

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ t_2 = \frac{3-9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

دو حالت دارد

زنکی: 

$$\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} 2t^2 - 3t - 9 = 0$$

گزینه‌ای درست است که ضرب ریشه‌هایش $-\frac{9}{2}$ و جمع آن‌ها $\frac{3}{2}$ باشد.

۴۲۲. **گزینه ۳** $x = -1 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow (3m+1) + (2-5m) = -5$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} -2m + 3 = -5 \xrightarrow{\text{حل کن}} -2m = -8 \Rightarrow m = 4$$

۲ $x = -1 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دیگر}} x = -\frac{c}{a} = -\frac{2-5m}{3m+1} \xrightarrow{m=4}$

$$x = -\frac{2-20}{12+1} = \frac{18}{13} \Rightarrow m + \text{ریشه‌ی دیگر} = 4 + \frac{18}{13} = \frac{52+18}{13} = \frac{70}{13}$$

۴۲۳. **گزینه ۳** داشتن دو ریشه‌ی مساوی در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم به معنای داشتن ریشه‌ی تکراری یا مضاعف بوده و شرطش این است که دلتای آن معادله صفر شود.

$$x(2x-5) = a \xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} 2x^2 - 5x = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(2)(-a) = 0 \Rightarrow 25 + 8a = 0 \Rightarrow 8a = -25 \Rightarrow a = -\frac{25}{8}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار ده}} 2x^2 - 5x + \frac{25}{8} = 0 \xrightarrow{\text{فرمول ریشه‌ی مضاعف}} x = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

$x = x_s = \frac{-b}{2a}$

این جوری هم ببین: تست فقط مقدار ریشه‌ی مضاعف رو خواسته و ما می‌دانیم که در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مقدار ریشه‌ی مضاعف از دستور

$$x(2x-5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0 \quad x = x_s = \frac{-b}{2a}$$

$$\xrightarrow{\text{بدون توجه به مقدار } a} x = x_s = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4} \quad (\text{ریشه‌ی مضاعف معادله})$$

۴۲۴. **گزینه ۱** اگر سن برادر کوچک‌تر را x و سن برادر بزرگ‌تر را y فرض کنیم، بر اساس گفته‌های سؤال داریم:

۱) برادر بزرگ‌تر ۴ سال از برادر کوچک‌تر، بزرگ‌تره؛ یعنی:

$$y = x + 4 \quad \text{یا} \quad y - x = 4$$

۲) ۴ سال دیگر، سن برادر کوچک‌تر ۴ سال و سن برادر بزرگ‌تر ۴ سال می‌شود؛ در نتیجه:

$$(x+4)(y+4) = 60 \xrightarrow{\text{به جای } x+4 \text{ قرار ده } y} y(y+4) = 60$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} y^2 + 4y - 60 = 0 \quad (a=1, b=4, c=-60)$$

$$\xrightarrow{\text{حل از } \Delta} \Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-60) = 16 + 240 = 256$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{دو حالت دارد}} \begin{cases} y = \frac{-4+16}{2} = \frac{12}{2} = 6 \checkmark \Rightarrow y=6, x=2 \\ \text{یا} \\ y = \frac{-4-16}{2} = \frac{-20}{2} = -10 \times \quad (\text{سن منفی بی معناست.}) \end{cases}$$

$\sqrt{256}=16$

بنابراین هم‌اکنون برادر بزرگ‌تر ۶ سال و برادر کوچک‌تر ۲ سال دارد.

$$= \frac{-27}{5} \times \left(\frac{-1}{9} - \frac{1}{6} \right) = -\frac{27}{5} \times \frac{-2-3}{18} = \left(-\frac{27}{5} \right) \left(\frac{-5}{18} \right) = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

گزینه‌های «۱» و «۳» به ازای $x = -1$ تعریف‌شده هستند در گزینه‌ی «۲» هم داریم:

$$x-2 = (-1)-2 = -3 \neq \frac{3}{2}$$

بنابراین پاسخ درست گزینه‌ی «۴» است.

۴۱۶. **گزینه ۱**

$$(3t-2)^2 = 4 \xrightarrow{\text{از دو طرف جذ بگیر}} \begin{cases} 3t-2 = \sqrt{4} \Rightarrow 3t-2=2 \\ \text{یا} \\ 3t-2 = -\sqrt{4} \Rightarrow 3t-2=-2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+2} \begin{cases} 3t=4 \\ \text{یا} \\ 3t=0 \end{cases} \xrightarrow{+3} \begin{cases} t=\frac{4}{3} \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

زنکی: 

$$(3t-2)^2 = 4 \xrightarrow{\text{ساده کن}} 9t^2 - 12t = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} \frac{b}{a} = -\frac{-12}{9} = \frac{4}{3}$$

۴۱۷. **گزینه ۲** معادله‌ی $3x^2 + 7x = 0$ فاقد عدد ثابت است ($c=0$).

بنابراین روش فاکتورگیری را به یاد می‌آوریم و...

$$3x^2 + 7x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} x(3x+7) = 0 \xrightarrow{\text{ویژگی حاصل ضرب صفر}}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ \text{یا} \\ 3x+7=0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف دو ریشه} = \left| 0 - \left(-\frac{7}{3} \right) \right| = \frac{7}{3}$$

زنکی: 

$$3x^2 + 7x = 0 \xrightarrow{\text{اختلاف ریشه‌ها}} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{49-4(3)(0)}}{3} = \frac{7}{3}$$

۴۱۸. **گزینه ۳** می‌دانیم که مهم‌ترین ویژگی ریشه یا جواب یک معادله این

است که در معادله صدق می‌کند: بنابراین اگر $x=p$ ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشد، می‌توان نوشت:

$$2x^2 + 3x - 1 = 0 \xrightarrow{x=p} 2p^2 + 3p - 1 = 0 \Rightarrow 2p^2 + 3p = 1$$

اکنون برای محاسبه‌ی مقدار عبارت $2p^2 + 3p + 4$ کافی است به جای $2p^2 + 3p$ با توجه به 1 ، مقدار آن را قرار دهیم:

۴۱۹. **گزینه ۲** در عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ ، اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد، آن گاه عبارت قابل تجزیه نبوده و معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ نیز فاقد ریشه خواهد بود. در گزینه‌ی «۲» داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(4)(8) = 100 - 128 = -28 < 0$$

در نتیجه عبارت تجزیه‌ناپذیر است.

بررسی سایر گزینه‌ها و نیز حل معادله‌ی مربوطه به عهده‌ی خودتون!

۴۲۰. **گزینه ۴** چون ضریب x^2 برابر یک است، کافی است به دو طرف،

$\left(\frac{x}{2} \right)^2$ را اضافه کنیم: یعنی کافی است به دو طرف، عدد یک را اضافه کنیم:

$$\left(\frac{x}{2} \right)^2 = \left(\frac{2}{2} \right)^2 = 1$$

۴۲۱. **گزینه ۱** معادله را از روش کلی حل می‌کنیم:

$$\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} 2t^2 - 3t - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9)} \Delta = 9 + 72 = 81$$

$(a=2, b=-3, c=-9)$

۴۲۹. گزینه ۴ می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه معادله به صورت $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ قابل تجزیه خواهد بود به طوری که $\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ($\Delta = b^2 - 4ac$).

برای حل این تست ابتدا ریشه‌های معادله‌ی $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$ را از روش Δ به دست می‌آوریم:

$$\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4(1)(-4) = 2 + 16 = 18 \rightarrow b = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{یا} \quad b = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow b^2 + \sqrt{2}b - 4 = (b - \sqrt{2})(b + 2\sqrt{2})$$

این رابطه را با تجزیه‌ی داده‌شده در صورت سؤال $((b-r)(b+s))$ مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ s = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

🌟 زنگی: به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک داریم:

$$b^2 + \sqrt{2}b - 4 = (b - \sqrt{2})(b + 2\sqrt{2})$$

با مقایسه‌ی این عبارت با عبارت داده‌شده داریم:

$$(b - \sqrt{2})(b + 2\sqrt{2}) = (b - r)(b + s) \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ s = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{1}{2}$$

۴۳۰. گزینه ۳ برای حل معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ به روش مربع کامل،

به جایی می‌رسیم که باید از عدد $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ جذر بگیریم. حال اگر این عدد،

نامنفی (یا +) باشد، معادله جواب دارد؛ اما اگر این عدد، منفی باشد، مجاز به جذر گرفتن از عدد منفی نیستیم و می‌گوییم معادله فاقد جواب حقیقی است. در معادله‌ی

$S^2 - 3S + 2 = 0$ با توجه به ضرایب ($a=1$, $b=-3$, $c=2$) مقدار $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ منفی می‌شود و معادله فاقد ریشه‌ی حقیقی است:

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{(-3)^2 - 4(1)(2)}{4(1)^2} = \frac{9 - 8}{4} = \frac{1}{4}$$

🌟 زنگی: می‌توانیم با روش مربع کامل درسمانه پیش برویم:

$$S^2 - 3S + 2 = 0 \Rightarrow S^2 - 3S = -2 \Rightarrow S^2 - 3S + \frac{9}{4} = -2 + \frac{9}{4} \Rightarrow (S - \frac{3}{2})^2 = -\frac{1}{4}$$

در این مرحله باید از دو طرف جذر بگیریم؛ پس از $-\frac{1}{4}$ جذر گرفته می‌شود.

۴۳۱. گزینه ۴ شرط وجود دو ریشه‌ی حقیقی متمایز آن است که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ؛ پس:

$$x^2 - 3x - m + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(-m + 9) > 0$$

($a=1$, $b=-3$, $c=-m+9$)

$$\Rightarrow 9 + 4m - 36 > 0 \Rightarrow 4m > 27 \xrightarrow{\div 4} m > \frac{27}{4}$$

$$\frac{27}{4} = \frac{28-1}{4} = \frac{28}{4} - \frac{1}{4} = 7 - \frac{1}{4} = 6\frac{3}{4} \Rightarrow m > 6\frac{3}{4} \Rightarrow m > 6\frac{3}{4}$$

۴۳۲. گزینه ۲ $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$

شکل مناسب رو رسم کن سهمی پایین محور x هاست

$$\xrightarrow{\text{شرط‌ها رو بنویس}} \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{محاسبه کن}}$$

$$\begin{cases} a = 1-m < 0 \Rightarrow m > 1 \\ \Delta = (2(m-3))^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \end{cases}$$

۴۲۵. گزینه ۳ آن دو عدد طبیعی فرد متوالی را $2n-1$ و $2n+1$ در نظر می‌گیریم؛ پس:

$$(2n-1)^2 + (2n+1)^2 = 290 \xrightarrow{\text{اتحادها رو باز کن}} (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) = 290$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 8n^2 + 2 = 290 \xrightarrow{-2} 8n^2 = 288$$

$$\xrightarrow{\div 8} n^2 = 36 \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} n = \pm 6 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{عدد فرد اول} = 2(6) - 1 = 11 \\ \text{عدد فرد بعدی} = 2(6) + 1 = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب این دو عدد} = 11 \times 13 = 143$$

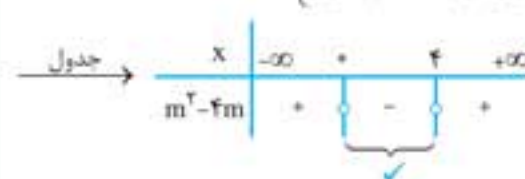
۴۲۶. گزینه ۲ معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است:

$$mx^2 + mx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = m^2 - 4m < 0$$

($a=m$, $b=m$, $c=1$)

$$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} m^2 - 4m < 0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} m(m-4) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{ویرگی حاصل ضرب صفر}} \begin{cases} m = 0 \\ \text{یا} \\ m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\text{هدف آینه که } m^2 - 4m < 0 \text{ ریشه}} 0 < m < 4$$

حالا به نظر شما برای کدام مقادیر m عبارت $mx^2 + mx + 1$ همواره مثبت می‌شود؟ 🌟 زنگی:

$$m = -1 \xrightarrow{\text{در معادله}} -x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(-1)(1) = 5 > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه‌ی حقیقی دارد}$$

پس گزینه‌های «۱» و «۴» که $m = -1$ را قبول دارند غلط هستن!

$$m = 5 \xrightarrow{\text{در معادله}} 5x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 5^2 - 4(5)(1) = 5 > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه‌ی حقیقی دارد}$$

پس گزینه‌ی «۳» هم غلطه!

۴۲۷. گزینه ۳ Δ را محاسبه کرده و بعد گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$ax^2 + x + 3 = 0 \xrightarrow{a=a, b=1, c=3} \Delta = 1^2 - 4(a)(3) = 1 - 12a$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$\text{گزینه ۱: } a = \frac{1}{8} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بنذار}} \Delta = 1 - 12\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد.} \quad \times$$

$$\text{گزینه ۲: } a = \frac{1}{12} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بنذار}} \Delta = 1 - 12\left(\frac{1}{12}\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 0} \text{ریشه‌ی مضاعف دارد.} \quad \times$$

$$\text{گزینه ۳: } a = \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بنذار}} \Delta = 1 - 12\left(\frac{1}{6}\right) = -1$$

$$\xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد.} \quad \checkmark$$

درباره‌ی گزینه‌ی «۴» اگر a عددی منفی باشد، $-12a$ مثبت شده و $-12a + 1$ هم قطعاً مثبت خواهد بود، بنابراین همواره دو ریشه‌ی حقیقی خواهیم داشت. $\times$

۴۲۸. گزینه ۲ ریشه‌ی معادله در معادله صدق می‌کند؛ پس:

$$2\alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 = \alpha + 2 \quad (*)$$

حالا با توجه به رابطه‌ی $(*)$ کافی است در عبارت $\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2 + \alpha + 2}$ به جای $\alpha + 2$ معادل آن $(2\alpha^2)$ را قرار دهیم:

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{4\alpha^2}{2\alpha^2 + (2\alpha^2)} = \frac{4\alpha^2}{4\alpha^2} = 1$$

$$x^2 + bx = -c \Rightarrow x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \quad \text{گزینه ۴: ۴۲۶}$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 2 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + 2$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + 2$$

این معادله را با معادله‌ی $(x+a)^2 = b+2$ مقایسه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{6+9}{4}$$

$$= \frac{15}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

زنگی: 

$$(x+a)^2 = b+2 \Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 - b - 2 = x^2 + 3x - 2$$

مقایسه $\rightarrow \begin{cases} 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ a^2 - b - 2 = -2 \Rightarrow b = a^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

$$a+b = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

۴۲۷. گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $a = 0$ باشد، آن‌گاه معادله می‌شود $-3x + 4 = 0$ که فقط یک ریشه دارد. پس $a = 0$ قابل قبول نیست. اکنون فرض کنید $a \neq 0$ است.

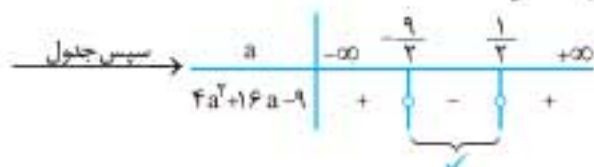
معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ همواره دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد: $ax^2 - 3x + a + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(a)(a+4) > 0$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 9 - 4a^2 - 16a > 0 \xrightarrow{\text{جهت برمی‌گردد} \times (-1)} 4a^2 + 16a - 9 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} 4a^2 + 16a - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{برو } \Delta} \Delta = (16)^2 - 4(4)(-9) = 400$$

$$\Rightarrow a = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2(4)} = \frac{-16 \pm 20}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \text{یا} \\ a = \frac{-36}{8} = -\frac{9}{2} \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\text{جاهایی که عبارت } 4a^2 + 16a - 9 \text{ منفی شده جوابه}} -\frac{9}{2} < a < \frac{1}{2}$$

چون $a = 0$ قابل قبول نیست، پس مجموعه‌ی مقادیر a می‌شود: $\left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right) - \{0\}$

$$a = 1 \xrightarrow{\text{در معادله}} x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(5) = -11 < 0$$

پس گزینه‌هایی که $a = 1$ را قبول دارند غلط هستند! گزینه‌های «۳» و «۴» حذف شدن.

$$a = -3 \xrightarrow{\text{در معادله}} -3x^2 - 3x + 1 = 0$$

حذف گزینه‌ی «۲» $\Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد $\xrightarrow{ac < 0}$

۴۲۸. گزینه ۲ اگر سن فعلی معلم را x سال فرض کنیم، سن او بعد از ۴

سال برابر $x+4$ و مربع سن ایشان در ۲۶ سال قبل برابر $(x-26)^2$ خواهد بود. حالا بنا به گفته‌ی معلم سعید داریم:

$$(x-26)^2 = x+4 \xrightarrow{\text{انتخاب رولازکن}} x^2 - 52x + 676 = x+4$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(m^2 - 6m + 9) + 4(1-m) < 0 \xrightarrow{+4}$$

$$m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$\Rightarrow (m-5)(m-2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 < m < 5 \quad \text{۲}$$

$$\text{۱} \cap \text{۲} \rightarrow 2 < m < 5$$

۴۲۳. گزینه ۳ مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ را برای تک‌تک گزینه‌ها حساب می‌کنیم و گزینه‌ای را که در آن مقدار Δ به ازای مقادیر مختلف m مثبت می‌شود، به عنوان گزینه‌ی درست انتخاب می‌کنیم:

گزینه‌ی «۱»: $\Delta = (-m)^2 - 4(1)(1+m^2) = m^2 - 4 - 4m^2$

$$= -4 - 3m^2 < 0 \quad \times \text{ (حتماً قابل تجزیه نیست)}$$

گزینه‌ی «۲»: $\Delta = (-1)^2 - 4(m^2+2)(3) = 1 - 12m^2 - 24$

$$= -12m^2 - 23 < 0 \quad \times \text{ (حتماً قابل تجزیه نیست)}$$

گزینه‌ی «۳»: $\Delta = (3)^2 - 4(-2)(m^2+2) = 9 + 8m^2 + 16$

$$= 8m^2 + 25 > 0 \quad \checkmark \text{ (این عبارت حتماً قابل تجزیه است)}$$

m هرچی باشه
این عبارت مثبت

گزینه‌ی «۴»: $\Delta = (-3)^2 - 4(m+1)(m) = 9 - 4m^2 - 4m$

$$= -4m^2 - 4m + 9 \quad \times$$

(این عبارت نیز به ازای همه‌ی مقادیر m همواره مثبت نیست!)

