) \cap (A' \cap B') \xrightarrow{\text{دمورگان}} (B \cup A) \cap (A \cup B)' = \emptyset$$



روشن دوم: به کمک نمودار مقابل، داریم:

$$(B \cup A) \cap ((B - A)' \cap A') = (\{2, 3\} \cup \{1, 2\}) \cap (\{3\}' \cap \{3, 4\})$$

$$\xrightarrow{\{3\}' = \{1, 2, 4\}} \{1, 2, 3\} \cap (\{1, 2, 4\} \cap \{3, 4\}) = \{1, 2, 3\} \cap \{4\} = \emptyset$$

این هم یک تست بامزه!

تست آموزشی برای دو مجموعه A و B، اگر $B - A = B$ باشد، متمم مجموعه $(B' \cap A) \cap (A' \cup B)$ کدام است؟

۴ U

۳ $\emptyset$

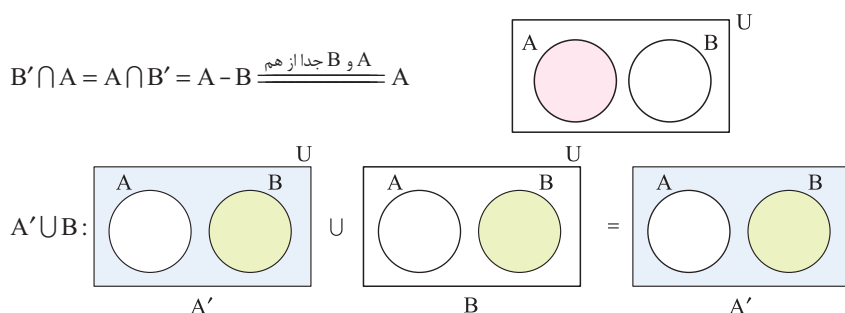
۲ A'

۱ A

$$B - A = B - (A \cap B)$$

پاسخ گزینه ۴ مطابق آنچه از جبر مجموعه ها آموختیم می توان نوشت:

طبق فرض مسئله این مجموعه برابر B است، در نتیجه می توان گفت که $A \cap B = \emptyset$ و A و B دو مجموعه جدا از هم هستند. حالا هر یک از عبارات $B' \cap A$ و $A' \cup B$ را به دست می آوریم:



$$B' \cap A = A \cap B' = A - B \xrightarrow{\text{A و B جدا از هم}} A$$

پس خواسته مسئله، یعنی $(B' \cap A) \cap (A' \cup B) = A \cap A' = \emptyset$ است که متمم آن برابر با مجموعه U می باشد.



تست‌های درس سوم



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۵۱ از بین مجموعه‌های زیر چه تعداد متناهی هستند؟

الف) مجموعه اعداد گویای بین دو عدد ۱ و ۲

پ) مجموعه تمام خطوط موازی با خط $y = x$

ث) مجموعه اتم‌های موجود در کره زمین

ب) مجموعه تمامی مورچه‌های کره زمین
ت) مجموعه تمامی دایره‌ها به مرکز مبدأ مختصات

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰ ۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ ۳۱ ۳۲ ۳۳ ۳۴ ۳۵ ۳۶ ۳۷ ۳۸ ۳۹ ۴۰ ۴۱ ۴۲ ۴۳ ۴۴ ۴۵ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۴۹ ۵۰ ۵۱ ۵۲ ۵۳ ۵۴ ۵۵ ۵۶ ۵۷ ۵۸ ۵۹ ۶۰ ۶۱ ۶۲ ۶۳ ۶۴ ۶۵ ۶۶ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱ ۷۲ ۷۳ ۷۴ ۷۵ ۷۶ ۷۷ ۷۸ ۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳ ۸۴ ۸۵ ۸۶ ۸۷ ۸۸ ۸۹ ۹۰ ۹۱ ۹۲ ۹۳ ۹۴ ۹۵ ۹۶ ۹۷ ۹۸ ۹۹ ۱۰۰

۵۲ اگر A مجموعه اعداد اول و B مجموعه اعداد طبیعی فرد باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ $A \cup B$ ۱ $A \cap B$ ۲ $B - A$ ۳ $A - B$ ۴۵۳ اگر مجموعه‌های $A = \{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{\frac{x}{2} | x \in \mathbb{N}\}$ مفروض باشند، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ $A - B$ ۱ $B - A$ ۲ $A \cap B$ ۳ $A \cup B$ ۴۵۴ اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} | 3 - x \leq 2x < 6\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} | \frac{1}{x} > 0\}$ ، در این صورت کدام مجموعه زیر نامتناهی است؟ $A - B$ ۱ $A \cap B$ ۲ $\mathbb{Z} - B$ ۳ $A - \mathbb{Z}$ ۴۵۵ اگر A و B دو مجموعه نامتناهی باشند، چه تعداد از مجموعه‌های زیر قطعاً متناهی است؟الف) $A - B$ ب) $A \cap B$ پ) $A \cup B$

۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

۵۶ اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام گزینه نادرست است؟۱ اگر $B \subseteq A$ باشد، $A \cup B$ حتماً متناهی است.۲ اگر $A \subseteq B$ باشد، $B - A$ حتماً نامتناهی است.۳ اگر $B \subseteq A$ باشد، $B - A$ حتماً متناهی است.۴ اگر $A \subseteq B$ باشد، $A \cup B$ ممکن است متناهی باشد.۵۷ اگر $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 4\}$ ، مجموعه B کدام باشد تا اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B ، غیرتهی و به ترتیب نامتناهی و متناهی باشند؟ $B = \{x \in \mathbb{W} | x + 2 \leq 5\}$ ۱ $B = \{x \in \mathbb{Q} | -1 < x < 1\}$ ۲ $B = \{x \in \mathbb{R} | 4 \leq x + 1 \leq 5\}$ ۳ $B = \{x \in \mathbb{Z} | x + 2 \leq 2\}$ ۴۵۸ اگر $A, B \subseteq \mathbb{N}$ و A متناهی و B نامتناهی باشند، کدام گزینه همواره بی پایان است؟ $(A \cap B)'$ ۱ $A - B$ ۲ $A \cup B'$ ۳ $(A \cup B)'$ ۴۵۹ اگر A مجموعه دلخواه و $A - \mathbb{Z}$ متناهی و ناتهی باشد، کدام مجموعه زیر حتماً متناهی است؟ $A - \mathbb{N}$ ۱ $\mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - A)$ ۲ $\mathbb{Z} - (A - \mathbb{N})$ ۳ هیچ کدام ۴

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

۶۰ اگر $U = \{1, 2, \dots, 9\}$ مجموعه مرجع و مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{3, 4, 5\}$ و $C = \{1, 4, 7, 8\}$ مفروض باشند، مجموعه $(A' \cap B') \cup C'$ چند

عضو دارد؟

۵ ۱ ۶ ۲ ۷ ۳ ۸ ۴

۶۱ اگر مجموعه اعداد صحیح را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، حاصل $(\mathbb{Z} - W)' \cap N'$ کدام است؟ $\mathbb{Z}$ ۱ $\mathbb{N}$ ۲ $\{0\}$ ۳ $\emptyset$ ۴۶۲ اگر $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $A = \{2x + 1 | -1 < x \leq 3\}$ کدام است؟ $(-\infty, 1] \cup (7, +\infty)$ ۱ $(-\infty, -1] \cup (7, +\infty)$ ۲ $(-\infty, 1) \cup [7, +\infty)$ ۳ $(-\infty, -1) \cup [7, +\infty)$ ۴۶۳ اگر مجموعه مرجع به صورت $U = (e, +\infty)$ ، $A = [2, +\infty)$ ، $B = \{2x | x \leq 5\}$ و $C = \{x | 1 \leq \frac{x}{2} \leq 2\}$ باشند، $(B - A') \cap C$ شامل چند عدد صحیح است؟

۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴



جدول زیر شامل توضیحات و فرمول‌هایی است که دانستن آن‌ها برای حل تست‌های این بخش الزامی است:

فرمول	توضیح
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	تعداد اعضای که حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B قرار دارند. $\iff$
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$	تعداد اعضای که فقط در A قرار دارند. $\iff$
$n(A') = n(U) - n(A)$	تعداد اعضای که در A قرار ندارند. $\iff$
$n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$	تعداد اعضای که فقط در یکی از دو مجموعه A یا B قرار دارند. $\iff$
$n(A' \cap B') \stackrel{\text{دمورگان}}{=} n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$	تعداد اعضای که در هیچ یک از دو مجموعه A و B قرار ندارند. $\iff$

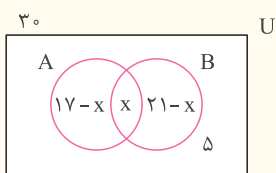
تذکر: یکی از راه‌های خوب در حل تست‌های این بخش، استفاده از نمودار ون است. توصیه می‌کنیم به این روش خیلی مسلط شوید.

مثال آموزشی: در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۷ نفر در تیم والیبال و ۲۱ نفر در تیم فوتبال هستند. ۵ نفر هم هستند که در هیچ‌کدام از دو تیم نیستند. چند نفر

عضو هر دو تیم اند؟

پاسخ اول: والیبالیست‌های کلاس را با A و فوتبالیست‌ها را با B نمایش می‌دهیم، پس $n(A) = 17$ و $n(B) = 21$. از طرفی تعداد اعضای دانش‌آموزان کلاس یعنی همان $n(U)$ برابر ۳۰ است و چون ۵ نفر در هیچ‌کدام از دو تیم نیستند، پس $n(A \cup B) = 30 - 5 = 25$ می‌باشد، پس داریم:

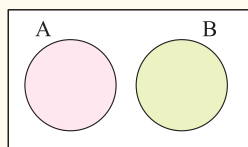
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 25 = 17 + 21 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 38 - 25 = 13$$



روش دوم: این مدل مثال‌ها به کمک نمودار ون هم قابل حل است. خواسته مسئله تعداد افرادی است که در هر دو رشته فعالیت می‌کنند، پس تعدادشان را x می‌گیریم، همچنین در روش اول گفتیم که $n(A \cup B) = 25$ است، پس به کمک نمودار ون مقابل می‌توان نوشت:

$$(17 - x) + (x) + (21 - x) = 25 \Rightarrow 38 - x = 25 \Rightarrow x = 13$$

تعداد اعضای دو مجموعه جدا از هم



دو مجموعه A و B را جدا از هم گویند، هرگاه اشتراکی با هم نداشته باشند، که شکل آن به صورت مقابل است:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0$$

در نتیجه برای دو مجموعه جدا از هم A و B می‌توان نوشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(A \cap B)}_0 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \text{و} \quad n(A - B) = n(A) - \underbrace{n(A \cap B)}_0 \Rightarrow n(A - B) = n(A)$$

تست آموزشی: در یک ساختمان ۴۰ نفر زندگی می‌کنند. ۲۵ نفر از آن‌ها در امور ورزشی و ۱۰ نفر از آن‌ها در امور هنری فعالیت می‌کنند. اگر ۶ نفر از

ساکنین این ساختمان نه در امور هنری و نه در امور ورزشی فعالیت کنند، چند نفر فقط در امور ورزشی فعال‌اند؟

۲۴

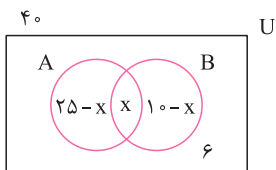
۲۲

۲۱

۲۰

پاسخ گزینه ۴: **روش اول:** فعالان در امور ورزشی و هنری را به ترتیب با A و B نمایش می‌دهیم، پس $n(A) = 25$ و $n(B) = 10$. همچنین از بین ۴۰ نفر ساکن ساختمان ۶ نفر در هیچ‌یک از امور A و B نیستند، پس $n(A \cup B) = 40 - 6 = 34$. حالا برای پیدا کردن کسانی که فقط در امور ورزشی هستند باید تعداد اعضای مجموعه $A - B$ را به دست آوریم، پس می‌توان نوشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 34 = 25 + 10 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 35 - 34 = 1 \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 1 = 24$$



روش دوم: به کمک نمودار ون و با فرض آن‌که تعداد کسانی که در هر دو امور فعال‌اند، x است، می‌توان نوشت:

$$(25 - x) + (x) + (10 - x) = 34 \Rightarrow 35 - x = 34 \Rightarrow x = 1$$

$$25 - x = 25 - 1 = 24$$

در نهایت با توجه به نمودار، تعداد کسانی که فقط در امور ورزشی‌اند، برابر است با:



درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

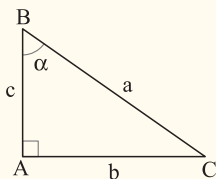
 $\pi = \frac{22}{7}$

تست‌های مربوط به این درسنامه: ۳۱۷ تا ۳۳۲

نسبت‌های مثلثاتی



با شنیدن اسم این فصل یعنی مثلثات، حتماً به یاد مثلث می‌افتیم. کل بدبختی‌هایمان 😞 در این فصل از یک مثلث قائم‌الزاویه شروع می‌شود. راستی یادتان باشد که در کنکور، مثلثات خیلی حائز اهمیت است و علاوه بر تست‌های خودش با فصل‌های دیگر هم ترکیب می‌شود! در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، برای زاویه حاده α رابطه‌های زیر برقرار هستند:



$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a} \quad (\text{سینوسِ آلفا})$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{c}{a} \quad (\text{کسینوسِ آلفا})$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{b}{c} \quad (\text{تانژانتِ آلفا})$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{c}{b} \quad (\text{کوتانژانتِ آلفا})$$

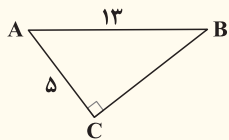
با کمی دقت به نسبت‌های بالا متوجه می‌شویم که $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ معکوس یکدیگر هستند (قبوله؟) همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ و $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ است. اثباتش را هم ببینید:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}}{\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \tan \alpha, \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}}{\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \cot \alpha$$

مثلاً اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ باشند، $\tan \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ و در نتیجه $\cot \alpha = \frac{4}{3}$ می‌باشد.

