پیچیده‌ترین معادله شدی برایم
Δ زدم و نیامد آن به کارم!
با دیدن لبخند چو ماهت...
احساس عمیق و خوب دارم
انگار ریشه‌ی حقیقی دارم!

فصل ۵

معادله و تابع درجه‌ی دوم

هر چه درباره‌ی معادله‌ی درجه‌ی دو و دیدگاهِ تابعیِ آن بخواهید این‌جاست...
روش‌های حلِ معادله‌ی درجه‌ی دو، روابطِ بینِ ریشه‌هایش، سهمی و ویژگی‌های آن، کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دو در حل مسائل مختلف.
این فصل یکی از مهم‌ترین آیتم‌های کنکوریِ شماست؛ یادتان باشد معادله‌ی درجه‌ی دو چیزی نیست که در این فصل تمام شود! در ریاضیات تجربی و در بخش‌های مختلف نیاز به مباحث این فصل مُدام احساس می‌شود؛ درست مثل یکی از چهار عمل اصلی...!

تابع و معادله‌ی درجه‌ی دو، ابزاری است راه‌گشا که بدون تسلط به آن شاید بتوان گفت نابینا وارد کنکور شده‌اید!! حوصله‌ی زیاد و تست کافی پیشنهاد ما در این فصل است...

ایستگاه۱: معادلات درجه‌ی اول و دوم و روش‌های حل این معادلات

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم و بررسی Δ در ریاضی تجربی، حکمِ یکی از چهار عمل اصلی ریاضی را دارد، از بس کاربردی است.

معادله‌ی درجه‌ی اول و دوم

۱ **معادله‌ی درجه‌ی اول:** معادله‌ای بر حسب متغیرِ x، که بعد از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان مجهولش ۱ باشد، را معادله‌ی درجه‌ی اول می‌گوییم. فرم کلی این معادله به‌صورت $ax+b=0$ و مقدار ریشه‌ی آن هم $x=-\frac{b}{a}$ است. $(a\neq 0)$

این‌جوری هم ببین: برای حلِ معادله‌ی درجه‌ی اول، ابتدا عدد ثابت را به سمت راستِ تساوی منتقل کرده، سپس دو طرف را بر ضریبِ مجهول تقسیم می‌کنیم.

تست: دو برابر عددی را از ۲۵ کم کرده‌ایم و حاصل، نصف همان عدد شده است. مساحت مربعی که طول ضلعش این عدد باشد، کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۶۴ ۴) ۲۵۶

پاسخ: اگر عدد موردنظر را x فرض کنیم:

$$25-2x=\frac{x}{2}\xrightarrow{\text{مرتب کن}}25=\frac{x}{2}+2x\xrightarrow{\text{ساده کن}}25=\frac{x+4x}{2}\Rightarrow 25=\frac{5x}{2}\xrightarrow{\times\frac{2}{5}}10=x\xrightarrow[\text{به توان ۲ برسون}]{\text{مساحت مربع}}x^2=100$$

۲ **معادله‌ی درجه‌ی دوم:** معادله‌ای را که پس از ساده شدن، بزرگ‌ترین توان متغیرِ آن، ۲ باشد معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌گوییم. فرم کلی این معادله به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ است: که a، b و c سه عددِ حقیقی هستند و البته $a\neq 0$ است!

معادله‌ی ☁ $=x^2$

یک معادله‌ی خیلی کاربردی، این است که بعد از ساده کردن معادله، برسیم به عبارتِ «عدد ثابت $=x^2$»، مثل $x^2=3$.

اگر u، عبارتی برحسبِ x بوده و A هم عددی ثابت باشد، آن‌وقت:

	$A>0$	$A<0$	$A=0$
$u^2=A$	**نتیجه می‌دهد:** $u=\sqrt{A}$ و $u=-\sqrt{A}$	**ریشه ندارد.** آخه عبارت نامنفیِ u^2، هیچ‌گاه برابرِ عدد منفی نمی‌شود!	**نتیجه می‌دهد:** $u=0$

تست: در معادله‌ی $9(2x+\frac{5}{3})^2-1=0$، مقدار ریشه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ:

$$9(2x+\frac{5}{3})^2-1=0\xrightarrow{\text{انتقال ۱ به سمت راست}}9(2x+\frac{5}{3})^2=1\xrightarrow{\div 9}(2x+\frac{5}{3})^2=\frac{1}{9}$$

$$\xrightarrow[u^2=\frac{1}{9}]{u=2x+\frac{5}{3}}\begin{cases}2x+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\\ 2x+\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}\end{cases}\xrightarrow{-\frac{5}{3}}\begin{cases}2x=-\frac{4}{3}\\ 2x=-2\end{cases}\xrightarrow{\div 2}\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\ x=-1\end{cases}\xrightarrow{\text{ریشه‌ی کوچک‌تر}}x=-1$$

عبارتِ «عدد مثبت $+u^2$»، همواره مثبت است. **ببین:** $(x-1)^2+3>0$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش تجزیه

در معادله‌ی درجه‌ی دومی که ضریبِ x^2 در آن ۱ باشد، به‌عنوان ساده‌ترین راه، می‌رویم سراغ تجزیه! در این روش معادله‌ی $x^2+mx+n=0$ را در نظر می‌گیریم: ۱ فرم تجزیه‌شده‌ی معادله را می‌نویسیم: $(x+\ \ )(x+\ \ )=0$ ۲ برای کامل کردنِ پرانتزها، به دنبال دو عدد می‌گردیم که ضربشان بشود n و جمعشان هم m ۳ حالا اون دو تا عددی را که پیدا کردیم جای‌گذاری می‌کنیم و ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم. این روش برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، کلی نیست، گاهی دو عدد با ضرب و جمعی که می‌خواهید پیدا نمی‌کنید.

اگر ضربِ چند عبارت، مساویِ صفر شود، تک‌تک آن‌ها را مساوی صفر می‌گذاریم.

تست: در معادله‌ی $x^2-20x+51=0$، تفاضل ریشه‌ها، کدام ویژگی زیر را دارد؟

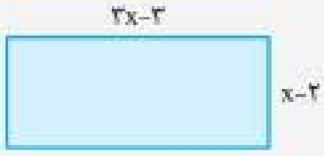
۱) عدد فرد ۲) مضرب ۳ ۳) مضرب ۷ ۴) عدد اول

پاسخ: دنبال دو عدد با حاصل‌ضربِ ۵۱ هستیم که جمع آن‌ها ۲۰- باشد! این دو عدد ۳- و ۱۷- هستند:

$$x^2-20x+51=0\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x-17)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x-17=0\\ x-3=0\end{cases}\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}x=17,x=3\xrightarrow{\text{تفاضل ریشه‌ها}}17-3=14\xrightarrow{\text{مطابقت با گزینه‌ها}}$$ ۱۴ مضرب ۷ است.

وقتی که معادله‌ی درجه‌ی دوم عدد ثابت نداشته باشد، **این‌طوری:** $ax^2+bx=0$، سریع از x، فاکتور گرفته و به حاصل‌ضربِ دو عبارت می‌رسیم که مساویِ صفر شده است، بعدش معادله حل می‌شود...

این‌جوری هم ببین: اگر $ax^2+bx=0$ شود، ریشه‌ها عبارت‌اند از $x=0$ و $x=-\frac{b}{a}$. آخه:
$$ax^2+bx=0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} x(ax+b)=0$$



تست: مساحت مستطیل مقابل برابر ۶ است. کدام گزینه درباره‌ی x درست است؟

۱) عددی زوج است.
۲) عددی مربع کامل است.
۳) عددی دورقمی است.
۴) عددی اول است.

پاسخ:
$$S_{\text{مستطیل}}=\text{طول}\times\text{عرض}\Rightarrow S=(3x-3)(x-2)\xrightarrow{\text{مساوی ۶ بذار}}(3x-3)(x-2)=6$$
$$\xrightarrow[\text{ساده‌کن}]{\text{ضرب رو}}3x^2-9x+6=6\xrightarrow{-6}3x^2-9x=0\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}3x(x-3)=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } 3$$
طول ضلع مستطیل باید مثبت باشد، پس $x=0$ قابل قبول نیست، در نتیجه $x=3$ است که عددی اول می‌باشد.

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روش مربع کامل

(۱) برای این‌که عبارتِ x^2+bx را مربع کامل کنیم باید به آن $(\frac{b}{2})^2$ را اضافه کنیم.

این‌جوری هم ببین:
$$x^2+bx\xrightarrow{\text{مربع‌کامل‌کن}}x^2+bx+\frac{b^2}{4}=(x+\frac{b}{2})^2$$

(۲) برای این‌که معادله‌ی درجه‌ی دومِ $ax^2+bx+c=0$ را با روش مربع کامل حل کنید، مراحل زیر را به‌ترتیب اجرا کنید:

الف) عدد ثابت را به سمت راستِ تساوی ببرید و بعد دو طرف را به ضریبِ x^2 تقسیم کنید:

این‌جوری هم ببین:
$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow ax^2+bx=-c\xrightarrow{\div a}x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

ب) حالا سمت چپِ تساوی را همان‌طور که یاد دادیم، مربع کامل کنید و بعد معادله را حل کنید.

ببین: حل معادله‌ی $3x^2+2x-8=0$ با روش مربع کامل:
$$3x^2+2x-8=0\Rightarrow 3x^2+2x=8\xrightarrow{\div 3}x^2+\frac{2}{3}x=\frac{8}{3}\xrightarrow[b=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{b^2}{4}=\frac{1}{9}]{+\frac{1}{9}}$$
$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=\underbrace{\frac{8}{3}+\frac{1}{9}}_{\text{ساده‌کن}}\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}}(x+\frac{1}{3})^2=\frac{25}{9}\xrightarrow{\text{جذر}}x+\frac{1}{3}=\pm\frac{5}{3}$$
$$x=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$
$$x=-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{6}{3}=-2$$

اگر معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ را با روش مربع کامل حل کنیم تا به‌صورت $\boxed{(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}}$ در آید، (ضریبِ x داخل پرانتز یک باشد) عددی که باید به دو طرف تساوی اضافه شود $\frac{b^2}{4a^2}$ است و عددی که در نهایت باید از آن جذر بگیریم $\frac{\Delta}{4a^2}$ خواهد بود...

تست: برای حل معادله‌ی $2x^2+9x+4=0$ به روش مربع کامل، عددی که باید در سمت راست تساوی از آن جذر بگیریم، کدام است؟

۱) $\frac{49}{8}$
۲) $\frac{49}{4}$
۳) $\frac{49}{16}$
۴) $\frac{81}{16}$

پاسخ:
$$2x^2+9x+4=0\xrightarrow{a=2,b=9,c=4}\Delta=b^2-4ac=9^2-4(2)(4)=81-32\Rightarrow\Delta=49\xrightarrow{\text{عددی‌که‌باید جذربگیریم}}\frac{\Delta}{4a^2}=\frac{49}{4(2)^2}=\frac{49}{16}$$

برای حل معادله‌ی $25x^2-25x+6=0$، با روش مربع کامل، کدام عدد را می‌توانیم به دو طرف تساوی اضافه کنیم؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{16}$
۴) ۱

پاسخ:
$$25x^2-25x+6=0\xrightarrow{a=25,b=-25}\frac{b^2}{4a^2}=\frac{(-25)^2}{4(25)^2}=\frac{1}{4}$$

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم با روشِ Δ

متداول‌ترین روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، همین است. در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$:

(۱) Δ را پیدا می‌کنیم: $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ (۲) مقدار ریشه‌ها، در صورتی‌که Δ منفی نباشد، عبارت‌اند از: $\boxed{x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$ و $\boxed{x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$

تست: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $(\sqrt{3}+1)x^2-x+1=\sqrt{3}$، ریشه‌ی مثبت کدام است؟

۱) $\sqrt{3}-1$ ۲) $\sqrt{3}+1$ ۳) $2\sqrt{3}-1$ ۴) $2\sqrt{3}-2$

پاسخ:

$$(\sqrt{3}+1)x^2-x+1=\sqrt{3}\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}}(\underbrace{\sqrt{3}+1}_{a})x^2\underbrace{-}_{b}x+(\underbrace{1-\sqrt{3}}_{c})=0\xrightarrow[\text{پیداکن}]{\Delta\text{ رو}}\Delta=(-1)^2-4\underbrace{(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3})}_{-2}=9$$

$$\xrightarrow[\Delta>0]{\text{ریشه‌ها}}x_1=\frac{1+3}{2(\sqrt{3}+1)},\ x_2=\frac{1-3}{2(\sqrt{3}+1)}\xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{ریشه‌ی}}x_1=\frac{1+3}{2(\sqrt{3}+1)}\xrightarrow[\div 2]{\text{ساده‌کن}}\frac{2}{\sqrt{3}+1}\xrightarrow{\text{گویا کن}}\frac{2(\sqrt{3}-1)}{\underbrace{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}_{2}}=\sqrt{3}-1$$

دو معادله‌ی درجه‌ی دوم خاص

۱) **اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی، مجموع هر سه ضریب، برابر صفر شود**، مثل $5x^2+6x-11=0$، یکی از ریشه‌ها همواره ۱ بوده و دیگری هم می‌شود: نسبت عدد ثابت معادله به ضریب x^2

این‌جوری هم ببین: اگر در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم: $a+b+c=0$، آن‌وقت: $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}$

۲) **اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی، مجموع ضریب‌های اولی و آخری برابرِ ضریب وسطی باشد**، مثل $5x^2+6x+1=0$ ($5+1=6$)، یکی از ریشه‌ها، همواره -1 بوده و دیگری هم می‌شود: قرینه‌ی عدد ثابت معادله، تقسیم بر ضریب x^2

این‌جوری هم ببین: اگر در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم: $a+c=b$، در این‌صورت: $x_1=-1$ و $x_2=-\frac{c}{a}$

یه سطح بالاتر! در هر معادله‌ای و با هر درجه‌ای که داشته باشد، اگر **مجموعِ همه‌ی ضریب‌ها برابرِ صفر شود**، حتماً یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ بوده است و برای تعیین بقیه‌ی ریشه‌ها، عبارت را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم...

تست: در معادله‌ی $(2\sqrt{2}-1)x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0$ یکی از ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}-3}{9}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}-3}{7}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}-1}{7}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$

پاسخ:

$$a=2\sqrt{2}-1,\ b=-\sqrt{2},\ c=1-\sqrt{2}\xrightarrow{a+b+c\text{ روحساب کن}}(2\sqrt{2}-1)+(-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}x=1,\ x=\frac{c}{a}=\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\xrightarrow{\text{گویاکن}}x=\frac{(1-\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)}\xrightarrow{\text{ضرب‌کن}}\frac{\sqrt{2}-3}{7}$$

تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

وضعیتِ تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ با کمکِ Δ و به‌صورت زیر تعیین می‌شود: $\Delta=b^2-4ac$:

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
وضعیت ریشه‌ها	دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.	ریشه‌ی مضاعف دارد.	ریشه‌ی حقیقی ندارد.
	فرمول ریشه‌ها: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	**فرمول ریشه‌ی مضاعف:** $x=\frac{-b}{2a}$	

منظور از ریشه‌ی مضاعف، وجودِ دو ریشه‌ی مساوی با همدیگر است. راستی ریشه‌ی **مضاعف** را گاهی ریشه‌ی **مکرر مرتبه‌ی دوم** هم می‌گویند...