زنگی: 

راهنما: در عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ اگر $ac < 0$ (یعنی a و c علامتی مخالف هم داشته باشند)، آن‌گاه $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (همواره مثبت) بوده و عبارت همواره قابل تجزیه خواهد بود.

در این تست شرط $ac < 0$ فقط در گزینه‌ی «۳» مشهود است...

گزینه‌ی «۳»: $-2x^2 + 3x + m^2 + 2 \xrightarrow{\substack{a=-2 \\ c=m^2+2}} ac = -2(m^2+2) < 0 \quad \checkmark$
همواره

$\xrightarrow{\substack{a=-2 \\ c=m^2+2}} ac = -2(m^2+2) < 0 \quad \checkmark$
همواره

۴۲۴. گزینه ۱ در معادله‌ی داده‌شده، داریم:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1-\sqrt{3} \\ c=\sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\sqrt{3} \end{cases}$$

بنابراین: مقدار موردنظر $= \left| \frac{\sqrt{1}-\sqrt{\sqrt{3}}}{\text{منفی}} \right| + \sqrt{1} + \sqrt{\sqrt{3}}$

$$= (\sqrt{\sqrt{3}} - 1) + \sqrt{\sqrt{3}} + 1 = 2\sqrt{\sqrt{3}} = 2\sqrt[4]{3}$$

۴۲۵. گزینه ۳ هدف تست، حل معادله‌ی $0.06s^2 - 0.02s + 12 = 124$ یا

$$0.06s^2 - 0.02s - 4 = 0 \text{ است. اگر طرفین را در } 1000 \text{ ضرب کنیم، به}$$

معادله‌ی سراسر است زیر می‌رسیم:

$$6s^2 - 2s - 4000 = 0 \xrightarrow{+2} 3s^2 - 1s - 2000 = 0 \quad (a=3, b=-1, c=-2000)$$

$$\xrightarrow{\text{از } \Delta \text{ برو}} s = \frac{1 \pm \sqrt{24100}}{6} \quad \Delta = (-1)^2 - 4(3)(-2000) = 24100$$

$$\sqrt{24100} = 10\sqrt{241} \approx 10(15.5) = 155 \quad s = \frac{1 \pm 155}{6}$$

$$\Rightarrow s = \frac{166}{6} = 27\frac{5}{6} \quad \checkmark, \quad s = \frac{-154}{6} < 0 \quad \times$$

یعنی سن فرد موردنظر با فشار خون 124 mmHg ، برابر $27\frac{5}{6}$ است.



کمترین مقدار سهمی ۳ است. $\Rightarrow$

در معادله سهمی $y = 2x^2 - 18x + 3$ گزینه ۴: $x = 2$

سهمی از نقطه $(2, 6)$ می‌گذرد، نه نقطه $(2, 5)$ $\Rightarrow y = 6$ ساده‌کن

۴۴۳. گزینه ۱ در گزینه ۱: با این که مختصات رأس سهمی به درستی بیان شده،

یک ایراد اساسی وجود دارد و آن این است که علی‌رغم متفی بودن ضریب x^2 در سهمی

به معادله $y = -(x+1)^2 - 3$ دهانه سهمی رو به بالا است (در صورتی که باید رو

به پایین باز می‌شد)؛ یادمان هست که در سهمی به معادله $y = a(x-h)^2 + k$

مختصات رأس سهمی به صورت $S(h, k)$ است. در سایر گزینه‌ها هم مختصات رأس

سهمی و هم دهانه سهمی (با توجه به علامت a) به درستی بیان و رسم شده است.

همان‌طور که می‌دانید در سهمی‌هایی به فرم کلی $y = ax^2 + c$ (که فاقد x هستن)

رأس سهمی به مختصات $S(0, c)$ روی محور y واقع دارد. (گزینه ۲: این گونه است)

و در سهمی‌هایی به فرم کلی $y = ax^2 + bx + c$ طول رأس S از دستور

$x_S = \frac{-b}{2a}$ و عرض S با قرار دادن $x_S = \frac{-b}{2a}$ به جای x در معادله سهمی

یا به دست آوردن $\frac{-\Delta}{4a}$ حاصل می‌شود. (گزینه‌های ۳ و ۴ از این دسته‌اند)

۴۴۴. گزینه ۲ درباره سهمی به معادله $y = 2x^2 - 18x + 1$ داریم:

$$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{2(2)} = 2 \\ y_S = y(2) = 2(2)^2 - 18(2) + 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow S(2, -7)$$

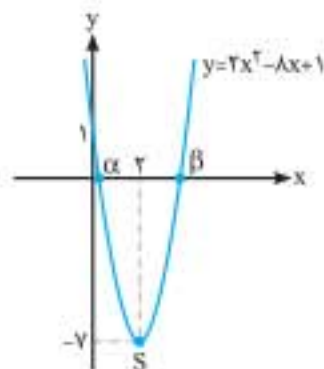
$$y_S = y(2) = 2(2)^2 - 18(2) + 1 = -7$$

دهانه سهمی رو به بالا باز می‌شود. $\Rightarrow a = 2 > 0$

(۱ و ۰) محل تلاقی نمودار با محور y ها $\Rightarrow y(0) = 1$

با همین مشخصات روشن است که سهمی هرگز وارد ناحیه سوم نمی‌شود.

بین:



۴۴۵. گزینه ۳ شرط این که سهمی بالای محور x ها و مماس بر آن قرار

گیرد، این است که: $a > 0, \Delta = 0$

$$\begin{cases} m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (1) \\ \Delta = (-2)^2 - 4(m-2)(m+2) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 16 = 0 \\ \Rightarrow 4m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = \frac{25}{4} \\ \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2} \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مورد قبول } m = (1) \cap (2) = \frac{5}{2}$$

۴۴۶. گزینه ۲ از شکل پیداست که سهمی به معادله $y = ax^2 + 8x + c$

در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x مماس است. بنابراین:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2a} = 2 \Rightarrow 4a = -8 \xrightarrow{+4} a = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (8)^2 - 4(-2)(c) = 0 \Rightarrow 64 + 8c = 0$$

$$\Rightarrow 8c = -64 \xrightarrow{+8} c = -8$$

زرنگی: به دلیل مماس بودن نمودار تابع $f(x) = ax^2 + 8x + c$ بر

محور x ها در نقطه‌ای به طول ۲، می‌توانیم ضابطه‌ی آن را به صورت

$$f(x) = a(x-2)^2$$

$$\begin{aligned} x^2 - 53x + 672 &= 0 \\ (a=1, b=-53, c=672) \end{aligned}$$

$$\Delta = (-53)^2 - 4(1)(672) = 121 \Rightarrow x = \frac{53 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{53 \pm 11}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{53+11}{2} = \frac{64}{2} = 32 \checkmark \\ \text{یا} \\ x = \frac{53-11}{2} = \frac{42}{2} = 21 \times \end{cases}$$

علت مورد قبول نبودن سن $x = 21$ سال برای معلم رو حتماً می‌دونی دیگه؟! آره دیگه. اگه معلم ۲۱ سالش باشه، اون وقت چطور ۲۶ سال قبل...

۴۳۹. گزینه ۱ اگر عدد ۱۵ را به صورت مجموع دو عدد x و $15-x$ بنویسیم،

داریم: $x(15-x) = 52/25 \Rightarrow 15x - x^2 = 52/25$

$$\Rightarrow x^2 - 15x + 52/25 = 0 \xrightarrow{\text{حل از تجزیه}} (x-9/5)(x-5/5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 9/5 = 0 \Rightarrow x = 9/5 \\ \text{یا} \\ x - 5/5 = 0 \Rightarrow x = 5/5 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف دو عدد} = 9/5 - 5/5 = 4/5$$

۴۴۰. گزینه ۲ در درسنامه دیدیم که برای سهمی به معادله

$y = ax^2 + bx + c$ اگر نقطه‌ی S رأس آن باشد، آن‌گاه $x_S = \frac{-b}{2a}$ و

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} \quad \text{یعنی: } S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

در اینجا:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(\frac{1}{4})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \\ y_S &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\frac{31}{16}}{4(\frac{1}{4})} = \frac{-\frac{31}{16}}{1} = -\frac{31}{16} \end{aligned} \Rightarrow S\left(2, -\frac{31}{16}\right)$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(1) = \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}$$

۴۴۱. گزینه ۳ ابتدا معادله سهمی را به شکل استاندارد

$y = 3x^2 - 2mx + 1$ نوشته، سپس مؤلفه یا مختص طول رأس S را از

دستور $x_S = \frac{-b}{2a}$ به دست آورده و برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2m)}{2(3)} = \frac{m}{3} = 1 \Rightarrow m = 3$$

۴۴۲. گزینه ۱ طول رأس رو پیدا کن

$$y = \frac{(m-2)x^2 - (4m-2)x + 3}{a, b, c}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(4m-2)}{2(m-2)} = \frac{2-4m}{2(m-2)} = \frac{1-2m}{m-2}$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} 4m - 2 = 6m - 12 \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری کن}} y = 3x^2 - 18x + 3$$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } \Delta = (-18)^2 - 4(3)(3) = 324 - 36 = 288$$

$\Delta < 0$ محور x ها را قطع نمی‌کند. $\checkmark$

دهانه سهمی رو به بالاست. $\Rightarrow a = 3 > 0$ گزینه ۲:

$$\text{گزینه ۳: } y = 3(3)^2 - 18(3) + 3 = 3$$

دهانه سهمی رو به بالاست. $\Rightarrow$ عرض رأس = ۳

(غیرممکن) $x=1 \Rightarrow 1-a+a=0$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2-ax+a=0$ است.
 $\Rightarrow a = (0, 4)$ مجموعه‌ی مقادیر a

زنگی: با تابع چاق و لاغر مواجهیم و قرار است تابع، محور x ها را فقط در یک نقطه قطع کند، بنابراین باید Δ عامل درجه‌ی دوم (چاق) را منفی کنیم:

$$\Delta = (-a)^2 - 4(1)(a) < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

$x=1$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2-ax+a=0$ است: بنابراین:

$1-a+a=0$ (غیرممکن)

۴۵۱. گزینه ۲ در این تست، نقاط $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ با عرض‌های یکسان روی

سه‌می قرار دارند پس: $x_S = \frac{0-2}{2} \Rightarrow x_S = -1$ معادله‌ی خط تقارن سه‌می

این‌جوری هم ببین: اگر نمودار به سه‌می در نقطه‌ی به طول α و β محور طول‌ها رو قطع کرده باشه، محور تقارن سه‌می (همان خط به معادله‌ی

$x = x_S = \frac{-b}{2a}$ به صورت $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ خواهد بود. زیرا وقتی سه‌می در نقطه‌ی

به طول α و β محور x ها رو قطع می‌کنه، به این معناست که دو نقطه با عرض‌های صفر به صورت $(\alpha, 0)$ و $(\beta, 0)$ روی سه‌می قرار دارن. گرفتید؟

۴۵۲. گزینه ۳ محل تلاقی سه‌می با محور y ها همان b است:

$$S(-1, -4) \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)} = -1 \Rightarrow a = 6 \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a} = -4 \Rightarrow \frac{\Delta}{4(3)} = 4 \Rightarrow \Delta = 48 \\ \Rightarrow (6)^2 - 12b = 48 \Rightarrow 36 - 12b = 48 \\ \Rightarrow -12b = 12 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

(عرض از مبدأ)

زنگی:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)} = -1 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow y = 3x^2 + 6x + b$$

حالا می‌گوییم رأس سه‌می یکی از نقاط خود سه‌می بوده و مختصاتش در معادله‌ی آن صادق است: $S(-1, -4) \in (y = 3x^2 + 6x + b)$ سه‌می

$$\Rightarrow -4 = 3(-1)^2 + 6(-1) + b \Rightarrow -4 = -3 + b \Rightarrow b = -1$$

۴۵۳. گزینه ۳ اگر نمودار تابع را که یک سه‌می است با محور تقارنش در

ذهنتان تجسم کنید، متوجه می‌شوید خط افقی‌ای که با محور تقارن سه‌می

روی نمودار تابع تلاقی می‌کند، همان خط $y = y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

نگاه کن:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + c \\ \Rightarrow \Delta &= (-4)^2 - 4c = 16 - 4c \\ \frac{-\Delta}{4a} &= \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4c - 16}{4} = \frac{3}{4} \\ \text{طرفین وسطین} &\rightarrow 20c - 80 = 12 \\ \Rightarrow 20c &= 92 \Rightarrow c = \frac{92}{20} = \frac{23}{5} \end{aligned}$$

۴۵۴. گزینه ۴ شکل داده‌شده یک سه‌می با رأس $S(1, -2)$ را نشان می‌دهد

که از نقطه‌ی $A(-1, 0)$ نیز می‌گذرد. حالا باید ببینیم این دو ویژگی در معادله‌ی کدام سه‌می صدق می‌کند:

$$\text{گزینه ۱: } y = x^2 - x - 3 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \neq 1 \times$$

$$\text{گزینه ۲: } y = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(2)} = \frac{-1}{4} \neq 1 \times$$

$$\text{گزینه ۳: } y = \frac{-1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-\frac{1}{2})} = 1$$

$$\Rightarrow y_S = \frac{-1}{2}(1)^2 + 1 + \frac{3}{2} = 2 \neq -2 \times$$

$$f(x) = ax^2 + \lambda x + c = a(x-2)^2 = a(x^2 - 4x + 4)$$

$$\Rightarrow ax^2 + \lambda x + c = ax^2 - 4ax + 4a$$

$$\xrightarrow{\text{دوطرفه رو متحد قرار بده}} \begin{cases} \lambda = -4a \Rightarrow a = -2 \quad * \\ c = 4a \xrightarrow{*} c = -8 \end{cases}$$

۴۴۷. گزینه ۲ این بار به جای این که مقدار تابع را به ازای

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2a} = \frac{-10}{a}$$

محاسبه کنیم و برابر ۱۸۰ قرار دهیم، از همان ابتدا مستقیماً از رابطه‌ی $y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = 180$ استفاده می‌کنیم (چرا؟):

$$\frac{-(400 + 4\lambda a)}{4a} = 180 \Rightarrow -400 - 4\lambda a = 720a$$

$$\Rightarrow -400 = 1200a \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$$

۴۴۸. گزینه ۱ عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ با شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$

همواره مثبت و با شرط $\Delta < 0$ و $a < 0$ همواره منفی است.

$$A = x^2 + 3x + k$$

($a=1, b=3, c=k$)

$$\xrightarrow{\text{همواره مثبت (A>0)}} \begin{cases} a = 1 > 0 \quad \checkmark \text{ (این شرط بدیهه‌ای!)} \\ \Delta = (3)^2 - 4(1)(k) < 0 \Rightarrow 9 - 4k < 0 \\ \xrightarrow{+4k} 9 < 4k \xrightarrow{+4} k > \frac{9}{4} \quad \checkmark \end{cases}$$

اشتراک $a=1 > 0$ و $k > \frac{9}{4}$ همان $k > \frac{9}{4}$ است.

زنگی: A همواره مثبت است، پس به ازای $x=0$ هم مثبت است:

$$0 + 0 + k > 0 \Rightarrow k > 0$$

فقط **گزینه ۱** این شرط را دارد.

۴۴۹. گزینه ۳ برای تعیین وضعیت علامت عبارت درجه‌ی دوم، علامت

ضریب x^2 و دلتای $(\Delta = b^2 - 4ac)$ عبارت را بررسی می‌کنیم:

$$A = -3x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

($a = -3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2} - \sqrt{3}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \quad \text{(ضریب } x^2 \text{ منفیه)} \\ \Delta = (\sqrt{2})^2 - 4(-3)(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2 + 12\sqrt{2} - 12\sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

بنابراین در عبارت داده‌شده، $a < 0$ و $\Delta < 0$ بوده و در نتیجه عبارت همواره منفی است.

حالا به نظر شما، درباره‌ی وجود یا عدم وجود ریشه‌های حقیقی معادله‌ی

$$-3x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$$

چه می‌توان گفت؟!

۴۵۰. گزینه ۳ بنا به ویژگی حاصل ضرب صفر (اگر $AB = 0$ ، آن‌گاه $B = 0$ یا

$A = 0$)، معادله‌ی $y = 0$ حتماً یک ریشه‌ی $x = 1$ را دارد (نمودار تابع حتماً در یک

نقطه به طول $x = 1$ محور x ها را قطع می‌کند): بنابراین برای این که معادله ریشه‌ی

دیگری نداشته باشد (و به تبع آن نمودار تابع نیز محور x ها را در نقطه‌ی دیگری قطع

نکند)، باید عامل درجه‌ی دوم معادله‌ی $y = 0$ فاقد ریشه باشد و این هم زمانی اتفاق

می‌افتد که Δ آن منفی شود یا این که $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف آن باشد:

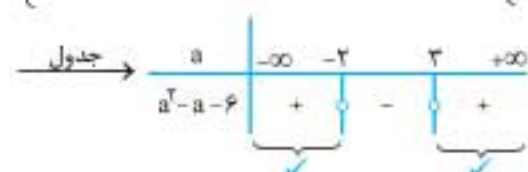
$$\Delta = (-a)^2 - 4(1)(a) < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{یا} \\ a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جدول}} \begin{array}{c|cccc} a & -\infty & 0 & 4 & +\infty \\ \hline a^2 - 4a & + & 0 & - & + \end{array}$$

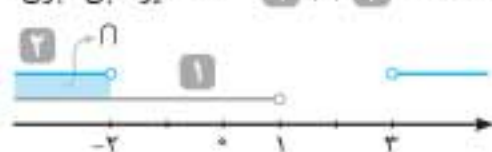
۴۵۹. **گزینه ۲** همواره بالای محور x ها بودن نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به معنای همواره مثبت بودن عبارت درجه‌ی دوم بوده و شرطش این است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد پس:

$$\begin{cases} 1-a > 0 \xrightarrow{+a} a < 1 \quad (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 - 4(1-a)(-a) < 0 \\ \xrightarrow{\text{ساده کن}} 24 + 4a - 4a^2 < 0 \xrightarrow{+4} 6 + a - a^2 < 0 \\ \xrightarrow{\text{همه رو بر سمت راست}} a^2 - a - 6 > 0 \\ \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} a^2 - a - 6 = 0 \\ \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \text{یا} \\ a = -2 \end{cases} \end{cases}$$



ما می‌خواهیم که $a^2 - a - 6 > 0$ **۲** $a < -2$ یا $a > 3$

در نهایت a مقادیر قابل قبول $= (1) \cap (2) = a < -2$



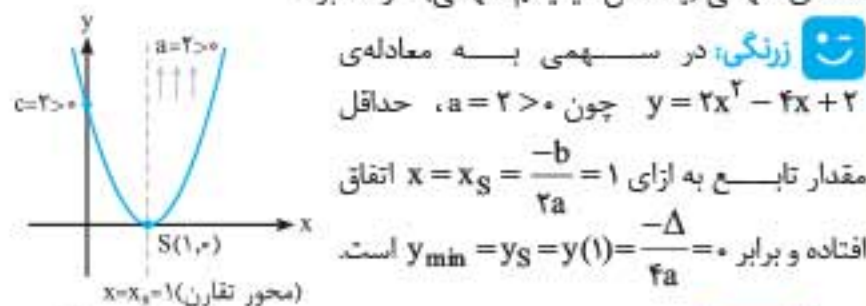
زنگی: باید $1-a > 0$ باشد: پس $a < 1$ و بنابراین **گزینه‌ی ۳** حذف می‌شود. از طرفی به ازای $a = 0$ ضابطه‌ی تابع برابر است با: $y = x^2 + 2\sqrt{6}x$ که نمودار تابع در دو نقطه محور x ها را قطع می‌کند: بنابراین **گزینه‌های ۱ و ۴** حذف می‌شوند.