نتیجه: همین اول کار این سه فرمول را با دقت حفظ کنید که جلوتر بدجوری به درد می‌خورد:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$



مثال آموزشی: در شکل مقابل، حاصل $\frac{\tan \hat{A} + \cot \hat{B}}{\cos \hat{A} + \sin \hat{B}}$ را به دست آورید.

پاسخ: قبل از هر کاری به کمک قضیه فیثاغورس، اندازه ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow (13)^2 = (12)^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

حالا طبق مطالب گفته شده در مورد نسبت‌های مثلثاتی، حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

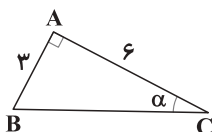
$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}, \quad \cot \hat{B} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}, \quad \sin \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$$

$$\frac{\tan \hat{A} + \cot \hat{B}}{\cos \hat{A} + \sin \hat{B}} = \frac{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}}{\frac{12}{13} + \frac{12}{13}} = \frac{\frac{10}{12}}{\frac{24}{13}} = \frac{10}{12} \times \frac{13}{24} = \frac{13}{24}$$

در نهایت می‌توان نوشت:

تست آموزشی: در شکل زیر $\sin \alpha + \cos \alpha$ کدام است؟



$$\frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \text{پ}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{ف}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{ا}$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{5} \quad \text{س}$$



تست‌های مربوط به این درسنامه: ۳۳۲ تا ۴۶۱

فرمول‌های مثلثاتی



در اینجا می‌خواهیم همه فرمول‌های مثلثاتی که در حل تست‌ها به آن‌ها نیاز می‌شود را برایتان بیاوریم. فرمول‌های مهم‌تر را هم اثبات می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\
 & \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases} \\
 (2) \quad & \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\
 & \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\
 & \tan \alpha \times \cot \alpha = 1 \\
 (3) \quad & 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\
 (4) \quad & 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

اثبات موارد (۳) و (۴) بالا را هم به کمک فرمول اصلی یعنی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ بلد باشید که خالی از لطف نیست:

$$(3) \text{ اثبات: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{+\cos^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cancel{\cos^2 \alpha}}{\cancel{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \checkmark$$

$$(4) \text{ اثبات: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{+\sin^2 \alpha} \frac{\cancel{\sin^2 \alpha}}{\cancel{\sin^2 \alpha}} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \checkmark$$

تست آموزشی اگر $\cot \alpha = -\frac{1}{4}$ و α در ناحیه دوم باشد، $\cos \alpha$ کدام است؟

$$\begin{aligned}
 1 \quad & -\frac{\sqrt{11}}{17} \\
 2 \quad & -\frac{\sqrt{13}}{17} \\
 3 \quad & -\frac{\sqrt{15}}{17} \\
 4 \quad & -\frac{\sqrt{17}}{17}
 \end{aligned}$$

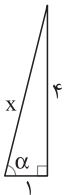
پاسخ گزینه ۴ روش اول: می‌دانیم $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ است، پس داریم:

$$\begin{aligned}
 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \xrightarrow{\cot \alpha = -\frac{1}{4}} 1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{17}{16} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\
 \Rightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{16}{17} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{\sqrt{17}} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه دوم}} \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}
 \end{aligned}$$

حالا با کمک گرفتن از فرمول $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ به راحتی $\cos \alpha$ را پیدا می‌کنیم، ببینید:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}} \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{16}{17} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{17} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{17}}{17} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه دوم}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$$

روش دوم: یک مثلث قائم‌الزاویه به شکل مقابل در نظر می‌گیریم و با توجه به این‌که $\cot \alpha = -\frac{1}{4}$ است، می‌توان نوشت:

$$x^2 = (1)^2 + (4)^2 \Rightarrow x^2 = 17 \Rightarrow x = \sqrt{17} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

حواستان باشد که α در ناحیه دوم است، پس $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$ می‌باشد.تست آموزشی حاصل عبارت $\frac{(1 + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x)}{1 - \sin^2 x - \cos^2 x}$ کدام است؟

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \cot^4 x \\
 2 \quad & \tan^4 x \\
 3 \quad & \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2 \\
 4 \quad & \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^4
 \end{aligned}$$

پاسخ گزینه ۴ روش اول: با استفاده از اتحادهای $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{(1 + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x)}{(1 - \sin^2 x) - \cos^2 x} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\cos^2 x - \cos^2 x} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\cos^2 x(1 - \cos^2 x)} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\cos^2 x(\sin^2 x)} = \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^4$$



تست‌های درس اول

 $\pi \approx \frac{22}{7}$

ریشه n ام

۵۲۷ کدام گزینه به درستی محاسبه نشده است؟

$$\sqrt[3]{256} = 4 \quad 1 \quad \sqrt[3]{-32} = -2$$

۵۲۸ مقدار $\sqrt[3]{2} - \sqrt{96} - \sqrt[3]{-64}$ کدام است؟

$$-2 \quad 1 \quad -3 \quad 2$$

۵۲۹ مقدار $\sqrt[3]{0.054} \sqrt[3]{-\frac{1}{32}}$ کدام است؟

$$0.2 \quad 1 \quad -0.2 \quad 2$$

۵۳۰ کدام گزینه نادرست است؟

۱ ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ به اندازه ۴ واحد با هم اختلاف دارند.

۳ اگر $\sqrt[3]{625} = a$ باشد، a می‌تواند ۵ یا -۵ باشد.

۵۳۱ کدام عدد زیر، ریشه چهارم ندارد؟

$$\frac{2}{-\pi + \sqrt{24}} \quad 2 \quad \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi} \quad 1$$

۵۳۲ کدام عدد ریشه چهارم $28 - 16\sqrt{3}$ است؟

$$1 - \sqrt{2} \quad 1 \quad 1 - \sqrt{3} \quad 2$$

۵۳۳ اگر $a^3 = \sqrt[5]{b^3}$ باشد، ریشه پنجم b کدام است؟

$$\sqrt[5]{a} \quad 1 \quad a^5 \quad 2$$

تعیین حدود ریشه n ام

۵۳۴ کدام گزینه همیشه درست است؟

۱ هر عدد نامنفی، دو ریشه دوم مختلف دارد.

۳ تنها ریشه دوم عدد $5 - 2\sqrt{6}$ ، عدد $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ است.

۵۳۵ کدام عدد بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار ندارد؟

$$\sqrt[3]{14} \quad 3 \quad \sqrt[3]{21} \quad 2 \quad \sqrt{7} \quad 1 \quad \sqrt[3]{35} \quad 4$$

۵۳۶ عدد $\sqrt[3]{200}$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. مجموع این دو عدد کدام است؟

$$11 \quad 3 \quad 9 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 13 \quad 4$$

۵۳۷ اگر k یک عدد صحیح باشد و $k + 1 < \sqrt[3]{120} < k$ باشد، k کدام است؟

$$-2 \quad 1 \quad -3 \quad 2 \quad -4 \quad 3 \quad -5 \quad 4$$

۵۳۸ ریشه پنجم عدد -۷۰ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

$$-2 \quad 1 \quad -3 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \quad -4 \quad 4$$

۵۳۹ با توجه به شکل زیر، کدام گزینه نادرست است؟

$$A \quad 1 \quad B \quad 2 \quad C \quad 3 \quad D \quad 4$$

۵۴۰ بین دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرد. مجموع این دو عدد صحیح کدام است؟

$$-3 \quad 1 \quad -9 \quad 2 \quad -5 \quad 3 \quad -7 \quad 4$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \quad 3 \quad \sqrt[3]{0.24} = \sqrt[3]{16} \quad 4$$

$$-4 \quad 3 \quad -5 \quad 4$$

$$-0.3 \quad 3 \quad 0.3 \quad 4$$

۲ عدد $\sqrt{2}$ دو ریشه دوم دارد که قرینه هم هستند.۴ عدد $-\sqrt{2}$ یک ریشه سوم منفی دارد.

(برگرفته از کتاب درسی)

$$-\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[5]{\pi}} + \frac{\pi}{\sqrt{32}} \quad 3 \quad \frac{\sqrt{\pi - \frac{\pi}{3}}}{\frac{\pi}{3} + \pi} \quad 4$$

(برگرفته از کتاب درسی)

$$2 - \sqrt{3} \quad 3 \quad 2 - \sqrt{13} \quad 4$$

$$\sqrt[3]{a} \quad 3 \quad a \quad 4$$

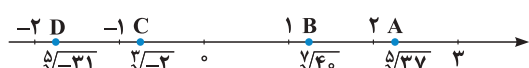
(برگرفته از کتاب درسی)

۲ اگر m ریشه مرتبه دوم n باشد، -m هم ریشه مرتبه دوم n است.

۴ ریشه سوم عدد ۱۰۲ بین دو عدد ۳ و ۴ است.

(برگرفته از کتاب درسی)

(برگرفته از کتاب درسی)





۶۶۲ حاصل عبارت $\frac{a^6+1}{(a+\frac{1}{a})(a^2+\frac{1}{a^2}-1)}$ کدام است؟

a^6 ۱ a^2 ۲ a^3 ۳ a^5 ۴

۶۶۳ اگر $x = 2(1 + \frac{1}{x})$ باشد، حاصل $\frac{x^3+8}{2x+4}$ کدام است؟

۲ ۱ $\frac{3}{2}$ ۲ $\frac{4}{3}$ ۳ ۵ ۴

۶۶۴ اگر $x^3 + y^3 - 2 = 0$ باشد، حاصل $\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}$ کدام است؟

$\frac{x}{y}$ ۱ $-\frac{x}{y}$ ۲ $\frac{x-1}{y-1}$ ۳ $\frac{1-x}{y-1}$ ۴

اتحاد جمله مشترک

۶۶۵ اگر $x^2 + 5x = 1$ باشد، حاصل $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)$ کدام است؟

-65 ۱ -70 ۲ 65 ۳ 70 ۴

۶۶۶ اگر $x + \frac{2}{x} = 4$ باشد، حاصل $(x-5)(x-3)(x-1)(x+1)$ کدام است؟

-3 ۱ -5 ۲ -6 ۳ -7 ۴

این هم سه تا تست از ایتارهای فرعی‌تر

۶۶۷ برای سه عدد a, b, c و اگر $a+b+c=7$ ، $abc=12$ و $a^2+b^2+c^2=17$ باشند، حاصل $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ ۱ $\frac{2}{5}$ ۲ 3 ۳ 1 ۴

۶۶۸ اگر a, b, c سه عدد مخالف صفر باشند که مجموعشان برابر صفر است، مقدار عبارت $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$ کدام است؟

2 ۱ 3 ۲ 4 ۳ -1 ۴

۶۶۹ پس از بسط دادن عبارت $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$ ، ضریب چند تا از عبارت‌ها فرد است؟

12 ۱ 9 ۲ 2 ۳ 5 ۴

تجزیه

۶۷۰ در تجزیه عبارت $x^3 - 5x^2 + 4x$ کدام عامل وجود ندارد؟

x ۱ $x-1$ ۲ $x-2$ ۳ $x-4$ ۴

۶۷۱ در تجزیه عبارت $x^5 - 16x$ کدام عامل وجود ندارد؟

$x-2$ ۱ $x+2$ ۲ x^2+2 ۳ x^2+4 ۴

۶۷۲ در تجزیه عبارت $36x - 5x^3 - x^5$ ، کدام عامل وجود ندارد؟

x^2+4 ۱ $x-3$ ۲ $x+3$ ۳ $x-9$ ۴

۶۷۳ اگر $x^2+1 = (\sqrt[3]{x^2}+1)(A+B+1)$ باشد، AB کدام است؟ (A و B برحسب x هستند).

x ۱ $-x$ ۲ x^2 ۳ $-x^2$ ۴

۶۷۴ در تجزیه عبارت $2x^2 + 3x + 1$ کدام عامل وجود دارد؟

$x-1$ ۱ $2x-1$ ۲ $2x+1$ ۳ $x-2$ ۴

۶۷۵ در تجزیه عبارت $x^4 + 64$ کدام عامل وجود دارد؟

x^2+8 ۱ x^2-8 ۲ x^2+4x+8 ۳ x^2+4x+4 ۴

۶۷۶ در تجزیه عبارت $x^4 + 2x^3 - x - 2$ کدام عامل وجود ندارد؟

$x-1$ ۱ $x+2$ ۲ x^2+x+1 ۳ x^2-x+1 ۴

(آزمون‌های گاج)



فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

گاج

البته اینجوری هم قابل محاسبه است که $-\frac{\Delta}{4a} = 1$ ، ببینید:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{(-m)^2 - 4(-2m)(-2)}{4(-2m)} = -\frac{m^2 - 16m}{-8m} = \frac{m^2 - 16m}{8m} = \frac{m(m-16)}{8m} = \frac{m-16}{8} \xrightarrow{y_S=1} \frac{m-16}{8} = 1 \Rightarrow m-16=8 \Rightarrow m=24$$

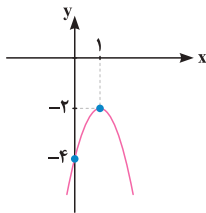
نتیجه: خط افقی $y = k$ ، تنها می‌تواند در رأس سهمی به سهمی مماس شود و لاغیر.