تست: ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ:

$$\underbrace{1}_{a}x^2\underbrace{-(2m+3)}_{b}x+\underbrace{m^2}_{c}=0\xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{\Delta\text{روحساب‌کن}}\Delta=(2m+3)^2-4(1)(m^2)\xrightarrow{\text{اتحادرو بازکن و ساده‌کن}}\Delta=12m+9$$

$$\xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشه‌ی مضاعف دارد}}12m+9=0\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{حل}}m=-\frac{3}{4}\xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{\text{در معادله}}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=0\xrightarrow[\text{پیداکن}]{\text{ریشه‌ی مضاعف رو}}x=-\frac{b}{2a}=\frac{-(-\frac{3}{2})}{2(1)}=\frac{3}{4}$$

کنترل Δ در تست

یادتان باشد هر تستی از معادله‌ی درجه‌ی دوم را که حل کردید و کارتان تمام شد، حتماً در مرحله‌ی آخر باید Δ را کنترل کنید.

۱) چنانچه تست گفته باشد، **معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است**، باید علاوه بر هر شرطی که یافته‌اید، شرطِ $\Delta>0$ هم برقرار باشد...

۲) چنانچه تست گفته باشد، **معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است**، باید شرطِ $\Delta\geq 0$ در کنار تمام فرض‌های مسئله نوشته شده و بررسی شود...

دور زدنِ Δ!

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، عددهای a و c علامت‌های متفاوت داشـــته باشـــند، آن‌وقت معادله، حتماً دارای دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز است و در این‌حالت برای فهمیدنِ تعداد ریشه‌ها، نیازی به محاسبه‌ی Δ نداریم...!

تست: معادله‌ی $\frac{3}{5}=\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^2}$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ریشه‌ی ساده ۳) ریشه‌ی مضاعف ۴) دو ریشه‌ی متمایز

پاسخ:

$$\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{3}{5}\xrightarrow[x\neq 0]{\text{دو طرف را در } 4x^2 \text{ ضرب کن}}1-4x=\frac{12x^2}{5}\xrightarrow{\times 5}5-20x=12x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}}12x^2+20x-5=0\xrightarrow[ac<0]{a=12 \text{ و } c=-5}\Delta>0\Rightarrow$$ معادله حتماً دو ریشه‌ی متمایز دارد.

ایستگاه ۲: تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن

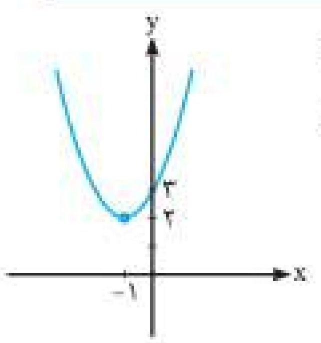
این‌جا رفتار و ویژگی‌های تابع درجه‌ی دوم را می‌بینید. موضوعی که در کتاب درسی بسیار مفصل به آن پرداخته شده است. رسم نمودار تابع درجه‌ی دوم و تسلط بر آن، در بیشتر مسائل ریاضی، مهم و کاربردی است.

سهمی

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$ با شرط‌های $a\neq 0$ و $D_f=\mathbb{R}$، تابع درجه‌ی دوم نامیده می‌شود و نمودار این تابع، یک سهمی است.

	$y=ax^2+bx+c$	
رأس سهمی	**طول رأس:** $x=-\frac{b}{2a}$	
	عرض رأس: $y=-\frac{\Delta}{4a}$ همچنین می‌توانید با جای‌گذاریِ طولِ رأس در تابع، عرضِ رأس را پیدا کنید.	
تلاقی با محور yها	به جای x بگذارید صفر؛ همیشه یک نقطه‌ی تلاقی دارد. $x=0\Rightarrow y=c$	
تلاقی با محور xها	$\Delta>0$	محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند. (یعنی همان ریشه‌هایش...)
	$\Delta=0$	بر محور xها مماس است.
	$\Delta<0$	محور xها را قطع نمی‌کند.
تأثیر علامت a	$a>0$	$a<0$
	دهانه‌ی سهمی رو به بالاست: مینیمم داریم.	دهانه‌ی سهمی رو به پایین است: ماکزیمم داریم.
محور تقارن (همواره یکی)	$x=-\frac{b}{2a}$	
برای رسم سهمی نیاز است	۱ مختصات رأس سهمی ۲ ریشه‌های آن در صورت وجود؛ که نقطه‌های برخورد با محور xها هستند. ۳ نقطه‌ی تلاقی با محور yها ۴ رو به بالا یا پایین بودن سهمی از روی نگاه به علامتِ a	

ببین: اگر $y=x^2+2x+3$ باشد، آن‌وقت دهانه‌های سهمی رو به بالاست $(a=1)$ و طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1$ و عرض رأس هم می‌شود $y=1-2+3=2 \xleftarrow{\text{در سهمی}} x=-1$؛ یعنی $S(-1,2)$ این سهمی در نقطه‌ی $(0,3)$ با محور yها برخورد می‌کند و معادله‌ی محور تقارنش $x=-1$ است. از آن‌جایی که $\Delta=4-12=-8$ است، ریشه هم ندارد.



منظور از کمترین یا بیشترین مقدار سهمی، همان $-\frac{\Delta}{4a}$ است...

تست: کمترین مقدار تابع $y = kx^{۲} - ۸x + (۶k - ۱)$ برابر با ۳ است. طول رأس سهمی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: عبارت درجه‌ی دوم ما کمترین مقدار را دارد، پس $a > ۰$ بوده است که در این‌جا می‌شود $k > ۰$. خب منظور از کمترین مقدار سهمی هم عرض رأس آن است:

$$\underbrace{k}_{a} x^{۲} \underbrace{-۸}_{b} x + \underbrace{(۶k-۱)}_{c} = ۰ \xrightarrow[\Delta = b^{۲} - ۴ac]{\Delta \text{رو حساب کن}} \Delta = ۶۴ - ۴(k)(۶k - ۱) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta = ۶۴ - ۲۴k^{۲} + ۴k$$

$$\xrightarrow[-\frac{\Delta}{۴a}]{\text{فرمول عرض رأس}} -\frac{۶۴ - ۲۴k^{۲} + ۴k}{۴k} = \underbrace{۳}_{\text{فرض تست}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} ۲۴k^{۲} - ۴k - ۶۴ = ۱۲k \xrightarrow{\text{ساده کن}} ۲۴k^{۲} - ۱۶k - ۶۴ = ۰ \xrightarrow{\div ۸} ۳k^{۲} - ۲k - ۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} \Delta = ۴ - ۴(۳)(-۸) = ۱۰۰ \Rightarrow k = \frac{۲ \pm ۱۰}{۶} = ۲ \text{ و } -\frac{۸}{۶} \xrightarrow{k>۰} k = ۲ \xrightarrow{\text{طول رأس}} x = \frac{-b}{۲a} = -\frac{-۸}{۲k} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

چنانچه سهمی از نقطه‌ی (m,n) بگذرد، مختصات این نقطه در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند.

تست: سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ دارای محور تقارنی به معادله‌ی $x = -۲$ بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطه‌ی $(-۱, -۱)$ بگذرد، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

پاسخ:

۱ محور تقارن: $y = ax^{۲} + bx + c \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = -\frac{b}{۲a} = \underbrace{-۲}_{\text{فرض تست}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} b = ۴a$

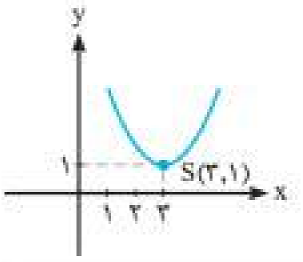
۲ تلاقی با محور yها: $y = ۵ \xrightarrow{x=۰} c = ۵$

۳ گذشتن از نقطه: $(-۱, -۱) \xrightarrow[\text{در سهمی}]{x=-۱, y=-۱} -۱ = a(-۱)^{۲} + b(-۱) + c \xrightarrow{c=۵} a - b = -۶ \xrightarrow[\text{طبق ۱}]{b=۴a} a - ۴a = -۶$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} a = ۲ \xrightarrow{b=۴a} b = ۸ \Rightarrow a + b + c = ۲ + ۸ + ۵ = ۱۵$$

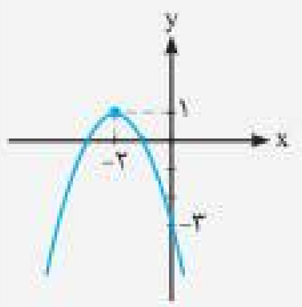
نوشتن معادله‌ی سهمی

۱ اگر مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(h, k)$ داده شده باشد: در این‌صورت معادله‌ی سهمی را به‌صورت $y = a(x-h)^{۲} + k$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعاتِ دیگر سؤال، a را پیدا کنید... **ببین:**



$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی کلی}} y = a(x - ۳)^{۲} + ۱$$

تست: معادله‌ی سهمی مقابل کدام است؟



۱) $y = -x^{۲} + ۴x - ۳$

۲) $y = -x^{۲} - ۴x - ۳$

۳) $y = -x^{۲} - ۴x + ۳$

۴) $y = x^{۲} - ۴x - ۳$

پاسخ:

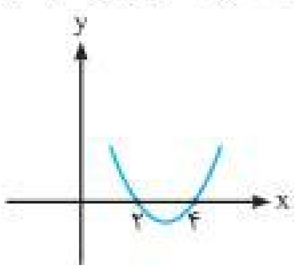
$$S(-۲, ۱) \xrightarrow{\text{معادله‌ی کلی سهمی}} y = a(x-h)^{۲} + k \xrightarrow[h=-۲,\, k=۱]{\text{جایگذاری کن}} y = a(x+۲)^{۲} + ۱$$

سهمی از نقطه‌ی $(۰, -۳)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه را در معادله‌ی آن صدق می‌دهیم:

$$y = a(x+۲)^{۲} + ۱ \xrightarrow{x=۰,\, y=-۳} -۳ = a(۰+۲)^{۲} + ۱ \Rightarrow -۳ = ۴a + ۱ \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{حل}} a = -۱ \xrightarrow[\text{سهمی}]{\text{در معادله‌ی}} y = -۱(x+۲)^{۲} + ۱ \xrightarrow[\text{دوجمله‌ای}]{\text{اتحاد مربع}} y = -x^{۲} - ۴x - ۳$$

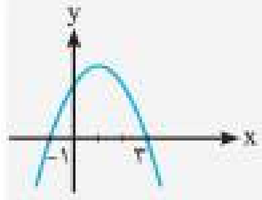
همان‌طور که دیدید برای کارکردن با سهمی‌هایی که معادله‌ی آن‌ها به فرم $y = a(x-h)^{۲} + k$ نوشته شده است، می‌توانید اتحاد مربع دوجمله‌ای موجود را باز کرده و عبارت را ساده کنید...

۲ اگر نقاط تلاقی سهمی با محور xها به فرم $x_{۱}$ و $x_{۲}$ باشند، در این‌صورت معادله‌ی سهمی را به‌صورت $y = a(x - x_{۱})(x - x_{۲})$ بنویسید و سعی کنید از اطلاعات دیگر سؤال a را به‌دست بیاورید... **ببین:**



$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی کلی}} y = a(x - ۲)(x - ۴)$$

تست: **سهمی مقابل از نقطه‌ی $(-2,-10)$ می‌گذرد. نقطه‌ی برخورد سهمی با محور y ها چه عرضی دارد؟**



۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ:
$-1, 3$:ریشه‌ها $\xrightarrow{\text{فرم کلی سهمی}} y=a(x-x_1)(x-x_2) \xrightarrow{\text{جایگذاری کن}} y=a(x+1)(x-3) \xrightarrow{\text{ضرب کن}} y=a(x^2-2x-3) \xrightarrow[\text{جایگذاری کن}]{(-2,-10)}$

$-10=a(4+4-3) \Rightarrow -10=5a \Rightarrow a=-2 \xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی}} y=-2(x^2-2x-3) \xrightarrow[x=0]{\text{تلاقی با محور yها}} y=-2(-3)=6$

در حالت خاص که معادله‌ی درجه‌ی دوم، ریشه‌ی مضاعفِ x_0 دارد، معادله‌اش به‌صورتِ $y=a(x-x_0)^2$ در می‌آید...!

قرارداد: ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ را برای تابعِ $y=ax^2+bx+c$، **صفرهای سهمی** می‌نامیم.

مماس بودن سهمی بر خط

اگر خط دلخواهِ $y=mx+n$ بر یک سهمی مماس شده باشد، به جای y سهمی بگذارید: $mx+n$ و سپس معادله‌ی درجه‌ی دوم حاصل را مرتب کرده و در معادله‌ی آخری قرار دهید: $\Delta=0$...

تست: **به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y=2x^2+(m+1)x+m+6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات مماس است؟** (خارج ۹۳)

۱) -4 ۲) ۴ و -12 ۳) -4 و ۱۲ ۴) ۱۲

پاسخ:
$y=2x^2+(m+1)x+m+6 \xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{\text{نیمساز ناحیه‌ی اول: } y=x} x=2x^2+(m+1)x+m+6$

$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} x=2x^2+mx+x+m+6 \Rightarrow 2x^2+mx+m+6=0$

$\xrightarrow{\text{مماس یعنی } \Delta=0} m^2-4(2)(m+6)=0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} m^2-8m-48=0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (m+4)(m-12)=0 \Rightarrow m=12,-4$

اگر $m=12$ باشد، معادله‌ی حاصل از تلاقی سهمی و نیمساز عبارت است از: $2x^2+mx+m+6=0 \xrightarrow{m=12} 2x^2+12x+18=0$ که به‌وضوح جوابش $x=-3$ است و در ناحیه‌ی اول نیست! پس فقط $m=-4$ قابل قبول خواهد بود.

وضعیت کامل یک سهمی نسبت به محور xها

(۱) اگر سهمی، محور xها را در دو نقطه قطع کند، در این‌صورت $\Delta>0$ بوده است.

(۲) اگر سهمی، محور xها را در دو نقطه **قطع نکند**، در این‌صورت: در حالت کلی، سهمی نسبت به محور xها یکی از چهار حالت زیر را دارد:

	همواره بالای محور	بالای محور، مماس بر آن	همواره پایین محور	پایین محور، مماس بر آن
شرط	$a>0$ و $\Delta<0$	$a>0$ و $\Delta=0$	$a<0$ و $\Delta<0$	$a<0$ و $\Delta=0$

جمله‌ی **مربعِ کامل شدنِ عبارت درجه‌ی دوم** ، یعنی در آن عبارت، Δ مساویِ صفر شده ...!

تست: **همه‌ی نقاط نمودار تابع $y=(m+1)x^2+2\sqrt{2}x+\frac{1}{4}$ بالای محور x هاست. چند جواب طبیعی و یک رقمی برای m وجود دارد؟**

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

پاسخ:
$y=(m+1)x^2+2\sqrt{2}x+\frac{1}{4} \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta=(2\sqrt{2})^2-4(m+1)(\frac{1}{4}) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta=7-m$

$\xrightarrow{\text{سهمی بالای محور xهاست}} \left\{\begin{matrix} 1\ \Delta<0 \Rightarrow 7-m<0 \Rightarrow m>7 \\ 2\ a>0 \Rightarrow m+1>0 \Rightarrow m>-1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} m>7 \xrightarrow{\text{m طبیعی و یک رقمی}} m=8,9 \xrightarrow{\text{تعداد}}$ دو تا

هرگاه نمودار تابع $y=(k-2)x^2-3x+2+k$ پایین محور x ها و بر آن مماس باشد، در این‌صورت چند مقدار برای k وجود دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

پاسخ:
$y=(k-2)x^2-3x+(2+k) \xrightarrow{\Delta \text{ رو حساب کن}} \Delta=(-3)^2-4\underbrace{(k-2)(k+2)}_{\text{مزدوج } k^2-4} \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta=-4k^2+25$

$\xrightarrow{\text{پایین محور xها و مماس بر آن}} \left\{\begin{matrix} 1\ \Delta=0 \Rightarrow -4k^2+25=0 \Rightarrow k^2=\frac{25}{4} \Rightarrow k=\pm\frac{5}{2} \\ 2\ a<0 \Rightarrow k-2<0 \Rightarrow k<2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} k=-\frac{5}{2} \xrightarrow{\text{تعداد جواب}}$ یکی

عبارت درجه‌ی دوم با علامتِ ثابت؛ یک تیر و دو نشان!