۴۶۰. **گزینه ۴** حل تست را با باز کردن اتحادها (به منظور تبدیل معادله‌ی سهمی به فرم شناخته‌شده‌ی $y = ax^2 + bx + c$) آغاز می‌کنیم:

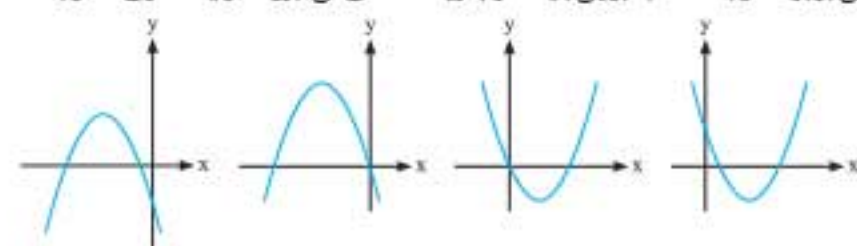
$$y = (x+2)^2 + (x-4)^2 - 18 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 - 18 = 2x^2 - 4x + 2$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 - 4x + 2 \quad \text{حالا مختصات رأس رو حساب کن} \quad \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(2)} = 1 \\ y_S = y(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 2 = 0 \end{cases}$$

نقطه‌ای روی قسمت مثبت محور x هاست. $\Rightarrow S(1,0)$ سهمی به معادله‌ی $y = 2x^2 - 4x + 2$ به دلیل مثبت بودن ضریب x^2 ($a = 2 > 0$) رو به بالا باز شده: بنابراین نقطه‌ی $S(1,0)$ به منزله‌ی پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی (یا همان مینیمم سهمی) خواهد بود.



۴۶۱. **گزینه ۲** مطابق شکل‌های زیر برای این که نمودار تابع درجه‌ی دوم، دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، باید دور ریشه‌ی هم علامت داشته باشد یا یکی از ریشه‌های آن برابر صفر باشد: بنابراین باید ضرب ریشه‌های آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



پس حتماً **گزینه‌ی ۴** موردنظر است. **نگاه کن:**

گزینه‌ی ۴: $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(1/2)} = 1$

$$\Rightarrow y_S = \frac{1}{2}(1)^2 - 1 - \frac{3}{2} = -2 \checkmark$$

$$A(-1,0): 0 = \frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0 \checkmark$$

۴۵۵. **گزینه ۲** شکل به ما می‌گوید که نمودار تابع (سهمی) از مبدأ عبور می‌کند. پس باید مختصات $O(0,0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق کند:

$$0 = 0 + 0 + a^2 - 2 \Rightarrow a^2 = 2 \xrightarrow{\text{جذربگیر}} a = \pm\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب } x^2 \text{ نیز دهانه‌ی سهمی رو به بالا است.}} a = \sqrt{2}$$

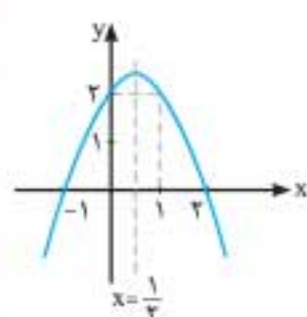
حالا به نظر شما سهمی علاوه بر مبدأ در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع کرده است؟!

۴۵۶. **گزینه ۴** **روش اول** چون سهمی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های -1 و 2 قطع کرده است، پس می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y = a(x+1)(x-2)$ در نظر گرفت. از طرف دیگر نقطه‌ی $(0,2)$ روی سهمی است: پس:

$$2 = a(0+1)(0-2) \Rightarrow a = -1$$

بنابراین معادله‌ی سهمی $y = -(x+1)(x-2)$ است و ... از بین گزینه‌ها فقط نقطه‌ی $(1,2)$ روی آن قرار دارد. (سایر گزینه‌ها رو خودتون چک کنید!)

روش دوم نقطه‌های $(-1,0)$ و $(2,0)$ روی سهمی هستند: پس معادله‌ی محور تقارن آن $x = \frac{1}{2}$ است.



$$y(0) = 2 \Rightarrow y(1) = 2$$

۴۵۷. **گزینه ۱** $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} A(-2, 5) \in f \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = 5 \\ B(0, 5) \in f \Rightarrow a \times 0 + b \times 0 + c = 5 \Rightarrow c = 5 \\ C(1, 11) \in f \Rightarrow a + b + c = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 5 = 5 \\ a + b + 5 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x + 5 \Rightarrow f(-1) = 2 - 4 + 5 = 3$$

پس این سهمی از نقطه‌ی $(-1,3)$ می‌گذرد.

۴۵۸. **گزینه ۱** ابتدا ضابطه‌ی تابع داده‌شده را با باز کردن اتحادها ساده می‌کنیم تا به فرمی شناخته‌شده برسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 + m \\ &= x^2 - (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4) + m \\ &= x^2 - x^2 + 2x - 1 + x^2 + 4x + 4 + m \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + 3 + m \end{aligned}$$

حال به‌خوبی می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y = x^2 + 6x + 3 + m$ دارای کمترین مقدار بوده و این کمترین مقدار به ازای

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ رخ می‌دهد:}$$

$$y_{\min} = y(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 3 + m = 9 - 18 + 3 + m = -6 + m = 7 \Rightarrow m = 13$$

(البته از دستور $y_{\min} = y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ هم می‌تونستیم بریم که احتمالاً طولانی‌تر بود!)

در این سؤال با توجه به سهمی، خط $x=2$ محور تقارن آن بوده و $y(0)=-1$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} y = -2(x+3m-5)^2 + m + 2n \\ x+3m-5=0 \Rightarrow x=-3m+5=2 \Rightarrow m=1 \\ y(0) = -2(-2)^2 + 1 + 2n = -1 \Rightarrow -8+1+2n=-1 \\ \Rightarrow 2n=6 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

حال با توجه به مقادیر m و n داریم:

$$\begin{aligned} y &= mx^2 + nx + 1 = x^2 + 3x + 1 \\ x_S &= \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(1)} = -\frac{3}{2} \\ y_S &= y\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1 = -\frac{9}{4} + 1 = -\frac{5}{4} \Rightarrow S\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right) \end{aligned}$$

۴۶۵. **گزینه ۳** می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $\Delta = 0$ و $x_S = \frac{-b}{2a} > 0$ در نقطه‌ای به طول مثبت و با شرط $\Delta = 0$ و $x_S = \frac{-b}{2a} < 0$ در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

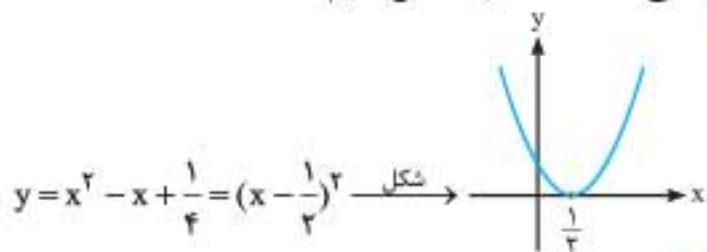
همچنین این سهمی با شرط $\Delta < 0$ و $a < 0$ همواره پایین‌تر از محور طول‌ها و با شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$ همواره بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد. (شاید دیگه نیازی به گفتن نباشه که با شرط $\Delta > 0$ سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کرده و از اون عبور می‌کنه.) حال باید ببینیم سهمی داده‌شده کدام شرط را دارد:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (-(2m^2+1))^2 - 4(1)(m^2+m^2+1) \\ &= 4m^4 + 4m^2 + 1 - 4m^2 - 4m^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2m^2+1}{2} > 0$$

می‌بینیم که شرط $\Delta = 0$ و $x_S > 0$ برقرار بوده و **گزینه ۳** درست است.

زنگی: کافی است $m=0$ را امتحان کنیم.



۴۶۶. **گزینه ۲** ضابطه‌ی سهمی با رأس (m, h) عبارت است از:

$$y = a(x-m)^2 + h$$

در نتیجه ضابطه‌ی سهمی مورد سؤال $y = a(x+1)^2 + 9$ است.

چون سهمی از نقطه‌ی $(3, 1)$ عبور می‌کند، پس این نقطه در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند، پس داریم:

$$1 = a(3+1)^2 + 9 \Rightarrow -8 = 16a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

ضابطه‌ی سهمی $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 9$ و نقطه‌ی $(5, -9)$ در آن صدق می‌کند.

۴۶۷. **گزینه ۱** رأس سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ زمانی روی محور y ها واقع می‌شود که $b=0$ باشد (زیرا وقتی $x_S = \frac{-b}{2a} = 0$ می‌شود که $b=0$ شده باشد). پس:

$$y = -3x^2 + (2m-1)x + 5 \xrightarrow{b=0} 2m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -3x^2 + 5$$

حالا باید سهمی به معادله‌ی $y = -3x^2 + 5$ را با خط به معادله‌ی $y-2=0$

$$\begin{cases} y = -3x^2 + 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow -3x^2 + 5 = 2 \Rightarrow -3x^2 = -3$$

$$\xrightarrow{+(-2)} x^2 = 1 \xrightarrow{\text{جذریگیر}} x = \pm 1$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (m+4)^2 - 4m(2-m) > 0 \\ \Rightarrow m^2 + 8m + 16 - 8m + 4m^2 > 0 \\ \Rightarrow 5m^2 + 16 > 0 \text{ همواره درست است} \\ P \geq 0 \Rightarrow \frac{2-m}{m} \geq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2 \end{cases}$$

$$m=3 \xrightarrow{\text{در معادله}} y = 3x^2 + 7x - 1$$

از هر چهار ناحیه می‌گذرد $ac < 0$

هر گزینه‌ای که $m=3$ را قبول دارد حذف می‌شود: یعنی همه‌ی گزینه‌ها به جز ۲!

۴۶۲. **گزینه ۴** وقتی خطی یک سهمی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی محور تقارن آن است:

$$y = (m-2)x^2 - 3x + m^2 + 1 \quad \xrightarrow{\text{محور تقارن}} x = x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2(m-2)} = \frac{2}{3}$$

$$2(m-2) = 9 \xrightarrow{+4} m-2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{+2} m = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$$

از معادله‌ی سهمی $y = (m-2)x^2 - 3x + m^2 + 1$ پیدا است که محل تلاقی سهمی با

محور y ها، $c = m^2 + 1$ است: $c = m^2 + 1 = \left(\frac{17}{4}\right)^2 + 1 = \frac{289}{16} + 1 = \frac{305}{16}$

۴۶۳. **گزینه ۲** مختصات رأس سهمی را به دست آورده و در معادله‌ی خط $y = -x$ صدق می‌دهیم:

$$y = -2x^2 + bx - 3 \xrightarrow{\text{طول}} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2(-2)} = \frac{b}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی قرار بده}} y_S = y\left(\frac{b}{4}\right) = -2\left(\frac{b}{4}\right)^2 + b\left(\frac{b}{4}\right) - 3$$

$$= -2 \times \frac{b^2}{16} + \frac{b^2}{4} - 3 = -\frac{b^2}{8} + \frac{b^2}{4} - 3 = \frac{b^2}{8} - 3$$

حالا باید رابطه‌ی $y = -x$ یا $y + x = 0$ را با مختصات $S\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3\right)$ برقرار کنیم:

$$\frac{b^2}{8} - 3 + \frac{b}{4} = 0 \xrightarrow{\times 8} b^2 + 2b - 24 = 0$$

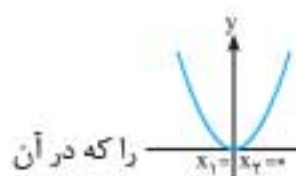
$$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (b+6)(b-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b+6=0 \\ \text{یا} \\ b-4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -6 \xrightarrow{\text{در این صورت}} S\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3\right) = \left(-\frac{6}{4}, \frac{36}{8} - 3\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \checkmark \\ \text{یا} \\ b = 4 \xrightarrow{\text{در این صورت}} S\left(\frac{b}{4}, \frac{b^2}{8} - 3\right) = \left(\frac{4}{4}, \frac{16}{8} - 3\right) = (1, -1) \times \end{cases}$$

به نظر شما علت قبولی $b = -6$ و رد $b = 4$ در این تست چیه؟! بله علت قرار گرفتن رأس سهمی روی نیمساز ناحیه‌ی دوم (نه چهارم) است. درست است که هر نقطه روی خط $y = -x$ دارای طول و عرض قرینه است؛ اما نقاط روی این خط اگر در ناحیه‌ی دوم باشند، دارای طول منفی و عرض مثبت و اگر در ناحیه‌ی چهارم باشند، دارای طول مثبت و عرض منفی اند. طبق فرض سؤال، نقطه‌ی S روی $y = -x$ در ناحیه‌ی دوم قرار دارد پس باید $x_S < 0$ و $y_S > 0$ باشد و از دو مقدار به دست آمده برای b فقط $b = -6$ این حالت را ایجاد می‌کند؛ بنابراین گزینه‌هایی که شامل $b = 4$ هستند، رد می‌شوند.

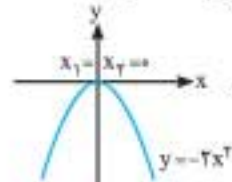
۴۶۴. **گزینه ۴**

راهنما: در سهمی‌هایی به معادله‌ی $y = a(x-h)^2 + k$ ، ریشه‌ی برانتز (یعنی $x = h$) همان محور تقارن سهمی است و سهمی در نقطه‌ای به عرض $y = ah^2 + k$ محور y ها را قطع می‌کند.

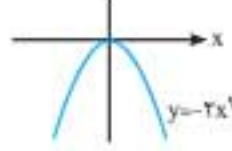


کمی اضافه‌تر: اگر می‌خواهید بدانید چرا حالت $x_1 = x_2 = 0$ را که در آن

نیز سهمی وارد ناحیه‌ی سوم نشده است، در نظر نگرفتیم، باید بگوییم که این حالت برای سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a+2)x$ غیرممکن است: زیرا این حالت زمانی رخ می‌دهد که $x_2 = \frac{a+2}{2} = 0$ شود و آن نیز به معنای $a = -2$



بوده و در این حالت ضریب x^2 منفی شده و سهمی به شکل $y = -2x^2$ تبدیل می‌شود.



زنگی: فرض کنید $a = -2$ باشد: بنابراین:

با توجه به شکل، گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» حذف می‌شود.

۴۷۲. گزینه ۴ مختصات رأس نمودار تابع در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند:

$$f(x) = x^2 + 2x - c \xrightarrow{f(-1)=3} 3 = (-1)^2 + 2(-1) - c \Rightarrow 3 = -1 - c \Rightarrow c = -4$$

حالاً باید با توجه به ضابطه‌ی تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4$ ، ضابطه‌ی تابع $y = f(2x-1)$ را (با جایگزین کردن $(2x-1)$ به جای x ها) به دست آورده و بعد مختصات رأس نمودار آن را به دست آوریم:

$$y = f(2x-1) = (2x-1)^2 + 2(2x-1) + 4$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 + 4 \Rightarrow y = 4x^2 + 3$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(4)} = 0, y_s = y(0) = 4(0)^2 + 3 = 3 \Rightarrow S(0, 3)$$

زنگی: می‌توانیم به کمک انتقال نمودارها هم، سؤال را حل کنیم: ببینید:

$$S(-1, 3) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} S_1(0, 3) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} S_2(0, 3)$$

طول‌ها بر ۲ تقسیم می‌شوند یک واحد به راست

پس مختصات رأس سهمی تابع $f(2x-1)$ به صورت $(0, 3)$ خواهد بود.

۴۷۳. گزینه ۲ همه‌ی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

با کمی دقت به شکل متوجه می‌شویم که:

الف) سهمی رو به بالاست، پس $a > 0$ است.

ب) سهمی محور y ها را زیر محور x ها قطع کرده است، پس $c < 0$ است.

پ) طول رأس سهمی منفی است، پس:

$$\frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$$

در نتیجه داریم:

گزینه ۱ حذف می‌شود. $a > 0, b > 0, c < 0 \Rightarrow abc < 0$

از روی نمودار تابع، کاملاً مشخص است که تابع f دارای دو صفر مختلف‌العلامت است که قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است: پس:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta < 0 \\ P = \alpha\beta < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS < 0$$

گزینه ۲ درست است. $\Rightarrow$

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$$

گزینه ۳ حذف می‌شود. $\Rightarrow \frac{b^2}{4} > ac$

می‌دانیم که رأس سهمی، در وسط صفرهای تابع قرار دارد: بنابراین:

$$\begin{cases} x_s = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ y_s = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow$$

گزینه ۴ حذف می‌شود.