نکته

ظاهر جدید سهمی

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، سهمی $y = ax^2 + bx + c$ را می‌توانیم به شکل $y = a(x-k)^2 + h$ نمایش دهیم. اتفاق جالب و خوب در این حالت این است که رأس سهمی به صورت $S(k, h)$ می‌باشد.

برای مثال، رأس سهمی $y = -2(x-1)^2 - 2$ برابر با $S(1, -2)$ است، چرا که با توجه به رابطه $y = a(x-k)^2 + h$ ، $k=1$ و $h=-2$ می‌باشد.



این هم نمودارش:

توجه کنید که با قرار دادن $x=0$ ، عرض از مبدأ سهمی برابر $y = -2 - 2 = -4$ به دست می‌آید.

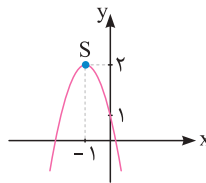
تست آموزشی نمودار سهمی $y = -(x+1)^2 + 2$ از کدام ناحیه‌ها نمی‌گذرد؟

۴ از همه ناحیه‌ها می‌گذرد

۳ سوم

۲ دوم

۱ اول

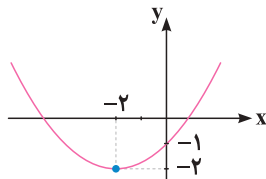


با مطابقت دادن $y = -(x+1)^2 + 2$ با $y = a(x-k)^2 + h$ متوجه می‌شویم که $a=-1$ ، $k=-1$ و $h=2$ هستند،

پس دهانه سهمی رو به پایین است و رأس آن $S(-1, 2)$ می‌باشد. نمودار این سهمی به صورت مقابل می‌باشد:

دقت کنید که مقدار عبارت $y = -(x+1)^2 + 2$ به ازای $x=0$ برابر ۱ است، یعنی سهمی محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند و به راحتی دیده می‌شود که این سهمی از همه ناحیه‌ها عبور می‌کند.

تست آموزشی معادله سهمی زیر کدام است؟



$$y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 2$$

$$y = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 2$$

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 2$$

$$y = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 2$$

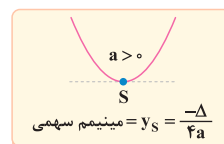
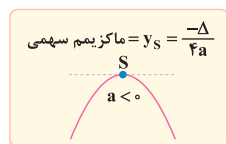
رأس سهمی داده شده $S(-2, -2)$ است، پس با توجه به اینکه رأس سهمی را داریم بهتر است سراغ رابطه $y = a(x-k)^2 + h$ برویم. تا اینجا کار معادله سهمی به شکل $y = a(x+2)^2 - 2$ در می‌آید. حالا با توجه به اینکه سهمی از نقطه $(0, -1)$ می‌گذرد، می‌توان نوشت:

$$y = a(x+2)^2 - 2 \xrightarrow{(0, -1) \text{ روی سهمی است}} -1 = a(0+2)^2 - 2 \Rightarrow -1 = 4a - 2 \Rightarrow 1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

در نتیجه معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 - 2$ می‌باشد.

نکته

احتمالاً تا همین الان متوجه شده‌اید که بیشترین یا کمترین مقدار سهمی، همان عرض رأس سهمی یعنی $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است:

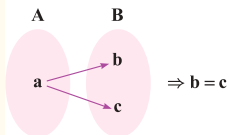


خلاصه اینکه یادتان باشد که هر وقت خواستید در یک سهمی ماکزیمم یا مینیمم را پیدا کنید، سراغ $\frac{-\Delta}{4a}$ بروید.



نکته

در نمودار پیکانی یک تابع، اگر از عضوی دو پیکان به صورت زیر خارج شود، در این صورت حتماً خواهیم داشت:

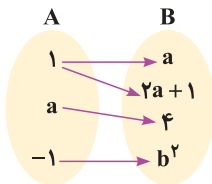


$$\Rightarrow b = c$$



تست آموزشی

اگر نمودار پیکانی مقابل، تابع باشد، $a \times b$ کدام می تواند باشد؟



۱

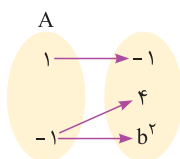
-۴

۸

-۲

پس طرح می گوید که نمودار پیکانی داده شده تابع است، پس حتماً خروجی های عدد ۱ با هم برابر هستند و در نتیجه داریم:

$$a = 2a + 1 \Rightarrow a = -1$$



پس ظاهر جدید نمودار پیکانی بالا، به صورت زیر در می آید، از طرفی با توجه به تابع بودن این رابطه، خروجی های -۱ هم باید برابر باشند، داریم:

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

در نهایت خواسته مسئله یعنی $a \times b$ برابر $(-1) \times (2) = -2$ یا $(-1) \times (-2) = 2$ می باشد.

جدول: این نوع نمایش خیلی با نمودار پیکانی فرقی ندارد. در اینجا یک جدول دو سطری داریم که اعداد سطر اول با اعداد سطر دوم در رابطه می باشند. در این دیدگاه برای تابع بودن رابطه، نباید هیچ عضوی از سطر اول به دو عضو (یا بیشتر) از سطر دوم نسبت داده شود. برای مثال جدول زیر تابع نیست، چرا که عضو ۵ در سطر اول به دو عدد مختلف ۴ و ۱ در سطر دوم نسبت داده شده است.

x	۵	۲	۵	۶
y	۱	۷	۴	۰

زوج مرتب: هر دوتایی به شکل (a, b) را زوج مرتب می گوئیم و در آن a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می نامیم. توجه داشته باشید که مؤلفه های اول و دوم در زوج مرتب ها اجازه جابه جاشدن ندارند. برای مثال دو زوج مرتب $(۱, ۴)$ و $(۴, ۱)$ یکی نیستند. هر رابطه را می توان به شکل مجموعه ای از زوج مرتب ها نمایش داد. در این صورت این رابطه زمانی تابع است که مؤلفه های اول زوج مرتب ها تکراری نباشد. مثلاً رابطه $R_1 = \{(1, 2), (2, 5), (1, 6)\}$ تابع نیست؛ زیرا عدد ۱ مؤلفه اول تکراری این رابطه می باشد.

نکته

اگر مؤلفه های اول دو زوج مرتب با هم برابر باشند، برای تابع بودن رابطه، باید مؤلفه های دوم نظیرشان نیز یکسان باشند. مثلاً اگر رابطه $R_2 = \{(1, a), (1, 2), (2, 4)\}$ بخواهد تابع باشد، a متهم به ۲ بودن است.



تست آموزشی

رابطه $R = \{(4, a), (a, 2), (4, a^2), (0, 3)\}$ به ازای کدام مقدار a تابع است؟

هیچ مقدار

۱

صفر

۱ و صفر

در زوج مرتب ها، مؤلفه اول تکراری ۴ دیده می شود، پس برای تابع بودن باید مؤلفه های دوم نظیرشان با هم برابر باشند، داریم:

$$a = a^2 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$$

حالا باید بررسی کنیم که a های به دست آمده تابع بودن رابطه را تضمین می کنند یا نه، پس باید a ها را در رابطه چک کنیم:

$$a = 0: R = \{(4, 0), (0, 2), (4, 0), (0, 3)\} \quad \text{تابع نیست}$$

$$a = 1: R = \{(4, 1), (1, 2), (4, 1), (0, 3)\} \quad \text{تابع است}$$

مؤلفه اول یکسان و مؤلفه دوم متفاوت



۱۱۵۹ با ارقام صحیح از صفر تا ۵، چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت که با عدد ۲ شروع **نشود**؟

۱۹۰ ۱ ۲۴۰ ۲ ۲۲۵ ۳ ۲۶۰ ۴

۱۱۶۰ در چند عدد سه رقمی، هیچ دو رقم متوالی یکسان **نمی‌باشند**؟

۲۷۹ ۱ ۹۲۷ ۲ ۷۲۹ ۳ ۷۹۲ ۴

۱۱۶۱ با ارقام ۰، ۲، ۳ و ۷ چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟

۸ ۱ ۱۰ ۲ ۱۲ ۳ ۱۸ ۴

۱۱۶۲ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

۵۰۰۰ ۱ ۴۵۰۰ ۲ ۳۲۴۰ ۳ ۸۱۰۰ ۴

۱۱۶۳ چند عدد پنج رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

۱۳۷۷۶ ۱ ۱۵۱۲۰ ۲ ۱۴۲۸۰ ۳ ۱۲۴۱۶ ۴

۱۱۶۴ چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد و متمایز، بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

۷۲ ۱ ۸۴ ۲ ۹۶ ۳ ۱۰۰ ۴

۱۱۶۵ در چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰، هیچ یک از ارقام ۵ و ۶ وجود **ندارد**؟

۷۶۷ ۱ ۳۰۷۲ ۲ ۱۵۳۶ ۳ ۳۰۷۱ ۴

۱۱۶۶ چند عدد سه رقمی با ارقام ۱، ۲، ۵، ۷ و ۹ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت، به طوری که از ۵۲۱ بزرگ‌تر باشند؟

۳۲ ۱ ۳۴ ۲ ۳۳ ۳ ۳۵ ۴

۱۱۶۷ تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام متمایز که هم از ۴۵۰۰ بزرگ‌تر بوده و هم شامل ارقام ۳، ۷ و ۸ **نباشد**، کدام است؟

۴۲۰ ۱ ۴۶۰ ۲ ۴۸۰ ۳ ۵۴۰ ۴

۱۱۶۸ با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۲، ۵، ۶، ۸ و ۹ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۲۲۰ ۱ ۱۴۰ ۲ ۲۴۰ ۳ ۲۸۰ ۴

۱۱۶۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار وجود دارد که شامل رقم ۶ و فاقد رقم ۳ باشد؟

۱۰۵ ۱ ۱۵۴ ۲ ۱۴۵ ۳ ۱۵۰ ۴

۱۱۷۰ چند عدد سه رقمی مضرب ۳ و بدون تکرار ارقام با رقم‌های ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ می‌توان ساخت؟

۱۲ ۱ ۲۴ ۲ ۳۰ ۳ ۳۶ ۴

۱۱۷۱ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد که مضرب ۴ باشند؟

۱۳۰ ۱ ۱۴۰ ۲ ۱۵۰ ۳ ۱۶۰ ۴

۱۱۷۲ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت، به طوری که مجموع ارقام آن‌ها ۶ باشد؟

۱۰ ۱ ۱۴ ۲ ۱۶ ۳ ۲۱ ۴

۱۱۷۳ چند عدد سه رقمی متقارن داریم که زوج باشند؟ (عددی که از چپ و راست یکسان خوانده شود را متقارن می‌گوییم. اعداد مانند ۲۱۲، ۷۲۷ و ...)

۱۸ ۱ ۳۶ ۲ ۴۰ ۳ ۴۲ ۴

سه تا تست ترکیبی بالاب از تابع و شمارش...