نتیجه‌ی بسـیار مهم و البته کنکوریِ جدول قبلی که درباره‌ی وضع سـهمی و محور xها گفتیم، این است که اگر بگویند **عبارت درجه‌ی دومی همواره مثبت یا همواره منفی بوده است**، خب انگار سهمیِ آن کاملاً بالا یا کاملاً پایینِ محور xها افتاده...!

این‌جوری هم ببین:

	$ax^۲+bx+c>۰$	$ax^۲+bx+c\geq ۰$	$ax^۲+bx+c<۰$	$ax^۲+bx+c\leq ۰$
شرط	$\Delta<۰$ و $a>۰$	$\Delta\leq ۰$ و $a>۰$	$\Delta<۰$ و $a<۰$	$\Delta\leq ۰$ و $a<۰$

تست: **به ازای کدام مقادیر m عبارت $(m-۱)x^۲+۶x+۵$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟**

۱) $m>۱$ ۲) $۱<m<\frac{۱۴}{۵}$ ۳) $m>\frac{۱۴}{۵}$ ۴) $m\geq\frac{۱۴}{۵}$

پاسخ:

$$(m-۱)x^۲+۶x+۵ \xrightarrow{\Delta\text{رو حساب کن}} \Delta=(۶)^۲-۴(m-۱)(۵) \xrightarrow{\text{ساده کن}} \Delta=۵۶-۲۰m$$

$$\xrightarrow{\text{عبارت همواره مثبت}} \text{سهمی بالای محور xها}\begin{cases} ۱\ \ \Delta<۰ \Rightarrow ۵۶-۲۰m<۰ \Rightarrow m>\frac{۱۴}{۵} \\ ۲\ \ a>۰ \Rightarrow m-۱>۰ \Rightarrow m>۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} m>\frac{۱۴}{۵}$$

ویژگی محور تقارن سهمی

۱) محور تقارن سهمی همیشه از رأس سهمی می‌گذرد و موازی محور y هاست.

این‌جوری هم ببین: طولِ رأسِ سهمی، همیشه با مقدار داده‌شده برای محور تقارن سهمی مساوی است: **ببین:** $\underbrace{\boxed{x=۴}}_{\text{معادله‌ی محور تقارن}} \Rightarrow$ ۴ = طولِ رأس

۲) هر دو نقطه‌ای که روی سهمی بوده و عرضِ مساوی با هم داشته باشند، نسبت به محورِ تقارن سهمی قرینه‌اند. در این‌حالت برای پیدا کردن مقدار عددیِ محور تقارن، طول آن دو نقطه را میانگین بگیرید. **ببین:**

$$\underbrace{\boxed{A(-۳,۴),B(۵,۴)}}_{\text{دو نقطه با عرض مساوی روی سهمی}} \xrightarrow[\text{میانگین طول‌ها}]{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x=\frac{-۳+۵}{۲} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x=۱$$

تست: **دو نقطه‌ی $(-۳,\beta)$ و $(۱,\beta)$ روی نمودار سهمی با کمترین مقدار ۱ قرار دارند. اگر سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند. کدام نقطه روی این سهمی واقع است؟**

۱) $(-۳,۱۴)$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(-۳,۱۳)$

پاسخ: ابتدا معادله‌ی سهمی را در حالت کلی، $y=ax^۲+bx+c$ فرض می‌کنیم:

۱ $$\underbrace{\boxed{(۱,\beta)\ ,\ (-۳,\beta)}}_{\text{دو نقطه با عرض مساوی روی سهمی}} \xrightarrow[\text{میانگین طول‌ها رو بگیر}]{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x=\frac{۱+(-۳)}{۲} \xrightarrow{\text{ساده کن}} x=-۱ \xrightarrow{\text{محور تقارن از رأس می‌گذرد}} x_{\text{رأس}}=-۱$$

۲ $$y=ax^۲+bx+c \xrightarrow{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x=-\frac{b}{۲a} \xrightarrow[\text{طبق ۱}]{x=-۱} -\frac{b}{۲a}=-۱ \xrightarrow{\text{ساده کن}} b=۲a$$

۳ $$x_{\text{رأس}}=-۱ \xrightarrow{\text{در سهمی بذار}} a(-۱)^۲+b(-۱)+c \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{\text{مساوی ۱ بذار}} a-b+c=۱ \xrightarrow[\text{طبق ۲}]{b=۲a} -a+c=۱$$

۴ $$\text{سهمی محور yها را در ۳ قطع می‌کند} \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{x=۰\,,\,y=۳} c=۳ \xrightarrow[\text{طبق ۳}]{-a+c=۱} a=۲ \xrightarrow[\text{طبق ۲}]{b=۲a} b=۴$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} \text{معادله‌ی سهمی}: y=۲x^۲+۴x+۳ \xrightarrow[\text{گزینه‌ی «۳»}]{\text{امتحان گزینه‌ها}} ۳=۲(-۲)^۲+۴(-۲)+۳ \ \checkmark$$

تابع چاق و لاغر

تابعی را که ضابطه‌اش به‌صورت یک عبارت درجه‌ی اول، ضربدر یک عبارتِ درجه‌ی دوم باشد تابع چاق و لاغر می‌نامیم، مثل: $y=\underbrace{(۲x-۱)}_{\text{لاغر}}\underbrace{(x^۲+۵x-۴)}_{\text{چاق}}$

۱) اگر تست بگوید: «**تابع چاق و لاغر، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند**»، دلتای تابع درجه‌ی دوم را منفی کنید...

تست: **نمودار تابع $y=(x+۲)(x^۲-۲x+m)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مقادیر m به کدام صورت است؟**

۱) $۰<m<۱$ ۲) $m>-۱$ ۳) $-۲<m<-۱$ ۴) $m>۱$

پاسخ:

$$y=(x+۲)(x^۲-۲x+m) \xrightarrow{\Delta\text{ چاق رو حساب کن}} \Delta=(-۲)^۲-۴(۱)(m)=۴-۴m \xrightarrow[\Delta\text{ چاق}<۰]{\text{تابع فقط یک ریشه دارد}} ۴-۴m<۰ \xrightarrow{\text{حل کن}} m>۱$$

۲) اگر تست بگوید: «**تابع چاق و لاغر، بر محور x ها مماس است**»، در این‌صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است:

الف) دلتای عبارتِ درجه‌ی دوم صفر بوده است.

ب) ریشه‌ی عبارتِ درجه‌ی اول (همون لاغره) باید ریشه‌ی عبارت درجه‌ی دوم باشد.

تست: **نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۳}x-k)(x^۲+۲x-۳)$ بر محور x ها مماس است. در این‌صورت تفاضل مقادیر k کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: همان‌طور که می‌بینید در قسمت چاق، Δ نمی‌تواند صفر شود:

$$x^۲+۲x-۳ \xrightarrow{\text{Δ چاق رو حساب کن}} \Delta=۲^۲-۴(۱)(-۳)=۱۶$$

پس می‌ماند یک راه! ریشه‌ی عبارتِ لاغر باید در تابعِ چاق صدق کند تا نمودار تابع بر محور xها مماس شود:

$$\frac{۱}{۳}x-k=۰ \xrightarrow{\text{ریشه رو حساب کن}} \frac{۱}{۳}x=k \Rightarrow x=۳k \xrightarrow[x^۲+۲x-۳=۰]{\text{بذار توی تابع درجه‌ی دوم}} (۳k)^۲+۲(۳k)-۳=۰$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} ۹k^۲+۶k-۳=۰ \xrightarrow{\text{جمع ضرایب اول و سوم با دومی برابر است}} k=-۱\ ,\ k=\frac{۳}{۹} \xrightarrow{\text{تفاضل}} (\frac{۱}{۳})-(-۱)=\frac{۴}{۳}$$

ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

قسمتی شیرین و کنکوری! بیشتر دانش‌آموزان کار با S و P را دوست دارند و چه چیزی بهتر از این‌که این بخش سهم خوبی در کنکور هم داشته باشد...

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم: S و P

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$، با فرض $\Delta>۰$ و وجود دو ریشه به نام‌های α و β، داریم:

	نماد	برحسب ریشه‌ها	برحسب ضریب‌ها
مجموع دو ریشه	S	$\alpha+\beta$	$-\frac{b}{a}$
حاصل‌ضرب دو ریشه	P	$\alpha\beta$	$\frac{c}{a}$

تست: عدد $\frac{۵}{۳}$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $mx^۲-۶x-۴m-۱=۰$ است. حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{۳۵}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳۵}{۹}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

پاسخ:

$$x=\frac{۵}{۳} \xrightarrow[\text{ریشه در معادله صدق می‌کند}]{\text{بذار توی معادله}} m(\frac{۵}{۳})^۲-۶(\frac{۵}{۳})-۴m-۱=۰ \xrightarrow{\times ۹} ۲۵m-۹۰-۳۶m-۹=۰$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}} -۱۱m-۹۹=۰ \Rightarrow m=-۹ \xrightarrow{\text{بذار در معادله}} -۹x^۲-۶x+۳۵=۰ \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۳۵}{-۹}$$

رابطه‌ای بین ریشه‌ها در تست حضور دارد...

هر تستی که در آن «**رابطه‌ای مشخص، بین دوتا ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دو داده شده باشد**» حتماً با روش S و P حل می‌شود؛ برای این منظور بنویسید:

۱ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۲ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ۳ رابطه‌ای که تست بین دو ریشه داده است!

حالا با کمک سه رابطه‌ی بالا و جای‌گذاری، پارامترِ موجود در تست را پیدا کنید...

تست: در معادله‌ی $x^۲-۸x+m=۰$ یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ:

$$\underset{b=-۸,c=m,a=۱}{x^۲-۸x+m=۰} \Rightarrow \begin{cases} ۱\quad \alpha+\beta=-(\frac{-۸}{۱})=۸ \\ ۲\quad \alpha\beta=\frac{m}{۱}=m \end{cases}$$

۳ یکی از ریشه‌ها از نصف دیگری ۵ واحد بیشتر است $\Rightarrow \alpha=\frac{\beta}{۲}+۵ \xrightarrow[\alpha+\beta=۸]{\text{بذار توی ۱}} (\frac{\beta}{۲}+۵)+\beta=۸ \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{\beta}{۲}+\beta=۳$

$$\xrightarrow{\times ۲} \beta+۲\beta=۶ \Rightarrow ۳\beta=۶ \Rightarrow \beta=۲ \xrightarrow[\alpha+\beta=۸]{\text{بذار توی ۱}} \alpha+۲=۸ \Rightarrow \alpha=۶ \xrightarrow[\alpha\beta=m]{\text{بذار توی ۲}} ۶\times ۲=m \Rightarrow m=۱۲$$

کنترل Δ

در تستی که با S و P حل کرده‌اید و **برای پارامترِ موجود در سؤال، دو مقدار به‌دست آورده‌اید**، یادتان باشد برای هر کدام کنترل کنید که Δ مثبت می‌شود یا منفی؟! چنانچه به ازای پارامتری، $\Delta<۰$ شود آن مقدارِ پارامتر، قابل قبول نیست!

این‌جوری هم ببین: خودِ S و P به‌تنهایی، لزوماً وجود ریشه را برای معادله‌ی درجه‌ی دوم تضمین نمی‌کنند، **حتماً چکِ Δ لازم است...**

این‌طوری بدانید که **کنترلِ Δ همیشه لازم است، مگر این‌که $\frac{c}{a}<۰$ شود...**

تست: به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲$ معکوس یکدیگرند؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ:

$$mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲ \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} mx^۲ + ۳x + (m^۲ - ۲) = ۰ \xrightarrow{\text{S و P رو تشکیل بده}} \begin{cases} \boxed{۱}\ \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{۳}{m} \\ \boxed{۲}\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m^۲-۲}{m} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{\alpha=\frac{۱}{\beta}} \alpha\beta = ۱ \xrightarrow{\text{در } \boxed{۲} \text{ بذار}} ۱ = \frac{m^۲-۲}{m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} m^۲ - ۲ = m \xrightarrow{\text{مرتب کن}} m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{جمع ضرایب اولی و سومی با وسطی برابر است}]{\text{حل کن}} m = -۱, m = ۲ \xrightarrow{\text{در معادله جای‌گذاری کن}} \begin{cases} \xrightarrow{m=-۱} -x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \\ \xrightarrow{m=۲} ۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کنترل } \Delta} \begin{cases} \Delta = ۹ - ۴(-۱)(-۱) = ۵ \text{ ق ق} \\ \Delta = ۹ - ۴(۲)(۲) = -۷ \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow m = -۱$$

$\alpha = k\beta$

اگر تست گفت یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی، k برابرِ ریشه‌ی دیگر است، غیر از روش کلی که در قسمتِ قبل گفتیم، می‌توانید سریع قرار دهید: $\boxed{\frac{b^۲}{ac} = \frac{(k+۱)^۲}{k}}$ و پارامتر را پیدا کنید.

تست: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲ + mx + ۹ = ۰$ یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی معادله، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

پاسخ:

$$۲x^۲ + mx + ۹ = ۰ \xrightarrow[k=۲]{\text{یک ریشه k برابر دیگری}} \frac{b^۲}{ac} = \frac{(k+۱)^۲}{k} \Rightarrow \frac{m^۲}{۲\times۹} = \frac{(۲+۱)^۲}{۲} \Rightarrow \frac{m^۲}{۱۸} = \frac{۹}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} m^۲ = ۸۱ \Rightarrow m = \pm۹ \Rightarrow \begin{cases} m = -۹ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} ۲x^۲ - ۹x + ۹ = ۰ \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S = -\frac{b}{a} = -(\frac{-۹}{۲}) = ۴/۵ \\ m = ۹ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} ۲x^۲ + ۹x + ۹ = ۰ \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S = -\frac{b}{a} = -\frac{۹}{۲} = -۴/۵ \end{cases}$$

دومی در گزینه‌ها موجود نیست.