۴۶۸. گزینه ۳ برای محاسبه‌ی مساحت مثلث موردنظر، ابتدا باید قاعده و سپس ارتفاع آن را به دست آوریم. قاعده همان فاصله‌ی بین دو ریشه و ارتفاع هم قدرمطلق عرض رأس سهمی است. مجموع ضرایب معادله‌ی $x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر صفر است، پس ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = m - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{قاعده‌ی مثلث} = |x_2 - x_1| = |m - 2|$$

$$\text{عرض رأس سهمی} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-m)^2 - 4(m-1)}{4 \times 1}$$

$$= -\frac{m^2 - 4m + 4}{4} = \frac{(m-2)^2}{-4}$$

$$\text{ارتفاع} = \left| \frac{(m-2)^2}{-4} \right| = \frac{(m-2)^2}{4}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \frac{(m-2)^2}{4} \times |m-2| = \frac{|m-2|^3}{8} = 1 \Rightarrow |m-2|^3 = 8$$

$$\Rightarrow |m-2| = 2 \Rightarrow m-2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases} \xrightarrow{m > 0} m = 4$$

۴۶۹. گزینه ۴ تست تلاش می‌کند بگوید تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 - x + \frac{2}{3}$

حداقل مقداری برابر $\frac{1}{4}$ دارد: زیرا $y \geq \frac{1}{4}$ به معنای $y_{\min} = \frac{1}{4}$ است.

بنابراین اولاً باید $a > 0$ باشد تا تابع بتواند دارای حداقل مقدار شود (حذف

گزینه‌های «۱» و «۲»)، ثانیاً باید این مقدار حداقل (یعنی $\frac{1}{4}$) برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ باشد:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(a)\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{8}{3}a$$

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 - \frac{8}{3}a}{4a} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} \frac{16}{3}a - 2 = 4a$$

$$\Rightarrow \frac{16}{3}a - 4a = 2 \Rightarrow \frac{4}{3}a = 2 \xrightarrow{\times \frac{3}{4}} a = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

۴۷۰. گزینه ۴ نقطه‌ی مشترک نداشتن بین سهمی و خط به معنای عدم وجود ریشه در معادله‌ی تلاقی آن دو است:

$$\begin{cases} y = (2x+1)(x+8) \\ y = mx \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} (2x+1)(x+8) = mx$$

$$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} 2x^2 + 17x + 8 - mx = 0 \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حالا باید این معادله رو منفی کنیم}} \Delta = (17-m)^2 - 4(2)(8) < 0$$

$$\Rightarrow (17-m)^2 - 64 < 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} (17-m)^2 < 64$$

$$\xrightarrow{\text{جذری کنیم}} |17-m| < 8 \Rightarrow -8 < 17-m < 8$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} -17 < -25 < -m < -9 \xrightarrow{\times (-1)} 9 < m < 25$$

۴۷۱. گزینه ۲ معادله‌ی $ax^2 - (a+2)x = 0$ دو ریشه به صورت $x_1 = 0$ و

$$x_2 = \frac{a+2}{a}$$

دارد. حال با اندکی تجسم نموداری درمی‌یابیم برای این که سهمی نتواند وارد ناحیه‌ی سوم شود، باید به شکل x_1 باشد. یعنی

اولاً دهانه‌ی سهمی باید رو به بالا باشد ($a > 0$)، ثانیاً ریشه‌ی

$$x_2 = \frac{a+2}{a} > 0 \xrightarrow{\text{با توجه به این که } a > 0} a+2 > 0 \Rightarrow a > -2$$

معادله‌ی مربوطه مثبت باشد:

$$\xrightarrow{\text{با اعمال شرط } a > 0} a > 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \alpha = 1 \quad \text{و} \quad \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{-3}$$

زنگی: در معادله‌ی درجه‌ی دومی که یکی از ریشه‌هایش $\alpha = 1$ است، مجموع ضرایب صفر شده و ریشه‌ی دیگر معادله $\beta = \frac{c}{a}$ است:

$$-3x^2 + (m+1)x + m = 0$$

$$\xrightarrow{\alpha=1} \text{مجموع ضرایب} = -3 + m + 1 + m = 0 \Rightarrow 2m = 2$$

$$\Rightarrow m = 1 \Rightarrow \text{ریشه‌ی دیگر} = \beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{-3} = \frac{1}{-3}$$

۴۸۰. گزینه ۱ از ویژگی «حاصل ضرب صفر» ($AB = 0 \Rightarrow A = 0$ یا $B = 0$) استفاده کرده و داریم:

$$(2x+1)(3x^2-7x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (یک ریشه)} \\ \text{یا} \\ 3x^2-7x+1=0 \xrightarrow{\text{بدون حل}} P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(تضمین وجود دو ریشه $\Rightarrow \Delta = 49 - 12 > 0$)

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب سه ریشه} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

به نظر شما مجموع ریشه‌های معادله چقدر است؟

۴۸۱. گزینه ۴ هدف سؤال، محاسبه‌ی مقدار $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ است. اما پیش از شروع بهتر است به کمک ضرایب معادله مقادیر S و P را به دست آوریم:

$$2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{m+1}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\text{حالا: } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} = \sqrt{(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{1}{8}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲ برسیم}} \frac{m+1}{2} + \frac{1}{8} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{8} \Rightarrow m+1 = \frac{7}{4} \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

توجه: مطابق با مطالب درسنامه، می‌توانستیم به کمک فرمول

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

۴۸۲. گزینه ۲

راهنما: هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی دو، دلتای معادله، مربع کامل باشد یا به عبارتی دارای جذر کامل باشد، لازم نیست از رابطه‌ی بین ریشه‌ها استفاده شود در این حالت ریشه‌های معادله را حساب کرده، سپس خواسته‌ی سؤال را محاسبه کنید.

$$\text{الان در چنین وضعی هستیم: } \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{-c}{a} = 2 \end{cases} \xrightarrow{\alpha < \beta \text{ یا شرط } a+c=b}$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 + 7\beta^2 = 5(-1)^2 + 7(2)^2 = 5 + 28 = 33$$

۴۸۳. گزینه ۳ ریشه‌های معادله را α و β می‌نامیم و داریم:

$$\alpha = \beta + 2 \xrightarrow{\text{برویم طرفین اضافه کن}} \alpha + \beta = 2\beta + 2$$

$$\xrightarrow{\text{از روی ضرایب معادله}} 4 = 2\beta + 2 \Rightarrow 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\alpha + \beta = \frac{A}{P} = 4$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار دهیم } x=1} 2(1)^2 - 8(1) + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} \quad (*)$$

برای معادله‌ی $2x^2 - 9x - 1 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{9}{2} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{(*)} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\frac{9}{2}}{-\frac{1}{2}} = -9$$

۴۷۵. گزینه ۴ در معادله‌ی داده شده داریم:

$$3x^2 - 4x - 2 = 0 \xrightarrow{a=3, b=-4, c=-2} \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته‌ی تست}} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \frac{16}{9} - 2\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{9} + \frac{4}{3} = \frac{16+12}{9} = \frac{28}{9}$$

۴۷۶. گزینه ۲ در اینجا ابتدا معادله‌ی داده شده را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$(3m-1)x^2 - 2x + (1-m^2) = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{1}{3m-1} \Rightarrow \frac{2}{3m-1} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3m-1 = 8$$

$$\Rightarrow m = 3 \xrightarrow{\text{در معادله بذار}} 8x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = P = \frac{c}{a} = \frac{-8}{8} = -1$$

۴۷۷. گزینه ۴ اولاً برای این که معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، باید $\Delta > 0$ یعنی:

$$\Delta = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(m) > 0 \Rightarrow \frac{1}{16} - 2m > 0 \xrightarrow{+2m} 2m < \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow m < \frac{1}{32}$$

تانیاً برای این که حاصل ضرب این دو ریشه برابر ۴ باشد، باید:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

اما می‌بینیم که این جواب در شرط $m < \frac{1}{32}$ صدق نمی‌کند: پس هیچ مقداری برای m نداریم.

زنگی: ابتدا از شرط $P = \frac{c}{a} = 4$ مقدار m را ($\frac{m}{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow m = 2$)

یافته، سپس شرط وجود دو جواب حقیقی (همان $\Delta > 0$) را به ازای $m = 2$ بررسی می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{1}{16} - 4 < 0$$

در نتیجه معادله فاقد ریشه‌ی حقیقی است و $m = 2$ قابل قبول نیست!

۴۷۸. گزینه ۲ طبق مطالب گفته شده در درسنامه داریم:

$$|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{|1|} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

زنگی: با حل معادله می‌توانیم به سادگی جواب را به دست آوریم:

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=12} x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$|x' - x''| = 2\sqrt{3}$$

۴۷۹. گزینه ۳ شکی نیست که جواب معادله در معادله صدق می‌کند. از اینجا مقدار m به دست می‌آید:

$$-3x^2 + (m+1)x + m = 0 \xrightarrow{x=1} -3 + m + 1 + m = 0$$

$$\Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1 \xrightarrow{\text{در معادله بذار}} -3x^2 + 2x + 1 = 0$$



زنگی: اگر جواب‌های معادله را x_1 و x_2 در نظر بگیریم، داریم:

$$|x_1 - x_2| = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \Delta = 4a^2$$

$$\Rightarrow 64 - 8m = 16 \Rightarrow 8m = 48 \Rightarrow m = 6$$

۴۸۴. (گزینه ۱) در این مسئله دلتای معادله جذر کامل دارد و ریشه‌ها به راحتی قابل محاسبه‌اند. نگاه کنید:

$$x^2 - 20x + 64 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (x - 16)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{16} + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$$

۴۸۵. (گزینه ۴) اگر ریشه‌ها را α و β بنامیم، آن‌گاه:

$$\frac{-b}{a} = \frac{\beta + \alpha}{1} = \frac{S}{P} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c}$$

$$= \frac{-(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)}{-(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{6} + 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1}{2 - 1}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3} + 1$$

۴۸۶. (گزینه ۱) معکوس بودن ریشه‌های معادله، یعنی $\alpha = \frac{1}{\beta}$ یا $\alpha\beta = 1$ است: پس:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3-a}{a-1} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3-a = a-1$$

$$\Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

به دلیل وجود گزینه‌ی «۴»، حالا باید ببینیم که به ازای $a = 2$ معادله جواب حقیقی دارد یا خیر:

$$(a-1)x^2 + 2ax + 3-a = 0 \xrightarrow{a=2} x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0 \quad \checkmark$$

پس معادله دارای ریشه‌ی حقیقی بوده و $a = 2$ قابل قبول است.

۴۸۷. (گزینه ۳) همان‌طور که در درسنامه گفته شد، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها λ برابر ریشه‌ی دیگر باشد، آن‌گاه رابطه‌ی $\frac{b^2}{ac} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}$ بین ضرایب معادله و عدد λ برقرار است.

بنابراین با توجه به رابطه‌ی بالا برای $\lambda = 3$ داریم:

$$\frac{(-4)^2}{k(k+2)} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{16}{k^2 + 2k} = \frac{16}{3} \Rightarrow k^2 + 2k = 3$$

$$\Rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} k = 1 \text{ یا } k = \frac{c}{a} = -3$$

۴۸۸. (گزینه ۴) معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، دو ریشه‌ی مثبت دارد، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(9m+6) > 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0 \\ \Rightarrow (m-12)(m+4) > 0 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12 \quad 1 \\ S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0 \quad 2 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6 \quad 3 \end{cases}$$

اشتراک سه مجموعه جواب به دست آمده بازه‌ی $(-6, -4)$ است.

۴۸۹. (گزینه ۳) با توجه به ضرایب معادله، حاصل ضرب دو ریشه قابل محاسبه بوده و در نتیجه...

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-a}{3a} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{-1}{3}$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{2}{3}} \frac{2}{3} \times \beta = \frac{-1}{3} \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} \beta = \frac{-1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$$

۴۹۰. (گزینه ۳) عبارت داده‌شده بر حسب ریشه‌های معادله همان اتحاد مکعب دوجمله‌ای است:

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 = S^3 = \left(\frac{-b}{a}\right)^3$$

$$= (-3)^3 = -27$$

۴۹۱. (گزینه ۴) با توجه به ضرایب معادله، حاصل جمع ریشه‌ها قابل محاسبه است: کار را با همین شروع می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} \Rightarrow \alpha + \beta = -2 \Rightarrow \alpha = -\beta - 2$$

حالا در رابطه‌ی داده‌شده به جای α قرار می‌دهیم $\alpha = -\beta - 2$:

$$\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\alpha\beta + 4 = 0 \Rightarrow (-\beta - 2)^2 + 3\beta^2 + 4(-\beta - 2)\beta + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 4\beta + 4 + 3\beta^2 - 4\beta^2 - 8\beta + 4 = 0 \Rightarrow -4\beta + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4\beta = 8 \Rightarrow \beta = 2 \xrightarrow{2} \alpha = -2 - 2 = -4 \Rightarrow \alpha\beta = -8$$

۴۹۲. (گزینه ۳) برای ریشه‌های α و β ، جذر معکوس ریشه‌ها، یعنی $\sqrt{\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ و $\sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ پس:

$$\text{مجموع جذر ریشه‌ها} = A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}$$

$$= \frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} \xrightarrow{\text{با توجه به ضرایب معادله } S=4, P=2} A = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

(روابط $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S+2\sqrt{P}}$ و $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S-2\sqrt{P}}$ را بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم به خاطر بسپارید!)

۴۹۳. (گزینه ۲) با کمی توجه به رابطه‌ی داده‌شده و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی درجه‌ی دوم درمی‌یابیم که برقراری رابطه‌ی $c + 2b + 4a = 0$ بین ضرایب معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ به معنای این است که $x = 2$ یکی از ریشه‌های آن است: زیرا با جایگزین کردن $x = 2$ در معادله دقیقاً به رابطه‌ی $4a + 2b + c = 0$ می‌رسیم. حال اگر ریشه‌ی دیگر معادله را β بنامیم و از رابطه‌ی حاصل ضرب ریشه‌ها $(P = \alpha\beta = \frac{c}{a})$ استفاده کنیم، داریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \xrightarrow{\alpha=2} 2\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \beta = \frac{c}{2a}$$

$$3x^2 + (2m-1)x + 2-m = 0$$

$$\text{سؤال} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{x_1 x_2} \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{1-m}{3} = \frac{3}{2-m}$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow (2m-1)(m-2) = 9$$

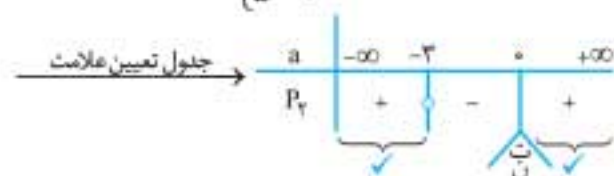
$$\Rightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{7}{2} \end{cases}$$

حالا Δ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4 \times 2 \times (-7) \xrightarrow{m=-1} \Delta = 9 - 36 < 0$$

پس $m = \frac{7}{2}$ قابل قبول است.

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت } P_1} \begin{cases} a+3=0 \Rightarrow a=-3 \\ a=0 \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\text{می‌خواهیم } P_1 > 0} a > 0 \text{ یا } a < -3$$

$$\xrightarrow{\text{در نهایت}} \text{مجموعه‌ی مقادیر } a = 1 \cap 2 \cap 3 = \{a | a < -9\}$$



$$a = -4 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x) = -4x^2 - x - 1$$

$$\xrightarrow{\text{وجود ریشه‌ها}} \Delta = (-1)^2 - 4(-4)(-1) = -15 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

حذف گزینه‌ی «۲»

$$a = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 \xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} s = -\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5 > 0$$

این یعنی هر دو ریشه منفی نبوده‌اند! گزینه‌هایی که $-\frac{1}{2}$ را قبول دارند غلط هستند! یعنی گزینه‌های «۳» و «۴» ...

۴۹۹. گزینه ۱ با در نظر گرفتن شرط دو ریشه‌ی حقیقی و مثبت متمایز، داریم:

$$\xrightarrow{\text{شرط‌ها}} 1) \Delta > 0, 2) P > 0, 3) S > 0$$

$$x^2 + (m-2)x + m+1 = 0$$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac = (m-2)^2 - 4 \times 1 \times (m+1) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد روی باز کن}} m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 > 0 \Rightarrow m^2 - 8m > 0$$

$$\Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 8 \quad 1$$

$$2) P = \frac{c}{a} = m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \quad 2$$

$$3) S = -\frac{b}{a} = -(m-2) > 0 \Rightarrow -m+2 > 0 \Rightarrow m < 2 \quad 3$$

$$\text{جواب نهایی} = 1 \cap 2 \cap 3 = (-1, 0)$$



۵۰۰. زنگی: با گذاشتن $m = -2$ و $m = 7$ ، $m = 9$ می‌توانید Δ را بررسی و گزینه‌های غلط را حذف کنید ...

۵۰۰. گزینه ۳ در گزینه‌ها موقعیت نمودار تابع که یک سهمی است، نسبت به محور x ها بررسی شده و می‌دانیم آنچه در این مورد اهمیت دارد، علامت Δ و علامت صف‌های تابع (نقاط تلاقی با محور طول‌ها) است: بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3m)^2 - 4(m^2)(-1)$$

$$= 9m^2 + 4m^2 = 13m^2 \xrightarrow{m \neq 0} \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو نقطه‌ی تلاقی دارد.}$$

$$\text{حاصل ضرب صف‌های تابع} = P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{m^2} < 0$$

آن دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند، پس نمودار تابع در دو طرف مبدأ، محور طول‌ها را قطع می‌کند.

۵۰۱. گزینه ۱ اگر α و β را صف‌های تابع بنامیم، آن‌گاه با کم کردن نیم واحد از آن‌ها به اعداد $\alpha - \frac{1}{2}$ و $\beta - \frac{1}{2}$ می‌رسیم و برای حاصل ضرب‌شان داریم:

$$(\alpha - \frac{1}{2})(\beta - \frac{1}{2}) = \alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4} = \alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{4}$$

۴۹۵. گزینه ۱ در معادله‌ی درجه‌ی دوم داده‌شده ضرایب a و b معلوم بوده و با توجه به رابطه‌ی حاصل جمع ریشه‌ها داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5 \xrightarrow{\alpha=2} 2 + \beta = 5 \Rightarrow \beta = 3$$

بنابراین $\alpha = 2$ و $\beta = 3$ ریشه‌های این معادله بوده و ...

$$\alpha^2 + \beta^2 = (2)^2 + (3)^2 = 4 + 9 = 13$$

همان‌طور که می‌بینید بدون توجه به مقدار m توانستیم سؤال رو حل کنیم!