۱۱۷۴ تعداد توابع از مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c, d\}$ کدام است؟

۱۶ ۱ ۲۷ ۲ ۶۴ ۳ ۸۱ ۴

۱۱۷۵ تعداد توابع از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به مجموعه $B = \{a, b, c\}$ به طوری که $f(1) \neq a$ چندتا است؟

۸۱ ۱ ۶۴ ۲ ۵۴ ۳ ۲۷ ۴

۱۱۷۶ چند تابع از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ می‌توان نوشت که شامل زوج مرتب $(a, 3)$ باشد، ولی شامل $(c, 2)$ **نباشد**؟

۷۵ ۱ ۲۰ ۲ ۱۰۰ ۳ ۲۵ ۴



جایگشت یک در میان

۱۱۹۱ در چند جایگشت از ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، ارقام زوج و فرد یک در میان قرار می‌گیرند؟

۱۲۰ ۱ ۱۴۴ ۲ ۳۶۰ ۳ ۴۸۰ ۴

۱۱۹۲ با حروف $\{a, g, h, i, t, u\}$ ، چند کلمه شش حرفی می‌توان ساخت به طوری که حروف صدادار و بی‌صدا یک در میان قرار بگیرند؟

۳۶ ۱ ۷۲ ۲ ۲۴ ۳ ۴۸ ۴

۱۱۹۳ با جابه‌جایی ارقام عدد «۲۷۳۵۳۶۳» چند عدد هفت رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری که رقم‌های ۳ یک در میان باشند؟

۲۴ ۱ ۴۸ ۲ ۱۶ ۳ ۳۲ ۴

جایگشت چند شیء که قرار است کنار هم باشند یا نباشند

۱۱۹۴ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «LAGRANGE» به طوری که حروف یکسان کنار هم باشند، کدام است؟

۳۶۰ ۱ ۵۴۰ ۲ ۷۲۰ ۳ ۱۴۴۰ ۴

۱۱۹۵ با حروف کلمه «KORDAN» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت به طوری که در آن‌ها حروف کلمه «KORD» کنار هم باشد؟

۱۲۴ ۱ ۱۴۴ ۲ ۱۵۴ ۳ ۱۶۴ ۴

۱۱۹۶ در چند جایگشت از حروف کلمه «SQUARE» حروف صدادار جلوتر از حروف بی‌صدا قرار می‌گیرند؟

۱۲ ۱ ۱۸ ۲ ۳۶ ۳ ۲۴ ۴

جایگشت تقدم و تأخر

۱۱۹۷ شش نفر به چند طریق می‌توانند وارد یک اتاق شوند به طوری که محمد قبل از حامد وارد اتاق شود؟

۲۴۰ ۱ ۱۸۰ ۲ ۷۲۰ ۳ ۳۶۰ ۴

۱۱۹۸ ۷ سخنران در یک همایش فرهنگی شرکت کرده‌اند. در چند حالت علی قبل از رضا و رضا قبل از حسین سخنرانی خود را شروع می‌کند؟

۴۲۰ ۱ ۸۴۰ ۲ ۴۸۰ ۳ ۲۴۰ ۴

۱۱۹۹ ۵ نفر پشت سرهم سوار اتوبوس می‌شوند. به چند طریق این عمل ممکن است به طوری که فرد A قبل از B و فرد B بعد از C سوار اتوبوس شوند؟

۴۰ ۱ ۶۰ ۲ ۲۰ ۳ ۸۰ ۴

۱۲۰۰ پنج نفر به نام‌های a, b, c, d و e قرار است، در یک همایش سخنرانی کنند. ترتیب سخنرانی این افراد به چند طریق ممکن است، اگر بین a و b فقط

یک نفر سخنرانی کند؟

۲۴ ۱ ۳۶ ۲ ۵۴ ۳ ۶۰ ۴

تست‌های این قسمت برای مطالعه بیشتر و مفید ریاضی است.

جایگشت با تکرار

۱۲۰۱ چند عدد شش رقمی با ارقام $\{3, 3, 3, 4, 4, 5\}$ می‌توان ساخت؟

۵۰ ۱ ۶۰ ۲ ۷۰ ۳ ۸۰ ۴

۱۲۰۲ چند عدد پنج رقمی با ارقام $\{3, 3, 2, 2, 0\}$ می‌توان نوشت؟

۱۲ ۱ ۲۴ ۲ ۴۸ ۳ ۹۶ ۴

۱۲۰۳ با ارقام $\{3, 3, 3, 0, 0, 0\}$ چند عدد زوج شش رقمی می‌توان نوشت؟

۲۴ ۱ ۶ ۲ ۱۲ ۳ ۱۸ ۴



تست آموزشی در بیمارستان کسری تهران، روزانه ۱۵ نوزاد متولد می‌شود. احتمال آن‌ها که حداکثر ۱۳ نفر از آن‌ها پسر باشد، چند برابر عدد $(2^{11} - 1)$ است؟

$$\frac{1}{2^{10}} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{2^{11}} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{2^{15}} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{2^{13}} \quad \text{۱}$$

پاسخ گزینه ۳ تعداد کل حالات برای به دنیا آمدن فرزندان با توجه به آن‌که پسر هستند یا دختر، 2^{15} حالت می‌شود. $n(S) = 2^{15}$. از طرفی چون محاسبه احتمال حداکثر ۱۳ پسر کار وقت‌گیری است، از روش متمم استفاده می‌کنیم. به این صورت که حالات نامطلوب یعنی حالاتی که ۱۴ تا از فرزندان یا ۱۵ تا از آن‌ها پسر باشد، را محاسبه می‌کنیم:

$$n(A') = \binom{15}{14} + \binom{15}{15} = 15 + 1 = 16$$

۱۵ پسر $\rightarrow$ $\binom{15}{15}$ ۱۴ پسر $\rightarrow$ $\binom{15}{14}$

در نتیجه $P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{16}{2^{15}} = \frac{2^4}{2^{15}} = \frac{1}{2^{11}}$ می‌باشد و احتمال مطلوب مسئله $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{2^{11}} = \frac{2^{11} - 1}{2^{11}}$ است.

تست آموزشی در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۵ مهره آبی و ۲ مهره سبز داریم. دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یکی از مهره‌ها سفید باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{15} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{۲}$$

$$\frac{8}{15} \quad \text{۱}$$

پاسخ گزینه ۱ روش اول: می‌خواهیم از بین ۱۰ مهره متمایز درون جعبه ۲ تا از آن‌ها را به تصادف برداریم، پس $n(S) = \binom{10}{2} = 45$ ، از طرفی می‌خواهیم حداقل یکی از مهره‌ها سفید باشد، بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{1} = 3 + 15 + 10 = 28$$

۱ مهره سفید و ۱ مهره سبز $\rightarrow$ $\binom{3}{1}\binom{5}{1}$ ۱ مهره سفید و ۱ مهره آبی $\rightarrow$ $\binom{3}{1}\binom{2}{1}$ هر ۲ مهره سفید $\rightarrow$ $\binom{3}{2}$

در نتیجه احتمال مطلوب برابر $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{45} = \frac{8}{15}$ می‌باشد.

روش دوم: برای حل این مسئله می‌توانیم از اصل متمم استفاده کنیم. تعداد حالات نامطلوب، تعداد حالاتی است که هیچ مهره سفیدی خارج نشود، یعنی هر ۲ مهره از مهره‌های آبی و سبز ($2 + 5 = 7$) انتخاب شوند. پس می‌توان نوشت:

$$n(A') = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21 \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

در نهایت $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$ می‌باشد.

تست آموزشی در جعبه‌ای ۴ مداد قرمز و ۳ مداد آبی متمایز وجود دارد. ۳ مداد متوالیاً و بدون جای‌گذاری از جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که مداد خارج شده اول و دوم آبی باشد؟

$$\frac{1}{7} \quad \text{۴}$$

$$\frac{6}{35} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{۲}$$

$$\frac{4}{35} \quad \text{۱}$$

پاسخ گزینه ۴ می‌خواهیم از بین ۷ مداد متمایز، ۳ مداد را متوالیاً و بدون جای‌گذاری خارج کنیم به طوری که مداد خارج شده اول و دوم آبی باشد، پس می‌توان نوشت:

$$n(S) = \binom{7}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{1} = 210, \quad n(A) = \binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 24 + 6 = 30$$

۳ تا پشت سر هم آبی $\rightarrow$ $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$ ۲ تا آبی و ۱ قرمز $\rightarrow$ $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}$ ۲ تا آبی اول آبی $\rightarrow$ $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}$

البته خفن‌ترها $n(A)$ را به صورت زیر می‌نویسند:

$$n(A) = \binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1} = 30$$

۱ مهره از بین ۵ مهره دیگر $\rightarrow$ $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}$ ۲ تا آبی اول آبی $\rightarrow$ $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}$

در نتیجه احتمال پیشامد A برابر $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$ است.

تست آموزشی در جایگشت‌های حروف کلمه «جهانگردی»، چقدر احتمال دارد دو حرف «د» و «ج» کنار هم نباشند؟

$$\frac{3}{8} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{۲}$$

$$\frac{3}{4} \quad \text{۱}$$

پاسخ گزینه ۱ برای حل این مسئله از اصل متمم کمک می‌گیریم. تعداد کل جایگشت‌های این کلمه ۸ حرفی، $8!$ می‌باشد. از طرفی تعداد حالت نامطلوب مسئله، تعداد حالاتی است که دو حرف «د» و «ج» کنار هم باشند که برای محاسبه آن، داریم:

$\rightarrow$ جایگشت دو حرف درون بسته

$$n(A') = 7! \times 2! \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{2! \times 7!}{8!} = \frac{2 \times 7!}{8 \times 7!} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

پس احتمال مطلوب $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ می‌باشد.



سکه و فرزند

۱۳۲۸ در پرتاب چهار سکه با هم، احتمال این که دقیقاً سه سکه «رو» یا دقیقاً سه سکه «پشت» بیاید، کدام است؟

$$\frac{5}{16} \quad \frac{7}{16} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{2}$$

۱۳۲۹ در پرتاب پنج سکه سالم، با کدام احتمال، حداقل ۳ بار «پشت» ظاهر می شود؟

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{16}$$

۱۳۳۰ سکه ای را آن قدر پرتاب می کنیم تا «رو» ظاهر شود. با کدام احتمال، در کمتر از ۵ پرتاب، «رو» ظاهر می شود؟

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{15}{16}$$

۱۳۳۱ در یک بیمارستان ۵ نوزاد در یک روز متولد شده اند. با کدام احتمال حداقل دو نفر از آن ها دختر هستند؟

$$\frac{5}{16} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{7}{16} \quad \frac{13}{16}$$

۱۳۳۲ در یک خانواده ۵ فرزند، احتمال آن که حداقل یکی از فرزندان خانواده دختر باشد از احتمال این که حداکثر یکی از فرزندان دختر باشد، چقدر

(برگرفته از کتاب درسی)

بیشتر است؟

$$\frac{19}{32} \quad \frac{21}{32} \quad \frac{25}{32} \quad \frac{31}{32}$$

۱۳۳۳ خانواده های A و B هر کدام دارای ۳ فرزند هستند. احتمال آن که تعداد دخترهای خانواده A از تعداد دخترهای خانواده B بیشتر باشد، کدام است؟

$$\frac{17}{32} \quad \frac{7}{32} \quad \frac{9}{32} \quad \frac{11}{32}$$

کیسه و مهره

۱۳۳۴ از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آن ها در مورد ادبیات و ۷ عدد آن ها در مورد تاریخ است، به طور تصادفی ۵ کتاب انتخاب کرده ایم. احتمال این که ۳ کتاب

(ریاضی خارج ۹۱)

ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟

$$\frac{15}{66} \quad \frac{17}{66} \quad \frac{35}{132} \quad \frac{37}{132}$$

۱۳۳۵ در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال، مهره های خارج شده هم رنگ اند؟

$$\frac{1}{6} \quad \frac{3}{14} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{5}{14}$$

(تجربی خارج ۹۲)

۱۳۳۶ در کیسه ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از کیسه بیرون می آوریم. با کدام احتمال، رنگ مهره های خارج

(تجربی داخل ۹۶)

شده متفاوت است؟

$$\frac{5}{22} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{4}{11}$$

۱۳۳۷ از کیسه ای شامل ۶ مهره آبی و ۴ مهره قرمز، ۲ مهره خارج می کنیم. اگر A پیشامد «هم رنگ بودن مهره ها» و B پیشامد «غیر هم رنگ بودن

مهره ها» باشد، $\frac{P(B)}{P(A)}$ کدام است؟

$$\frac{7}{15} \quad \frac{8}{15} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{7}{8}$$

۱۳۳۸ در کیسه ای ۴ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال، فقط یکی از مهره ها سفید است؟

$$\frac{8}{21} \quad \frac{17}{42} \quad \frac{10}{21} \quad \frac{9}{14}$$

(تجربی خارج ۹۵)

۱۳۳۹ کیسه ای دارای ۵ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۳ مهره زرد است. از این کیسه ۶ مهره را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آنکه در بین مهره های انتخابی،

مهره آبی وجود نداشته باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{33} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{15}$$

۱۳۴۰ در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش بیمار داریم. اگر دو موش از لانه خود فرار کنند، با چه احتمالی یکی از موش های فراری، بیمار است؟

$$\frac{17}{28} \quad \frac{13}{28} \quad \frac{15}{28} \quad \frac{15}{24}$$



فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

می‌دانیم تکرار و ترتیب اعضاء در مجموعه‌ها بی‌اثر است، درواقع $\{a, a, b\}$ ، $\{a, b\}$ و $\{b, a\}$ همگی یکی هستند، پس مجموعه A به صورت زیر قابل نمایش است:

$$A = \{a, b, \{a, b\}, \{b, a\}, \{a, a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$$

همان طور که مشاهده می‌کنید این مجموعه، ۳ عضو دارد.