محاسبه‌ی رابطه‌های معروف بین ریشه‌ها برحسب S و P

در این مدل از تست‌ها، یک معادله‌ی درجه‌ی دو دارید که خب پارامتر هم ندارد و قرار است عبارتی را که برحسب ریشه‌ها داده شده است، حساب کنید. مثل مجموع مکعبات ریشه‌ها یا هر چیز دیگری! طبق جدول زیر موارد مهم را به خاطر بسپارید:

مدل اول) معروف‌ها:

	به فارسی	برحسب ریشه‌ها	حاصل عبارت خواسته‌شده برحسب S و P
۱	مجموع مربعات ریشه‌ها	$\alpha^۲+\beta^۲$	$S^۲ - ۲P$
۲	مجموع مکعبات ریشه‌ها	$\alpha^۳+\beta^۳$	$S^۳ - ۳SP$
۳	قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها	$\lvert\alpha-\beta\rvert$	$\sqrt{S^۲-۴P}$ یا $\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$
۴	مجموع جذرهای ریشه‌های مثبت	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$

اینم دلیلش: واسه اثبات حالت‌هایی شبیه به $\boxed{۳}$ و $\boxed{۴}$، عبارت را مساوی k گرفته و به توان ۲ برسانید و بعد حسابشون کنید، **ببین:**

$$\boxed{۴}\ k = \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} k^۲ = \alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta} = S+۲\sqrt{P} \xrightarrow[k>۰]{\text{جذر بگیر}} k = \sqrt{S+۲\sqrt{P}} \xrightarrow[\alpha,\beta>۰]{\text{نتیجه}} \boxed{\lvert\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\rvert = \sqrt{S-۲\sqrt{P}}}$$

تست: در معادله‌ی $x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$ ریشه‌ها را α و β نامیده‌ایم. حاصل تقسیم $\alpha^۲+\beta^۲$ به $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵۶\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $۲۸\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۲۸\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۵۶\sqrt{۳}$

پاسخ:

$$x^2-8x+4=0 \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=\alpha+\beta=8 \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=\alpha\beta=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2=S^2-2P=8^2-2(4)=56 \\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=\sqrt{8+2\sqrt{4}}=\sqrt{8+4}=\sqrt{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\frac{56}{\sqrt{12}}=\frac{56}{2\sqrt{3}}\xrightarrow{\text{گویا کن}}\frac{56\times\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{28\sqrt{3}}{3}$$

در معادله‌ی $x^2+3x-1=0$ حاصل $\alpha^3+\beta^3$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۳۶ ۲) ۳۶- ۳) ۲۷ ۴) ۲۷-

پاسخ:

$$x^2+3x-1=0 \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=-3 \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فرمول}} \alpha^3+\beta^3=S^3-3SP=(-3)^3-3(-3)(-1)=-36$$

یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(m+3)x+3m=0$ از دیگری ۵ واحد بیشتر است. m کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۸- ۴) ۶

پاسخ:

$$\alpha=5+\beta\Rightarrow\alpha-\beta=5\xrightarrow{\text{رابطه‌ها}}\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=5\xrightarrow{\text{توان ۲ برسون}}\Delta=25a^2\Rightarrow\underbrace{(m+3)^2-4(1)(3m)}_{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم }\Delta}=25(1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد رو ساده کن}}m^2-6m+9=25\Rightarrow m^2-6m-16=0\xrightarrow{\text{حل کن}}m=8,-2$$

مدل دوم) غیرمعروف‌ها:

اگر حاصل عبارتی را که برحسب ریشه‌ها نوشته شده، خواستند و جزء جدول مدل اول نبود، ابتدا عبارت را با عملیات جبری مانند مخرج مشترک‌گیری، فاکتورگیری و اتحاد ساده می‌کنیم؛ با این هدف که در آن‌ها فقط $\alpha\beta$ و $\alpha+\beta$ یا عبارت‌های معروفی که در جدول گفتیم دیده شود، بعدش عبارت را برحسب S و P نوشته و حاصل آن را از روی معادله پیدا می‌کنیم.

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $4x^2-12x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ:

۱ $$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}}\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}\xrightarrow[\text{مخرج جذر P است}]{\text{صورت جزء جدول است}}\frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}$$

۲ $$4x^2-12x+1=0 \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=-(\frac{-12}{4})=3 \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=\frac{1}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در ۱}}\frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3+2(\frac{1}{2})}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3+1}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

در معادله‌ی $2x^2+7x-20=0$ با ریشه‌های α و β، حاصل $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ کدام است؟

۱) ۳۵- ۲) ۴۵ ۳) ۳۵ ۴) ۴۵-

پاسخ:

۱ $$2x^2+7x-20=0\Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-7}{2},\ P=\frac{c}{a}=-\frac{20}{2}=-10$$

۲ $$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2\xrightarrow{\text{از }\alpha\beta\text{ فاکتور بگیر}}\alpha\beta(\alpha+\beta)\xrightarrow{\text{برحسب S و P بنویس}}PS\xrightarrow{\text{طبق ۱ جای‌گذاری کن}}(-10)(-\frac{7}{2})=35$$

مدل سوم) رابطه‌ی غیر متقارن بین ریشه‌ها:

در این مدل، α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ هستند و رابطه‌ای غیر متقارن بین α و β خواسته شده است. مثل $\alpha^4+5\beta=?$. خب در این حالت کافی است بدانید α و β (هردو) در معادله صدق می‌کنند، یعنی باید اول کار (مثلاً) با گذاشتن α در معادله‌ی درجه دوم رابطه‌ای برای α به دست بیاورید تا آن را در عبارت خواسته شده بگذارید و بعد به رابطه‌های معروف برسید...

تست: α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-2x-5=0$ هستند. حاصل $\alpha^2+2\beta$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ:

$$\alpha\text{ ریشه‌ی معادله است}\xrightarrow{\text{در معادله بذار}}\alpha^2-2\alpha-5=0\Rightarrow\alpha^2=2\alpha+5\xrightarrow[\text{جای‌گذاری}]{\alpha^2+2\beta=?}(2\alpha+5)+2\beta=?$$

$$\Rightarrow 2(\alpha+\beta)+5=?\Rightarrow 2S+5=?\xrightarrow{S=-\frac{b}{a}=2}2S+5=2(2)+5=9$$

بحث درباره‌ی علامت ریشه‌ها فقط با کمکِ S و P

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی $\Delta > 0$ باشد و در واقع معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، می‌توانید بدون آن‌که معادله را حل کرده و ریشه‌هایش را پیدا کنید، فقط با کمک علامتِ S و P درباره‌ی علامتِ ریشه‌ها اظهار نظر کنید.

این‌جوری هم ببین: یادت باشه اگه علامت ریشه‌ها رو خواستن، به یاد علامت S و P بیفتی...

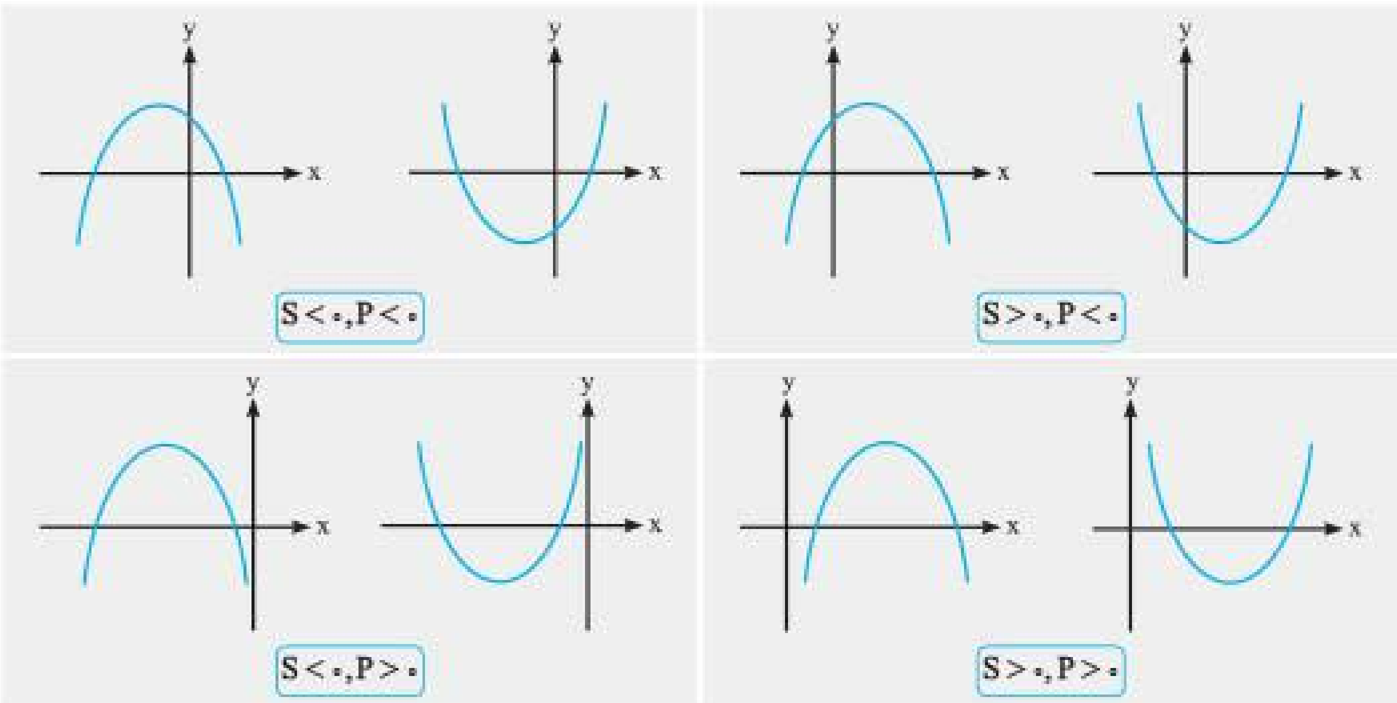
وضعیت ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$:

$\Delta > 0$	$P > 0$	$P < 0$
$S > 0$	هر دو ریشه مثبت هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و ریشه‌ی مثبت از قدر مطلق ریشه‌ی منفی، بزرگ‌تر است؛ مثل ۴ و ۲−.
$S < 0$	هر دو ریشه منفی هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت، بزرگ‌تر است؛ مثل ۵− و ۲.

(۱) اگر $S = 0$ و $P \neq 0$ باشد، یعنی معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد؛ مثل ۳ و ۳−. در این‌حالت حتماً P منفی است.

(۲) اگر $P = 0$ باشد، یعنی معادله حتماً یک ریشه‌ی صفر دارد.

این‌جوری هم ببین: چهار حالتی را که در جدول قبل آوردیم، به‌صورت نموداری هم ببینید: برای $y = ax^2 + bx + c$ و با فرضِ $\Delta > 0$، داریم:



تست: کدام‌یک از معادله‌های زیر دارای دو ریشه‌ی مثبت است؟

۱) $x^2 - 4x - 2 = 0$ ۲) $x^2 - 2x + 4 = 0$ ۳) $x^2 + 8x + 1 = 0$ ۴) $x^2 - 4x + 2 = 0$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: $x^2 - 4x - 2 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = -2 \Rightarrow$ علامت ریشه‌ها مختلف است. ✗

گزینه‌ی «۲»: $x^2 - 2x + 4 = 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac} \Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow$ اصلا ریشه ندارد. ✗

گزینه‌ی «۳»: $x^2 + 8x + 1 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = 1 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت اند $\xrightarrow{-\frac{b}{a}} S = -8 \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند. ✗

اما در گزینه‌ی «۴»، $P = 2$ و $S = 4$ است که یعنی وجودِ دو ریشه‌ی مثبت؛ در ضمنِ Δ آن هم مثبت است...

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

برای تسلط به این بخش، پیشنهاد می‌کنیم حتماً ایستگاه ۳ را خوب خوانده باشید و تست‌های آن را زده باشید. چون می‌خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دوم بنویسیم...

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با داشتنِ S و P آن

اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی را داشته باشید، که آن‌ها را به‌ترتیب S و P می‌نامیم، آن‌وقت معادله‌ی درجه‌ی دوم موردنظر می‌شود: $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$

این‌جوری هم ببین: اگر دو تا عدد حقیقیِ α و β را بخواهید به‌طوری که جمع آن‌ها مساوی عدد معلومِ S و ضربشان هم P باشد، برای پیدا کردن این دو عدد باید معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ را حل کنید...

تست: ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر، $۲+\sqrt{۴-a}$ و $۲-\sqrt{۴-a}$ هستند؟

۱) $x^۲+۴x-a=۰$ ۲) $x^۲+ax+۴=۰$ ۳) $x^۲-۴x+a=۰$ ۴) $x^۲+ax-۴=۰$

پاسخ:

$$\alpha=۲+\sqrt{۴-a}\ ,\ \beta=۲-\sqrt{۴-a}\ \begin{cases}\xrightarrow{\text{جمع کن}} S=(۲+\sqrt{۴-a})+(۲-\sqrt{۴-a})=۴\\ \xrightarrow{\text{ضرب کن}} P=(۲+\sqrt{۴-a})\times(۲-\sqrt{۴-a})\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}P=۴-(۴-a)=a\end{cases}$$

پس معادله‌ی درجه‌ی دوم موردنظر برابر است با: $x^۲-Sx+P=۰\xrightarrow[P=a]{S=۴}x^۲-۴x+a=۰$

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با کمک معادله‌ای دیگر؛ دو معادله‌ی درجه‌ی دوم در یک تست!

در این مدل تست‌ها، دوتا معادله‌ی درجه‌ی دوم بهتون میدن! **ریشه‌های معادله‌ی اولی α و β فرض می‌شوند و ریشه‌های معادله‌ی دوم هم برحسب α و β داده می‌شوند؛** خب شما S و P معادله‌ی اول را حساب می‌کنید، بعدش مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های دومی را تشکیل می‌دهید و S' و P' می‌نامید. حالا باید S' و P' را با ساده کردن و عملیات جبری برحسب S و P ساخته و حساب کنید، خب حالا S' و P' هم معلوم شده، دیگه برو واسه خودت!

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۳x=۱$ باشند، به ازای کدام مقدار k، مجموعه جواب‌های معادله‌ی $۸x^۲+kx-۱=۰$ به‌صورت $\{\alpha^۲\beta,\alpha\beta^۲\}$ است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ:

$$①\ ۲x^۲-۳x=۱\xrightarrow{\text{مرتب کن}}۲x^۲-۳x-۱=۰\begin{cases}\xrightarrow{-\frac{b}{a}}S=\frac{۳}{۲}=\boxed{\alpha+\beta}\\ \xrightarrow{\frac{c}{a}}P=-\frac{۱}{۲}=\boxed{\alpha\beta}\end{cases}$$

$$②\ ۸x^۲+kx-۱=۰\begin{cases}\xrightarrow{-\frac{b}{a}}S'=-\frac{k}{۸}=\boxed{\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲}\\ \xrightarrow{\frac{c}{a}}P'=-\frac{۱}{۸}=\boxed{(\alpha^۲\beta)(\alpha\beta^۲)}\end{cases}$$

حالا ساده می‌کنیم:

$$\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲\xrightarrow{\text{فاکتورگیر}}\alpha\beta(\alpha+\beta)\xrightarrow{\text{برحسب S و P جای‌گذاری کن}}PS\xrightarrow{\text{طبق ①}}(-\frac{۱}{۲})(\frac{۳}{۲})=-\frac{۳}{۴}\xrightarrow[-\frac{k}{۸}=\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲]{\text{طبق ②}}-\frac{k}{۸}=-\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\times(-۸)}k=۶$$

گاهی تست، ریشه‌های معادله‌ی اولی را به زبان ریاضی برایتان α و β اعلام نمی‌کند! بلکه رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی دومی و معادله‌ی اول را به‌صورت فارسی به شما می‌دهد، باز هم مراحل شما فرقی با قبل ندارد. ریشه‌های اولی را α و β بگیرید و از روی جملات فارسی داده‌شده، ریشه‌های دومی را برحسب α و β بنویسید و بعد هم دقیقاً مثل قبل عمل کنید...