۴۹۶. گزینه ۳ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه طبق فرض تست

$$\alpha = \beta^2 \text{ بوده و با توجه به ضرایب معادله، } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 6$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = m + 5 \text{ است. ابتدا تلاش می‌کنیم به کمک روابط } \alpha + \beta = 6$$

$$\alpha\beta = m + 5 \text{ مقدار ریشه‌ها را یافته، سپس به کمک رابطه‌ی } \alpha = \beta^2$$

مقدار m را پیدا کنیم. نگاه کن:

$$\begin{cases} \alpha = \beta^2 \\ \alpha + \beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \beta^2 + \beta - 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (\beta+3)(\beta-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta+3=0 \Rightarrow \beta=-3 \\ \text{یا} \\ \beta-2=0 \Rightarrow \beta=2 \end{cases} \xrightarrow{\alpha=\beta^2} \begin{cases} \alpha=9 \\ \text{یا} \\ \alpha=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = -27 \\ \text{یا} \\ \alpha\beta = 8 \end{cases} \xrightarrow{\alpha\beta=m+5} \begin{cases} m+5 = -27 \Rightarrow m = -32 \\ \text{یا} \\ m+5 = 8 \Rightarrow m = 3 \end{cases}$$

که فقط $m = -32$ در گزینه‌ها دیده می‌شود!

۴۹۷. گزینه ۱ فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله باشند.

با توجه به اتحاد $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$ ، ضریب x^2 را ساده می‌کنیم و در معادله‌ی مرتب‌شده مقدار S را پیدا می‌کنیم و ...

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}-1)x^2 + (1-\sqrt{3})x - 17 = 0$$

$$\Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(1-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = -\beta + 1$$

با توجه به رابطه‌ی * یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر، ۱ واحد بیشتره!

۴۹۸. گزینه ۱ باید معادله‌ی $f(x) = 0$ دو ریشه‌ی منفی داشته باشد. این زمانی

محقق می‌شود که به‌طور همزمان داشته باشیم:

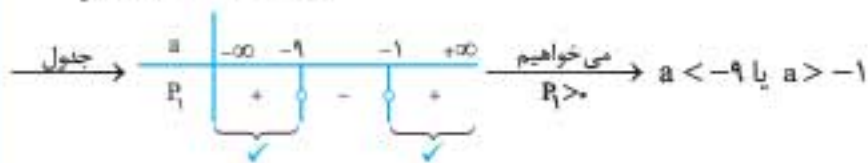
$$\Delta > 0, P > 0, S < 0$$

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4a(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 6a + 9 + 4a > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 10a + 9}{R_1} > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت } P_1} R_1 = a^2 + 10a + 9 = (a+1)(a+9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ a+9=0 \Rightarrow a=-9 \end{cases}$$



$$2) P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \xrightarrow{\text{صورت کسر منفی برای مثبت شدن کسر}} a < 0$$

$$3) S = \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-(a+3)}{a} < 0 \xrightarrow{\text{قرینه کن}} \frac{a+3}{a} > 0$$

$$\alpha > \beta \rightarrow A = 2\sqrt{\alpha} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} = (\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2^2 \times 5} = \sqrt[4]{20}$$

۵.۵. **گزینه ۲** ابتدا مقدار $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1 x_2$ را به کمک ضرایب معادله به دست آورده، سپس شرط تشکیل دنباله‌ی حسابی را اعمال می‌کنیم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m, P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m, P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2 \Rightarrow 2m = 4 + 2 = 6 \Rightarrow m = 3$$

یادآوری: اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه رابطه‌ی $2b = a + c$ بین آن‌ها برقرار است.

۵.۶. **گزینه ۲** اگر ریشه‌ها را α و β بگیریم، بر اساس آنچه سؤال بیان می‌کند، داریم:

$$2\alpha = \frac{\beta}{2} + 1 \xrightarrow{\times 2} 4\alpha = \beta + 2 \xrightarrow{+\alpha} 5\alpha = (\alpha + \beta) + 2$$

$$\xrightarrow{\text{ضرایب معادله}} 5\alpha = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{9}{10} \quad (\text{یکی از ریشه‌های معادله})$$

$$\text{ریشه‌ی معادله در آن صدق می‌کند، پس:} \quad 4\alpha^2 - 10\alpha + 2m = 0 \xrightarrow{\alpha = \frac{9}{10}} 4\left(\frac{9}{10}\right)^2 - 10\left(\frac{9}{10}\right) + 2m = 0 \Rightarrow \frac{81}{25} - 9 + 2m = 0$$

$$\Rightarrow 2m = 9 - \frac{81}{25} = \frac{144}{25} \xrightarrow{+2} m = \frac{144}{25} \times \frac{2}{2} = \frac{288}{25} = 2/88$$

۵.۷. **گزینه ۳** در چنین سؤال‌هایی با قرار دادن α و β در معادله (به‌عنوان ریشه‌های معادله) روابط را به گونه‌ای می‌سازیم که ما را به سمت جواب هدایت کند.

$$\text{در اینجا داریم:} \quad \begin{cases} \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2 = 5\alpha \\ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } A} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2} = \frac{\alpha}{5\alpha} = \frac{1}{5} \\ \beta^2 - 5\beta + 2 = 0 \xrightarrow{\text{رواقت‌کن}} \beta^2 - 6\beta + 7 = -\beta + 5 \\ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } A} \frac{\beta - 5}{\beta^2 - 6\beta + 7} = \frac{\beta - 5}{-\beta + 5} = -1 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{5} - (-1) = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$$

۵.۸. **گزینه ۴** اگر رابطه‌ی داده‌شده را به صورت $2a + b + 12 = 0$ بنویسیم و

با معادله‌ی داده‌شده مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که یکی از ریشه‌ها $x_1 = -2$ است.

$$2(-2)^2 - a(-2) + b = 0 \Rightarrow 12 + 2a + b = 0$$

بنابراین داریم:

$$2x^2 - ax + b = 0 \Rightarrow P = x_1 x_2 = \frac{b}{2} \xrightarrow{x_1 = -2} -2x_2 = \frac{b}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{4}$$

۵.۹. **گزینه ۴** ابتدا توجه کنید که $S = \alpha + \beta = 2$ و $P = \alpha\beta = \frac{3}{4}$. حالا تلاش می‌کنیم عبارت $\alpha^4 + \beta^4$ را به کمک اتحاد $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$ بر حسب S و P بنویسیم و...

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$

$$= ((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$= \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{9}{16}\right) = \frac{25}{4} - \frac{9}{8} = \frac{50 - 9}{8} = \frac{41}{8}$$

$$\frac{x^2 + 3x - c = 0}{(\alpha + \beta = -3)} \quad \alpha\beta - \frac{1}{2}(-3) + \frac{1}{4} = \alpha\beta + \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \alpha\beta + \frac{7}{4}$$

یعنی به حاصل ضرب صفرهای تابع $\frac{7}{4}$ اضافه می‌شود.

زنگی:

$$c = -2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

$$2 = \text{حاصل ضرب } -1, -2 \quad \text{صفرهای تابع}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \text{اختلاف}$$

$$-\frac{3}{2} \quad -\frac{5}{2} \quad \text{حاصل ضرب} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{15}{4} - 2 = \frac{7}{4}$$

۵.۲. **گزینه ۳** با توجه به فرض تست، ریشه‌های معادله را $(\alpha - 1)^2$ و $(\alpha + 1)^2$ در نظر بگیریم. با توجه به جمع ریشه‌ها داریم:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-290}{1} = 290 \Rightarrow (\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 = 290$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 290 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2 = 290 \Rightarrow \alpha^2 = 144$$

$$\xrightarrow{\alpha \in \mathbb{N}} \alpha = 12$$

پس ریشه‌های معادله 12^2 و 14^2 هستند. با توجه به ضریب ریشه‌ها داریم:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow m^2 = 12^2 \times 14^2 \Rightarrow m = 12 \times 14 = 168 \Rightarrow \sqrt{m+1} = \sqrt{169} = 13$$

۵.۳. **گزینه ۱** با توجه به ضرایب معادله‌ی $x^2 + bx + b = 0$ داریم:

$$S = -\frac{b}{a} = -b, P = \frac{c}{a} = b$$

حالا سعی می‌کنیم رابطه‌ی داده‌شده را بر حسب S و P بنویسیم و...

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{3}{\beta} = 1 \xrightarrow{\text{در صورت کسر رو بساز}} \frac{2\beta + 3\alpha}{\alpha\beta} = 1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{2\beta + 3\alpha}{\alpha\beta} = 1$$

$$\frac{(2\beta + 3\alpha) + \alpha}{\alpha\beta} = 1 \Rightarrow \frac{2(\alpha + \beta) + \alpha}{\alpha\beta} = 1 \xrightarrow{\alpha + \beta = S = -b} \frac{-2b + \alpha}{\alpha\beta = P = b} = 1$$

$$\xrightarrow{\times b} \frac{-2b + \alpha}{b} = 1 \xrightarrow{+2b} \alpha = 3b \quad (\text{یک ریشه‌ی معادله})$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار بده}} (3b)^2 + b(3b) + b = 0 \Rightarrow 9b^2 + 3b^2 + b = 0$$

$$\Rightarrow 12b^2 + b = 0 \xrightarrow{\text{فکتور بگیر}} b(12b + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \quad (\text{چرا؟}) \\ \text{یا} \\ 12b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{12} \quad \checkmark \end{cases}$$

۵.۴. **گزینه ۴** برای حل این تست، به جای این که حاصل $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$ و

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|$$
 را به‌طور جداگانه از روابط $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$ و

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$
 محاسبه کرده و جمع کنیم، فرض می‌کنیم α

$$2x^2 - (\sqrt{5} + 2)x + \sqrt{5} = 0$$
 ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی باشد $\alpha > \beta$ و در

نتیجه $\sqrt{\alpha} > \sqrt{\beta}$ داریم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 2\sqrt{\alpha}$$

یعنی حاصل، دو برابر جذر ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله است. حالا کافی است معادله

را حل کرده و ریشه‌ی بزرگ‌تر آن را به دست آوریم:

$$2x^2 - (\sqrt{5} + 2)x + \sqrt{5} = 0 \xrightarrow{\frac{a+b+c}{a}} \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

زنگی: به ازای $m = 6$ ضریب x^2 صفر می‌شود، پس گزینه‌ی «۲» غلط!

$$m = 2 \xrightarrow{\text{در معادله}} -4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف گزینه‌ی «۳»}} \Delta = (-4)^2 - 4(-4)(-3) = -32 \xrightarrow{\text{ریشه ندارد}}$$

$$m = -7 \xrightarrow{\text{در معادله}} -13x^2 + 14x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حذف گزینه‌ی «۱»}} \Delta = \frac{b^2}{a} = \frac{14^2}{-13} < 0 \Rightarrow \text{دو ریشه‌ی منفی ندارد} \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها}$$

۵۱۳. **گزینه ۱** ابتدا توجه کنید که به ازای $a = 3$ ضابطه‌ی تابع می‌شود

$$f(x) = 3x - 1 \text{ و نمودار تابع } f \text{ از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. فرض کنید } a \neq 3.$$

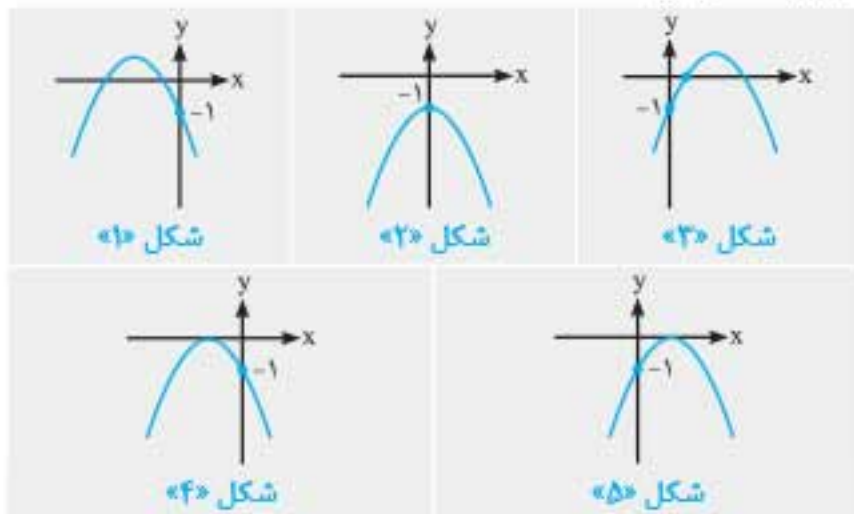
می‌دانیم اگر ضریب x^2 بزرگ‌تر از صفر باشد، نمودار تابع درجه‌ی دوم حتماً از

ناحیه‌ی اول می‌گذرد. پس حتماً باید: $a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$ ۱

با شرط $a < 3$ ، یکی از شکل‌های زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم. البته توجه

داشته باشید که $f(0) = -1$ است، یعنی نمودار تابع محور y را در نقطه‌ای به

عرض -1 قطع می‌کند.



از این ۵ شکل، فقط **شکل ۳** مدنظر ما نیست، پس شرایط **شکل ۳** را محاسبه

کرده و آن را از شرط $a < 3$ کم می‌کنیم (اصل متمم). اما مشاهده می‌کنیم که

در **شکل ۳** نمودار تابع در دو نقطه با طول‌های مثبت محور x را قطع کرده

است، یعنی شرایط **شکل ۳** به‌صورت مقابل است: $\Delta > 0, P > 0, S > 0$

و اما حل این سه نامعادله:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a+6)(a-2) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} a < -6 \text{ یا } a > 2 \quad \text{۲}$$

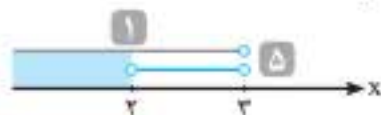
$$P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a-3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad \text{۳}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < a < 3 \quad \text{۴}$$

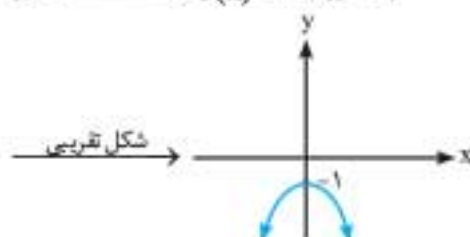
$$\text{۲} \cap \text{۳} \cap \text{۴} \Rightarrow 2 < a < 3 \quad \text{۵}$$

حالا برای پیدا کردن جواب نهایی مسئله باید ۵ را از ۱ کم کنیم، پس جواب

نهایی مسئله برابر است با: $a \leq 2$



زنگی: این جوری فرض کن: $a = 0 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x) = -3x^2 - 1$



می‌بینید که سهمی از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد! پس هر گزینه‌ای که $a = 0$ را

قبول ندارد، حذف می‌شود: یعنی گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴»!

زنگی: با محاسبه‌ی $\Delta = 4 - 3 = 1$ ، ریشه‌ها را یافته و...

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۵۱۰. **گزینه ۱** α ریشه‌ی معادله است و در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha \quad \text{۱}$$

حالا با توجه به رابطه‌ی ۱ حاصل عبارت موردنظر را به‌دست می‌آوریم:

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 = (2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 4((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = 4(2^2 - 2(-4)) = 4(4 + 8) = 48$$

مقادیر $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از روی ضرایب معادله محاسبه کرده‌ایم:

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

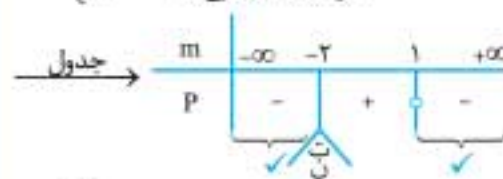
۵۱۱. **گزینه ۱** وقتی نمودار یک سهمی محور x را در هر دو طرف مبدأ

قطع می‌کند، معادله‌ی مربوطه دو ریشه دارد: یکی مثبت و دیگری منفی و

این یعنی حاصل ضرب ریشه‌ها باید منفی باشد:

$$P = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} 1-m < 0 \\ m+2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 1 \text{ (ریشه‌ی صورت)} \\ m > -2 \text{ (ریشه‌ی مخرج)} \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\text{می‌خواهیم}} \text{مجموعه‌ی مقادیر مورد قبول } m \text{ } \{m \mid m < -2 \text{ یا } m > 1\}$$

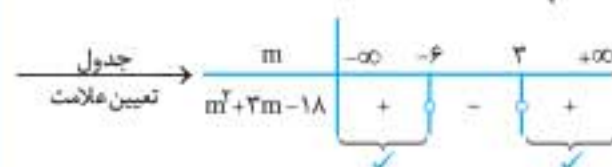
۵۱۲. **گزینه ۴** شرط داشتن دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز در معادله‌ی

درجه‌ی دوم عبارت است از:

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(m-6)(-3) = 4m^2 + 12m - 72 > 0$$

بنابراین:

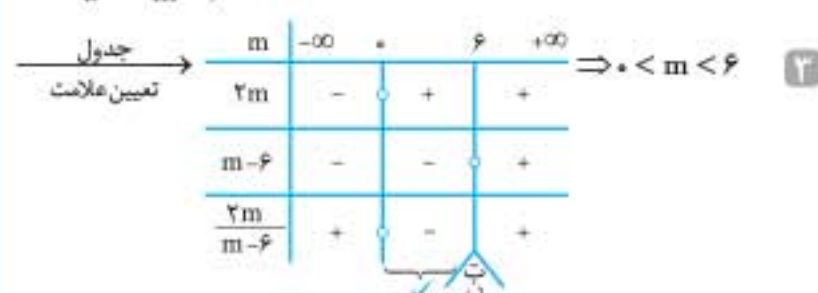
$$\xrightarrow{+4} \Delta = m^2 + 3m - 18 > 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (m+6)(m-3) > 0$$