تمام گزینه‌ها سه عضوی می‌باشند، به جز گزینه «۳» که دو عضوی است. ببینید:

۳ عضو $\Rightarrow \{x, \{x\}, \emptyset\}$ ، گزینه «۱»

۳ عضو $\Rightarrow \{\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}\}$ ، گزینه «۲»

۲ عضو $\Rightarrow \{x, \{\emptyset, \{y\}\}, \{y, \emptyset\}\}$ ، گزینه «۳»

۳ عضو $\Rightarrow \{x, \{\emptyset\}, \{x, \emptyset\}\}$ ، گزینه «۴»

تکراری

حواستان باشد که تکرار و ترتیب در مجموعه‌ها مهم نیست و در گزینه «۳» دو عضو $\{\emptyset, \{y\}\}$ و $\{y, \emptyset\}$ باهم فرقی ندارند.

اعضای مجموعه A عددهایی به شکل $y = 5 - 3x$ هستند که در آن‌ها $x \in \mathbb{N}$ می‌باشد. درواقع برای مشاهده بعضی از اعضای این مجموعه به x عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... را می‌دهیم تا y هایشان را پیدا کنیم. ببینید:

$$x = 1: y = 5 - 3(1) = 2, \quad x = 2: y = 5 - 3(2) = 5 - 6 = -1, \quad x = 3: y = 5 - 3(3) = 5 - 9 = -4, \quad x = 4: y = 5 - 3(4) = 5 - 12 = -7$$

در نتیجه بعضی از اعضای مجموعه A به صورت $A = \{2, -1, -4, -7, \dots\}$ هستند که حاصل ضرب دو عضو بزرگتر این مجموعه برابر $2 \times (-1) = -2$ است.

مجموعه A یک مجموعه تک عضوی است که تنها عضو آن هم $\emptyset$ است ($\emptyset$ عضو A نیست) و زیرمجموعه‌های آن $\emptyset$ و $\{\emptyset\}$ می‌باشند. در نتیجه تنها گزینه نادرست، گزینه «۳» است.

خیلی واضح است که $A = \{2\}$ عضو مجموعه $B = \{3, 5, \{2\}\}$ و مجموعه B ، عضو مجموعه $C = \{\{2\}, 3, 5, 2\}$ است، پس گزینه‌های «۱» و «۳» درست هستند. از طرفی همگی قبول داریم که مجموعه A زیرمجموعه مجموعه C است (قبوله؟)، پس گزینه «۴» هم درست است.

در آفر هواستان باشد که $A = \{2\} \in C$ نیست ولی $2 \in C$ می‌باشد.

می‌دانیم در مجموعه تکرار و ترتیب اعضا تأثیری ندارد، پس مجموعه A به صورت زیر قابل نمایش است:

$$A = \{1, 2, 3, \{1, 3\}, \{3, 1\}\} = \{1, 2, 3, \{1, 3\}\}$$

زیرمجموعه‌های A که شامل عضو $\{1, 3\}$ باشند ولی ۲ را ندارند به صورت زیر می‌باشد:

$$A_1 = \{\{1, 3\}\}, \quad A_2 = \{1, \{1, 3\}\}, \quad A_3 = \{3, \{1, 3\}\}, \quad A_4 = \{1, 3, \{1, 3\}\}$$

تعداد زیرمجموعه‌های خواسته شده ۴ تا است.

این مجموعه ۴ زیرمجموعه دارد، پس دو عضوی است که آن دو عضو هم ۱ و -۱ هستند (هله؟). پس برای دو عضو دیگر آن، یعنی $x - y$ و $2x + y$ چهار حالت رخ می‌دهد. ببینید:

حالت اول:
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y = 1 \Rightarrow -2x + \frac{y}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حالت دوم:
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y = -1 \Rightarrow -2x + \frac{y}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

حالت سوم:
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{3} \Rightarrow -2x + \frac{y}{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

حالت چهارم:
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, \quad y = -\frac{1}{3} \Rightarrow -2x + \frac{y}{2} = -\frac{4}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای عبارت $-2x + \frac{y}{2}$ ، بیشترین مقدار آن برابر $\frac{3}{2}$ است.



۲۷ / ۴ تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: اشتراک $\mathbb{Q}$ با $\mathbb{N}$ می‌شود $\mathbb{N}$ که زیرمجموعه W یا همان اعداد حسابی است. ✓

گزینه‌های «۲» و «۳»: قبول دارید که $\mathbb{Q}' - \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}'$ هر دو تهی هستند و تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌هاست؟ اگر موافقید باید بگوییم که این گزینه‌ها هم درست هستند. ✓

گزینه «۴»: مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ شامل همه عددهای حقیقی به جز اعداد صحیح است مثلاً $\frac{1}{p}$ ، $\sqrt{2}$ و ... (اوکی؟)، پس این مجموعه زیرمجموعه $\mathbb{Q}$ نیست و این گزینه نادرست است. ✗

۲۸ / ۴ به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: مجموعه $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ شامل عددهای صحیح منفی و صفر است که اگر این مجموعه را از $\mathbb{Q}$ کم کنیم، همه اعداد گویا به جز عددهای صحیح و منفی را داریم، مثلاً عددهایی مانند 1 ، $\pm \frac{1}{p}$ که در آخر اگر این مجموعه را منهای $\mathbb{N}$ کنیم، بی‌شمار عدد از جمله $\pm \frac{1}{p}$ و ... را دارد، پس این مجموعه غیرتهی است. ✗

گزینه «۲»: $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{Z}$ هیچ اشتراکی ندارند، پس $\mathbb{Q}' - \mathbb{Z} = \mathbb{Q}'$ است و در نهایت چون دو مجموعه $\mathbb{Q}' - \mathbb{Z} = \mathbb{Q}'$ و $\mathbb{N}$ از هم مجزا هستند، پس $(\mathbb{Q}' - \mathbb{Z}) - \mathbb{N} = \mathbb{Q}' - \mathbb{Z} = \mathbb{Q}'$ است که این مجموعه بی‌شمار عضو دارد. ✗

گزینه «۳»: تنها عضو مجموعه $W - \mathbb{N}$ ، صفر است و مجموعه $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ شامل عضو صفر نیست، پس مجموعه $(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) - (W - \mathbb{N})$ همان تک عضوی $\{0\}$ می‌باشد که مجموعه‌ای غیرتهی است. ✗

گزینه «۴»: دو مجموعه $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ هیچ اشتراکی ندارند، پس $\mathbb{Q} - \mathbb{Q}'$ همان مجموعه اعداد گویا یعنی $\mathbb{Q}$ می‌باشد که اگر این مجموعه را از مجموعه اعداد صحیح کم کنیم عضوی باقی نمی‌ماند و حاصل $\emptyset$ می‌شود. ✓

۲۹ / ۳ همان‌طور که می‌دانیم $\mathbb{N} \subseteq W$ است، پس $W \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ و همچنین $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ پس $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ می‌باشد. خلاصه اینکه ساده شده عبارت داده شده برابر با $(\mathbb{N} - \mathbb{R}) \cup \mathbb{Q}'$ است، حالا با توجه به این که $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ، می‌توان نوشت:

$$(\mathbb{N} - \mathbb{R}) \cup \mathbb{Q}' \stackrel{\substack{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \\ \mathbb{N} - \mathbb{R} = \emptyset}}{=} \emptyset \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'$$

تنها گزینه درست، گزینه «۳» یعنی $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$ است.

۳۰ / ۴ تنها گزینه درست، گزینه «۴» است. برای نشان دادن درستی این گزینه، فرض می‌کنیم $\alpha = \sqrt{2} + 1$ باشد، ببینید:

$$\sqrt{2}(\alpha - 1) = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1 - 1) = \sqrt{2}(\sqrt{2}) = 2$$

حالا نادرستی سایر گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه «۱»}: \alpha = \sqrt{2}, \beta = 2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha \times \beta = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4 \in \mathbb{Q} \quad \text{✗}$$

$$\text{گزینه «۲»}: \alpha = 0, \beta = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha \times \beta = 0 \in \mathbb{Q} \quad \text{✗}$$

گزینه «۳»: در مورد این گزینه هم که طبق گفته‌هایمان در درسنامه می‌دانیم جمع یک عدد گنگ با یک عدد گویا حتماً عددی گنگ است. ✗

۳۱ / ۱ شاید برایتان جالب باشد که همه عددهای داده شده، امکان گویا شدن دارند. ببینید:

$$\alpha + 2\beta: \alpha = 2\sqrt{2}, \beta = -\sqrt{2} \Rightarrow \alpha + 2\beta = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q} \quad \checkmark$$

$$\alpha\beta: \alpha = \sqrt{2}, \beta = 2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha\beta = (\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 4 \in \mathbb{Q} \quad \checkmark$$

$$\alpha\sqrt{\beta}: \alpha = \sqrt[4]{2^3}, \beta = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha\sqrt{\beta} = \sqrt[4]{2^3} \times \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^4} = 2 \in \mathbb{Q} \quad \checkmark$$

احتمالاً پیدا کردن دو عدد گنگ α و β که جواب $\alpha\sqrt{\beta}$ را گویا کند، برایتان کمی غیرقابل باور است. (درست می‌گم؟)

۳۲ / ۲ با فرض گنگ بودن α ، ممکن است $\alpha^2 - 2\alpha$ گویا شود. برای این کار به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$\alpha^2 - 2\alpha = (\alpha - 1)^2 - 1$$

حالا مثلاً اگر $\alpha = \sqrt{2} + 1$ باشد، پس داریم:

$$\alpha^2 - 2\alpha = (\sqrt{2} + 1 - 1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \in \mathbb{Q}$$

حالا برویم و برای بقیه گزینه‌ها مثال نقض بزنیم:

گزینه «۱»: با فرض $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ حاصل $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{1} = 1$ می‌شود که عددی گویا است. ✗

گزینه «۳»: با فرض $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = \sqrt[4]{2}$ داریم:

$$\alpha\beta^2 = (\sqrt{2}) \times (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q} \quad \text{✗}$$

گزینه «۴»: با فرض $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = 2 - \sqrt{2}$ ، مقدار $\alpha + \beta = (\sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 2$ گویا است. ✗



حالا به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

* (متناهی) $A \cap B = \emptyset$: گزینه «۲»

* (متناهی) $A - B = \{1, 2\}$: گزینه «۱»

* (متناهی) $A - \mathbb{Z} = \emptyset$: گزینه «۴»

✓ (نامتناهی) $\mathbb{Z} - B = \{0, 1, 2, \dots\}$: گزینه «۳»

۵۵ / ۱ اجتماع دو مجموعه نامتناهی، قطعاً نامتناهی است، پس $A \cup B$ نامتناهی است. برای دو مجموعه دیگر نیز می‌توانیم مثال‌هایی بزنیم که نامتناهی باشند:

الف) $A - B$: فرض کنیم $A = \mathbb{Z}$ و $B = \mathbb{N}$ باشد در این صورت $A - B = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ است که مجموعه‌ای نامتناهی می‌باشد.

ب) $A \cap B$: فرض کنیم $A = \mathbb{Z}$ و $B = \mathbb{N}$ باشد، در این صورت $A \cap B = \mathbb{N}$ می‌شود که نامتناهی است.