تست: ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲-۳x-۱=۰$، یک واحد کمترند؟ (کنکور ۹۴)

۱) $x^۲-۳x+۱=۰$ ۲) $x^۲+۳x+۱=۰$ ۳) $x^۲-۵x+۲=۰$ ۴) $x^۲+۵x+۲=۰$

پاسخ:

$$①\ ۲x^۲-۳x-۱=۰\begin{cases}\xrightarrow{-\frac{b}{a}}S=\frac{۳}{۲}\\ \xrightarrow{\frac{c}{a}}P=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{فرم ریشه‌های دومی رو بنویس}}\underbrace{\frac{۱}{\alpha}-۱,\frac{۱}{\beta}-۱}_{\text{از معکوس، یک واحد کمتر}}$$

$$②\ \text{معادله‌ی دوم:}\begin{cases}S'=(\frac{۱}{\alpha}-۱)+(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}-۲=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-۲\Rightarrow S'=\frac{S}{P}-۲\\ P'=(\frac{۱}{\alpha}-۱)\times(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱}{P}-\frac{S}{P}+۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{عددهای ① رو جای‌گذاری کن}}\begin{cases}S'=\frac{S}{P}-۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}-۲=-۵\\ P'=\frac{۱}{P}-\frac{S}{P}+۱=\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}}-\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}+۱=-۲+۳+۱=۲\end{cases}\xrightarrow[x^۲-S'x+P'=۰]{\text{معادله‌ی دوم رو بنویس}}x^۲+۵x+۲=۰$$

ایستگاه ۵: کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دوم

در این بخش به سؤالاتی می‌پردازیم که شاید در ظاهر معادله‌ی درجه‌ی دوم نباشندا اما با تغییر متغیر یا تبدیل مَدلِ ریاضی آن، درجه‌ی دوم می‌شوند. تست‌های ماکزیمم و مینیمم کردن در این بخش، خیلی مهم هستند...

معادلاتی که با تغییر متغیر به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود

در بعضی معادله‌ها، که خب نه درجه‌ی اول هستند و نه درجه‌ی دوم، **عبارتی را می‌بینیم که یک بار با توان ۱ و یک بار هم با توان ۲ حضور دارد.** در این حالت کافی است اسمِ آن عبارت را متغیر جدیدی مثل t، درنظر بگیریم تا عبارت درجه‌ی دومی برحسب t دربیاید و بعد آن را حل کنیم. در آخر که مقدار t به‌دست آمد، آن را مساویِ عبارت خودش گذاشته و دوباره معادله‌ی دیگری را حل می‌کنیم تا x به‌دست بیاید.

تست: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2

۳) 2 ۴) 4

پاسخ:

$$x^2+x=t \xrightarrow{\text{بذار در معادله}} t^2-18t+72=0 \xrightarrow{\text{تجزیه‌کن}} (t-12)(t-6)=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها رو پیداکن}} t=12,\ t=6$$

$$\xrightarrow[\text{t بذار}]{\text{برابر مقدار اولیه‌ی}} \begin{cases} x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \\ x^2+x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل‌کن}} \begin{cases} (x+4)(x-3)=0 \\ (x-2)(x+3)=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{پیداکن}]{\text{ریشه‌ها رو}} x=-4,3,2,-3 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{جمع}} -2$$

اگر در معادله‌ای، **یکی از جمله‌ها مجذور دیگری بود**، روش حلِ آن تغییر متغیر و استفاده از معادله‌ی درجه‌ی دو است: **ببین:**

الف) $x^6+3x^3-4=0 \xrightarrow{x^3=t} t^2+3t-4=0$

ب) $x-5\sqrt{x}+4=0 \xrightarrow[x,t\geq 0]{\sqrt{x}=t} t^2-5t+4=0$

تست: معادله‌ی $x^4-2\sqrt{3}x^2-6=0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) دو

۳) چهار ۴) یک

پاسخ:

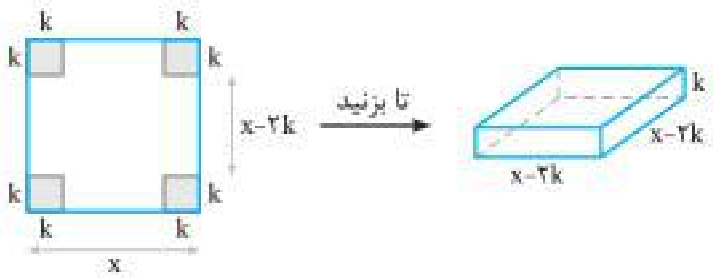
$$x^2=t \xrightarrow{\text{درمعادله‌بذار}} t^2-2\sqrt{3}t-6=0 \xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{\text{را پیداکن}\ \Delta} \Delta=(-2\sqrt{3})^2-4(1)(-6)=36$$

$$\xrightarrow[\text{پیداکن}]{\text{ریشه‌ها رو}} t=\frac{2\sqrt{3}\pm 6}{2}=\sqrt{3}+3 \text{ و } \sqrt{3}-3 \xrightarrow{x^2=t} \left.\begin{cases} x^2=3+\sqrt{3} \xrightarrow{\text{جذربگیر}} x=\pm\sqrt{3+\sqrt{3}} \\ x^2=\underbrace{\sqrt{3}-3}_{\text{منفی‌است}} \xrightarrow{x^2\geq 0} \text{امکان ندارد.} \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{تعداد ریشه}} \text{۲ تا}$$

مسئله‌های کاربردی معروف از معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱) تعداد بازی‌ها	در یک دوره بازی که هر تیم با هر کدام از تیم‌های دیگر فقط یک بازی انجام می‌دهد، با فرض داشتنِ n تیم، تعداد بازی‌ها یک عبارتِ درجه‌ی دوم است.	$\frac{n(n-1)}{2}=$ تعداد بازی‌ها
۲) ساختن قوطی	اگر چهار مربع کوچک به ضلع k را از گوشه‌های مربعی برش بزنیم و با تا زدن صفحه یک جعبه به حجم V بسازیم...	$\sqrt{\frac{V}{k}}+2k=$ ضلع مربع اصلی
۳) حصارکشی	با یک رشته سیم به طول ℓ، می‌خواهیم مستطیلی به مساحت S بسازیم...	$\frac{\ell+\sqrt{\ell^2-16S}}{4}=$ یکی از اضلاع مستطیل

اینم شکل قوطی:



تست: می‌خواهیم با بریدن چهار مربع به ضلع ۳ در گوشه‌های یک صفحه‌ی مربعی‌شکل و بعد تا کردنِ آن، یک ظرف به حجم ۷۵ بسازیم. ضلع مربع را باید چند در نظر بگیریم؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

پاسخ:

$$x=\sqrt{\frac{V}{k}}+۲k\xrightarrow{V=۷۵,k=۳}x=\sqrt{\frac{۷۵}{۳}}+۲(۳)=\sqrt{۲۵}+۶=۵+۶=۱۱$$

با یک طناب ۱۵ متری می‌خواهیم دورتادور مستطیلی به مساحت ۹ را کاملاً بپوشانیم. ضلع کوچک‌تر مستطیل کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ:

$$a=\frac{\ell+\sqrt{\ell^۲-۱۶S}}{۴}\xrightarrow{\ell=۱۵,S=۹}a=\frac{۱۵+\sqrt{۲۲۵-۱۴۴}}{۴}=\frac{۱۵+\sqrt{۸۱}}{۴}=\frac{۱۵+۹}{۴}=۶$$

$$\xrightarrow[S=ab=۹]{\text{ضلع دیگر مستطیل رو پیدا کن}}۶\times b=۹\Rightarrow b=\frac{۹}{۶}\xrightarrow{\text{ساده‌کن}}b=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

حل مسائل ماکزیمم و مینیمم به کمک معادله‌ی درجه‌ی دوم

غیر از چند مسئله‌ی معروفی که در کتاب درسی اشاره شده و در بالا به آن‌ها پرداختیم، می‌خواهیم به یک مَدل از تست‌ها توجه کنیم که دسته‌ی متنوعی را هم شامل می‌شوند: فرم این تست‌ها این‌طوری است که **در ظاهر خبری از عبارت درجه‌ی دوم، ریشه و... نیست! صورتِ تست یک مسئله‌ی ریاضی است** که با یک سری توضیحات، **در نهایت خواسته که یک چیزی ماکزیمم یا مینیمم شود.** شاخصه‌ی اصلی تست‌هایی که چنین فُرمی دارند و با کمکِ تابع درجه‌ی دوم حل می‌شوند، این است که **دو تا متغیر در تست حضور دارد.** (معمولاً مثبت‌اند، چون در سؤالات کاربردی و عملی حضور داریم...!)

اما روشِ برخوردِ ما با این تست‌ها این‌طوری است:

۱) **از رابطه‌ای که بین دو تا متغیر داده شده است، یکی را برحسب دیگری پیدا می‌کنیم؛** مثلاً m را برحسب n. **ببین:** $m+۲n=۴\Rightarrow m=۴-۲n$

۲) حالا عبارتی را که قرار است ماکزیمم یا مینیمم شود می‌نویسیم و بعد **متغیری را که در مرحله‌ی قبل بر حسب دیگری پیدا کرده بودیم، در این رابطه جای‌گذاری کرده و ساده می‌کنیم.**

۳) **خب الان عبارتی که در مرحله‌ی ۲ پیدا کرده‌اید، یک عبارت درجه‌ی دوم است برحسب یک متغیر.** جالب است بدانید اگر تست خواسته باشد که عبارت ماکزیمم شود، به تابع درجه‌ی دومی با a منفی خواهید رسید و چنانچه بخواهد که مینیمم شود، حتماً در تابعِ درجه‌ی دومِ حاصل، a مثبت درمی‌آید: منظورمان از a، ضریبِ $x^۲$ است...!

می‌دانید برای آن‌که عبارتِ $ax^۲+bx+c$ به ماکزیمم یا مینیمم خود برسد **باید x مساویِ $-\frac{b}{۲a}$ شود** و مقدارِ ماکزیمم یا مینیمم هم، $-\frac{\Delta}{۴a}$ است.

تست: برای دو عدد مثبت x و y می‌دانیم: $۳x+۲y=۲۴$. اگر xy بیشترین مقدار ممکن باشد، مقدار $y-x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

$$۳x+۲y=۲۴\xrightarrow{\text{y را پیدا کن}}y=\frac{۲۴-۳x}{۲}\xrightarrow{\text{دررابطه‌بذار}}xy=x(\frac{۲۴-۳x}{۲})\xrightarrow{\text{کسررا تفکیک‌کن}}x(۱۲-\frac{۳}{۲}x)$$

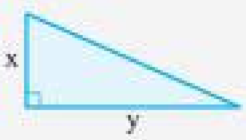
$$\xrightarrow{\text{ضرب‌کن}}۱۲x-\frac{۳}{۲}x^۲\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}}-\frac{۳}{۲}x^۲+۱۲x\xrightarrow{\text{ماکزیمم شود}}x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۲}{۲(-\frac{۳}{۲})}=-\frac{۱۲}{-۳}=۴$$

$$\xrightarrow{y=\frac{۲۴-۳x}{۲}}y=\frac{۲۴-۳(۴)}{۲}=\frac{۲۴-۱۲}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶\Rightarrow y-x=۶-۴=۲$$

مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که مجموع دو ضلع قائمه‌ی آن ۱۶ است، بیشترین مقدار خود را دارد. این مساحت چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

پاسخ:



$$x+y=۱۶\xrightarrow{\text{y را برحسب x بنویس}}y=۱۶-x\xrightarrow{S=\frac{۱}{۲}xy}S=\frac{۱}{۲}x(۱۶-x)\xrightarrow{\text{ضرب‌کن}}۸x-\frac{۱}{۲}x^۲\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}}S=-\frac{۱}{۲}x^۲+۸x$$

$$\xrightarrow{\text{S ماکزیمم‌شود}}\text{بیشترین‌مقدار }S=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۸^۲-۴(-\frac{۱}{۲})(۰)}{۴(-\frac{۱}{۲})}=-\frac{۶۴}{(-۲)}=۳۲$$

فصل در یک نگاه

روش‌های حلِ معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$

- **تجزیه:** وقتی ضریب x^2، مساوی ۱ بوده و ریشه‌ها صحیح باشند: $x^2+mx+n=0 \Rightarrow (x+\square)(x+\square)=0$ (جمعشان m، ضربشان n)
- **مربع کامل:**
  - عددی که می‌توانیم اضافه کنیم: $\boxed{\frac{b^2}{4a^2}}$
  - عددی که در سمت راست از آن جذر می‌گیریم: $\boxed{\frac{\Delta}{4a^2}}$
- **روش Δ:** $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$
  - **ریشه‌ها**
    - $\Delta>0$: $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$
    - $\Delta=0$: $\boxed{x=\frac{-b}{2a}}$
  - **تعداد ریشه‌ها**
    - $\Delta>0$: دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.
    - $\Delta=0$: یک ریشه‌ی مضاعف دارد.
    - $\Delta<0$: ریشه‌ی حقیقی ندارد.
- **حالت‌های خاص**
  - **جمع ضرایب، مساویِ صفر بشود** $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{a+b+c=0 \to 1 \text{ و } \frac{c}{a}}$
  - **ضریب x^2 + عدد ثابت = ضریب x** $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{a+c=b \to -1 \text{ و } -\frac{c}{a}}$
  - **عدد ثابت ندارد، فاکتور بگیر:** $ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{0 \text{ و } -\frac{b}{a}}$

سهمی $y=ax^2+bx+c$

- **مختصاتِ رأس:** $x=-\frac{b}{2a}$ و $y=-\frac{\Delta}{4a}$ یا به عبارتی $\boxed{S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})}$
- **تلاقی با محور x ها**
  - $\Delta>0$ ← در دو نقطه محور را قطع می‌کند.
  - $\Delta=0$ (یک نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0$ ← مماس است و بالای محور
    - $a<0$ ← مماس است و پایین محور
  - $\Delta<0$ (فاقد نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0$ ← قطع نمی‌کند: همواره بالای محور
    - $a<0$ ← قطع نمی‌کند: همواره پایین محور
- **علامتِ a**
  - $a>0$ ← دهانه‌ی سهمی رو به بالا است: مینیمم دارد.
  - $a<0$ ← دهانه‌ی سهمی رو به پایین است: ماکزیمم دارد.
- **محور تقارن: معادله:** $\boxed{x=-\frac{b}{2a}}$ $\xrightarrow{\text{ویژگی محور تقارن}}$ خط عمودی است و از رأس سهمی می‌گذرد؛ هر سهمی فقط یک محور تقارن دارد!
- **مماس برخطِ $y=mx+h$:** قرار دهید: $ax^2+bx+c=mx+h$ و معادله‌ی حاصل را ساده کرده و Δی آن را برابرِ صفر بگذارید.
- **تلاقی با محور y ها:** مختصات نقطه‌ی تلاقی: $(0,c)$
- **نوشتن معادله‌ی سهمی**
  - رأس سهمی نقطه‌ی $S(h,k)$ داده شده است $\xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}}$ $\boxed{y=a(x-h)^2+k}$
  - صفرهای سهمی x_1 و x_2 داده شده‌اند $\xrightarrow{\text{معادله‌ی سهمی}}$ $\boxed{y=a(x-x_1)(x-x_2)}$

روابط بین ریشه‌ها

- **S و P**
  - **مقدار و مفهوم**
    - $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
    - $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$ $\xrightarrow{\text{اگر منفی باشد}}$ حتماً معادله، دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.
  - **فهمیدن علامت ریشه‌ها**
    - $P>0$ ← دو ریشه‌ی هم‌علامت دارد
      - $S>0$ ← ریشه‌ها مثبت‌اند.
      - $S<0$ ← ریشه‌ها منفی‌اند.
    - $P<0$ ← حتماً دو ریشه‌ی غیر هم‌علامت دارد.
  - **نوشتنِ معادله با داشتنِ S و P:** $x^2-Sx+P=0$
- **قرار است رابطه‌ای بین ریشه‌ها پیدا کنی**
  - **رابطه‌های معروف**
    - $\boxed{\alpha^2+\beta^2=S^2-2P}$
    - $\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP$
    - $|\alpha-\beta|=\sqrt{S^2-4P}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
    - $\boxed{|\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}|=\sqrt{S\pm2\sqrt{P}}}$ با شرط $\alpha,\beta>0$
  - **رابطه‌های غیر معروف:** عبارت داده‌شده را با مخرج مشترک‌گیری و... ساده کن تا به عبارت‌های معروف برسد...
- **رابطه‌ای بین ریشه‌ها داده شده است**
  - **حالت کلی:** S و P را بر حسبِ α و β بنویس و مقدارشـــون رو هم پیدا کن، بعد هم رابطه‌ی داده‌شده رو برحسب α و β بنویس، حالا همه‌ی این‌ها رو با هم دستگاه کن...
  - **حالت خاص:** یکی از ریشه‌ها k برابر دیگری است ← $\boxed{\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}}$
- **اخطار جدی** ← در همه‌ی تست‌هایِ S و P، بعد از پیدا کردن جواب، یادتان باشد Δ را کنترل کنید! اگر به ازای پارامتری، $\Delta<0$ شود یعنی ریشه نداشته‌اید و مقادیر به‌دست آمده برای S و P غلط است!