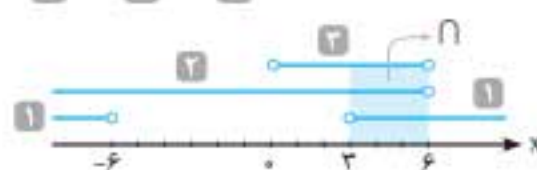
$$\Rightarrow m < -6 \text{ یا } m > 3 \quad \text{۱}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6 \quad \text{۲}$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{m-6} < 0$$



$$\text{جواب نهایی} = \text{۱} \cap \text{۲} \cap \text{۳} \Rightarrow 3 < m < 6$$



۵۲۰. **گزینه ۳** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 4 \\ P = x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

همچنین اگر ریشه‌های معادله‌ی خواسته‌شده را α و β بنامیم، طبق فرض تست داریم:

$$\begin{cases} \alpha = -3x_1 + 2 \\ \beta = -3x_2 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S' = \alpha + \beta = -3(x_1 + x_2) + 4 = -3(4) + 4 = -8 \\ P' = \alpha\beta = (-3x_1 + 2)(-3x_2 + 2) = 9x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 4 \\ = 9 - 24 + 4 = -11 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله جدید}} x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 - (-8)x - 11 = 0 \rightarrow x^2 + 8x - 11 = 0$$

زنگی: اگر ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ را با x و ریشه‌ی معادله‌ی خواسته‌شده را با X نمایش دهیم، داریم:

$$X = 3(-x) + 2 \Rightarrow 3x = 2 - X \Rightarrow x = \frac{2 - X}{3}$$

$$\left(\frac{2 - X}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2 - X}{3}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{4 - 4X + X^2}{9} - \frac{8 - 4X}{3} + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 4 - 4X + X^2 - 24 + 12X + 9 = 0 \Rightarrow X^2 + 8X - 11 = 0$$

۵۲۱. **گزینه ۳** با توجه به ضرایب معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ، $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$ و $\alpha\beta = -2$ است و برای S و P معادله‌ی جدید داریم:

$$S = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = \frac{-3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1$$

$$= \frac{1}{-2} + \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 1 = \frac{-1}{2} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{-2 - 3 + 4}{4} = \frac{-1}{4}$$

حالا معادله‌ی جدید را به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

۵۲۲. **گزینه ۳** ابتدا معادله‌ی $x(5x + 3) = 2$ را مرتب می‌کنیم و با توجه به ضرایب آن مقادیر $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{5} \\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{5} \end{cases}$$

سپس ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ را $x_1 = \frac{1}{\alpha^2}$ و $x_2 = \frac{1}{\beta^2}$ فرض می‌کنیم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{-3}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{-2}{5}\right)}{\left(\frac{-2}{5}\right)^2} = \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{29}{4}$$

$$\text{از طرفی: } S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{k}{4}$$

$$\frac{k}{4} = \frac{29}{4} \Rightarrow k = 29$$

بنابراین:

زنگی: چون معادله‌ی $5x^2 + 3x - 2 = 0$ به راحتی حل می‌شود، مستقیماً ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم و...

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \sqrt{2} \\ \beta = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = (1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 2 \\ P = \alpha\beta = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2 \\ = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 - 2x - 1 = 0$$

کمی اضافه‌تر: اگر معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ در گزینه‌ها وجود نداشته باشد، به جای آن می‌توان هر مضربی از معادله را به عنوان معادله‌ی موردنظر معرفی کرد. برای مثال به جای همین معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ می‌توان هر یک از معادله‌های $-2x^2 + 4x + 2 = 0$ (۲- برابر آن) یا $\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ (۱/۳ برابر آن) را معرفی کرد.

۵۱۵. **گزینه ۱** معادله‌ی درجه‌ی دومی با $S = -1/5$ و $P = -7$ تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم: $x^2 + 1/5x - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 1/5x - 7 = 0$

$$\xrightarrow{\text{ابتدا در ۵ ضرب می‌کنیم تا ساده تر شود}} 5x^2 + x - 35 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از } \Delta \text{ بیرو}} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 700}}{10} = \frac{-1 \pm 27}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-1 + 27}{10} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5} \\ \beta = \frac{-1 - 27}{10} = \frac{-28}{10} = \frac{-14}{5} \end{cases}$$

۵۱۶. **گزینه ۲** با توجه به فرض سؤال $S = 2\sqrt{3}$ و $P = -1$ از طرفی معادله‌ی موردنظر به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است: پس:

$$x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \xrightarrow{\times \sqrt{3}} \sqrt{3}x^2 - 6x - \sqrt{3} = 0$$

۵۱۷. **گزینه ۲** ریشه‌های معادله با ضرایب معلوم $3x^2 + 7x + 1 = 0$ را α و β و ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ را x_1 و x_2 می‌نامیم. بر اساس گفته‌ی تست $x_1 = \alpha + 1$ و $x_2 = \beta + 1$ است. از طرفی با توجه به ضرایب معادله‌ی $3x^2 + 7x + 1 = 0$ ، $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{3}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ است.

اکنون توجه کنید که:

$$P = x_1 x_2 = (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -1$$

$$\xrightarrow{x^2 + ax + b = 0} b = -1$$

۵۱۸. **گزینه ۴** جواب‌های معادله‌ی $x^2 - bx - 2c = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم: برای جواب‌های معادله‌ی مطلوب (که آن‌ها را x_1 و x_2 فرض کرده‌ایم) داریم:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2\alpha - 2\beta = -2(\alpha + \beta) \xrightarrow{\alpha + \beta = b} S = -2b \\ P = x_1 x_2 = (-2\alpha)(-2\beta) = 4\alpha\beta \xrightarrow{\alpha\beta = -2c} P = -8c \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 + 2bx - 8c = 0$$

۵۱۹. **گزینه ۴** ابتدا مقادیر S و P را به دست می‌آوریم:

$$S = \alpha + \beta = (\sqrt{a} - \sqrt{a+1}) + (\sqrt{a} + \sqrt{a+1}) = 2\sqrt{a}$$

$$P = \alpha\beta = (\sqrt{a} - \sqrt{a+1})(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{a+1})^2 = a - (a+1) = -1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{a}x - 1 = 0$$

بنابراین:

زنگی: این جوری فرض کن: $a = 1 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2} \Rightarrow P = -1, S = 2$
 $\xrightarrow{\text{مطابقت با گزینه‌ها}} x^2 - 2\sqrt{a}x - 1 = 0 \xrightarrow{a=1} x^2 - 2x - 1 = 0$

۵۲۶. گزینه ۱) سؤال را از منظر دیگری حل می‌کنیم. ریشه‌های معادله‌ی

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \quad (\text{به دلیل صفر شدن مجموع ضرایب}) \quad x_1 = 1 \text{ و } x_2 = \frac{3}{4}$$

بوده و در نتیجه ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ به صورت $\alpha = \frac{2}{x_1}$

و $\beta = \frac{2}{x_2} = \frac{8}{3}$ هستند. حال اگر مجموع این دو ریشه را برابر رابطه‌ی مجموع دو ریشه

با توجه به ضرایب معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ قرار دهیم، مقدار a به دست می‌آید:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow 2 + \frac{8}{3} = \frac{-a}{3} \Rightarrow \frac{14}{3} = \frac{-a}{3} \Rightarrow a = -14$$

برای به دست آوردن مقدار b نیز می‌توانیم از حاصل ضرب ریشه‌ها کمک بگیریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 \times \frac{8}{3} = \frac{b}{3} \Rightarrow b = 16$$

۵۲۷. گزینه ۳) با توجه به داده‌های سؤال، مستطیل زیر را رسم می‌کنیم:



$$S_{\text{مستطیل}} = (fm + 3) \times m = 45 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} fm^2 + 3m - 45 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از روش } \Delta \text{ حل کن}} \Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(f)(-45)$$

$$= 729 > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه داریم.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{729}}{2f} = \frac{-3 + 27}{2f} \\ = \frac{24}{2f} = 3 = \text{عرض}, 4a + 3 = 4(3) + 3 = 15 = \text{طول} \\ \text{یا} \\ m = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{729}}{2f} = \frac{-3 - 27}{2f} \\ = \frac{-30}{2f} < 0 \quad \times \end{cases}$$

$$\text{بنابراین:} \quad \text{قطر} = \sqrt{3^2 + 15^2} = \sqrt{234}$$

۵۲۸. گزینه ۴) همان‌طور که گفتیم در یک لیگ با n تیم، که هر تیم با دیگر تیم‌های لیگ فقط یک بازی انجام می‌دهد، تعداد کل بازی‌های انجام شده

$$\text{از رابطه‌ی } N = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{n(n-1)}{2} \text{ به دست می‌آید.}$$

$$\text{در اینجا داریم:} \quad \frac{n(n-1)}{2} = 105 \Rightarrow n(n-1) = 2 \times 105 \Rightarrow n^2 - n - 210 = 0$$

$$\Rightarrow (n-15)(n+14) = 0 \Rightarrow n = 15$$

۵۲۹. گزینه ۱) با توجه به شکل، طول قاب مستطیل شکل برابر $2x + 15$ و

$$(2x + 15)(2x + 10) = 300 \quad \text{عرض آن است: داریم:}$$

$$\xrightarrow{\text{انحاد جمله‌ی مشترک}} (2x)^2 + (15+10)(2x) + 15 \times 10 = 300$$

$$\xrightarrow{\text{مرتبه کن}} 4x^2 + 50x - 150 = 0 \xrightarrow{+2} 2x^2 + 25x - 75 = 0 \quad (a=2, b=25, c=-75)$$

$$\xrightarrow{\Delta \text{ برو}} \Delta = (25)^2 - 4(2)(-75) = 625 + 600 = 1225$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{1225} = 35 \Rightarrow x = \frac{-25 \pm 35}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \checkmark \\ x = \frac{-60}{4} < 0 \quad \times \end{cases} \Rightarrow \text{ابعاد قاب} = (2x + 10) \times (2x + 15)$$

$$\xrightarrow{x = \frac{5}{2}} (2 \times \frac{5}{2} + 10) \times (2 \times \frac{5}{2} + 15) = 15 \times 20$$

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \alpha = -1 \text{ یا } \beta = \frac{-c}{a} = \frac{2}{5}$$

ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\alpha^2} = 1 \xrightarrow[\text{قرار ده}]{\text{در معادله}} 4 - k + 25 = 0 \Rightarrow k = 29 \quad \checkmark \\ x_2 = \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4} \end{cases}$$

۵۲۳. گزینه ۲) ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ را α و β و

ریشه‌های معادله‌ی مطلوب را x_1 و x_2 فرض می‌کنیم. در این صورت بر اساس

گفته‌ی سؤال، $x_1 = \alpha^2$ و $x_2 = \beta^2$ بوده و با توجه به این‌که

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 4 \text{ و } \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{است، مقادیر } S = x_1 + x_2 \text{ و } P = x_1 x_2$$

$$S = x_1 + x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (3\sqrt{2})^2 - 2(4) = 18 - 8 = 10$$

$$P = x_1 x_2 = \alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (4)^2 = 16 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$$

۵۲۴. گزینه ۱) می‌دانیم که منظور از صفرهای تابع $f(x) = x - 3\sqrt{x} + 2$ ریشه‌های معادله‌ی $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ است. از طرفی این معادله با تغییر متغیر

$$\sqrt{x} = t \quad (\text{که معادل } x = t^2 \text{ است}) \text{ به معادله‌ی درجه‌ی دوم } t^2 - 3t + 2 = 0$$

تبدیل می‌شود و داریم:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \xrightarrow[\text{ضرایب صفر}]{\text{مجموع}} \begin{cases} t = 1 \\ \text{یا} \\ t = 2 \end{cases} \xrightarrow{x=t^2} \begin{cases} x = 1^2 = 1 = \alpha \\ \text{یا} \\ x = 2^2 = 4 = \beta \end{cases}$$

بنابراین دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{1}{1} + 1 = 2$ و

$$\frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \text{ هستند. برای این منظور مقادیر } S = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\text{و } P = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \text{ را محاسبه می‌کنیم و معادله‌ی } x^2 - Sx + P = 0 \text{ تشکیل می‌دهیم:}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow[\frac{P=5}{2}]{\frac{S=13}{4}} x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{5}{2} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 13x + 10 = 0$$

۵۲۵. گزینه ۳) اگر ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - mx - 8 = 0$ را x_1 و x_2 و

ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ را α و β بنامیم، بر اساس فرض تست

و رابطه‌ی مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها می‌توان نوشت:

$$4x^2 - mx - 8 = 0 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{x_1 \text{ و } x_2 \text{ هستن}} \begin{cases} x_1 = \alpha^2 \\ x_2 = \beta^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{m}{4}, \quad x_1 x_2 = \alpha^2 \beta^2 = -1$$

$$2x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ هستن}} \begin{cases} \alpha\beta = \frac{-2}{2} = -1 \\ \alpha + \beta = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

حال اگر طرفین رابطه‌ی $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ را به توان ۳ برسانیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\frac{m}{4}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{m}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \xrightarrow{\times 4} m = 13$$

۵۳. گزینه ۳



راهنما: برای حل معادله‌ی درجه‌ی ۴، $ax^4 + bx^2 + c = 0$ که به معادله‌ی «دو مجذوری» معروف است، از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده کرده و معادله‌ی درجه‌ی دوم، $at^2 + bt + c = 0$ را حل می‌کنیم. در این معادله اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد، هر دو معادله فاقد جواب حقیقی است. ولی اگر $\Delta \geq 0$ باشد، جواب‌های به‌دست آمده برای t را با توجه به تغییر متغیر $x^2 = t$ ($x = \pm\sqrt{t}$) به جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی ۴ تبدیل کرده و بررسی می‌کنیم.

$$x^4 - 8x^2 + 8 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 8t + 8 = 0$$

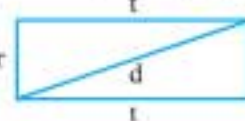
$$\xrightarrow[\Delta=64-32=32]{\Delta \geq 0} t = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{8 + \sqrt{32}}{2} \\ t_2 = \frac{8 - \sqrt{32}}{2} \end{cases}$$

با توجه به این که $8 > \sqrt{32}$ است، هر دو ریشه‌ی t_1 و t_2 مثبت بوده و با توجه به $x^2 = t$ یا $x = \pm\sqrt{t}$ معادله‌ی اصلی چهار ریشه‌ی دوبره‌دو قرینه دارد:

$$x = \pm\sqrt{t} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{t_1} = \pm\sqrt{\frac{8 + \sqrt{32}}{2}} \\ x = \pm\sqrt{t_2} = \pm\sqrt{\frac{8 - \sqrt{32}}{2}} \end{cases}$$

به نظرتون آیا می‌تونیم بگیم مجموع این ۴ ریشه برابر صفره؟

۵۳۱. گزینه ۴ مستطیل یا سیم به طول ۲۰ ساخته شده، پس محیط آن برابر ۲۰ است.

۱  $2r + 2t = 20 \xrightarrow{+2} r + t = 10$

۲ $r = 10 - t$ رویر حسب t پیدا کن

۳ $d = \sqrt{r^2 + t^2}$ رادیکال رو بی‌خیال شو! قطر مستطیل باید مینیمم شود

۴ $(10 - t)^2 + t^2 = 100 - 20t + t^2 + t^2$ طبق اتحاد

به معادله‌ی یک سهمی رسیدیم که برای مینیمم شدن کافی است طول رأس آن را حساب کنیم:

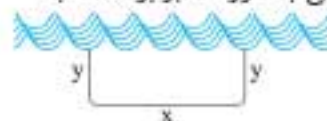
$$2t^2 - 20t + 100 \xrightarrow{\text{مینیمم شود}} t = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2(2)} = \frac{20}{4} = 5$$

از آنجایی که $r + t = 10$ ، پس مجموع دو عدد مثبت، ثابت است. می‌خواهیم حاصل ضرب آن‌ها مینیمم شود: بنابراین $r = t = 5$ و مساحت مستطیل برابر است با: $rt = 5 \times 5 = 25$



زنگی: از آنجایی که $r + t = 10$ ، پس مجموع دو عدد مثبت، ثابت است. می‌خواهیم حاصل ضرب آن‌ها مینیمم شود: بنابراین $r = t = 5$ و مساحت مستطیل برابر است با: $rt = 5 \times 5 = 25$

۵۳۲. گزینه ۲ مطابق شکل، اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم، طول فنس به‌کاررفته برابر است با: $x + 2y = 100$



از طرفی برای مساحت این مستطیل داریم:

$$S = xy \xrightarrow[\text{قرار ده: } x=100-2y]{x+2y=100} S = (100 - 2y)y = -2y^2 + 100y$$

حال می‌خواهیم تابع مساحت (که معادله‌ی یک سهمی است) بیشترین مقدار خود را اختیار کند. یادمان هست که بیشترین مقدار یک سهمی در رأس آن اتفاق می‌افتد:

$$S = -2y^2 + 100y \Rightarrow x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = 25$$

$\Rightarrow S_{\text{max}} = S(25) = -2(25)^2 + 100(25) = -1250 + 2500 = 1250 \text{ m}^2$
یعنی اگر ابعاد زمین مستطیل‌شکلی را به‌صورت $x \times y = 50 \times 25$ انتخاب کنیم، بیشترین مقدار ممکن برای مساحت ایجاد می‌شود.

$$(x = 100 - 2y = 100 - 50 = 50)$$



زنگی: طبق نکته‌ی گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$x + 2y = 100 \xrightarrow[\text{که مقادیر مساوی باهم جمع شوند (x, y > 0)}]{\text{حاصل ضرب xy موقعی ماکزیمم می‌شود}} \begin{cases} x = 50 \\ 2y = 50 \Rightarrow y = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\text{max}} = xy = 50 \times 25 = 1250$$

۵۳۳. گزینه ۳ محیط یا پیرامون پنجره برابر است با: $3x + 2y = 4$

از طرفی مساحت پنجره که از مجموع مساحت‌های مستطیل و مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل می‌شود، برابر است با:

$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

حالا از رابطه‌ی $3x + 2y = 4$ ، y را بر حسب x یافته و در رابطه‌ی S جایگزین می‌کنیم:

$$3x + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 4 - 3x \xrightarrow{+2} y = 2 - \frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow S = x(2 - \frac{3}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} S = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = (\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2})x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow S = (\frac{\sqrt{3}-6}{4})x^2 + 2x \xrightarrow[\text{شدن } S]{\text{برای ماکزیمم}} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(\frac{\sqrt{3}-6}{4})} = \frac{-4}{\sqrt{3}-6}$$

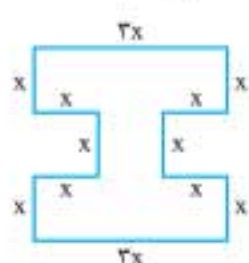
بنابراین:

$$S_{\text{max}} = (\frac{\sqrt{3}-6}{4})(\frac{16}{(\sqrt{3}-6)^2}) + \frac{-8}{\sqrt{3}-6}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}-6} - \frac{8}{\sqrt{3}-6} = \frac{-4}{\sqrt{3}-6} = \frac{4}{6-\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{مویاکن}} \frac{4}{6-\sqrt{3}} \times \frac{6+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}} = \frac{4(6+\sqrt{3})}{36-3} = \frac{4(6+\sqrt{3})}{33}$$

$$\Rightarrow S_{\text{max}} = \frac{4}{33}(6+\sqrt{3})$$



۵۳۴. گزینه ۱ با توجه به فرض تست، شکل مقابل به‌دست می‌آید:

$$\text{محیط شکل} = 6x + 10x = 16x$$

$$\text{مساحت شکل} = (3x)^2 - 2x^2 = 7x^2$$

$$\Rightarrow 7x^2 = 16x \Rightarrow 7x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x(7x - 16) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غیق} \\ x = \frac{16}{7} & \checkmark \end{cases}$$



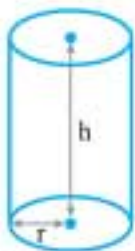
۵۳۵. گزینه ۲ با توجه به شکل مقابل، اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم، لولا $y < x$ است (می‌دونی که چرا؟)، تألیا طبق گفته‌ی تست داریم:

$$\text{محیط: } P = 2(x + y) = 9 \Rightarrow x + y = \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{2} - x$$

$$\text{مساحت: } S = xy = 5 \xrightarrow{\text{قرار ده}} x(\frac{9}{2} - x) = 5$$

یعنی بین مثلث‌هایی که مجموع ارتفاع و قاعده‌ی وارد بر آن ارتفاع برابر ۱۲ است، بیشترین مساحت را مثلثی دارد که سهم ارتفاع و قاعده‌ی آن از عدد ۱۲ یکسان باشد ($b = h = \frac{12}{2} = 6$).