۵۶ / ۲ هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: A متناهی است و $B \subseteq A$ است، پس B هم متناهی است و در نتیجه $A \cup B$ قطعاً متناهی است. ✓

گزینه «۲»: $A \subseteq B$ است، B می‌تواند متناهی هم باشد که در این صورت $B - A$ متناهی می‌شود. برای مثال اگر $A = \{1\}$ و $B = \{1, 2\}$ باشند، $B - A = \{2\}$ می‌باشد. *

گزینه «۳»: $A \subseteq B$ است و B متناهی است، پس B هم متناهی است و در نتیجه $B - A = \emptyset$ می‌شود که به وضوح مجموعه‌ای متناهی است. ✓

گزینه «۴»: فرض کنیم $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 2\}$ باشد، در این صورت $A \cup B$ متناهی می‌شود. ✓

۵۷ / ۳ مجموعه A برابر با $A = \{1, 2, 3, 4\}$ است. حالا به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: مجموعه B را با توجه به شرط داده شده به دست می‌آوریم:

$$x + 2 \leq 5 \Rightarrow x \leq 3 \xrightarrow{x \in \mathbb{W}} B = \{0, 1, 2, 3\}$$

در این صورت هم اجتماع و هم اشتراک دو مجموعه A و B متناهی خواهد شد. *

گزینه «۲»: در این حالت $A \cap B$ برابر با تهی خواهد بود. چرا که هیچ یک از اعضای مجموعه A ، در مجموعه B قرار ندارد. *

گزینه «۳»: مجموعه B را با توجه به شرط داده شده پیدا می‌کنیم:

$$4 \leq x + 1 \leq 5 \xrightarrow{-1} 3 \leq x \leq 4 \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} B = [3, 4]$$

در این صورت اجتماع دو مجموعه، نامتناهی و اشتراک آن‌ها متناهی خواهد شد، ببینید:

$$A \cup B = [3, 4] \cup \{1, 2\} \text{ (نامتناهی)}, \quad A \cap B = \{3, 4\} \text{ (متناهی)} \quad \checkmark$$

گزینه «۴»: برای پیدا کردن مجموعه B با توجه به شرط داده شده می‌توان نوشت:

$$x + 2 \leq 2 \Rightarrow x \leq 0 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

در این صورت اجتماع دو مجموعه، نامتناهی است اما اشتراک دو مجموعه برابر با تهی است. *

۵۸ / ۱ می‌دانیم که اشتراک مجموعه متناهی A و مجموعه نامتناهی B حتماً یک مجموعه متناهی است، یعنی $A \cap B$ مجموعه‌ای متناهی می‌باشد

و در نتیجه متمم آن نسبت به مجموعه مرجع، یعنی $\mathbb{N}$ حتماً یک مجموعه نامتناهی (بی‌پایان) است و پاسخ تست گزینه «۱» می‌باشد.

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها:

$$\text{گزینه «۲»} \quad A = \{1\}, B = \{3, 4, 5, \dots\} \Rightarrow A - B = \{1\} \quad *$$

$$\text{گزینه «۳»} \quad A = \{1\}, B = \{3, 4, 5, \dots\} \Rightarrow B' = \{1, 2\} \Rightarrow A \cup B' = \{1, 2\} \quad *$$

$$\text{گزینه «۴»} \quad A = \{1\}, B = \{3, 4, 5, \dots\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 3, 4, 5, \dots\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{2\} \quad *$$

۵۹ / ۴ مجموعه $\mathbb{Z} - A$ متناهی است، پس حتماً A نامتناهی بوده است. همه موارد آمده در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» با مجموعه $A = \mathbb{Z} - \{0\}$ نقض

می‌شود، ببینید:

$$\text{گزینه «۱»} \quad A - \mathbb{N} = (\mathbb{Z} - \{0\}) - \mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1\} \quad *$$

$$\text{گزینه «۲»} \quad \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{نامتناهی}} - \underbrace{(\mathbb{Z} - A)}_{\text{متناهی}} = \text{نامتناهی} \quad *$$

واضح است که اگر تعدادی متناهی عضو از یک مجموعه نامتناهی حذف شود، باز هم مجموعه حاصل نامتناهی باقی می‌ماند.

$$\text{گزینه «۳»} \quad \mathbb{Z} - (A - \mathbb{N}) = \mathbb{Z} - ((\mathbb{Z} - \{0\}) - \mathbb{N}) = \mathbb{Z} - \{\dots, -3, -2, -1\} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad *$$

پاسخ تست گزینه «۴» است.



می دانیم بین دو جمله t_m و t_n در دنباله حسابی رابطه $t_m = t_n + (m-n)d$ برقرار است، پس $t_{17} = t_8 + 9d$ است و می توان نوشت:

$$t_8 \cdot t_{17} = 24 \Rightarrow t_8(t_8 + 9d) = 24 \Rightarrow t_8^2 + 9t_8d = 24$$

از طرفی حاصل ضرب جملات یازدهم و چهاردهم ۹۶ است. با توجه به رابطه گفته شده قدرنسبت دنباله را به دست می آوریم:

$$t_{11} \cdot t_{14} = 96 \Rightarrow (t_8 + 3d)(t_8 + 6d) = 96 \Rightarrow t_8^2 + 9t_8d + 18d^2 = 96 \xrightarrow{t_8^2 + 9t_8d = 24} 24 + 18d^2 = 96 \Rightarrow 18d^2 = 72 \Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} d=2 \\ d=-2 \end{cases}$$

با توجه به اینکه دنباله صعودی است، پس قدرنسبت دنباله مثبت است و $d=2$ قابل قبول می باشد.

سه جمله دوم دنباله، a_4 ، a_5 و a_6 و سه جمله سوم دنباله، a_7 ، a_8 و a_9 هستند، پس طبق فرض مسئله می توان نوشت:

$$\begin{cases} a_4 + a_5 + a_6 = 20 \\ a_7 + a_8 + a_9 = 74 \end{cases} \xrightarrow{\text{دومی منهای اولی}} (a_7 + a_8 + a_9) - (a_4 + a_5 + a_6) = 54 \Rightarrow \underbrace{(a_7 - a_4)}_{3d} + \underbrace{(a_8 - a_5)}_{3d} + \underbrace{(a_9 - a_6)}_{3d} = 9d = 54 \Rightarrow d = 6$$

$$3a_5 = 20 \Rightarrow 3(a_1 + 4d) = 20 \xrightarrow{d=6} 3a_1 + 72 = 20 \Rightarrow 3a_1 = -52 \Rightarrow a_1 = -\frac{52}{3}$$

از طرفی می دانیم $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5$ (میانگین)، پس داریم:

$$a_1 + a_7 + a_9 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 3a_1 + 3d = 3\left(-\frac{52}{3}\right) + 3(6) = -52 + 18 = -34$$

در نهایت خواسته مسئله برابر است با:

طبق فرض مسئله مجموع جملات ردیف فرد و زوج به ترتیب ۱۳۵ و ۱۵۰ می باشند، پس به زبان ریاضی داریم:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135, \quad a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150$$

حالا مجموع جملات زوج را منهای مجموع جملات فرد می کنیم، از طرفی می دانیم اختلاف دو جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر قدرنسبت است، پس داریم:

$$(a_2 + a_4 + \dots + a_{20}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{19}) = \underbrace{(a_2 - a_1)}_d + \underbrace{(a_4 - a_3)}_d + \dots + \underbrace{(a_{20} - a_{19})}_d = \underbrace{d + d + \dots + d}_{10 \text{ بار}} = 10d = 150 - 135 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

با کمی دقت به دنباله داده شده، مجموع جملات آن را به صورت $\frac{1}{3} \left(\frac{5-2}{2 \times 5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{8-5}{5 \times 8} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{20-17}{17 \times 20} \right)$ می نویسیم، حالا با تفکیک

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

کسرهای داده شده داریم:

$$t_{18} - t_{14} = (48 - 24)d \xrightarrow{t_{18} - t_{14} = -2} -2 = 24d \Rightarrow d = -\frac{1}{12}$$

ابتدا جمله عمومی دنباله را پیدا می کنیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow{t_1=2, d=-\frac{1}{12}} t_n = 2 + (n-1)\left(-\frac{1}{12}\right) \Rightarrow t_n = \frac{1-n}{12} + 2$$

$$\frac{1-n}{12} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1-n}{12} > -2 \xrightarrow{\times 12} 1-n > -24 \Rightarrow n < 25 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{1, 2, \dots, 24\}$$

حالا باید نامعادله $t_n > 0$ را حل کنیم، پس می توان نوشت:

بنابراین ۲۴ جمله اول دنباله، مثبت اند.

$$t_n = kn^2 + kn - 5n^2 - 21 = (k-5)n^2 + kn - 21$$

ابتدا جمله عمومی دنباله را به صورت مقابل بازنویسی می کنیم:

از طرفی می دانیم جمله عمومی یک دنباله حسابی از درجه یک است، پس باید مقدار k را به گونه ای انتخاب کنیم که ضریب n^2 برابر با صفر شود:

$$k - 5 = 0 \Rightarrow k = 5$$

پس جمله عمومی دنباله به صورت $t_n = 5n - 21$ است و برای محاسبه خواسته مسئله باید نامعادله $t_n < 0$ را حل کنیم:

$$t_n < 0 \Rightarrow 5n - 21 < 0 \Rightarrow 5n < 21 \Rightarrow n < \frac{21}{5} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, 3, 4$$

در نتیجه این دنباله ۴ جمله منفی دارد.

$$a_1 = 3, a_3 = 11; a_3 = a_1 + 2d \Rightarrow 11 = 3 + 2d \Rightarrow 2d = 8 \Rightarrow d = 4$$

برای پیدا کردن تعداد جملات دنباله ابتدا قدرنسبت را پیدا می کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 267 = 3 + (n-1)4 \Rightarrow 267 = 3 + 4n - 4 \Rightarrow 268 = 4n \Rightarrow n = \frac{268}{4} = 67$$

حالا برای پیدا کردن تعداد جملات می توان نوشت:

بنابراین، این دنباله ۶۷ جمله دارد.

از آن جایی که جمله اول دنباله ۱۰ و قدرنسبت آن $d = 16 - 10 = 6$ است، داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d < 120 \xrightarrow{a_1=10, d=6} (n-1) \times 6 < 110 \Rightarrow n-1 < 18\frac{1}{3} \Rightarrow n < 19\frac{1}{3} \Rightarrow n \leq 19$$

در نتیجه در این دنباله، ۱۹ جمله کوچکتر از ۱۲۰ داریم.



$$A = \frac{1+(1)^2}{(1)^2} = 2$$

روش سوم: با جای گذاری $x = 45^\circ$ در $A = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$ داریم:

حالا گزینه ای درست است که به ازای $x = 45^\circ$ برابر ۲ شود:

گزینه «۱»: $\sin^2(45^\circ) = \frac{1}{2} \neq 2$ ✗

گزینه «۲»: $\cos^2(45^\circ) = \frac{1}{2} \neq 2$ ✗

گزینه «۳»: $1 + \cot^2(45^\circ) = 1 + (1)^2 = 2$ ✓

گزینه «۴»: $1 - \cot^2(45^\circ) = 1 - (1)^2 = 0 \neq 2$ ✗

روش اول: با استفاده از روابط $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ می توان نوشت:

$$\sin^2 x (1 + \cot^2 x) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x) = \sin^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right) - \cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

روش دوم: حاصل عبارت داده شده را به ازای $x = 30^\circ$ به دست می آوریم:

$$x = 30^\circ: \sin^2 30^\circ (1 + \cot^2 30^\circ) - \cos^2 30^\circ (1 + \tan^2 30^\circ) = \frac{1}{4} (1 + 3) - \frac{9}{16} (1 + \frac{1}{3}) = \frac{1}{4} (4) - \frac{9}{16} (\frac{4}{3}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

پس گزینه ای درست است که به ازای $x = 30^\circ$ برابر $\frac{1}{4}$ شود که این اتفاق فقط در گزینه «۳» رخ می دهد.

$$x = 30^\circ: \sin^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 x - \frac{1}{1 + \tan^2 x} - 1 = \sin^2 x - \cos^2 x - 1$$

روش اول: می دانیم $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ است، پس داریم:

$$\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x - 1 = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x - 1 = -2\cos^2 x$$

$$x = 0^\circ: \sin^2 0^\circ - \frac{1}{1 + \tan^2 0^\circ} - 1 = 0 - \frac{1}{1+0} - 1 = -1 - 1 = -2$$

روش دوم: مقدار $1 - \sin^2 x - \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ را به ازای $x = 0^\circ$ به دست می آوریم. پس داریم:

$$x = 0^\circ: -2\cos^2(0) = -2(1)^2 = -2$$

پس گزینه ای درست است که به ازای $x = 0^\circ$ برابر -۲ شود که این اتفاق فقط در گزینه «۲» رخ می دهد، ببینید:

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{\cot^2 x} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان دو}} \cot^2 x = \frac{1}{4}$$

روش اول: می دانیم $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ و $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ است، پس داریم:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{5} = 0.8$$

گفتیم که $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ، پس می توان نوشت:

$$\frac{1 + \cot^2 x}{\sin x} = 27 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\sin x} = 27 \Rightarrow \frac{1}{\sin^3 x} = 27 \Rightarrow \sin^3 x = \frac{1}{27} \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} \sin x = \frac{1}{3}$$

از طرفی چون $\sin x + \cos x < 0$ است و $\sin x = \frac{1}{3}$ ، پس حتماً $\cos x < 0$ است و در نتیجه انتهای کمان x در ناحیه دوم دایره مثلثاتی قرار دارد که برای محاسبه

$\tan x$ می توان نوشت:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\frac{1}{9}} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = 9 \Rightarrow \cot^2 x = 8 \xrightarrow{x \text{ در ربع دوم است}} \cot x = -2\sqrt{2} \xrightarrow{\tan x = \frac{1}{\cot x}} \tan x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

روش اول: با استفاده از اتحاد مزدوج و رابطه های $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ می توان نوشت:

$$\cos^4 x - \sin^4 x + \frac{1}{1 + \cot^2 x} = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x$$

و می دانیم که $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ می باشد.