معادله‌های ساده

- **درجه‌ی اول: فرم کلی:** $a\neq0,\ ax+b=0$ $\xrightarrow{\text{جواب معادله}}$ $x=-\frac{b}{a}$
- $x^2=k$
  - $k>0$ ← دو ریشه‌ی حقیقی دارد: $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{k}}$ ؛ **ببین:** $x^2=4$، نتیجه می‌دهد $x=\pm2$.
  - $k=0$ ← یک ریشه‌ی مضاعفِ صفر دارد.
  - $k<0$ ← ریشه ندارد: **ببین:** $x^2=-3$
  - **حالت کلی‌تر** ← اگر $\boxed{u^2=k}$ و u عبارتی برحسبِ x باشد، نتیجه بگیرید $|u|=\sqrt{k}$ و بعد هم $\boxed{u=\pm\sqrt{k}}$. $(k>0)$
- **جمعِ چندجمله‌ی غیر منفی، مساوی صفر شده است** ← هر کدام را تک تک، مساوی صفر بذار.

  چندجمله‌ای به توان زوج و رادیکال فرجه‌ی زوج و قدرمطلق، عبارت‌های غیر منفی هستند: $|\ \ |$ ، $\sqrt[\text{زوج}]{\ \ }$ ، $(\ \ )^{\text{زوج}}$
- **که با تغییر متغیر حل می‌شوند**
  - **حالت کلی:** یک عبارت و مجذور آن در معادله دیده می‌شود ← آن عبارت را u بگیر.
  - **حالت‌های خاص**
    - $\boxed{ax^{2n}+bx^n+c=0}$ ← $\boxed{x^n=u}$ بگیر ← $au^2+bu+c=0$
    - $\boxed{ax+b\sqrt{x}+c=0}$ ← $\boxed{\sqrt{x}=u}$ بگیر ← $au^2+bu+c=0$

فالِ متولد اردیبهشت

ریاضی را دوست داری ولی برای رسیدن به آن منتظر یک اتفاق هستی...

برای دوران مرور و جمع‌بندی، فقط تست‌های با شماره‌ی مشکی...

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵

ایستگاه ۱: معادلات درجه‌ی اول و دوم و روش‌های حل این معادلات

آموزش +45 ٪

۴۱۶. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(3t-2)^2=4$ چقدر است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۴۱۷. ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+7x=0$ چند واحد با یکدیگر اختلاف دارند؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{6}{7}$ ۴) $\frac{7}{6}$

۴۱۸. اگر عدد p ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2+3x-1=0$ باشد، مقدار $2p^2+3p+4$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۱۹. کدام عبارت قابل تجزیه به حاصل‌ضرب دو عامل درجه‌ی اول نیست؟ (کتاب درسی)

۱) $x^2-3x-10$ ۲) $4x^2-10x+8$ ۳) $x^2-11x+10$ ۴) $4x^2+3x-1$

۴۲۰. برای حل معادله‌ی $x^2+2x=24$ به روش مربع کامل، چه عددی به طرفین معادله اضافه کنیم تا سمت چپ معادله، مربع کامل شود؟ (کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۱

۴۲۱. ریشه‌های معادله‌ی $\frac{t^2}{3}-\frac{t}{2}-\frac{3}{2}=0$ کدام‌اند؟ (کتاب درسی)

۱) ۳ و $\frac{-3}{2}$ ۲) -3 و $\frac{-3}{2}$ ۳) -3 و $\frac{3}{2}$ ۴) ۳ و $\frac{3}{2}$

۴۲۲. در معادله‌ی $(3m+1)x^2-5x+2-5m=0$ یکی از ریشه‌ها -1 است. حاصل جمع ریشه‌ی دیگر معادله با m کدام است؟

۱) $\frac{18}{13}$ ۲) $\frac{17}{13}$ ۳) $\frac{70}{13}$ ۴) $\frac{71}{13}$

۴۲۳. معادله‌ی $x(2x-5)=a$ دو ریشه‌ی مساوی دارد. این ریشه کدام است؟

۱) $\frac{-5}{2}$ ۲) $\frac{-5}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴۲۴. اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر ۴ سال دیگر حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن برادر بزرگ‌تر کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۴۲۵. مجموع مربعات دو عدد طبیعی فرد متوالی، ۲۹۰ است. حاصل‌ضرب این دو عدد چقدر است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۹۵ ۲) ۹۹ ۳) ۱۴۳ ۴) ۲۵۵

۴۲۶. معادله‌ی درجه‌ی دوم $mx^2+mx+1=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. حدود m کدام است؟

۱) $m<0$ ۲) $0<m<4$ ۳) $m>0$ ۴) $m<4$

۴۲۷. معادله‌ی $ax^2+x+3=0$:

۱) به ازای $a=\frac{1}{8}$، ریشه‌ی مضاعف دارد.

۲) به ازای $a=\frac{1}{12}$، دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد.

۳) به ازای $a=\frac{1}{6}$، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۴) به ازای هر عدد منفی a، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تثبیت +70 ٪

۴۲۸. اگر $x=\alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ باشد، مقدار عبارت $\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2+\alpha+2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

۴۲۹. معادله‌ی $b^2+\sqrt{2}b-4=0$ را به روش تجزیه به‌صورت $(b+s)(b-r)=0$ تبدیل کرده و حل کرده‌ایم. مقدار $\frac{r}{s}$ کدام است؟ $(r, s>0)$ (کتاب درسی)

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۳۰. برای حل معادله‌ی $S^2-3S+3=0$ به روش مربع کامل به جایی می‌رسیم که باید از عددی جذر بگیریم. آن عدد کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{21}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{-3}{4}$ ۴) $\frac{-21}{4}$

۴۳۱. کوچک‌ترین عدد صحیح m که به ازای آن معادله‌ی $x^2-3x-m+9=0$ همواره دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۳۲. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادله‌ی $y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$، همواره پایین محور x ها است؟ (خارج ۹۸)

۱) $1<m<5$ ۲) $2<m<5$ ۳) $2<m<4$ ۴) $2<m<6$

تسلط ٪۸۵+

۴۳۳. کدام عبارت به ازای مقادیر مختلف m، همواره قابل تجزیه به حاصل‌ضرب دو عامل درجه‌ی اول است؟

۱) $x^2-mx+1+m^2$ ۲) $(m^2+2)x^2-x+3$ ۳) $-2x^2+3x+m^2+2$ ۴) $(m+1)x^2-3x+m$

۴۳۴. اگر $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$ باشد، حاصل $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}+|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $2\sqrt[4]{3}$ ۲) 2 ۳) 1 ۴) $\sqrt[4]{3}$

۴۳۵. فشار خون نرمال مردان برحسب میلی‌متر جیوه (mmHg) با رابطه‌ی $P=0/006s^2-0/02s+120$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی که فشار خون آن ۱۲۴ میلی‌متر جیوه باشد، کدام است؟ ($\sqrt{241}\simeq 15/5$) (کتاب درسی)

۱) ۲۶ ۲) ۲۶/۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۲۷

۴۳۶. برای حل معادله‌ی $x^2+3x-2=0$ به روش مربع کامل کردن، آن را به شکل $(x+a)^2=b+2$ نوشته‌ایم. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴/۷۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۳/۷۵

۴۳۷. معادله‌ی $ax^2-3x+a+4=0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $(-\frac{9}{2},\frac{1}{2})-\{0\}$ ۲) $(-2,\frac{1}{2})-\{0\}$ ۳) $(-\frac{1}{2},2)-\{0\}$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{9}{2})-\{0\}$

۴۳۸. سعید از معلم ریاضی خود سنش را پرسید. معلم پاسخ داد: «سن من ۴ سال بعد، مربع سنی می‌شود که ۲۶ سال قبل داشتم.» سن معلم ریاضی سعید کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

۴۳۹. عدد ۱۵ را به‌صورت مجموع دو عدد دیگر می‌نویسیم. اگر حاصل‌ضرب دو عدد به‌دست‌آمده ۵۲/۲۵ باشد، اختلاف دو عدد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

ایستگاه ۲: تابع درجه‌ی دوم و ویژگی‌های آن

آموزش ٪۴۵+

۴۴۰. مختصات رأس سهمی به معادله‌ی $y=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+1$ کدام است؟

۱) $(\frac{-1}{4},\frac{31}{16})$ ۲) $(\frac{1}{4},\frac{31}{32})$ ۳) $(\frac{1}{4},\frac{-31}{16})$ ۴) $(\frac{-1}{4},\frac{-31}{16})$

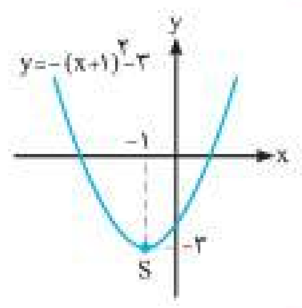
۴۴۱. اگر خط به معادله‌ی $x=-1$ محور تقارن سهمی به معادله‌ی $y=1-2mx+3x^2$ باشد، مقدار m کدام است؟

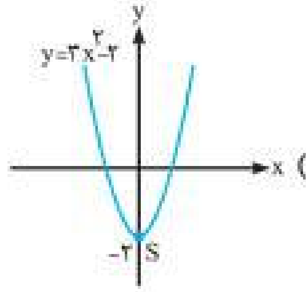
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -3 ۴) -2

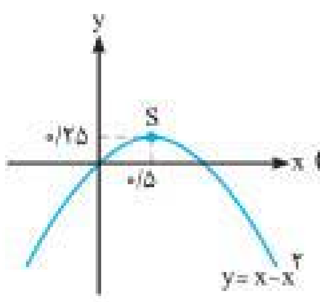
۴۴۲. طول رأس سهمی به معادله‌ی $y=(m-2)x^2-(4m-2)x+30$ برابر ۳ است. درباره‌ی این سهمی کدام گزینه درست است؟

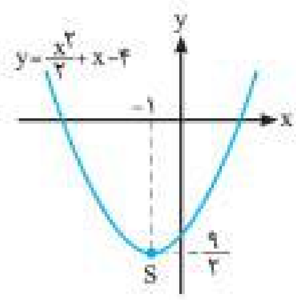
۱) محور x ها را قطع نمی‌کند.
۲) شکل سهمی رو به پایین است.
۳) بیشترین مقدار سهمی برابر ۳ است.
۴) سهمی از نقطه‌ی $(2,5)$ می‌گذرد.

۴۴۳. معادله‌ی کدام سهمی به‌درستی کنار آن نوشته نشده است؟ (کتاب درسی)

۱)


۲)


۳)


۴)


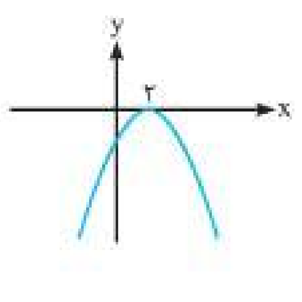
۴۴۴. سهمی به معادله‌ی $y=2x^2-8x+1$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) چهارم ۲) سوم ۳) دوم ۴) اول

۴۴۵. به ازای کدام مقدار m سهمی به معادله‌ی $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور طول‌ها و مماس بر آن است؟

۱) -3 ۲) $\frac{-5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۴۴۶. اگر نمودار تابع $f(x)=ax^2+8x+c$ به‌صورت روبه‌رو باشد، مقدار c کدام است؟



۱) -2
۲) -8
۳) -4
۴) -6

۴۴۷. به ازای کدام مقدار a، بیشترین مقدار تابع $f(x)=ax^2+20x-120$ برابر با ۱۸۰ است؟

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۴۸. به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A=x^2+3x+k$ همواره مثبت است؟

۱) $k>\frac{9}{4}$ ۲) $k<\frac{9}{4}$ ۳) $k>\frac{-9}{4}$ ۴) $k<\frac{-9}{4}$

۴۴۹. سه جمله‌ای درجه‌ی دوم $-3x^2+x\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ به ازای مقادیر مختلف x:

۱) گاهی مثبت و گاهی منفی است. ۲) گاهی منفی و گاهی صفر است. ۳) همواره منفی است. ۴) همواره مثبت است.

۴۵۰. نمودار تابع $y=(x-1)(x^2-ax+a)$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $(-4,0)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(0,4)$ ۴) $(4,+\infty)$

تثبیت +70%

۴۵۱. اگر $(-2,5)$ و $(0,5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله‌ی خط تقارن این سهمی کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $x=-2$ ۲) $x=-1$ ۳) $x=2$ ۴) $x=1$

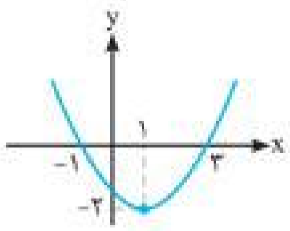
۴۵۲. نقطه‌ی $S(-1,-4)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y=3x^2+ax+b$ است. این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -3 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۴۵۳. خط به معادله‌ی $y=\frac{3}{5}$، محور تقارن تابع $f(x)=x^2-4x+c$ را روی نمودار تابع قطع می‌کند. مقدار c کدام است؟ (کتاب درسی)

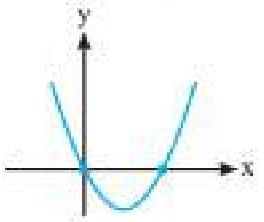
۱) $4/4$ ۲) $9/2$ ۳) $4/6$ ۴) $4/5$

۴۵۴. معادله‌ی سهمی شکل مقابل کدام است؟



۱) $y=x^2-x-3$ ۲) $y=2x^2+x-1$
۳) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$ ۴) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$

۴۵۵. مقدار a کدام باشد تا نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+(2a-5)x+a^2-2$ مطابق شکل مقابل باشد؟



۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۴۵۶. سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاطی به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. این سهمی از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (کتاب درسی)

۱) $(-2,-3)$ ۲) $(3,2)$ ۳) $(\frac{1}{2},3)$ ۴) $(1,2)$

۴۵۷. فرض کنید نقاط $(-2,5)$، $(0,5)$ و $(1,11)$، بر سهمی $y=ax^2+bx+c$ واقع باشند. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟ (کنکور ۹۹)

۱) $(-1,3)$ ۲) $(-1,4)$ ۳) $(2,9)$ ۴) $(2,15)$

۴۵۸. اگر کمترین مقدار تابع $f(x)=x^2-(x-1)^2+(x+2)^2+m$ برابر با ۷ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۴۵۹. به ازای کدام مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(1-a)x^2+2\sqrt{6}x-a$، همواره بالای محور x هاست؟ (خارج ۹۶)

۱) $a<1$ ۲) $a<-2$ ۳) $a>3$ ۴) $-2<a<1$

۴۶۰. در سهمی به معادله‌ی $y=(x+2)^2+(x-4)^2-18$:

۱) بالاترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور xها قرار دارد. ۲) بالاترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور yها قرار دارد.
۳) پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت منفی محور xها قرار دارد. ۴) پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی روی قسمت مثبت محور xها قرار دارد.