کمی اضافه‌تر: وقتی مجموع چند عبارت مثبت مقدار ثابتی است، حاصل ضرب آن‌ها زمانی بیشترین مقدار ممکن را دارد که آن عبارت‌ها سهم یکسانی از حاصل جمع داشته باشند. مثلاً وقتی $b + h = 12$ است، برای ماکزیمم شدن $S = \frac{1}{2}bh$ (که به معنای ماکزیمم شدن bh نیز هست) باید $b = h = \frac{12}{2} = 6$ باشد. یعنی:

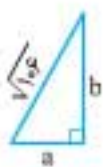
$$S_{\max} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$


۵۳۹. گزینه ۲ استوانه‌ای با شعاع قاعده‌ی r (قطر $2r$) و ارتفاع h در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{فرض تست} \quad 2r + h &= 15 \Rightarrow h = 15 - 2r \\ \text{مساحت جانبی استوانه} \quad S &= 2\pi rh \\ \Rightarrow S &= 2\pi r(15 - 2r) = 30\pi r - 4\pi r^2 \end{aligned}$$

نمودار تابع S برحسب r یک سهمی بوده که دارای بالاترین نقطه است ($a = -4\pi < 0$) و زمانی حداکثر مقدار خود را اختیار می‌کند که $r = \frac{-b}{2a} = \frac{-30\pi}{2(-4\pi)} = \frac{15}{4}$ انتخاب شود:

$$S_{\max} = S\left(\frac{15}{4}\right) = -4\pi\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 30\pi\left(\frac{15}{4}\right) = -\frac{225}{4}\pi + \frac{450}{4}\pi = \frac{225}{4}\pi$$



۵۴۰. گزینه ۲ اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی موردنظر را به صورت شکل مقابل در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \text{رابطه‌ی فیثاغورس} \quad a^2 + b^2 &= (\sqrt{106})^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 106 \\ \text{فرض سؤال} \quad a + b &= 14 \Rightarrow b = 14 - a \end{aligned}$$

حال اگر در رابطه‌ی $a^2 + b^2 = 106$ قرار دهیم $b = 14 - a$ داریم:

$$a^2 + (14 - a)^2 = 106 \xrightarrow{\text{بازکن}} a^2 + 196 - 28a + a^2 = 106$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 2a^2 - 28a + 90 = 0 \xrightarrow{+2} a^2 - 14a + 45 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل از روش تجزیه اتحاد جمله‌ی مشترک}} (a - 9)(a - 5) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی حاصل ضرب صفر}} \begin{cases} a - 9 = 0 \Rightarrow a = 9 \\ \text{یا} \\ a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به فرض } b = 14 - a} \begin{cases} b = 14 - 9 = 5 \\ \text{یا} \\ b = 14 - 5 = 9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در هر دو حالت}} S = \frac{1}{2} \times 9 \times 5 = \frac{45}{2} = 22.5$$

۵۴۱. گزینه ۴ ابتدا با توجه به تساوی $(x^2 - 1)^2 = -(1 - x^2)^2$ معادله را به شکل $(1 - x^2)^2 + 19(1 - x^2)^2 - 216 = 0$ بازنویسی می‌کنیم. حالا با فرض $u = (1 - x^2)^2$ به معادله‌ی درجه‌ی دوم $u^2 + 19u - 216 = 0$ می‌رسیم:

$$u^2 + 19u - 216 = 0 \xrightarrow{\text{حل از روش } \Delta}$$

$$\Delta = (19)^2 - 4(1)(-216) = 361 + 864 = 1225 \xrightarrow{\sqrt{1225}=35}$$

$$u = \frac{-19 \pm 35}{2} \Rightarrow u = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{یا} \quad u = \frac{-54}{2} = -27$$

مابعد دنبال جواب‌های معادله، برحسب x هستیم، پس برمی‌گردیم به فرض $u = (1 - x^2)^2$:

$$\begin{cases} (1 - x^2)^2 = 8 \Rightarrow 1 - x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{فاقد جواب} \\ \text{یا} \\ (1 - x^2)^2 = -27 \Rightarrow 1 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله‌ی اصلی ۲ و -۲ است که حاصل ضرب آن‌ها برابر $(2)(-2) = -4$ است.

$$\xrightarrow{\text{برای سادگی محاسبات}} x^2 \xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 2x^2 - 9x + 10 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta \text{ برو}} x = \frac{9 \pm 1}{4} \quad (\Delta = (-9)^2 - 4(2)(10) = 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9+1}{4} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{در } y} y = 2 \quad (x = 5/2, y = 2) \quad \checkmark \\ \text{یا} \\ x = \frac{9-1}{4} = \frac{2}{2} = 1 \xrightarrow{\text{در } y} y = 5/2 \quad (x = 1, y = 5/2) \quad \times \end{cases}$$

واضح است که به دلیل بزرگ‌تر بودن طول نسبت به عرض، حالت $x = 5/2$ و $y = 2$ مورد قبول است!

۵۳۶. گزینه ۲ می‌دانیم $0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1$ ، بنابراین توان دوم این عبارت هم بین صفر و یک قرار دارد، پس:

$$\begin{cases} 0 \leq \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^2 < 1 \\ \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^2 + \frac{x^2}{x^2 + 1} < 2 \\ 0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-6} -6 \leq \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)^2 + \frac{x^2}{x^2 + 1} - 6 < -4$$

پس عبارت سمت چپ معادله نمی‌تواند مساوی صفر باشد و در نتیجه معادله، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

زنگی: $t = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 2 \end{cases}$

چون $t \geq 0$ است، پس $t = -3$ غیرقابل قبول است. اگر $t = 2$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 2 \Rightarrow x^2 = 2x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = -2 \quad \text{غیرممکن}$$

بنابراین معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۵۳۷. گزینه ۱ با اعمال تغییر متغیر $x^2 = t$ داریم:

$$2t^2 - 7t - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta \text{ برو}} t = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{7 \pm 9}{4}$$

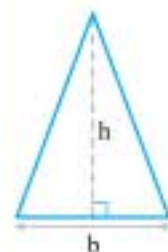
$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ \text{یا} \\ t_2 = \frac{7-9}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا فرض کنیم } x^2 = t} \begin{cases} x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذریگیر}} x = \pm \sqrt{4} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2 \\ \text{یا} \\ x^2 = -\frac{1}{2} \quad \times \quad (\text{هیچ } x \text{ حقیقی این تساوی رو برقرار نمی‌کنه}) \end{cases}$$

یعنی معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد!

۵۳۸. گزینه ۲ اگر مثلثی با ارتفاع h و قاعده‌ی b

مطابق شکل روبه‌رو در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$b + h = 12 \Rightarrow b = 12 - h$$


$$\text{فرمول مساحت} \quad S = \frac{1}{2}bh \xrightarrow{\text{در } b} S = \frac{1}{2}(12 - h)h = 6h - \frac{1}{2}h^2$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2}h^2 + 6h \xrightarrow{\text{برای ماکزیمم شدن } S} h = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{1}{2})} = 6$$

$$\Rightarrow S_{\max} = S(6) = -\frac{1}{2}(6)^2 + 6(6) = -18 + 36 = 18$$

اما اگر دنبال مقدار دقیق $S = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2$ هستید، کافی است با فرض $x_1 = \sqrt{3}-1$ و $x_2 = \sqrt{3}+1$ ، حاصل $S = x_1^2 + x_2^2$ را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3}-1 \\ x_2 = \sqrt{3}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sqrt{3} \\ x_1 x_2 = 3-1=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$= ((2\sqrt{3})^2 - 2(2)) = (12-4) = 8$$

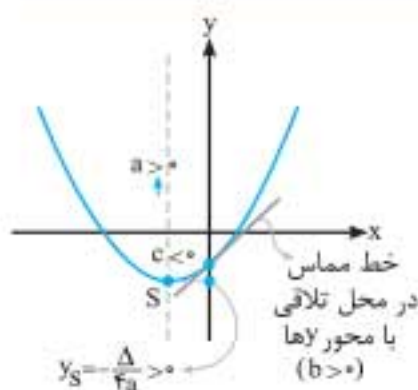
گزینه ۱

راهنما: برای رسم نمودار تابع درجه‌ی دوم (یا همان سهمی) $y = ax^2 + bx + c$ ، تشخیص علامت ضرایب a ، b و c و نیز مختصات رأس سهمی (به خصوص طول رأس) اهمیت بسزایی دارد. به طوری که:

۱) اگر $a > 0$ ، دهانه‌ی سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ ، دهانه‌ی سهمی رو به پایین است.

۲) در محل تلاقی نمودار با محور y ها، اگر خط مماس بر نمودار به صورت $(/)$ باشد، $b > 0$ و اگر به صورت $(\backslash)$ باشد، $b < 0$ است و اگر خط مماس افقی باشد، $b = 0$ خواهد بود.

۳) علامت عدد ثابت c نیز به معنای محل تلاقی نمودار با محور y ها است. اگر نمودار، محور y ها را در بالای مبدأ قطع کند، $c > 0$ و اگر در پایین مبدأ قطع کند، $c < 0$ است. واضح است که اگر نمودار محور y ها را در مبدأ قطع کند، $c = 0$ است.



در این تست با توجه به شکل داریم:

۱) دهانه‌ی سهمی رو به بالا است (یعنی $a > 0$).

۲) خط مماس در محل تلاقی نمودار با محور y ها به صورت صعودی $(/)$ است (یعنی $b > 0$).

۳) نمودار، محور y ها را در پایین مبدأ قطع کرده است (یعنی $c < 0$).

با توجه به ۲ و ۳ مقدار bc منفی است.

زنگی: اگر $b = 0$ باشد (جمع ریشه‌ها صفر می‌شود) پس $x_S = 0$ که طبق شکل امکان ندارد! (با دو ریشه‌ی قرینه ...)

اگر $c = 0$ شود سهمی باید از مبدأ بگذرد که آن هم امکان ندارد، پس **گزینه‌های ۳ و ۴ غلط هستند!** برای حذف **گزینه‌ی ۲**، این جوری فرض کن:

$$a=1, b=1, c=1 \xrightarrow{\text{در معادله}} f(x) = x^2 + x + 1$$

ریشه ندارد! $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ وجود ریشه

گزینه ۳ اگر α و β ($\alpha < \beta$) را ریشه‌ها یا همان محل تلاقی سهمی با محور x ها فرض کنیم، بر اساس فرض تست $\beta - \alpha = 4$ بوده و نیز بر اساس

آنچه پیش‌تر اشاره کردیم $x_S = \frac{\alpha + \beta}{2}$ است: پس:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \xrightarrow[\text{قرار بده:}]{\text{با توجه به } \beta - \alpha = 4} \alpha + (\alpha + 4) = 2$$

$$\Rightarrow 2\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -1 \xrightarrow{\beta = \alpha + 4} \beta = 3$$

بنابراین با توجه به ریشه‌های $\alpha = -1$ و $\beta = 3$ ، معادله‌ی سهمی به صورت $y = a(x+1)(x-3)$ قابل بیان است. برای تعیین پارامتر a کافی است مختصات رأس $S(1,1)$ را در آن صدق دهیم:

$$1 = a(1+1)(1-3) \Rightarrow a = \frac{-1}{4} \Rightarrow y = \frac{-1}{4}(x+1)(x-3)$$

۵۴۸. گزینه ۳ محیط یا پیرامون زمین از دوتا طول مستطیل $(2a)$ و دوتا محیط نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{b}{2}$ ، $\frac{b}{2} \times \pi \left(\frac{b}{2}\right) = \pi b$ تشکیل شده است:

$$2a + \pi b = 600 \xrightarrow{\pi \approx 3} 2a + 3b = 600$$

از طرفی مساحت قسمت مستطیل شکل زمین تنیس برابر است با: $S = ab$ حال برای این که تابع مساحت مستطیل را فقط بر حسب یک پارامتر (مثلاً b) بنویسیم، کافی است از رابطه‌ی $2a + 3b = 600$ مقدار a را بر حسب b یافته و در تساوی $S = ab$ جای‌گذاری کنیم:

$$2a + 3b = 600 \Rightarrow 2a = 600 - 3b \xrightarrow{+2} a = 300 - \frac{3}{2}b$$

$$\Rightarrow S = ab = \left(300 - \frac{3}{2}b\right)b \Rightarrow S = -\frac{3}{2}b^2 + 300b$$

$$\xrightarrow{\text{برای حداکثر شدن } S} b = \frac{-300}{2(-\frac{3}{2})} = \frac{300}{3} = 100 \text{ m} \Rightarrow a = 300 - \frac{3}{2}(100)$$

$$\Rightarrow a = 150 \text{ m} \Rightarrow S_{\max} = 150 \text{ m} \times 100 \text{ m} = 15000 \text{ m}^2$$

زنگی: هنگامی که جمع دو عبارت مثبت مقداری ثابت است $(2a + 3b = 600)$ ، ضرب آن‌ها (یعنی $2a \times 3b = 6ab$) و در نتیجه ab زمانی ماکزیمم می‌شود که آن عبارت‌ها سهم یکسانی از جمع داشته باشند: پس:

$$2a = 300 \Rightarrow a = 150 \text{ m}$$

$$3b = 300 \Rightarrow b = 100 \text{ m}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 150 \text{ m} \times 100 \text{ m} = 15000 \text{ m}^2$$

حالا به نظر شما در این سؤال حداکثر مساحت کل زمین تنیس چند متر مربع است؟

۵۴۹. گزینه ۲ از آنجا که α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 1 = 0$ هستند، داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

از طرفی برای محاسبه‌ی مقدار عبارت داده‌شده، کار را با مخرج مشترک‌گیری شروع کرده و:

$$A = \frac{1}{(\alpha - 2)^2} + \frac{1}{(\beta - 2)^2} = \frac{(\beta - 2)^2 + (\alpha - 2)^2}{((\alpha - 2)(\beta - 2))^2}$$

با توجه به برابری $A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB$ داریم:

$$A = \frac{9\beta^2 - 12\beta + 4 + 9\alpha^2 - 12\alpha + 4}{(9\alpha\beta - 6\alpha - 6\beta + 4)^2}$$

$$= \frac{9(\beta^2 + \alpha^2) - 12(\beta + \alpha) + 8}{(9p - 6s + 4)^2} = \frac{9(s^2 - 2p) - 12s + 8}{(9p - 6s + 4)^2}$$

$$\xrightarrow{S=5, P=1} \frac{9(25-2) - 12(5) + 8}{(9-6(5)+4)^2} = \frac{207-60+8}{(-17)^2} = \frac{155}{289}$$

گزینه ۲ می‌دانیم اگر $S = \alpha + \beta$ مجموع و $P = \alpha\beta$ حاصل ضرب

ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دوم باشد، آن معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود. در اینجا داریم:

$$\begin{cases} \alpha = (\sqrt{3}-1)^2 \\ \beta = (\sqrt{3}+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P = \alpha\beta = (\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}+1)^2 = ((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1))^2 \\ = (3-1)^2 = 2^2 = 4 \end{cases} \quad (\text{حذف گزینه های «۳» و «۴»})$$

(حذف گزینه‌ی «۱») $S = \alpha + \beta = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2 > 0$ زیرا مجموع دو ریشه برابر -56 است.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{اتحادها رو بازنویسی}} (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \\ & = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) = 56 \xrightarrow{+2} \alpha^2 + \beta^2 = 28 \\ & \Rightarrow S^2 - 2P = 28 \xrightarrow[\substack{S=b \\ P=-3b^2}]{S=b} b^2 + 6b^2 = 28 \Rightarrow 7b^2 = 28 \\ & \xrightarrow{+7} b^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذر}} b = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ \text{یا} \\ b=-2 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} b=2: f(x) = x^2 - 2x - 12 \xrightarrow[\text{تقارن}]{\text{محور}} x_S = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \\ \text{یا} \\ b=-2: f(x) = x^2 + 2x - 12 \xrightarrow[\text{تقارن}]{\text{محور}} x_S = \frac{-(2)}{2(1)} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