روش دوم: حاصل عبارت داده شده را به ازای $x = 30^\circ$ به دست می آوریم:

$$x = 30^\circ: \cos^4 30^\circ - \sin^4 30^\circ + \frac{1}{1 + \cot^2 30^\circ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{1}{1 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{9-1+4}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

پس گزینه ای درست است که به ازای $x = 30^\circ$ برابر $\frac{3}{4}$ شود که این اتفاق فقط در گزینه «۱» رخ می دهد.

$$x = 30^\circ: \frac{1}{1 + \tan^2 30^\circ} = \frac{1}{1 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$



فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۴ ۵۲۷ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: می‌دانیم $(-2)^5 = -32$ است، پس $\sqrt[5]{-32} = -2$ می‌باشد. ✓

گزینه «۲»: می‌دانیم $4^4 = 256$ است، پس $\sqrt[4]{256} = 4$ می‌باشد. ✓

گزینه «۳»: می‌دانیم $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ و $(\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$ است، پس $\sqrt[2]{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ می‌باشد. ✓

گزینه «۴»: می‌دانیم $2^4 = 16$ و $4^5 = 1024$ است، پس $\sqrt[4]{16} = 2$ و $\sqrt[5]{1024} = 4$ می‌باشد که این دو عدد با هم برابر نیستند. ✗

۱ ۵۲۸ می‌دانیم $(-4)^3 = -64$ و در نتیجه $\sqrt[3]{-64} = -4$ است، پس داریم:

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{96} - \sqrt[3]{-64}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{96} - (-4)} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{100}} = \sqrt[3]{2 - 10} = \sqrt[3]{-8}$$

از طرفی چون $(-2)^3 = -8$ است، پس $\sqrt[3]{-8} = -2$ می‌باشد.

۳ ۵۲۹ می‌دانیم $(-\frac{1}{3})^5 = -\frac{1}{243}$ است، پس $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}} = -\frac{1}{3}$ می‌باشد و داریم:

$$\sqrt[3]{0.054\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}} = \sqrt[3]{0.054 \times (-\frac{1}{3})} = \sqrt[3]{-0.027}$$

از طرفی می‌دانیم $(-\frac{3}{10})^3 = -\frac{27}{1000} = -0.027$ است، بنابراین $\sqrt[3]{-0.027} = -\frac{3}{10}$ می‌باشد.

۳ ۵۳۰ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ اعداد ۲ و ۲- هستند که اختلاف آن‌ها $2 - (-2) = 4$ می‌باشد. ✓

گزینه «۲»: هر عدد مثبت دو ریشه دوم دارد که این دو ریشه قرینه هم هستند، پس این گزینه هم درست است. ✓

گزینه «۳»: گفتیم که جواب رادیکال با فرجه زوج حتماً عددی مثبت است، پس این گزینه نادرست می‌باشد. ✗

گزینه «۴»: هر عدد مثبت، یک ریشه سوم مثبت و هر عدد منفی، یک ریشه سوم منفی دارد و در نتیجه این گزینه هم درست است. ✓

۳ ۵۳۱ همان‌طور که در توضیحات درسنامه گفتیم، عددهای منفی ریشه چهارم ندارند. گزینه‌های «۱» و «۴» خیلی واضح‌اند که مثبت هستند، پس ریشه

چهارم دارند.

از طرفی در گزینه «۲» با توجه به آنکه $4 < \sqrt{24} < 5$ ، پس حاصل $\frac{2}{-\pi + \sqrt{24}}$ عددی مثبت است و در نتیجه این گزینه هم ریشه چهارم دارد. پس پاسخ تست گزینه «۳» است.

۲ ۵۳۲ گزینه‌ای قابل قبول است که وقتی به توان چهار می‌رسد، جوابش $28 - 16\sqrt{3}$ شود. پاسخ تست گزینه «۲» است، دلیلش را ببینید:

$$(1 - \sqrt{3})^4 = ((1 - \sqrt{3})^2)^2 = (1 + 3 - 2\sqrt{3})^2 = (4 - 2\sqrt{3})^2 = 16 + 12 - 16\sqrt{3} = 28 - 16\sqrt{3}$$

آه درست دارید می‌تونید بقیه گزینه‌ها رو هم بررسی کنید.

۴ ۵۳۳ برای خلاص شدن از رادیکال، طرفین تساوی را به توان ۵ می‌رسانیم، پس داریم:

حالا با ریشه سوم گرفتن از طرفین رابطه بالا به تساوی $a^5 = b$ می‌رسیم، در نتیجه ریشه پنجم عدد b برابر a است.

۲ ۵۳۴ به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: عدد صفر نامنفی است که تنها ریشه دوم آن صفر است. ✗

گزینه «۲»: اگر m ریشه دوم n باشد، پس $m^2 = n$ است و با توجه به اینکه $(-m)^2 = n$ می‌باشد، پس $-m$ هم ریشه دوم n است. ✓

گزینه «۳»: $5 - 2\sqrt{6}$ عددی مثبت است چرا که با فرض $\sqrt{6} = 2.4$ ، حاصل $5 - 2\sqrt{6}$ تقریباً ۰.۲ می‌باشد، پس دوتا ریشه دوم قرینه دارد، یکی $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ و

دیگری $\sqrt{2} - \sqrt{3}$. ✗

گزینه «۴»: همگی می‌دانیم $4^3 < 102 < 5^3$ ، پس ریشه سوم آن بین دو عدد ۴ و ۵ است نه ۳ و ۴. ✗

۳ ۵۳۵ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

✓ $2 < \sqrt{7} < 3 \Rightarrow 2^2 < 7 < 3^2$:گزینه «۱»

✓ $2 < \sqrt[3]{21} < 3 \Rightarrow 2^3 < 21 < 3^3$:گزینه «۲»

✗ $1 < \sqrt[3]{14} < 2 \Rightarrow 1^4 < 14 < 2^4$:گزینه «۳»

✓ $2 < \sqrt[5]{45} < 3 \Rightarrow 2^5 < 45 < 3^5$:گزینه «۴»



با استفاده از اتحاد جمله مشترک و با توجه به این که $x^2 + 5x = 1$ است، می‌توان نوشت:

$$(x-2)(x+1)(x+4)(x+7) = (x-2)(x+7)(x+1)(x+4) = (x^2 + 5x - 14)(x^2 + 5x + 4) \xrightarrow{x^2 + 5x = 1} (1-14)(1+4) = (-13)(5) = -65$$

اتحاد جمله مشترک اتحاد جمله مشترک

$$x + \frac{2}{x} = 4 \xrightarrow{\times(x)} x^2 + 2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = -2$$

با ضرب طرفین معادله $x + \frac{2}{x} = 4$ در x ، داریم:

حالا برای محاسبه خواسته مسئله با استفاده از اتحاد جمله مشترک، می‌توان نوشت:

$$(x-5)(x-3)(x-1)(x+1) = (x-5)(x+1)(x-3)(x-1) = (x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x + 3) \xrightarrow{x^2 - 4x = -2} (-2-5)(-2+3) = (-7)(1) = -7$$

طبق اتحاد مربع سه جمله‌ای رابطه $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$ برقرار می‌باشد. اگر در عبارت $2(ab+ac+bc)$ از abc

فاکتور بگیریم، برای محاسبه خواسته مسئله می‌توان نوشت:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \Rightarrow (7)^2 = 17 + 2(12)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow 24\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 32 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

توجه داشته باشید $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ همان $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$ می‌باشد.

یکی از اتحادهایی که سال‌های قبل در کتاب درسی بود و الان نیست، اتحادی به نام **اویلر** است ولی چون در بعضی از تست‌ها قابل استفاده است در

دل این تست توضیح مختصری می‌دهیم. این اتحاد می‌گوید که اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند که مجموعشان صفر شود ($a+b+c=0$)، در این صورت داریم:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

حالا برویم سراغ حل مسئله خودمان. اول از همه مخرج مشترک می‌گیریم، پس داریم:

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$$

از طرفی طبق فرض مسئله $a+b+c=0$ ، پس به کمک اتحاد اویلر $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ و می‌توان نوشت:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

اتحاد مربع چهارجمله‌ای که در درسنامه برایتان آورده ایم را به خاطر دارید؟ به کمک این اتحاد، عبارت $(1+2x+3x^2+4x^3)^2$ را بسط می‌دهیم،

پس داریم:

$$(1+2x+3x^2+4x^3)^2 = 1 + (2x)^2 + (3x^2)^2 + (4x^3)^2 + 2((1)(2x) + (1)(3x^2) + \dots + (2x)(3x^2) + \dots + (3x^2)(4x^3))$$

اگر کمی باهوش باشید می‌بینید که در عبارت $2((1)(2x) + \dots)$ ضریب پرانتز ۲ است، پس همه جملات این پرانتز، ضریبشان زوج است (**قبوله؟**)، پس فقط جملات

بیرون پرانتز، یعنی $1, 4x^4, 9x^4$ و $16x^6$ را بررسی می‌کنیم که به وضوح فقط ۱ و $9x^2$ ضریب هایشان فرد است، یعنی تنها دو عبارت، ضریب فرد دارند.

با فاکتورگیری از x و استفاده از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه این عبارت می‌توان نوشت: $x^3 - 5x^2 + 4x = x(x^2 - 5x + 4) = x(x-1)(x-4)$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در تجزیه این عبارت عامل $x-2$ وجود ندارد.

با فاکتورگیری از x و استفاده از اتحاد مزدوج برای تجزیه عبارت $x^5 - 16x$ می‌توان نوشت:

$$x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = x(x-2)(x+2)(x^2 + 4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در تجزیه عبارت، عامل $x^2 + 2$ وجود ندارد.

برای تجزیه عبارت $x^5 - 5x^3 - 36x$ ، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

$$x^5 - 5x^3 - 36x \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(x^4 - 5x^2 - 36) \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} x(x^2 - 9)(x^2 + 4) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} x(x-3)(x+3)(x^2 + 4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در تجزیه این عبارت، فقط عامل $x-9$ وجود ندارد.

با استفاده از اتحاد جاق‌ولاغر یعنی رابطه $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ می‌توان نوشت:

$$x^2 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$$

در نتیجه $A = \sqrt[3]{x^4}$ و $B = -\sqrt[3]{x^2}$ و خواسته مسئله برابر است با:

$$AB = \sqrt[3]{x^4}(-\sqrt[3]{x^2}) = -\sqrt[3]{x^4} \sqrt[3]{x^2} = -\sqrt[3]{x^6} = -x^2$$



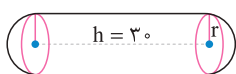
تغییرات هر کمیت دلخواه مانند x را با Δx نمایش می‌دهیم و برابر $x_2 - x_1 = \Delta x$ است. اگر رابطه دماها در حالت اول به صورت $F_1 = \frac{9}{5}C_1 + 32$ و در حالت دوم به صورت $F_2 = \frac{9}{5}C_2 + 32$ باشد، داریم:

$$F_2 - F_1 = (\frac{9}{5}C_2 + 32) - (\frac{9}{5}C_1 + 32) \Rightarrow F_2 - F_1 = \frac{9}{5}(C_2 - C_1) \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\Delta C$$

از طرفی طبق فرض مسئله دما برحسب فارنهایت باید ۸۱ درجه افزایش یابد، یعنی $\Delta F = 81$. پس داریم:

$$81 = \frac{9}{5}\Delta C \Rightarrow \Delta C = \frac{5 \times 81}{9} = 5 \times 9 = 45$$

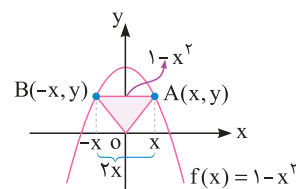
پس در این صورت دما برحسب سانتی‌گراد ۴۵ درجه افزایش یافته است.



ابتدا یک شکل به صورت مقابل برای مسئله در نظر می‌گیریم:

می‌دانیم حجم یک کره به شعاع r برابر $\frac{4}{3}\pi r^3$ و حجم استوانه با ارتفاع h و شعاع قاعده r برابر $\pi r^2 h$ است. پس می‌توان نوشت:

$$V = \underbrace{2(\frac{1}{4} \times \frac{4}{3}\pi r^3)}_{\text{حجم دو نیم کره}} + \underbrace{\pi r^2(30)}_{\text{حجم استوانه}} = \frac{4}{3}\pi r^3 + 30\pi r^2$$



مختصات نقطه B به‌وضوح به صورت $B(-x, y)$ است، از طرفی با توجه به این‌که A و B روی نمودار تابع $y = 1 - x^2$ قرار دارند، برای محاسبه مساحت مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$S = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2}(2x)(1 - x^2) = x - x^3$$

مساحت دو مثلث ADE و ABC را با استفاده از رابطه $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ به‌دست می‌آوریم. پس داریم:

$$ADE : S = \frac{1}{2}(x)(2x) \sin 30^\circ = \frac{1}{2}(2x^2)(\frac{1}{2}) = \frac{x^2}{2}$$

$$ABC : S = \frac{1}{2}(2x)(6x) \sin 30^\circ = \frac{1}{2}(12x^2)(\frac{1}{2}) = 3x^2$$

در نتیجه مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} = \frac{9x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{8x^2}{2} = 4x^2$$

فقط تابع داده شده در گزینه «۲» یک تابع چندجمله‌ای است. در گزینه‌های «۱» و «۴»، متغیر x در مخرج کسر و در گزینه «۳» متغیر x زیر

رادیکال قرار دارد، پس این توابع چندجمله‌ای نیستند.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: می‌دانیم $y = \sqrt[3]{(x-1)^3} = x-1$ است که به‌وضوح یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد. ✓

گزینه «۲»: در عبارت درجه دوم $x^2 - x + 1$ ، $\Delta < 0$ و $a > 0$ می‌باشد پس این عبارت همواره مثبت است و $y = |x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1$ می‌باشد که یک تابع چندجمله‌ای است. ✓

گزینه «۳»: می‌دانیم $x^2 + 2x + 1$ در واقع همان $(x+1)^2$ است. پس $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ می‌باشد که به‌وضوح یک تابع چندجمله‌ای نیست. ✗

گزینه «۴»: ضابطه این تابع به‌صورت $y = \frac{x^3 + 2x}{5x} = \frac{x(x^2 + 2)}{5x} = \frac{x^2 + 2}{5}$ قابل نوشتن است که یک تابع چندجمله‌ای می‌باشد. ✓

$$f(x) = \underbrace{|x^2 + 1|}_{\text{مثبت}} = x^2 + 1$$

می‌دانیم عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است، پس داریم:

در نتیجه این تابع به‌ازای همه اعداد حقیقی یعنی $(-\infty, +\infty)$ یک چندجمله‌ای است.

$$x = 0 : f(0) = 0 + 0 + b = 2 \Rightarrow b = 2$$

طبق فرض مسئله $f(0) = 2$ و $f(1) = 5$ است. پس داریم:

$$x = 1 : f(1) = a + 1 + b = 5 \xrightarrow{b=2} a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$$

در نتیجه $f(x) = 2x^3 + x + 2$ است و برای محاسبه $f(-2)$ در تابع به جای x عدد -2 را قرار می‌دهیم:

$$x = -2 : f(-2) = 2(-2)^3 + (-2) + 2 = 2(-8) - 2 + 2 = -16$$

$$x = a : f(a) = 5a + 2 = 12 \Rightarrow 5a = 10 \Rightarrow a = 2$$

طبق فرض مسئله $f(x) = 5x + 2$ و $f(a) = 12$ است. پس داریم:

$$x = b : g(b) = 2b^3 - 51 = 3 \Rightarrow 2b^3 = 54 \Rightarrow b^3 = 27 \Rightarrow b = 3$$

از طرفی $g(x) = 2x^3 - 51$ و $g(b) = 3$ می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

در نهایت خواسته مسئله $f(a-b) = f(-1)$ است که مقدار آن $-5 + 2 = -3$ می‌باشد.



۱۱۷۲ ۲ با هر یک از دسته ارقام $\{0, 1, 5\}$ و $\{0, 2, 4\}$ و $\{1, 2, 3\}$ می توان اعداد سه رقمی با ارقام متمایز ساخت که مجموع ارقام آن ها برابر ۶ باشد. حالا مسئله را در سه حالت زیر بررسی می کنیم:

حالت اول: تعداد اعداد سه رقمی ای که با ارقام $\{0, 1, 5\}$ می توان نوشت برابر است با:

$$\frac{2}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 4$$

حالت دوم: تعداد اعداد سه رقمی ای که با ارقام $\{0, 2, 4\}$ می توان نوشت برابر است با:

$$\frac{2}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 4$$

حالت سوم: تعداد اعداد سه رقمی ای که با ارقام $\{1, 2, 3\}$ می توان نوشت برابر است با:

$$\frac{3}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 6$$

در نهایت طبق اصل جمع، تعداد کل حالات برابر با $4 + 4 + 6 = 14$ می باشد. (در حالت های اول هواسمون هستش که رقم صدگان نمی تونه صفر باشه!)

۱۱۷۳ ۳ با توجه به اینکه می خواهیم این عدد زوج باشد، یکان آن باید ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ یا صفر باشد. اما با توجه به متقارن بودن آن، هر عددی که در یکان قرار می گیرد در صدگان هم قرار می گیرد، پس صفر برای یکان قابل قبول نیست و در نتیجه یکان ۴ حالت و صدگان ۱ حالت دارد، اما دهگان هر یک از ارقام صفر تا ۹ می تواند باشد. پس داریم:

$$\frac{1}{1} \times \frac{10}{10} \times \frac{4}{4} = 40$$

رقم یکان $\{2, 4, 6, 8\}$

۱۱۷۴ ۳ می دانیم از هر یک از اعضای A دقیقاً باید یک پیکان به مجموعه B خارج شود پس برای هر عضو A چهار حالت داریم و در نتیجه تعداد توابع از مجموعه A به B برابر با $4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ است.

۱۱۷۵ ۳ شرط تابع بودن این است که از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج شود، پس هر یک از اعضای ۲، ۳ و ۴ از مجموعه A سه حالت برای انتخابشان دارند، ولی با توجه به محدودیت مسئله، عضو ۱ از مجموعه A نمی تواند به a برود پس دو حالت دارد. در نتیجه طبق اصل ضرب، تعداد توابع از مجموعه A به B با شرط گفته شده برابر $5 \times 3 \times 3 \times 3 = 135$ تا است.

کسی هست که نمونه تعداد کل توابع از مجموعه A به B برابر $3^4 = 81$ می شه؟

۱۱۷۶ ۳ یک رابطه از A به B زمانی تابع است که هر عضو A دقیقاً به یک عضو B برود.

تکلیف a مشخص است! a باید به ۳ وصل شود تا تابع شامل زوج مرتب (۳، a) باشد، پس یک حالت دارد. c هم می تواند به یکی از ۱، ۳، ۴، ۵ وصل شود (۴ حالت). دو حرف b و d هیچ محدودیتی ندارند، پس هر کدام از آن ها ۵ حالت دارند، بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد توابع مطلوب از A به B برابر است با:

$$1 \times 4 \times 5 \times 5 = 100$$

۱۱۷۷ ۴ از بین گزینه های داده شده فقط رابطه داده شده در گزینه «۴» درست است، ببینید: حالا به بررسی سایر گزینه ها می پردازیم:

$$\times \quad 362880 = 9! \Rightarrow (3!)^2 = 9! \Rightarrow \text{گزینه «۳»} \quad \times \quad 40320 = 4! \times 2! \Rightarrow 8! = 4! \times 2! \Rightarrow \text{گزینه «۲»} \quad \times \quad 720 = 6 + 6 \Rightarrow 720 = 3! + 3! \Rightarrow 6! = 3! + 3! \Rightarrow \text{گزینه «۱»}$$

۱۱۷۸ ۲ با فاکتورگیری در داخل پرانتز، عبارت را ساده می کنیم:

$$15(15 \times 14! + 14!) = 15(14!(15 + 1)) = 15 \times 14! \times 16 = 16 \times 15 \times 14! = 16!$$

۱۱۷۹ ۳ طبق فرض مسئله $\frac{n!}{(n-2)!} = 90$ است. پس داریم:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = 90 = 10 \times 9 \Rightarrow n = 10$$

پس $120 = 5! = \left(\frac{10}{2}\right)! = \left(\frac{n}{2}\right)!$ می باشد.

۱۱۸۰ ۳ همگی می دانیم $n! = n(n-1)!$ است، پس در معادله داده شده به جای $(n-9)!$ می توانیم از $(n-9)(n-10)!$ استفاده کنیم و داریم:

$$\frac{(n-9)!}{(n+3)(n-10)!} = 14 \Rightarrow \frac{(n-9)(n-10)!}{(n+3)(n-10)!} = 14 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(n-3)(n+3)}{n+3} = 14 \Rightarrow n-3 = 14 \Rightarrow n = 14+3 = 17$$

۱۱۸۱ ۲ با استفاده از قوانین گفته شده برای فاکتوریل، می توان نوشت:

$$\frac{(2x+1)!}{[2(x-1)]!} = \frac{(2x+1)!}{(2x-2)!} = \frac{(2x+1)(2x)(2x-1)(2x-2)!}{(2x-2)!} = (2x+1)(2x)(2x-1) = (2x)(4x^2-1) = 8x^3-2x$$

با مقایسه عبارت به دست آمده با $ax^3 + bx + c$ به وضوح $a = 8$ ، $b = -2$ ، و $c = 0$ می باشد، پس:

$$a + b + c = 8 - 2 + 0 = 6$$



در پرتاب سه تاس، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S) = 6^3 = 216$ است. برای آن که سه تاس اعداد متوالی باشند، یکی از حالت‌های زیر پیش می‌آید:

$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6)$$

$$n(A) = 4 \times 6 = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$$

که اعضای هر یک از این دسته‌ها $= 3!$ حالت جابه‌جا می‌شوند. پس داریم:

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب سه تاس برابر $n(S) = 6^3 = 216$ است. حالاکافی است سه عدد از مجموعه $\{1, 2, \dots, 6\}$ انتخاب و آن‌ها را از بزرگ به کوچک مرتب کنیم، پس داریم:

$$n(A) = \binom{6}{3} = 20$$

$$P(A) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

در نهایت احتمال مطلوب برابر است با:

می‌دانیم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در پرتاب سه تاس برابر $n(S) = 6^3 = 216$ می‌باشد. برای محاسبه تعداد حالات مطلوب، با استفاده از اصل متمم تعداد حالاتی که در هر سه تاس اعدادی متمایز ظاهر می‌شود را از تعداد کل حالات کم می‌کنیم. پس داریم:

$$n(A) = 216 - (6 \times 5 \times 4) = 216 - 120 = 96$$

$$\text{در نتیجه احتمال مطلوب برابر با } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$$

تاس مورد نظر در هر یک از پرتاب‌ها می‌تواند ۴ یا ۶ بیابند، یعنی دو حالت دارد. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر است با:

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

پرتاب اول پرتاب سوم

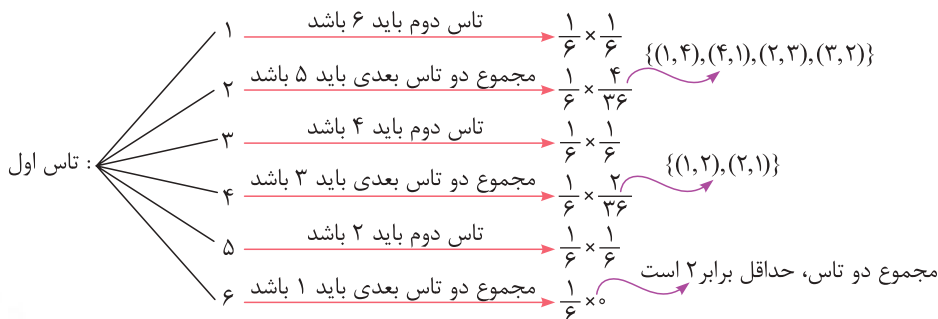
از طرفی حالت مطلوب مسئله این است که در پرتاب اول ۶ و در پرتاب دوم ۴ ظاهر شود، اما پرتاب سوم می‌تواند ۴ یا ۶ باشد. پس داریم:

$$n(A) = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

{۶} {۴} {۴, ۶}

$$\text{در نهایت احتمال مطلوب } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ می‌باشد.}$$

با توجه به اینکه در پرتاب تاس اول چه عددی ظاهر می‌شود، نموداری به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:



در نتیجه طبق اصل جمع داریم:

$$P(A) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{4}{36}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{36}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36} + \frac{4}{216} + \frac{1}{36} + \frac{2}{216} + \frac{1}{36} = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$$

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر با $n(S) = 2^4 = 16$ است. از طرفی برای محاسبه حالات‌های مطلوب کافی است سه سکه انتخاب کنیم که «رو» بیاید یا سه سکه انتخاب کنیم که «پشت» بیاید. پس داریم:

$$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{4}{3} = 4 + 4 = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

فضای نمونه‌ای پرتاب ۵ سکه $n(S) = 2^5 = 32$ عضو دارد. حالابرای محاسبه تعداد حالاتی که حداقل ۳ بار «پشت» ظاهر شده است، می‌توان نوشت:

$$n(A) = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 10 + 5 + 1 = 16$$

۵ بار «پشت» ظاهر شود.

۴ بار «پشت» ظاهر شود.

۳ بار «پشت» ظاهر شود.

$$\text{پس احتمال مطلوب برابر } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \text{ است.}$$