۴۶۱. اگر نمودار تابع $y=mx^2+(m+4)x+(2-m)$ دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $[-1,3]$ ۲) $(0,2]$ ۳) $(1,3]$ ۴) $(0,3]$

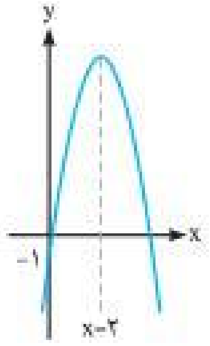
تسلط +85%

۴۶۲. اگر خط به معادله‌ی $x=\frac{2}{3}$ سهمی به معادله‌ی $y=(m-2)x^2-3x+m^2+1$ را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{21}{4}$ ۲) $\frac{33}{16}$ ۳) $\frac{289}{16}$ ۴) $\frac{305}{16}$

۴۶۳. رأس سهمی به معادله‌ی $y=-2x^2+bx-3$ روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع است. مقدار b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶- ۳) ۴ و ۶- ۴) ۴- یا ۶



۴۶۴. سهمی به معادله‌ی $y=-2(x+3m-5)^2+m+2n$ مطابق شکل مقابل است. رأس سهمی به معادله‌ی $y=mx^2+nx+1$ کدام نقطه است؟

۱) $(\frac{3}{2},\frac{5}{4})$ ۲) $(\frac{3}{2},\frac{-5}{4})$

۳) $(\frac{-3}{2},\frac{5}{4})$ ۴) $(\frac{-3}{2},\frac{-5}{4})$

۴۶۵. سهمی به معادله‌ی $y=x^2-(2m^2+1)x+m^4+m^2+\frac{1}{4}$ به ازای هر مقدار دلخواه m همواره:

۱) محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند. ۲) بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد.

۳) در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور طول‌ها مماس می‌شود. ۴) در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

۴۶۶. فرض کنید $A(-1,9)$ رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ گذرا بر نقطه‌ی $(3,1)$ باشد. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟ (خارج ۹۹)

۱) $(5,-7)$ ۲) $(5,-9)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(1,5)$

۴۶۷. رأس سهمی به معادله‌ی $y=-3x^2+(2m-1)x+5$ روی محور عرض‌ها واقع است. خط به معادله‌ی $y-2=0$، سهمی را در نقاطی با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) قطع نمی‌کند.

۴۶۸. با توجه به ضابطه‌ی سهمی $y=x^2-mx+m-1$، به ازای کدام مقدار مثبت m، مساحت مثلثی که دو رأس آن صفرهای این سهمی و رأس سوم آن منطبق بر رأس سهمی است، برابر ۱ است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۶۹. اگر مجموعه‌ی نقاط سهمی به معادله‌ی $y=ax^2-x+\frac{2}{3}$ دارای عرضی بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{2}$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۷۰. سهمی به معادله‌ی $y=(2x+1)(x+8)$ با خط به معادله‌ی $y=mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

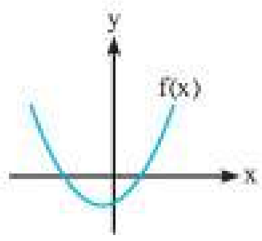
۱) $(5,13)$ ۲) $(15,23)$ ۳) $(7,15)$ ۴) $(9,25)$

۴۷۱. به ازای چه مقادیری از a، سهمی به معادله‌ی $y=ax^2-(a+2)x$ هیچ‌گاه از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات عبور <u>نمی‌کند</u>؟

۱) $a\leq 2$ ۲) $a>0$ ۳) $a\leq -2$ ۴) $-2\leq a<0$

۴۷۲. اگر رأس نمودار تابع $f(x)=x^2+2x-c$ نقطه‌ی $(-1,3)$ باشد، مختصات رأس نمودار تابع $y=f(2x-1)$ کدام است؟

۱) $(4,-5)$ ۲) $(4,5)$ ۳) $(0,5)$ ۴) $(0,3)$



۴۷۳. اگر α و β ریشه‌های حقیقی تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ با نمودار مقابل باشد، کدام گزینه درست است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $abc>0$ ۲) $\alpha^3+\beta^3<0$

۳) $\frac{b^2}{4}<ac$ ۴) $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{\Delta}{4a}$

ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

آموزش ٪45+

۴۷۴. هرگاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-9x-1=0$ باشند. حاصل $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -9 ۳) ۴/۵ ۴) $-$۴/۵

۴۷۵. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-4x-2=0$ کدام است؟

۱) $\frac{20}{9}$ ۲) $\frac{29}{9}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{28}{9}$

۴۷۶. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(3m-1)x^2-2x+1=m^2$ برابر با $\frac{1}{4}$ است. حاصل‌ضرب دو ریشه کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

۴۷۷. به ازای کدام مقدار m حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+m=0$ مساوی ۴ است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار m

۴۷۸. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $|x'-x''|$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۱۲ ۴) ۳

۴۷۹. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $-3x^2+(m+1)x+m=0$ برابر با $\alpha=1$ است. ریشه‌ی دیگر معادله کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{-1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۴۸۰. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(2x+1)(3x^2-7x+1)=0$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{-1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴۸۱. به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$، برابر ۲ می‌باشد؟ (کنکور ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۸۲. معادله‌ی $x^2-x-2=0$ دو ریشه‌ی α و β دارد و $\alpha<\beta$ است. حاصل عبارت $5\alpha^2+7\beta^2$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۳ ۳) ۲۱ ۴) ۱۵

۴۸۳. اگر در معادله‌ی $2x^2-8x+m=0$ یکی از جواب‌ها ۲ واحد بیشتر از جواب دیگر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۴۸۴. در معادله‌ی $x^2-20x+64=0$، حاصل $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۶ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{6}$

۴۸۵. مجموع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)x-(\sqrt{2}+1)=0$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-1$ ۴) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+1$

۴۸۶. برای کدام مقدار a ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(a-1)x^2+2ax+3-a=0$ معکوس یکدیگرند؟

۱) $a=2$ ۲) $a=\frac{1}{2}$ ۳) $a=-1$ ۴) هیچ مقدار a

۴۸۷. برای کدام مقادیر k در معادله‌ی $kx^2-4x+k+2=0$ یکی از ریشه‌ها ۳ برابر ریشه‌ی دیگر است؟

۱) ۱ و ۳ ۲) −۱ و −۳ ۳) ۱ و −۳ ۴) −۱ و ۳

۴۸۸. معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2+mx+m+6=0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است. بازه‌ی مقادیر m، کدام است؟ (خارج ۹۹)

۱) $(-4,0)$ ۲) $(-4,-2)$ ۳) $(-6,0)$ ۴) $(-6,-4)$

تثبیت ٪۷۰+

۴۸۹. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $3ax^2+bx-a=0$ مساوی $\frac{2}{3}$ است. ریشه‌ی دیگر این معادله کدام است؟

۱) $\frac{-2}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۹۰. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+3x-1=0$ با ریشه‌های α و β حاصل $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) −۹ ۳) −۲۷ ۴) ۲۷

۴۹۱. بین ریشه‌های α و β در معادله‌ی $x^2+2x+2c-1=0$ رابطه‌ی $\alpha^2+3\beta^2+4\alpha\beta+4=0$ برقرار است. حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) −۳/۵ ۲) −۷ ۳) −۴ ۴) −۸

۴۹۲. جذر معکوس ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+2=0$ را با هم جمع کرده‌ایم. حاصل در کدام گزینه آمده است؟

۱) $2+\sqrt{2}$ ۲) $2+2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

۴۹۳. اگر بین ضرایب معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ی $4a+2b+c=0$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) $\frac{a}{2c}$ ۲) $\frac{c}{2a}$ ۳) $-\frac{a}{2c}$ ۴) $-\frac{c}{2a}$

۴۹۴. معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (کنکور ۹۹)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) −۱ ۴) $-\frac{5}{2}$

۴۹۵. در معادله‌ی $x^2-5x+m^3+5m=0$ اگر $\alpha=2$ یک ریشه‌ی آن باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\alpha^3+\beta^3$ چقدر است؟ (β ریشه‌ی دیگر معادله است.)

۱) ۳۵ ۲) ۱۹
۳) −۱۹ ۴) به مقدار m بستگی دارد.

۴۹۶. به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-6x+5+m=0$ مجذور ریشه‌ی دیگر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲ ۳) −۳۲ ۴) −۳

۴۹۷. کدام بیان درباره‌ی معادله‌ی $(\sqrt{4-2\sqrt{3}})x^2+(1-\sqrt{3})x=17$ درست است؟

۱) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
۲) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.
۳) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
۴) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.

۴۹۸. به ازای کدام مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (خارج ۹۲)

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

۴۹۹. به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+(m-2)x+m+1=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت متمایز است؟ (خارج ۹۷)

۱) $-1<m<0$ ۲) $m<0$ ۳) $2<m<8$ ۴) $m>8$

۵۰۰. نمودار تابع $f(x)=m^2x^2-3mx-1$ به ازای مقادیر مختلف $m\neq 0$، همواره:

۱) بالای محور x ها قرار دارد.
۲) محور x ها را در یک طرف مبدأ قطع می‌کند.
۳) محور x ها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند.
۴) بر محور x ها مماس است.

تسلط ٪85+

۵۰۱. اگر از صفرهای تابع $f(x)=x^2+3x-c$ نیم واحد کم کنیم، حاصل‌ضرب صفرها چقدر تغییر خواهد کرد؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}+c$ ۳) $\frac{7}{4}c$ ۴) $\frac{7}{4}-c$

۵۰۲. اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2-290x+m^2=0$، مجذور دو عدد طبیعی فرد متوالی باشند، حاصل $\sqrt{m+1}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۵۰۳. برای کدام مقدار b، بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2+bx+b=0$، رابطه‌ی $\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\beta}=1$ برقرار است؟

۱) $\frac{-1}{12}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

۵۰۴. در تابع $f(x)=2x^2-(\sqrt{5}+2)x+\sqrt{5}$ با صفرهای α و β، حاصل $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt[4]{20}$

۵۰۵. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-mx+2=0$ باشند و اعداد ۴، x_1+x_2 و x_1x_2 تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۵۰۶. در معادله‌ی $4x^2-10x+2m=0$، دو برابر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر یک واحد بیشتر است. در این‌صورت مقدار m کدام است؟

۱) ۵/۷۶ ۲) ۲/۸۸ ۳) ۵/۰۴ ۴) ۲/۵۲

۵۰۷. ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x+2=0$ را α و β نامیده‌ایم، حاصل عبارت $A=\frac{\alpha}{\alpha^2+2}-\frac{\beta-5}{\beta^2-6\beta+7}$ چقدر است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{-4}{5}$ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{-6}{5}$

۵۰۸. اگر در معادله‌ی $3x^2-ax+b=0$، بین اعداد a و b رابطه‌ی $2a+b=-12$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله، کدام گزینه است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $-b$ ۲) $-\frac{b}{2}$ ۳) $-\frac{b}{3}$ ۴) $-\frac{b}{6}$

۵۰۹. در معادله‌ی $x^2-2x+\frac{3}{4}=0$ حاصل $\alpha^4+\beta^4$ کدام است؟ (α و β ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{41}{2}$ ۴) $\frac{41}{8}$

۵۱۰. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-2x-4=0$، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2-4)^2+4\beta^2$ چقدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۵۱۱. به ازای کدام مقادیر m، سهمی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2+3x+m-1$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (خارج ۹۵)

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

۵۱۲. به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز است؟ (کنکور ۹۷)

۱) $m<-6$ ۲) $m>3$ ۳) $0<m<3$ ۴) $3<m<6$

۵۱۳. به ازای کدام مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-3)x^2+ax-1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (کنکور ۹۲)

۱) $a\leq 2$ ۲) $0<a\leq 2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $0<a<3$

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

آموزش ٪45+

۵۱۴. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ باشند، در کدام گزینه آمده است؟ (کتاب درسی)

۱) $x^2-2x-2=0$ ۲) $x^2-2x-1=0$ ۳) $x^2+2x-2=0$ ۴) $x^2-2x-4=0$

۵۱۵. مجموع دو عدد حقیقی، $-1/5$ و حاصل‌ضرب آن دو -7 است. یکی از آن دو عدد کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{-7}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3

۵۱۶. دو عدد حقیقی که مجموعشان $2\sqrt{3}$ و حاصل‌ضربشان -1 است، ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $\sqrt{3}x^2+6x-\sqrt{3}=0$ ۲) $\sqrt{3}x^2-6x-\sqrt{3}=0$ ۳) $x^2+2\sqrt{3}x-1=0$ ۴) $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

۵۱۷. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. مقدار b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۵۱۸. جواب‌های کدام معادله -2 برابر جواب‌های معادله‌ی $x^2-bx=2c$ است؟

۱) $x^2-2bx-8c=0$ ۲) $x^2+2bx+8c=0$ ۳) $x^2-2bx+8c=0$ ۴) $x^2+2bx-8c=0$

۵۱۹. معادله‌ای که ریشه‌هایش عددهای حقیقی $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ و $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ هستند، در کدام گزینه دیده می‌شود؟ $(a\neq 0)$

۱) $x^2+2\sqrt{a}x-1=0$ ۲) $x^2-2\sqrt{a+1}x+1=0$ ۳) $x^2-2\sqrt{a}x+1=0$ ۴) $x^2-2\sqrt{a}x-1=0$

۵۲۰. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن از ۳ برابر قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی x^2-4x+1 دو واحد بیشتر باشند، کدام است؟

۱) $x^2+4x+1=0$ ۲) $x^2-4x+2=0$ ۳) $x^2+8x-11=0$ ۴) $x^2-8x+4=0$

٪۷۰+ تثبیت

۵۲۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{1+\frac{1}{\alpha}, 1+\frac{1}{\beta}\}$ است؟ (کنکور ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۵۲۲. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $4x^2-kx+25=0$ به‌صورت $\{\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}\}$ است؟ (کنکور ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

۵۲۳. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2+10x-16=0$ ۲) $x^2-10x+16=0$ ۳) $x^2-10x-16=0$ ۴) $x^2+10x+16=0$

۵۲۴. عددهای α و β صفرهای تابع $f(x)=x-3\sqrt{x}+2$ هستند. ریشه‌های کدام معادله، اعداد $1+\frac{1}{\alpha}$ و $1+\frac{1}{\beta}$ است؟

۱) $4x^2-13x+10=0$ ۲) $4x^2+13x+10=0$ ۳) $4x^2-17x+18=0$ ۴) $4x^2+17x+18=0$

٪۸۵+ تسلط

۵۲۵. به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2-mx-8=0$، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ می‌باشد؟ (خارج ۹۶)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۵۲۶. اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2-7x+3=0$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -14 ۲) -12 ۳) -8 ۴) -6

ایستگاه ۵: کاربردهای معادله‌ی درجه‌ی دوم

٪۴۵+ آموزش

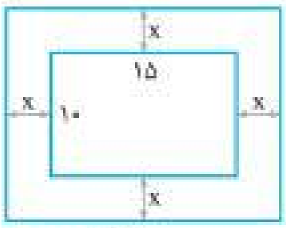
۵۲۷. طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل $45\ cm^2$ باشد، طول قطر آن چقدر است؟ (کتاب درسی)

۱) $\sqrt{230}$ ۲) $\sqrt{231}$ ۳) $\sqrt{234}$ ۴) $\sqrt{236}$

۵۲۸. در لیگ فوتبال که هر تیم با بقیه‌ی تیم‌ها فقط یک بازی به‌صورت حذفی انجام می‌دهد، اگر تعداد کل بازی‌های انجام‌شـــده برابر ۱۰۵ باشد، در این لیگ چند تیم حضور دارند؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۵۲۹. یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت $300 cm^2$ قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) 15×20 ۲) $16\times 18/75$ ۳) $12/5\times 24$ ۴) 12×25

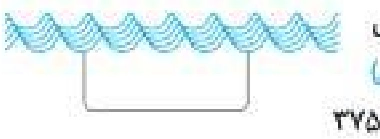
۵۳۰. معادله‌ی $x^4-8x^2+8=0$ .... است. (کتاب درسی)

۱) دارای دو ریشه‌ی مثبت ۲) دارای چهار ریشه‌ی مثبت ۳) دارای چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز ۴) فاقد ریشه‌ی حقیقی

۵۳۱. مستطیلی را با کمک یک سیم به طول ۲۰ ساخته‌ایم. اگر بخواهیم قطر این مستطیل کمترین مقدار ممکن شود، مساحت مستطیل چقدر است؟

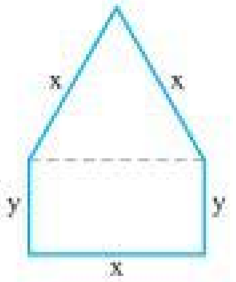
۱) ۲۴ ۲) ۳۵ ۳) ۳۰ ۴) ۲۵

۵۳۲. یک ماهیگیر می‌خواهد مطابق شکل در کنار رودخانه، محوطه‌ای مستطیل‌شکل را فنس‌کشی کند. اگر او فقط هزینه‌ی ۱۰۰ متر فنس‌کشی را داشته باشد، بیشترین سطحی که با این ۱۰۰ متر می‌تواند ایجاد کند، چند مترمربع است؟ (کتاب درسی)



۱) ۵۲۵ ۲) ۱۲۵۰ ۳) ۱۸۷۵ ۴) ۳۷۵۰

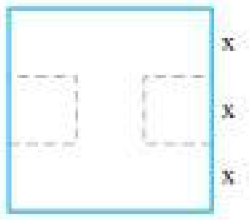
۵۳۳. یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. حداکثر مساحت ممکن (جهت نوردهی بیشتر) در بین پنجره‌هایی که محیطی برابر 4m دارند، کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) $\frac{۴}{۳۳}(۶-\sqrt{۳})$ ۲) $\frac{۴}{۱۱}(۶+\sqrt{۳})$

۳) $\frac{۴}{۳۳}(۶+\sqrt{۳})$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}(۶-\sqrt{۳})$

۵۳۴. در مربع شکل روبه‌رو، دو مربع کوچک‌تر، مطابق شکل به فاصله‌ی برابر از بالا و پایین مربع بزرگ‌تر، طوری جدا می‌کنیم که محیط و مساحت شکل باقی‌مانده با هم برابر باشند. طول ضلع مربع جدا شده کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)



۱) $\frac{۱۶}{۷}$ ۲) $\frac{۱۵}{۷}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۱۷}{۷}$

تثبیت ٪۷۰+

۵۳۵. در مستطیلی با مساحت ۵ واحد مربع و محیط ۹ واحد، عرض مستطیل کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) ۲ یا ۲/۵ ۴) چنین مستطیلی وجود ندارد.

۵۳۶. درباره‌ی معادله‌ی $(\frac{x^2}{x^2+1})^2+(\frac{x^2}{x^2+1})-۶=۰$ کدام گزینه درست است؟

۱) ریشه‌ی مضاعف دارد. ۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد. ۳) چهار ریشه دارد. ۴) دو ریشه دارد.

۵۳۷. کدام بیان درباره‌ی معادله‌ی $۲x^4-۷x^2-۴=۰$ درست است؟ (کتاب درسی)

۱) دو ریشه‌ی قرینه دارد. ۲) یک ریشه‌ی مثبت دارد. ۳) چهار ریشه‌ی متمایز دارد. ۴) دو ریشه‌ی مثبت دارد.

۵۳۸. بین مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر همان قاعده برابر ۱۲ واحد است، بیشترین مساحت چند واحد مربع است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۵۳۹. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای با مجموع ارتفاع و قطر قاعده‌ی ۱۵، کدام است؟

۱) $\frac{۲۲۵}{۲}\pi$ ۲) $\frac{۲۲۵}{۴}\pi$ ۳) $\frac{۶۷۵}{۴}\pi$ ۴) $\frac{۶۷۵}{۲}\pi$

۵۴۰. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\sqrt{۱۰۶}$ و مجموع اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۱۴ است. مساحت این مثلث چقدر است؟

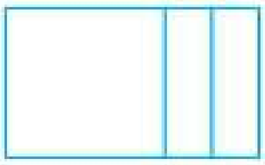
۱) ۲۲ ۲) ۲۲/۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۱/۵

تسلط ٪۸۵+

۵۴۱. حاصل‌ضرب جواب‌های معادله‌ی $(x^2-1)^6-19(x^2-1)^3=216$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) -۴

۵۴۲. با استفاده از سیمی به طول ۸۰۰ سانتی‌متر، مستطیلی مانند شکل مقابل ساخته‌ایم. اگر مساحت این مستطیل ۲۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع باشد، طول آن چند سانتی‌متر است؟



۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۲۰۰

۵۴۳. اگر معادله‌ی $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $(-\infty,-۴)$ ۲) $(۴,+\infty)$ ۳) $(-۴,۴)$ ۴) $(۴,۹)$

۵۴۴. معادله‌ی $x^2-۴|x|+۲=۰$ .... دارد.

۱) دو ریشه‌ی مثبت ۲) چهار ریشه‌ی مثبت ۳) چهار ریشه‌ی هم‌علامت ۴) چهار ریشه‌ی دوبه‌دو قرینه

۵۴۵. حاصل‌ضرب ریشه‌های غیرصفر معادله‌ی $(x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۴ ۴) ۴

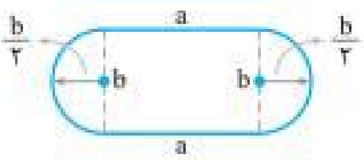
۵۴۶. بین ارتفاع (h) و قاعده‌ی (b) متوازی‌الاضلاعی رابطه‌ی $b+h=۹$ برقرار است. بیشترین مقدار مساحت ممکن که با این متوازی‌الاضلاع می‌توان ساخت، چقدر است؟

۱) ۲۰/۲۵ ۲) ۲۰/۵ ۳) ۱۰/۲۵ ۴) ۱۰/۵

۵۴۷. فاصله‌ی بین نقطه‌ای با طول a روی سهمی به معادله‌ی $y=x^2-۳x+۳$ از نقطه‌ای با همین طول روی خط به معادله‌ی $۲y+x+۱=۰$ را d می‌نامیم. مینیمم مقدار d چقدر است؟

۱) $\frac{۷۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۸۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۳۱}{۱۶}$

۵۴۸. زمین تنیسی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط زمین ۶۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را چه مقدار بگیریم تا مساحت قسمت مستطیلی شکل زمین حداکثر مقدار ممکن شود؟ $(\pi\simeq۳)$ (کتاب درسی)



۱) $\frac{۴۰۰}{۳}m\times ۱۰۰m$ ۲) $\frac{۸۰۰}{۳}m\times ۶۰m$ ۳) $۱۵۰m\times ۱۰۰m$ ۴) $۱۵۰m\times ۶۰m$

برای ۱۰۰٪

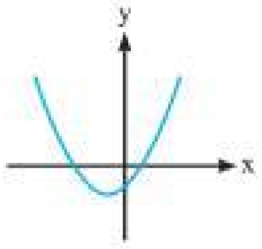
۵۴۹. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{(3\beta-2)^2}+\frac{1}{(3\alpha-2)^2}$ کدام گزینه خواهد بود؟

۱) $\frac{710}{289}$ ۲) $\frac{155}{289}$ ۳) $\frac{600}{289}$ ۴) $\frac{542}{289}$

۵۵۰. ریشه‌های کدام معادله اعداد $(1-\sqrt{3})^4$ و $(1+\sqrt{3})^4$ هستند؟

۱) $x^2+56x+16=0$ ۲) $x^2-56x+16=0$ ۳) $x^2+56x-16=0$ ۴) $x^2-56x-16=0$

۵۵۱. اگر شکل مقابل نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $bc<0$
۲) $bc>0$
۳) $bc=0$
۴) $bc\geq 0$

۵۵۲. فاصله‌ی بین دو ریشه‌ی یک سهمی برابر ۴ واحد است. اگر رأس سهمی نقطه‌ی $(1,1)$ باشد، معادله‌ی سهمی کدام است؟

۱) $y=-x^2+2x+3$ ۲) $y=(x-1)(x+3)+1$ ۳) $y=\frac{-1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ ۴) $y=\frac{-1}{4}(x-1)(x+3)$

۵۵۳. بین ضرایب معادله‌ی $ax^2-bx-c=0$ روابط $c=a+b$ و $2b=4a-c$ برقرار است. حاصل جمع توان سوم ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۵

۵۵۴. به ازای کدام مقادیر m از معادله‌ی $mx-3\sqrt{x}+m-2=0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ (کنکور ۸۸)

۱) $-\frac{3}{2}<m<2$ ۲) $0<m<2$ ۳) $\frac{3}{2}<m<\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}<m<2$

۵۵۵. رابطه‌ی $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=56$ بین صفرهای تابع $f(x)=x^2-bx-3b^2$ برقرار است. نمودار تابع نسبت به کدام خط نمی‌تواند قرینه باشد؟

۱) $x=\frac{1}{2}$ ۲) $x=1$ ۳) $x=-1$ ۴) $x=1$ و $x=-1$

آزمون فصل

زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

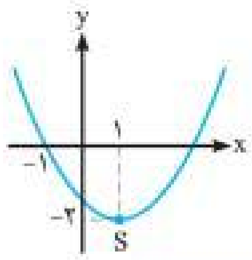
۵۵۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی است؟ (کنکور ۹۸)

۱) $-2<m<2/5$ ۲) $-2<m<3/5$ ۳) $-1<m<3/5$ ۴) $-1<m<2/5$

۵۵۷. حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-32(x^2+x)+240=0$ کدام است؟

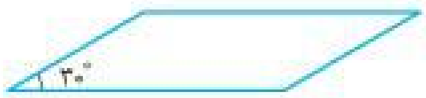
۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۱۲۰− ۴) ۲۴۰−

۵۵۸. معادله‌ی سهمی مقابل در کدام گزینه آمده است؟



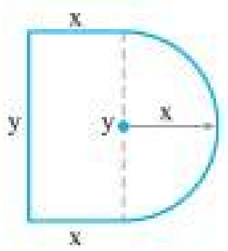
۱) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ ۲) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$
۳) $y=2(x-1)^2-2$ ۴) $y=x^2-2x-1$

۵۵۹. در متوازی‌الاضلاع داده‌شده در شکل مقابل، مجموع طول دو ضلع مجاور برابر با ۱۱ واحدِ طول است.
حداکثر مقدار مساحت ممکن برای این متوازی‌الاضلاع کدام است؟



۱) $\frac{3}{8}\times 121$ ۲) $\frac{7}{8}\times 121$ ۳) $\frac{1}{8}\times 121$ ۴) $\frac{3}{4}\times 121$

۵۶۰. می‌خواهیم با طنابی به طول ۷۰ متر، سطحی متشکل از یک مستطیل و یک نیم‌دایره ایجاد کنیم. حداکثر مساحت ایجادشده برابر است با: $(\pi\simeq 3)$



۱) $1050\ m^2$ ۲) $1150\ m^2$
۳) $1225\ m^2$ ۴) $350\ m^2$

۵۶۱. به ازای کدام مقدار a، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 - x + a = 0$، مجموع معکوس ریشه‌ها برابر $\frac{1}{4}$ است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) -4 ۴) هیچ مقدار a

۵۶۲. اگر مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^2 - bx + 3 = 0$ به‌صورت $\{\frac{r}{\sqrt{r^2+1}}, \frac{r}{\sqrt{r^2-1}}\}$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) $\pm 2\sqrt{6}$ ۲) $\pm 2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۵۶۳. ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $(\sqrt{2}+1)x^2 - \sqrt{5}x + \sqrt{2} = 1$ چقدر از ریشه‌ی کوچک‌تر آن بیشتر است؟

۱) $\sqrt{2}+1$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}-1$

۵۶۴. اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $ax^2 + bx - c = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله اعداد $\frac{-1}{\alpha}$ و $\frac{-1}{\beta}$ است؟

۱) $cx^2 + bx - a = 0$ ۲) $cx^2 - bx - a = 0$ ۳) $cx^2 - bx + a = 0$ ۴) $cx^2 + bx + a = 0$

۵۶۵. به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت است؟ (کنکور ۹۶)

۱) $-2 < a < 2$ ۲) $2 < a < 5$ ۳) $2 < a < 14$ ۴) $5 < a < 14$

۵۶۶. اگر صفرهای تابع درجه‌ی دوم $y = 3x^2 + bx + c$ برابر ۳− و ۵ باشند، کمترین مقدار این سهمی کدام است؟

۱) -36 ۲) -48 ۳) ۴۲ ۴) ۵۴

۵۶۷. نمودار سهمی $y = (2m+3)x^2 + 6x + m$ همواره بالای محور x هاست. حدود m کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2} < m < 0$ ۲) $m > \frac{3}{2}$ ۳) $0 < m < \frac{3}{2}$ ۴) $m > -\frac{3}{2}$

۵۶۸. تابع درجه‌ی دوم $y = x^2 + bx + 8$ نسبت به خط $x = 3$ متقارن است. این تابع محور x ها را در چه طولی قطع می‌کند؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۵۶۹. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $-x^2 + 8x - 1 = 0$ باشند، مقدار $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۶۴ ۴) ۴

۵۷۰. اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 + x - 5 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{\frac{\beta}{\alpha}-1, \frac{\alpha}{\beta}-1\}$ است؟

۱) $5x^2 + x - 21 = 0$ ۲) $5x^2 - x - 21 = 0$ ۳) $5x^2 - 21x + 21 = 0$ ۴) $5x^2 + 21x + 21 = 0$