۵۵۶. گزینه ۳ باید دلتای معادله بزرگتر از صفر باشد:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 6^2 - 4(2m-1)(m-2) > 0 \\ & \xrightarrow{+(-4)} -9 + (2m-1)(m-2) < 0 \\ & \Rightarrow -9 + 2m^2 - 4m - m + 2 < 0 \Rightarrow \frac{2m^2 - 5m - 7}{a+c=b} < 0 \\ & \xrightarrow{m=-1, \frac{7}{2}} -1 < m < \frac{7}{2} = 3.5 \Rightarrow -1 < m < 3.5 \end{aligned}$$

۵۵۷. گزینه ۲ با انتخاب $x^2 + x = t$ داریم:

$$\begin{aligned} t^2 - 32t + 240 &= 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (t-20)(t-12) = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} t=20 \Rightarrow x^2 + x = 20 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \\ t=12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

در هر دو معادله‌ی درجه‌ی دوم، $\frac{c}{a} < 0$ بوده و هر دو معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارند پس:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + x - 20 = 0 \xrightarrow{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}} P_1 = \frac{c}{a} = -20 \\ x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}} P_2 = \frac{c}{a} = -12 \end{cases} \\ \Rightarrow \text{حاصل ضرب کل ریشه‌ها} = (-20)(-12) = 240 \end{aligned}$$

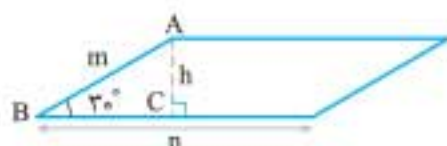
۵۵۸. گزینه ۲ می‌دانیم که در سهمی به معادله‌ی $y = a(x-h)^2 + k$ مختصات رأس سهمی، $S(h, k)$ است. در شکل داده‌شده مختصات رأس به صورت $S(1, -2)$ است: در نتیجه:

$$h=1, k=-2 \Rightarrow y = a(x-1)^2 - 2$$

از طرفی نقطه‌ای به مختصات $(-1, 0)$ روی سهمی قرار دارد:

$$\begin{aligned} 0 &= a(-1-1)^2 - 2 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ & \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 \xrightarrow{\text{اتحادها رو بازنویسی}} y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - 2 \\ & \xrightarrow{\text{این فرم توگزینه‌ها نیست!}} \\ & \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} \checkmark \end{aligned}$$

۵۵۹. گزینه ۳ با توجه به شکل رسم‌شده، $m+n=11$ و مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $S = nh$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:



$$\xrightarrow{\text{این فرم توگزینه‌ها دیده نمی‌شه پس به ساده کردن ادامه بده}} y = \frac{-1}{4}(x^2 - 2x - 3) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

۵۵۲. گزینه ۱. روش اول رابطه‌ی $c = a + b$ بین ضرایب معادله‌ی $ax^2 - bx - c = 0$ به معنای این است که $x = -1$ ریشه‌ی آن است (زیرا $(a(-1))^2 - b(-1) - c = 0 \Rightarrow a + b = c$ به همین ترتیب رابطه‌ی $2b = 4a - c$ به معنای این است که $x = 2$ ریشه‌ی معادله است (زیرا $(a(2))^2 - b(2) - c = 0 \Rightarrow 4a - c = 2b$ بنابراین $x = 2$ و $x = -1$ ریشه‌های معادله هستند و داریم:

$$\text{مجموع توان سوم ریشه‌های معادله} = (-1)^3 + (2)^3 = -1 + 8 = 7$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c = a + b \\ 2b = 4a - c \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} c = a + b \\ c = 4a - 2b \end{cases} \\ & \Rightarrow a + b = 4a - 2b \Rightarrow 3a = 3b \Rightarrow a = b \end{aligned}$$

بنابراین $c = 2a$ پس معادله برابر است با:

$$\begin{aligned} ax^2 - bx - c &= 0 \Rightarrow ax^2 - ax - 2a = 0 \xrightarrow{+a} x^2 - x - 2 = 0 \\ & \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \end{aligned}$$

بنابراین مجموع توان سوم ریشه‌های معادله، برابر ۷ است.

$$\begin{aligned} \begin{cases} c = a + b \\ 2b = 4a - c \end{cases} & \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 2 \end{aligned}$$

زنگی: این جوری فرض کن:

یعنی سه عددی که شرایط تست را دارند: خوب:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2SP = (1)^2 - 2(1)(-2) = 7$$

۵۵۴. گزینه ۲

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x} \geq 0} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

با انتخاب $t = \sqrt{x}$ و چون $\sqrt{x}$ همواره نامنفی است، برای این که معادله‌ی اصلی دارای یک جواب باشد، باید معادله‌ی $mt^2 - 3t + m - 2 = 0$ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد.

شرط دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

توجه: اگر $\Delta = 0$ و $\frac{-b}{a} > 0$ باشد، در این صورت معادله یک ریشه دارد که در گزینه‌ها منظور نشده است.

$$\begin{aligned} \Delta = 0 & \Rightarrow 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 9 = 0 \\ & \Rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{208}}{2 \times 4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{13}}{8} \\ & \Rightarrow m = 1 \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \quad 1 \\ & \frac{-b}{a} = \frac{3}{m} > 0 \Rightarrow m > 0 \quad 2 \end{aligned}$$

$$1 \cap 2 \Rightarrow m = 1 + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

بنابراین پاسخ درست به صورت $m \in (0, 2) \cup \{1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\}$ است.

۵۵۵. گزینه ۱ نمودار تابع داده‌شده یک سهمی است و می‌دانیم که هر

سهمی نسبت به محور تقارن خود (یعنی خط $x_S = \frac{-b}{2a}$) قرینه است.

بنابراین ابتدا رابطه‌ی داده‌شده بین صفرهای تابع را به یک رابطه‌ی سراسرتر تبدیل می‌کنیم: سپس محورهای تقارن نمودار تابع را به دست می‌آوریم:

$$(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 56$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-b)}{1} = b, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{r^2+1}{r^2} = 1 + \frac{1}{r^2} \\ \frac{1}{\beta^2} = \frac{r^2-1}{r^2} = 1 - \frac{1}{r^2} \end{cases} \xrightarrow{(+)} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = 2 \Rightarrow \frac{b^2 - 2(3)}{(3)^2} = 2$$

$$\Rightarrow b^2 = 18 + 6 = 24 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{6}$$

۵۶۳. گزینه ۴ اگر ریشه‌ی بزرگ‌تر را α و ریشه‌ی کوچک‌تر را β بنامیم و فرض کنیم که α ، k واحد از β بیشتر است. آن‌گاه $\alpha = \beta + k$ یا $\alpha - \beta = k$ یعنی برای یافتن k باید تفاضل دو ریشه را بیابیم. از طرفی یک راه برای یافتن

تفاضل دو ریشه، استفاده از دستور $\alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است. بنابراین:

$$\frac{(\sqrt{2}+1)x^2 - \sqrt{5}x + (\sqrt{2}-1)}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-\sqrt{5})^2 - 4(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 5 - 4(1) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1}}{|\sqrt{2}+1|} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\xrightarrow{\text{مویای}} \frac{1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \alpha = \beta + (\sqrt{2}-1)$$

در نتیجه ریشه‌ی α از ریشه‌ی β به اندازه‌ی $\sqrt{2}-1$ واحد بیشتر است.

۵۶۴. گزینه ۱ ابتدا از روی ضرایب معادله‌ی داده‌شده مقادیر S و P آن را به دست می‌آوریم:

$$ax^2 + bx - c = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad P = \alpha\beta = \frac{-c}{a}$$

حالا با توجه به این مقادیر و نیز ریشه‌های معادله‌ی مطلوب یعنی $\frac{-1}{\alpha}$ و $\frac{-1}{\beta}$ و S' و

P' معادله‌ی خواسته‌شده را یافته و از دستور $x^2 - S'x + P' = 0$ کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} S' = \frac{-1}{\alpha} + \frac{-1}{\beta} = \frac{-\beta - \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{-(-\frac{b}{a})}{\frac{-c}{a}} = \frac{b}{c} \\ P' = (\frac{-1}{\alpha})(\frac{-1}{\beta}) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{-c}{a}} = -\frac{a}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{c}x - \frac{a}{c} = 0 \xrightarrow{\times c} cx^2 + bx - a = 0$$

۵۶۵. گزینه ۴ شرط وجود دو ریشه‌ی متمایز مثبت در معادله‌ی درجه‌ی

$$\Delta > 0, \quad 1, \quad S > 0, \quad P > 0$$

دوم عبارت است از:

اما در اینجا داریم:

$$x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2(a-2) \\ C = 14 - a \end{cases}$$

$$1) \Delta = B^2 - 4AC = 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0$$

$$\xrightarrow{+4} a^2 - 4a + 4 - 14 + a > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$$

$$\Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{جنول تعیین علامت}} \begin{cases} a < -2 \\ \text{یا} \\ a > 5 \end{cases}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{m} \xrightarrow{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} h = \frac{1}{2}m$$

$$S = nh = n(\frac{1}{2}m) \Rightarrow S = \frac{1}{2}mn \xrightarrow[\text{قرار دهنده: } n=11-m]{\text{از شرط } m+n=11}$$

$$S = \frac{1}{2}m(11-m) = \frac{11m}{2} - \frac{1}{2}m^2 \xrightarrow{\text{مرتبه کن}} S = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{11}{2}m$$

نمودار تابع مساحت متوازی‌الاضلاع، معادله‌ی یک سهمی است و زمانی بیشترین

$$\text{مقدار خود را اختیار می‌کند که } m = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{11}{2}}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{11}{2}$$

$$S_{\max} = S(\frac{11}{2}) = -\frac{1}{2}(\frac{121}{4}) + \frac{11}{2}(\frac{11}{2}) = -\frac{1}{8}(121) + \frac{1}{4}(121) = \frac{1}{8} \times 121$$

ز رنگی: هرگاه مجموع دو عدد مثبت مقداری ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها موقعی ماکزیمم است که آن عبارت‌ها سهم یکسانی از جمع داشته باشند. بنابراین:

$$S = mn \sin \theta \xrightarrow{\theta=90^\circ} S = mn \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}mn$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی}} a+b=11 \xrightarrow{\text{طبق مطالب گفته شده}} a=b=\frac{11}{2}$$

$$\xrightarrow{2} \max(S) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{121}{8}$$

۵۶۰. گزینه ۴ طول طناب به کار رفته برای محصور کردن این سطح برابر

$$y + x + x + \text{محیط نیم دایره} = 70 \Rightarrow y + 2x + \frac{2\pi x}{2} = 70$$

$$\xrightarrow{\pi \approx 3} y + 2x + 3x = 70 \Rightarrow y + 5x = 70 \Rightarrow y = 70 - 5x$$

از طرفی مساحت ایجادشده برابر است با:

$$S = \underbrace{xy}_{\text{برای مستطیل}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\pi x^2)}_{\text{برای نیم دایره}} \xrightarrow{(\pi \approx 3)} S = xy + \frac{3}{2}x^2$$

$$\xrightarrow{2} S = x(70 - 5x) + \frac{3}{2}x^2 = 70x - 5x^2 + \frac{3}{2}x^2 = -\frac{7}{2}x^2 + 70x$$

حالا برای این که به بیشترین مقدار ممکن برای تابع مساحت (که نمودار آن یک

سهمی است) برسیم، باید مقدار x را برابر $x = \frac{-b}{2a}$ انتخاب کنیم:

$$S = -\frac{7}{2}x^2 + 70x \Rightarrow x = \frac{-70}{2(-\frac{7}{2})} = 10 \text{ m}$$

$$\Rightarrow S = -\frac{7}{2}(100) + 70(10) = 350 \text{ m}^2$$

۵۶۱. گزینه ۴ اگر α و β ریشه‌های این معادله باشند، طبق فرض داریم:

$$ax^2 - x + a = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow P = 4S \xrightarrow{P=1, S=\frac{1}{4}} 1 = 4 \times \frac{1}{a} \Rightarrow a = 4$$

اما به ازای $a = 4$ ، دلتای معادله منفی بوده و معادله فاقد ریشه است:

$$\Delta = 1 - 4a^2 \xrightarrow{a=4} \Delta = 1 - 16 < 0$$

بنابراین هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۵۶۲. گزینه ۱ با فرض $\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$ و $\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2-1}}$ به عنوان ریشه‌های

معادله‌ی $x^2 - bx + 3 = 0$ می‌توان نوشت:

۵۶۸. گزینه ۲ می‌دانیم که در سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است، پس در این تست داریم:

$$y = x^2 + bx + 8 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2 \times 1} = 3 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 8$$

$$\xrightarrow{\text{تقاطع با محور } x} x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

که فقط $x = 2$ در گزینه‌ها آمده است.

۵۶۹. گزینه ۱

$$-x^2 + 8x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 8 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha, \beta > 0$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{8}{\sqrt{-1}} = 8$$

۵۷۰. گزینه ۴ در معادله‌ی $x^2 + x - 5 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \\ p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -5 \end{cases}$$

اگر S و P به ترتیب جمع و ضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید باشند، آن‌گاه:

$$S = \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{s^2 - 2p}{p} - 2 = \frac{(-1)^2 - 2(-5)}{-5} - 2 = -\frac{11}{5} - 2 = -\frac{21}{5}$$

$$P = \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) = 1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = 2 - \frac{21}{5} = -\frac{11}{5}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{21}{5}\right)x + \frac{21}{5} = 0 \Rightarrow 5x^2 + 21x + 21 = 0$$

۵۷۱. گزینه ۲ ابتدا مخارج مشترک می‌گیریم: سپس تعداد جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0 \Rightarrow \frac{3 - 12x^2}{x^2} = 0 \xrightarrow{\text{صورت مساوی صفر قرار دهیم}} 3 - 12x^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جذب کنیم}} 3 = 12x^2 \xrightarrow{\div 12} x^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{جذب کنیم}} x = \pm \frac{1}{2}$$

دوتا تعداد جواب‌ها - مخارج را صفر نمی‌کند - چک کردن در مخارج

۵۷۲. گزینه ۱

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2} \xrightarrow{\text{همه رویاراست چپ}} \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} + \frac{12}{x^2-9} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیریم}} \frac{3(x^2-9) - 2x(x-3) + 12x}{x(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کنیم}} \frac{3x^2 - 27 - 2x^2 + 6x + 12x}{x(x-3)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x - 27}{x(x-3)(x+3)} = 0 \xrightarrow{\text{صورت مساوی صفر قرار دهیم}} x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کنیم}} (x+9)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+9=0 \Rightarrow x=-9 \xrightarrow{\text{چک کردن در مخارج}} \text{مخرج را صفر نمی‌کند} \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{\text{چک کردن در مخارج}} \text{مخرج را صفر می‌کند} \end{cases}$$

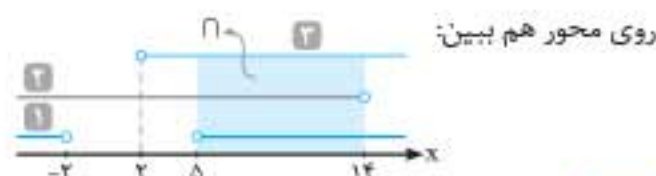
بنابراین معادله‌ی موردنظر فقط یک جواب دارد.

$$P = \frac{C}{A} = \frac{14-a}{1} > 0 \Rightarrow 14-a > 0 \Rightarrow a < 14$$

$$S > 0 \Rightarrow S = \frac{-B}{A} = 2(a-2) > 0 \Rightarrow a-2 > 0 \Rightarrow a > 2$$

و جواب تست از اشتراک هر سه نامعادله به دست می‌آید، یعنی:

$$1 \cap 2 \cap 3 \Rightarrow 2 < a < 14$$



زنگی:

حذف گزینه‌های «۲» و «۳» $\Delta = (4-24) < 0$ ریشه ندارد

حذف گزینه‌ی «۱» $\Delta = (16-56) < 0$ ریشه ندارد

۵۶۶. گزینه ۲. روش اول با توجه به اطلاعات داده‌شده متوجه می‌شویم که ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو $3x^2 + bx + c = 0$ برابر ۳ و ۵ هستند پس با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌ها داریم:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -3 + 5 = -\frac{b}{3} \Rightarrow b = -6 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (-3)(5) = \frac{c}{3} \Rightarrow c = -45 \end{cases}$$

پس معادله‌ی سهمی به صورت $y = 3x^2 - 6x - 45$ بوده و می‌دانیم که کمترین مقدار این تابع همان عرض رأس سهمی است، پس:

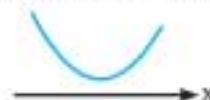
$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \times 3} = 1 \Rightarrow y_s = f(1) = 3(1)^2 - 6 \times 1 - 45 = -48$$

روش دوم می‌دانیم که اگر x_1 و x_2 صفرهای سهمی $y = ax^2 + bx + c$ باشند، می‌توان سهمی را به صورت $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ نیز در نظر گرفت، پس در این تست معادله‌ی سهمی داده‌شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = 3x^2 + bx + c = 3(x - (-3))(x - 5) = 3(x^2 - 2x - 15) = 3x^2 - 6x - 45$$

$$\Rightarrow \min = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4(3)(-45)}{4 \times 3} = -\frac{4 \times 3(3 + 45)}{4 \times 3} = -48$$

۵۶۷. گزینه ۲ با توجه به فرضیات تست، شکل سهمی می‌بایست به صورت مقابل باشد:



$$\xrightarrow{\text{شرط را بنویس}} \begin{cases} a > 0 \Rightarrow 2m + 3 > 0 \Rightarrow m > -\frac{3}{2} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4(2m+3)(m) < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+(-4)} 2m^2 + 3m - 9 > 0 \Rightarrow (2m-3)(m+3) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} m < -3 \\ \text{یا} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$1 \cap 2 \Rightarrow m > \frac{3}{2}$$

$$m = 1 \Rightarrow y = (2(1) + 3)x^2 + 6x + 1 = 5x^2 + 6x + 1$$

$\Delta > 0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز و بین دو ریشه، منفی

حذف گزینه‌های «۳» و «۴» که شامل ۱ هستند.

$$m = -1 \Rightarrow y = (2(-1) + 3)x^2 + 6x - 1 = x^2 + 6x - 1$$

$\Delta > 0$ حذف گزینه‌ی «۱» که شامل -۱ است

زنگی: